

El porcentaje del sobrepaso está dado por

$$\begin{aligned} \text{porcentaje del sobrepaso} &= \exp a \frac{-z p}{2 \sqrt{1 - z^2}} b * 100\% \\ &= \exp a \frac{-0.44 p}{2 \sqrt{1 - 0.44^2}} b * 100\% \end{aligned}$$

El porcentaje de sobrepaso es entonces 21%. El 2% del tiempo de asentamiento está dado por

$$t_s = \frac{4}{z v_n} = \frac{4}{0.44 * 2.0} = 4.5 \text{ s}$$

El número de oscilaciones que ocurren dentro de 2% del tiempo de asentamiento está dado por

$$\text{número de oscilaciones} = \frac{z}{p} \frac{A}{2} - 1 = \frac{1.2}{0.44} - 1 = 1.3$$

19.6

Identificación de sistemas

En los Capítulos 17 y 18 se diseñaron modelos para sistemas considerándolos como formados por elementos sencillos. Una forma alternativa para desarrollar un modelo para un sistema real es hacer pruebas para determinar la respuesta debida a una entrada, por ejemplo una entrada escalón, y luego encontrar un modelo que se ajuste a la respuesta. Este proceso para determinar el modelo matemático se conoce como **identificación de sistemas**. De esta manera, si se obtiene una respuesta a una entrada escalón de la forma mostrada en la Figura 19.5, entonces se podría suponer que es un sistema de primer orden y determinar la constante de tiempo a partir de la curva de respuesta. Por ejemplo, suponga que a la respuesta toma 1.5 s para alcanzar 0.63 de la altura final y que la altura final es 5 veces la magnitud de la entrada escalón. En la Tabla 19.1 se indica una constante de tiempo de 1.5 s y la ecuación diferencial que describe el modelo es

$$1.5 \frac{dx}{dt}$$

Un sistema de segundo orden subamortiguado dará una respuesta de la forma mostrada en la Figura 19.12. El factor de amortiguamiento relativo se puede determinar a partir de las mediciones del primero y segundo sobrepasos, donde el cociente de estos sobrepasos, es decir, el factor de decaimiento proporciona el factor de amortiguamiento relativo. La frecuencia libre se puede determinar a partir del tiempo entre sobrepasos sucesivos. Después se pueden usar estos valores para determinar las constantes en la ecuación diferencial de segundo orden.

Resumen

La **respuesta libre** de un sistema es cuando no hay entrada al sistema que fuerce a la variable a cambiar sino que sólo cambia de forma natural. La **respuesta forzada** de un sistema es cuando hay una entrada al sistema forzándolo a cambiar.

Un sistema de primer orden sin entrada forzada tiene una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

y ésta tiene la solución $x = e^{-a_0 t / a_1}$

Donde hay una **función forzada** la ecuación diferencial tiene la forma de

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

y la solución es $x =$ valor de estado estable $\cdot (1 - e^{-a_0 t/a_1})$

El **tiempo constante t** es el tiempo que tarda la salida en aumentar a 0.63 de su valor de estado estable y es (a_1/a_0) .

Un sistema de segundo orden con salida no forzada tiene una ecuación diferencial de la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La frecuencia natural está dada por $\omega_n = k/m$ y la constante de amortiguamiento por $z^2 = c^2/4mk$. El sistema es **sobreamortiguado** cuando se tiene $z > 1$ y la solución general para x_n es

$$x_n = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \text{ con } s = -z\omega_n \pm \omega_n \sqrt{z^2 - 1}$$

Cuando $z = 1$ el sistema es **críticamente amortiguado** y

$$x_n = (At + B) e^{-\omega_n t}$$

y con $z < 1$ el sistema es **subamortiguado** y

$$x_n = e^{-z\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \operatorname{sen} \omega t)$$

Cuando se tiene una entrada forzada F la ecuación diferencial de segundo orden se convierte en

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

y para el sistema sobreamortiguado

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + \frac{F}{k}$$

para el sistema críticamente amortiguado

$$x = (At + B) e^{-\omega_n t} + \frac{F}{k}$$

y para el sistema subamortiguado

$$x = e^{-z\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \operatorname{sen} \omega t) + \frac{F}{k}$$

El **tiempo de elevación t_r** es el tiempo que lleva a la respuesta x elevarse de 0 al estado de valor estable x_{SS} y es una medida de qué tan rápido un sistema responde a la entrada y está dada por $\omega t_r = 1.1 p$. El **tiempo pico t_p** es el tiempo que tarda la respuesta en elevarse de 0 al primer valor del pico y está dada por $\omega t_p = p$. El **sobrepaso** es la cantidad máxima mediante la cual la respuesta sobrepasa el valor de estado estable y es

$$\text{sobrepaso} = x_{SS} \exp a \frac{-z p}{\sqrt{1 - z^2}} b$$

La **razón de decaimiento** o **decremento** es la amplitud del segundo sobrepaso dividido entre el primer sobrepaso y es

$$\text{razón de decaimiento} = \exp\left(\frac{-2z_p}{2\sqrt{1-z^2}}\right) b$$

El **tiempo de asentamiento** t_s es el tiempo que tarda la respuesta para caer y permanecer dentro de algún porcentaje especificado, por ejemplo 2%, del valor de estado estable, el cual se da por

$$t_s = \frac{4}{z\sqrt{n}}$$

Problemas

- 19.1 La constante de tiempo de un sistema de primer orden es 4 s y el valor de la función de transferencia en estado estable es 6. ¿Qué forma tiene la ecuación diferencial del sistema?
- 19.2 La constante de tiempo de un termómetro de mercurio en tubo de vidrio es 10 s. Si en forma súbita se lleva de una temperatura de 20° C y se le sumerge en agua caliente a 80° C, ¿cuál será la temperatura que indique el termómetro después de a) 10 s, b) 20 s?

- 19.3 Un circuito consta de un resistor R en serie con un inductor L . Cuando en el tiempo $t = 0$ se le aplica un voltaje V de entrada tipo escalón, la ecuación diferencial del sistema es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V}{L}$$

Encuentre a) la solución de esta ecuación diferencial, b) la constante de tiempo, c) la corriente en estado estable i .

- 19.4 Describa cómo la salida de un sistema de segundo orden varía con el tiempo después de aplicarle una entrada tipo escalón; con un factor de amortiguamiento relativo de: a) 0, b) 0.5, c) 1.0 y d) 1.5.
- 19.5 Un circuito RLC tiene una corriente i que varía con el tiempo t cuando se somete a una entrada tipo escalón de magnitud V y está descrita por:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 16i = 16V$$

Determine a) la frecuencia no amortiguada, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la solución de la ecuación si $i = 0$ cuando $t = 0$ y $di/dt = 0$ cuando $t = 0$.

- 19.6 Un sistema tiene una salida x que varía con el tiempo t cuando se somete a una entrada tipo escalón y que está descrita por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 25x = 50y$$

Determine a) la frecuencia sin amortiguamiento, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la solución de la ecuación si $x = 0$ cuando $t = 0$ y $dx/dt = -2$ cuando $t = 0$ y hay una entrada tipo escalón de magnitud igual a 3 unidades.

- 19.7 Un acelerómetro (instrumento para medir la aceleración) tiene una frecuencia no amortiguada de 100 Hz y un factor de amortiguamiento relativo de 0.6. ¿Cuál será a) el sobrepaso máximo en porcentaje y b) el tiempo de elevación cuando se produce un cambio súbito en la aceleración?
- 19.8 Encuentre a) la frecuencia angular no amortiguada, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la frecuencia angular amortiguada, d) el tiempo de levantamiento, e) el sobrepaso máximo en porcentaje y f) el tiempo de asentamiento de 0.2% para un sistema que produce la siguiente ecuación diferencial cuando la entrada y es un escalón.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 16x = 16y$$

- 19.9 Cuando en forma súbita se aplica un voltaje de 10 V a un voltímetro con bobina móvil se observa que la aguja del instrumento alcanza una lectura de 11 V antes de disminuir y asentarse en una lectura de 10 V. Determine a) el factor de amortiguamiento relativo y b) el número de oscilaciones de la aguja antes de que esté dentro de 0.2% de su valor de estado estable.
- 19.10 Un sistema de segundo orden está descrito mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + 4x = F$$

- ¿Cuál es el valor de la constante de amortiguamiento c que se necesitará si el sobrepaso debe ser menor que 9.5%?
- 19.11 Al observar las oscilaciones producidas por un sistema amortiguado al responder a una entrada se ve que el desplazamiento máximo durante el segundo ciclo es 75% del desplazamiento en el primer ciclo. ¿Cuál es el factor de amortiguamiento del sistema?
- 19.12 Se tiene un sistema de segundo orden que tiene un tiempo entre el primer y segundo sobrepasos de 1.6 s. ¿Cuál es la frecuencia libre del sistema?

Objetivos

Después de estudiar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Definir la función de transferencia y determinarla a partir de ecuaciones diferenciales para los sistemas de primer y segundo orden.
- Determinar las funciones de transferencia para sistemas con lazos de retroalimentación.
- Determinar, mediante el uso de las transformadas de Laplace, las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden para entradas sencillas.
- Determinar el efecto de la ubicación de los polos en las respuestas de sistemas.

20.1

La función de transferencia

En relación con los sistemas de amplificadores es común hablar de la **ganancia** del amplificador. La ganancia indica qué tan grande es la señal de salida respecto de la señal de entrada; permite determinar la salida para entradas específicas. Por ejemplo, si a un amplificador con ganancia en voltaje de 10 se le suministra un voltaje de entrada de 2 mV, la salida será 20 mV; si la entrada es 1 V, la salida será 10 V. La ganancia establece la relación matemática entre la salida y la entrada de un bloque. Se puede indicar cuando una señal está en el dominio del tiempo, es decir es una función del tiempo, al escribirla como $f(t)$. Así, para una entrada de $y(t)$ y una salida de $x(t)$, (Figura 20.1a),

$$\text{Ganancia} = \frac{\text{salida}}{y(t)}$$

Sin embargo, para muchos sistemas la relación entre la salida y la entrada adopta la forma de una ecuación diferencial, por lo que no es posible expresar la función sólo como un número y decir, por ejemplo, que tiene una ganancia de 10. No es posible dividir la salida entre la entrada, porque la relación es una ecuación diferencial y no una algebraica. Sin embargo, la ecuación diferencial se puede transformar en una ecuación algebraica utilizando lo que se conoce como **transformada de Laplace**. Las ecuaciones diferenciales describen el comportamiento de los sistemas en función del tiempo y la transformada de Laplace las convierte en ecuaciones algebraicas sencillas que no incluyen el tiempo y en las cuales se pueden llevar a cabo manipulaciones algebraicas de las cantidades. Se dice que el comportamiento en el **dominio del tiempo** se transforma en el **dominio de s**. Cuando está en el dominio de s , dado que es función de s , se expresa como $F(s)$. Es común utilizar una letra F mayúscula para indicar una transformada de Laplace y una f minúscula para indicar una función que varía con el tiempo $f(t)$.

Así es posible definir la relación entre la salida y la entrada en términos de una **función de transferencia**. Ésta define la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada. Suponga

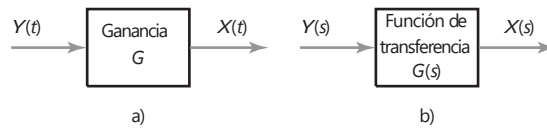
que la entrada a un sistema lineal tiene la transformada de Laplace de $Y(s)$ y la transformada de Laplace para la salida es $X(s)$. La función de transferencia $G(s)$ del sistema queda entonces definida como:

$$\text{función de transferencia} = \frac{\text{transformada de Laplace de la salida}}{\text{transformada de Laplace de la entrada}}$$

$$\frac{X(s)}{Y(s)}$$

con todas las condiciones iniciales iguales a cero; es decir, se supone que la salida es cero cuando la entrada es cero, una razón de cambio de la salida en el tiempo de cero cuando la razón de cambio de la entrada en el tiempo también es cero. Por lo tanto, la transformada de salida es $X(s) = G(s)Y(s)$; es decir, es el producto de la transformada de entrada y de la función de transferencia. Si el sistema se representa por un diagrama de bloques (Figura 20.1), entonces $G(s)$ es la función en la caja que recibe una entrada $Y(s)$ y la convierte en una salida $X(s)$.

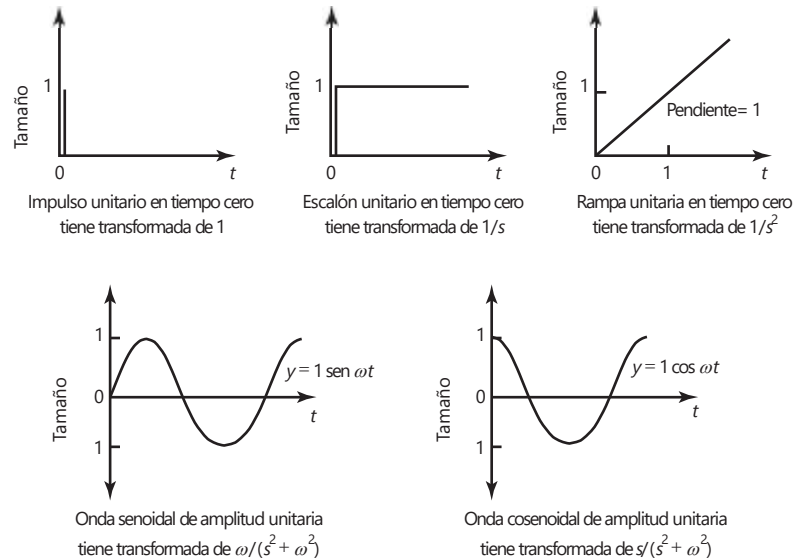
Figura 20.1 Diagramas de bloques: a) en dominio del tiempo, b) en dominio de s .



20.1.1 Transformadas de Laplace

Para obtener la transformada de Laplace de una ecuación diferencial que incluye magnitudes que son funciones de tiempo, se puede recurrir a tablas y aplicar algunas reglas básicas (el apéndice A contiene esta tabla y detalles sobre las reglas). La Figura 20.2 muestra las transformadas básicas para algunas formas comunes de entradas.

Figura 20.2 Transformadas de Laplace para entradas comunes.



Las siguientes son algunas reglas básicas que se aplican cuando se trabaja con transformadas de Laplace:

- 1 Si una función de tiempo se multiplica por una constante, la transformada de Laplace también se multiplica por la misma constante, es decir,

$$af(t) \text{ tiene la transformada de } aF(s)$$

Por ejemplo, la transformada de Laplace de una entrada tipo escalón de 6 V a un sistema eléctrico es 6 veces la transformada de un escalón unitario, es decir 6s.

- 2 Si una ecuación incluye la suma de, por ejemplo, dos cantidades independientes y ambas son funciones de tiempo, la transformada de la ecuación será la suma de cada una de las dos transformadas de Laplace, esto es

$$f(t) + g(t) \text{ tiene la transformada } F(s) + G(s)$$

- 3 La transformada de Laplace de la primera derivada de una función es

$$\text{transformada de } \frac{d}{dt} f(t) = sF(s) - f(0)$$

donde $f(0)$ es el valor inicial de $f(t)$ cuando $t = 0$. Sin embargo, cuando se trata de una función de transferencia todas las condiciones iniciales son cero.

- 4 La transformada de Laplace de la segunda derivada de una función es

$$\text{transformada de } \frac{d^2}{dt^2} f(t) = s^2F(s) - sf'(0) - \frac{d}{dt} f(0)$$

donde $df(0)/dt$ es el valor inicial de la primera derivada de $f(t)$ cuando $t = 0$. Sin embargo, cuando se trata de funciones de transferencia todas las condiciones iniciales son cero.

- 5 La transformada de Laplace de la integral de una función es

$$\text{transformada de } \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{s} F(s)$$

Así, para obtener las transformadas de ecuaciones diferenciales o integrales cuando todas las condiciones iniciales son cero:

se reemplaza una función de tiempo $f(t)$ por $F(s)$,

se reemplaza una primera derivada $df(t)/dt$ por $sF(s)$,

se reemplaza una segunda derivada $d^2f(t)/dt^2$ por $s^2F(s)$,

se reemplaza una integral $\int_0^t f(\tau) d\tau$ por $F(s)/s$.

Cuando se han realizado manipulaciones algebraicas en el dominio de s , es posible volver a transformar el resultado al dominio de tiempo utilizando la tabla de transformadas de manera inversa es decir, buscando la función en el dominio del tiempo que corresponde al resultado en el dominio de s . Es posible que se necesite reordenar la transformada para que tenga la misma forma que aparece en la tabla. Las siguientes son algunas inversiones útiles de este tipo. En la tabla del apéndice A podrá consultar otras más.

Transformada de Laplace Función de tiempo

$$1 \quad \frac{1}{s + a}$$

$$e^{-at}$$

$$2 \quad \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$1 - e^{-at}$$

$$\begin{array}{ll}
 3 \frac{b-a}{1s+a_1s+b_2} & e^{-at} - e^{-bt} \\
 4 \frac{s}{1s+a_2^2} & 1 - at_2e^{-at} \\
 5 \frac{a}{s^21s+a_2} & t - \frac{1-e^{-at}}{a}
 \end{array}$$

En las siguientes secciones se ilustra la aplicación de lo anterior en sistemas de primer y segundo orden.

20.2

Sistemas de primer orden

Considere un sistema donde la relación entre la entrada y la salida está representada por una ecuación diferencial de primer orden, que es de la forma

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y$$

donde a_1 , a_0 y b_0 son constantes, y es la entrada y x la salida, ambas funciones de tiempo. La transformada de Laplace, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero, es

$$a_1sX1s^2 + a_0X1s^2 = b_0Y1s^2$$

y entonces, la función de transferencia $G(s)$ se expresa como

$$\frac{X1s^2}{Y1s^2} = \frac{b_0}{a_1s + a_0}$$

Al reordenar la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{b_0/a_1}{1 + a_0/a_1s} = \frac{G}{ts + 1}$$

donde G es la ganancia del sistema cuando se dan condiciones de estado permanente, es decir no tiene término dx/dt . La constante de tiempo t del sistema es (a_1/a_0) (sección 19.2.3).

20.2.1 Sistema de primer orden con entrada tipo escalón

Cuando un sistema de primer orden está sujeto a una entrada de tipo escalón unitario, $Y(G1s^2)1s^2$ la transformada de salida $X(s)$ es

$$\begin{aligned}
 &= G \frac{11 \cdot t_2}{s1s + 1 \cdot t_2} \\
 &= G \frac{1 - e^{-t/t_2}}{s}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como la transformada tiene la forma $a/s(s+a)$, al usar la segunda transformada inversa de la lista de la sección anterior se obtiene

$$x = G(1 - e^{-t/t_2})$$

20.2.2 Ejemplos de sistemas de primer orden

Los siguientes ejemplos ilustran los puntos anteriores, al considerar la función de transferencia de un sistema de primer orden y observar su comportamiento cuando se somete a una entrada de tipo escalón:

- 1 Considere un circuito que tiene un resistor R en serie con un capacitor C . La entrada del circuito es v y la salida es la diferencia de potencial en el capacitor v_C . La ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida es:

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Determine la función de transferencia.

Al tomar la transformada de Laplace y si se supone que todas las condiciones iniciales son cero, entonces

$$V1s^2 = RCsV_C1s^2 + V_C1s^2$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$\frac{V_C1s^2}{V1s^2} = \frac{1}{RCs + 1}$$

- 2 Considere un termopar cuya función de transferencia que relaciona la salida de voltaje V con la entrada de temperatura es

$$\frac{V/^\circ\text{C}}{210s + 1116}$$

Determine la respuesta del sistema cuando está sujeta a una entrada de tipo escalón de magnitud 100°C y, por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar a 95% del valor de estado estable.

Puesto que la transformada de la salida es igual al producto de la función de transferencia y la transformada de la entrada, entonces

$$V1s^2 = G1s^2 * \text{input}1s^2$$

La entrada escalón de 100°C , es decir, la temperatura del termopar aumenta en forma abrupta en 100°C , es $100/s$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{100}{210s + 1116} * \frac{100}{s} = \frac{10000}{s(210s + 1116)} \\ & = 30 * 10^{-4} \frac{0.1}{s1s + 0.12} \end{aligned}$$

El elemento fraccionario es de la forma $a/s(s + a)$, por lo que su transformada inversa es

$$V = 30 * 10^{-4} * 11 * e^{-0.1t} 2V$$

El valor final, es decir el valor de estado estable, se alcanza cuando $t \rightarrow \infty$, y es cuando el término exponencial es cero. El valor final es entonces $30 * 10^{-4} V$. De esta manera, el tiempo para alcanzar 95% está expresado por:

$$0.95 * 30 * 10^{-4} = 30 * 10^{-4} * 11 * e^{-0.1t} 2$$

Por lo tanto, $0.05 = e^{-0.1t}$ y $\ln 0.05 = -0.1t$. Entonces el tiempo es 30 s.

- 3 Suponga que el sistema anterior del termopar está sujeto a una entrada de tipo rampa de $5t$ °C/s; es decir, la temperatura se eleva 5 °C cada segundo. Determine cómo varía el voltaje del termopar con el tiempo y cuál es el voltaje después de 12 s.

La transformada de la señal tipo rampa es $5/s^2$. Por lo tanto,

$$\frac{5}{s^2} * \frac{0.1}{s + 0.1} = 150 * 10^{-6} \frac{0.1}{s + 0.1}$$

La transformada se obtiene usando el elemento 5 de la lista presentada en la sección anterior. Por lo tanto,

$$\frac{0.1}{s + 0.1} b$$

Después de un tiempo de 12 s se tiene $V = 7.5 * 10^{-4}$ V.

- 4 Considere una entrada de tipo impulso de magnitud 100 °C; es decir, el termopar se somete a un aumento de temperatura momentáneo de 100 °C. Determine cómo varía el voltaje del termopar en función del tiempo y cuánto vale el voltaje después de 2 s.

La transformada del impulso es igual a 100. Por lo tanto,

$$\frac{100}{s} * \frac{0.1}{s + 0.1} = 100 * \frac{0.1}{s + 0.1}$$

Por lo tanto, $V = 3 * 10^{-4} e^{-0.1t}$ V. Después de 2 s, el voltaje del termopar es $V = 1.8 * 10^{-4}$ V.

20.3

Sistemas de segundo orden

Para un sistema de segundo orden, la relación entre la entrada y , y la salida x está representada por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y$$

donde a_2 , a_1 , a_0 y b_0 son constantes. La transformada de Laplace de esta ecuación, cuando todas las condiciones iniciales son cero, es

$$a_2s^2X_{1s2} + a_1sX_{1s2} + a_0X_{1s2} = b_0Y_{1s2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{X_{1s2}}{Y_{1s2}} = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

2

Otra forma de representar la ecuación diferencial de un sistema de segundo orden es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2z\nu_n \frac{dx}{dt} + \nu_n^2 x = b_0\nu_n^2 y$$

donde ν_n es la frecuencia angular natural con la que oscila el sistema y z el factor de amortiguamiento relativo. La transformada de Laplace de esta ecuación es

$$\frac{X_{1s2}}{Y_{1s2}} = \frac{b_0\nu_n^2}{s^2 + 2z\nu_n s + \nu_n^2}$$

Las anteriores son las formas generales de la función de transferencia de un sistema de segundo orden.

20.3.1 Sistema de segundo orden con entrada tipo escalón

Cuando un sistema de segundo orden se somete a una entrada de tipo escalón unitario, es decir $Y(s) = 1/s$, la transformada de la salida es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{b_0 v_{in}}{s^2 + 2z v_n s + v_n^2}$$

La cual se reagrupa como sigue

$$\frac{b_0 v_{in}}{s^2 + p_1 s + p_2}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación

$$s^2 + 2z v_n s + v_n^2 = 0$$

De esta manera, al usar la ecuación para las raíces de una ecuación cuadrática:

$$p = \frac{-2z v_n \pm \sqrt{4z^2 v_n^2 - 4v_n^2}}{2}$$

entonces las dos raíces p_1 y p_2 son

$$p_1 = -z v_n + v_n \sqrt{z^2 - 1} \quad p_2 = -z v_n - v_n \sqrt{z^2 - 1}$$

Cuando $z > 1$ el término de la raíz cuadrada es real y el sistema está sobreamortiguado. Para determinar la transformada inversa se puede recurrir a fracciones parciales (apéndice A) para desglosar la expresión en varias fracciones simples, o utilizar el elemento 14 de la tabla de transformadas del apéndice A; en ambos casos, el resultado es

$$x = \frac{b_0 v_{in}}{p_1} \frac{e^{-p_1 t}}{1 - e^{-p_1 t}} + \frac{b_0 v_{in}}{p_2} \frac{e^{-p_2 t}}{1 - e^{-p_2 t}}$$

Cuando $z = 1$ el término de la raíz cuadrada es cero y, por lo tanto, $p_1 = p_2 = -v_n$. El sistema está críticamente amortiguado. La ecuación es ahora

$$X(s) = \frac{b_0 v_{in}}{s(s + v_n)^2}$$

Esta ecuación se puede descomponer en fracciones parciales (consulte el apéndice A), para obtener

$$Y(s) = b_0 c \frac{1}{s} - \frac{1}{s + v_n} - \frac{v_n}{(s + v_n)^2}$$

Por lo tanto,

$$x = b_0 [1 - e^{-v_n t} - v_n t e^{-v_n t}]$$

Con $z < 1$, entonces

$$x = b_0 c \left[1 - \frac{e^{-z v_n t}}{z \sqrt{1 - z^2}} \sin(\sqrt{1 - z^2} v_n t + \mathbf{f}) \right]$$

donde $\cos \mathbf{f} = z$. Ésta es una oscilación subamortiguada.

20.3.2 Ejemplos de sistemas de segundo orden

Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior:

- 1 ¿Cuál es el estado de amortiguamiento de un sistema que tiene una entrada de tipo escalón unitario y su función de transferencia es la siguiente?

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$$

Para una entrada de tipo escalón unitario $Y(s) = 1/s$, por lo que la transformada de la salida es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16} \cdot \frac{1}{s}$$

Las raíces de $s^2 + 8s + 16$ son $p_1 = p_2 = -4$. Ambas raíces son reales e iguales, por lo que el sistema está críticamente amortiguado.

- 2 La siguiente función de transferencia del brazo de un robot está sujeta a una entrada de tipo rampa unitaria. ¿Cuál será la salida?

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}$$

La transformada de la salida $X(s)$ es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{K}{(s + 3)^2} * \frac{1}{s^2}$$

Al usar fracciones parciales (apéndice A), esto se convierte en

$$X(s) = \frac{K}{9s^2} - \frac{2K}{9(s + 3)} + \frac{K}{9(s + 3)^2}$$

Y la transformada inversa es:

$$x = \frac{1}{9}Kt - \frac{2}{9}Ke^{-3t} + \frac{1}{9}Kte^{-3t}$$

20.4

Sistemas en serie

Cuando un sistema está formado por varios subsistemas en serie, como en la Figura 20.3, la función de transferencia del sistema $G(s)$, está dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{X(s)}{X_1(s) * \frac{X_1(s)}{X_2(s)} * \frac{X_2(s)}{X_3(s)} * \frac{X_3(s)}{X(s)}} \\ &= G_1(s) * G_2(s) * G_3(s) \end{aligned}$$

La función de transferencia del sistema como un todo es el producto de las funciones de transferencia de cada elemento de la serie.

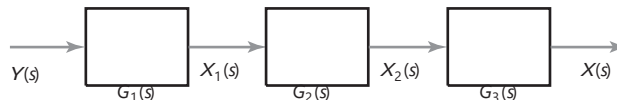


Figura 20.3 Sistemas en serie.

20.4.1 Ejemplos de sistemas en serie

Los siguientes ejemplos ilustran esto. Se supone que cuando los subsistemas están enlazados, no hay ninguna interacción entre los bloques que darían como resultado cambios en sus funciones de transferencia; es decir, con circuitos electrónicos puede haber problemas cuando los circuitos de subsistemas interactúan y se cargan entre sí.

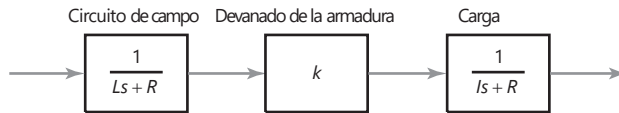
- 1 ¿Cuál será la función de transferencia para un sistema que consiste en tres elementos en serie, donde sus funciones de transferencia son 10 , $2/s$ y $4/(s + 3)$?

Con base en la anterior ecuación desarrollada,

$$G(s) = 10 * \frac{2}{s} * \frac{4}{s + 3} = \frac{80}{s(s + 3)}$$

- 2 Un motor de c.d. controlado por campo está formado por tres subsistemas en serie: el circuito de campo, el devanado de la armadura y la carga. La Figura 20.4 ilustra el arreglo anterior y las funciones de transferencia de cada uno de los subsistemas. Determine la función de transferencia total del sistema.

Figura 20.4 Motor de c.d. controlado por campo.



La función de transferencia total es el producto de las funciones de transferencia de los elementos en series. Por lo tanto,

$$G(s) = \frac{1}{Ls + R} * k * \frac{1}{Is + R} = \frac{k}{(Ls + R)(Is + R)}$$

20.5 Sistemas con lazos de realimentación

La Figura 20.5 muestra un sistema sencillo con realimentación negativa. Cuando existe **realimentación negativa** la entrada del sistema y las señales de realimentación se restan en el punto de suma. El término **ruta en sentido directo** designa la ruta en que aparece la función de transferencia $G(s)$ en la figura, y **ruta de realimentación** es la que contiene a $H(s)$. Todo el sistema se conoce como **sistema de lazo cerrado**.

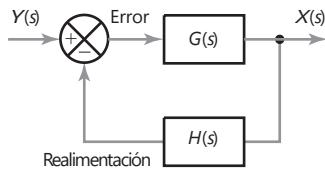


Figura 20.5 Sistema de realimentación negativa.

Para el sistema de realimentación negativa, la entrada al subsistema que contiene la función de transferencia $G(s)$ de la ruta en sentido directo es $Y(s)$ menos la señal de realimentación. El lazo de realimentación contiene la función de transferencia $H(s)$ y su entrada es $X(s)$, por lo tanto la señal de realimentación es $H(s)X(s)$. Así, el elemento $G(s)$ tiene una entrada de $Y(s) - H(s)X(s)$ y una salida de $X(s)$, por lo tanto

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s) - H(s)X(s)}$$

Al reordenar la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Entonces, la función de transferencia global del sistema con realimentación negativa $T(s)$ es:

$$T(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

20.5.1 Ejemplos de sistemas con realimentación negativa

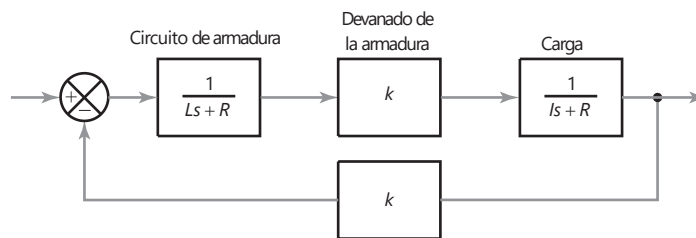
Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior:

- 1 ¿Cuál será la función de transferencia global de un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia de la trayectoria directa es $2/(s+1)$ y la función de transferencia de la trayectoria de realimentación negativa es $5s$?
Con base en la ecuación desarrollada

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{2}{1 + 2(5s)} = \frac{2}{11s + 1}$$

- 2 Considere un motor de c.d. controlado por armadura (Figura 20.6). Su trayectoria directa consta de tres elementos: el circuito de la armadura con función de transferencia $1/(Ls + R)$, el devanado de la armadura con función de transferencia k y la carga con función de transferencia $1/(Is + c)$. Hay una trayectoria de realimentación negativa con una función de transferencia K . Determine la función de transferencia global del sistema.

Figura 20.6 Motor de c.d. controlado por armadura.



La función de transferencia de la trayectoria directa para los elementos en serie es el producto de las funciones de transferencia de estos elementos en serie, es decir

$$G(s) = \frac{1}{Ls + R} * k * \frac{1}{Is + c} = \frac{k}{(Ls + R)(Is + c)}$$

La trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia igual a K . Así, la función de transferencia global es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{k}{(Ls + R)(Is + c)}}{1 + \frac{kK}{(Ls + R)(Is + c)}} = \frac{k}{(Ls + R)(Is + c) + kK}$$

20.6

Efecto de la ubicación de los polos en la respuesta transitoria

Se puede definir un sistema como **estable** cuando dada una entrada, ésta tiene transitorias que se desvanecen con el tiempo y dejan el sistema en su condición de estado estable. Se dice que un sistema es **inestable** si las transitorias no se desvanecen con el tiempo pero aumentan en tamaño, de modo que la condición de estado estable nunca se alcanza.

Considere una entrada de un impulso unitario para un sistema de primer orden con una función de transferencia de $G(s) = 1/(s + 1)$. La salida del sistema $X(s)$ es

$$X(s) = \frac{1}{s + 1} \times 1$$

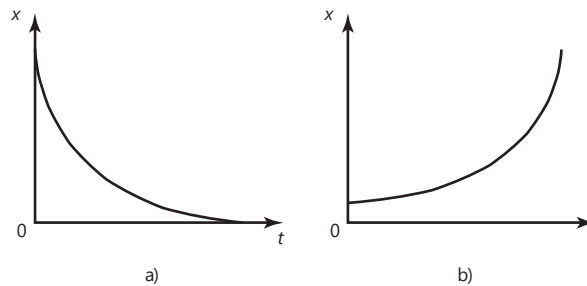
y así, $x = e^{-t}$. A medida que el tiempo t aumenta la salida se desvanece hasta convertirse en cero. Ahora considere la entrada de impulso unitario a un sistema con la función de transferencia $G(s) = 1/(s - 1)$. La salida es

$$X(s) = \frac{1}{s - 1} \times 1$$

y así $x = e^t$. A medida que t aumenta, también aumenta la salida. Así, un impulso momentáneo para un sistema da como resultado una salida siempre creciente; este sistema es inestable.

Para una función de transferencia, a los valores de s que hacen la función de transferencia infinita se les conoce como **polos**; son las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, $G(s) = 1/(s + 1)$, hay un polo de $s = -1$. Para $G(s) = 1/(s - 1)$, hay un polo de $s = +1$. Así, para el sistema de primer orden es estable si el polo es negativo, y es inestable si el polo es positivo (Figura 20.7).

Figura 20.7 Sistemas de primer orden: a) polo negativo, b) polo positivo.



Para un sistema de segundo orden con función de transferencia

$$G(s) = \frac{b_0 v_{2n}}{s^2 + 2z v_n s + v_n}$$

cuando está sometido a una entrada de impulso unitario,

$$X(s) = \frac{b_0 v_{2n}}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación

$$s^2 + 2z v_n s + v_n = 0$$

Al usar la ecuación para las raíces de una ecuación cuadrática,

$$\frac{-2z v_n \pm \sqrt{4z^2 v_n^2 - 4v_n}}{2} = -z v_n \pm v_n \sqrt{z^2 - 1}$$

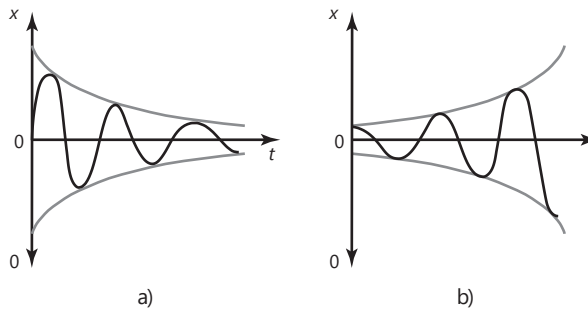
Al depender el valor del factor de amortiguamiento, el término bajo el signo de la raíz cuadrada puede ser real o imaginario. Cuando hay un término imaginario

la salida incluye una oscilación. Por ejemplo, suponga que se tiene un sistema de segundo orden con función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]}$$

es decir, $p = -2 \pm j1$. Cuando el sistema recibe una entrada tipo impulso unitario, la salida es $e^{-2t} \sin t$. La amplitud de la oscilación, es decir e^{-2t} , disminuye conforme aumenta el tiempo, por lo que el efecto del impulso es una oscilación que disminuye de manera gradual (Figura 20.8a). El sistema es estable.

Figura 20.8 Sistemas de segundo orden.



Suponga ahora un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{[s - (2 + j1)][s - (2 - j1)]}$$

es decir, $p = +2 \pm j1$. Cuando el sistema recibe una entrada tipo impulso unitario, la salida es $e^{2t} \sin t$. La amplitud de la oscilación, es decir e^{2t} , aumenta conforme aumenta el tiempo (Figura 20.8b)). El sistema es inestable.

En general, cuando se aplica un impulso al sistema, la salida adquiere la forma de la suma de diversos términos exponenciales. Si sólo uno de estos términos tiene crecimiento exponencial, la salida continúa creciendo y el sistema es inestable. Cuando hay pares de polos en los que hay términos imaginarios $\pm j$, la salida es una oscilación.

Un sistema es estable si la parte real de todos sus polos es negativa.

Un sistema es inestable si la parte real de cualquiera de sus polos es positiva.

20.6.1 El plano s

Se puede trazar la posición de los polos de un sistema en una gráfica con el eje x como las partes reales y el eje y como las partes imaginarias. Esta gráfica se conoce como **plano s** . La ubicación de los polos en el plano determina la estabilidad de un sistema. La Figura 20.9 muestra un plano s y la manera en la que la ubicación de las raíces afecta la respuesta de un sistema.

20.6.2 Compensación

La salida de un sistema puede ser inestable, o quizá la respuesta sea demasiado lenta, o haya demasiado sobrepeso. Para modificar las respuestas de los sistemas

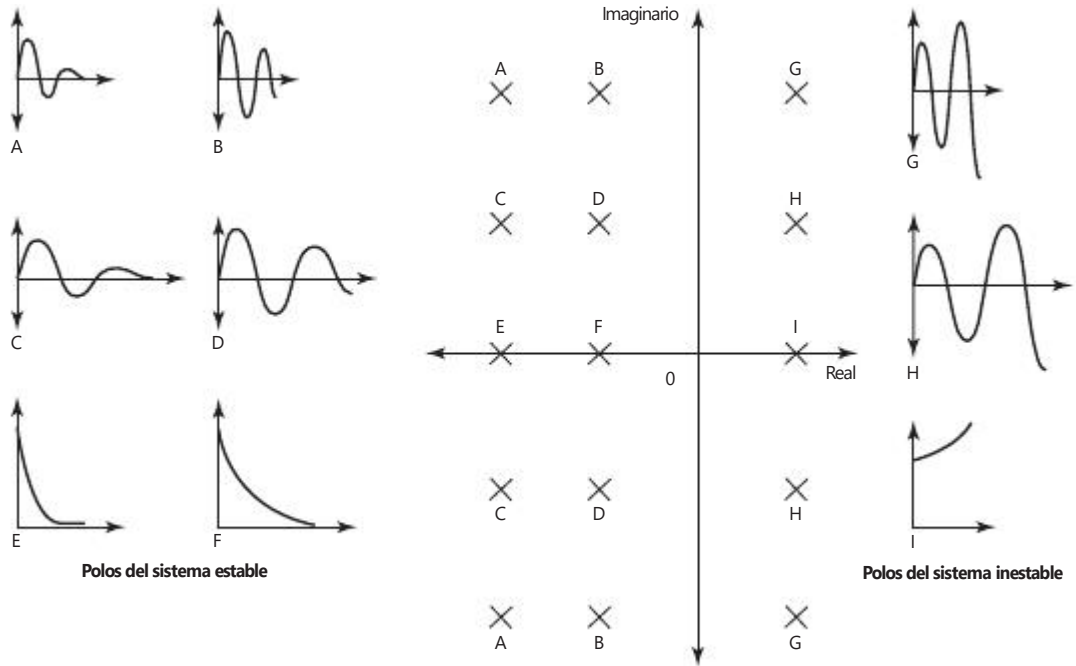


Figura 20.9 El plano s.

a ciertas entradas se utilizan **compensadores**. Un compensador es un bloque que se incorpora al sistema para modificar la función de transferencia global del sistema de manera que se obtengan las características requeridas.

Como ejemplo del uso de un compensador, considere un sistema de control de posición que tiene una realimentación negativa con función de transferencia de 1 y dos subsistemas en su trayectoria directa: un compensador con función de transferencia igual a K y un sistema motor/actuador con función de transferencia $1/s(s + 1)$. ¿Qué valor de K se necesita para que el sistema esté críticamente amortiguado? La trayectoria directa tiene función de transferencia $K/s(s + 1)$ y la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia igual a 1. Por lo tanto, la función de transferencia total del sistema es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s(s + 1)}}{1 + \frac{K}{s(s + 1)}} = \frac{K}{s(s + 1) + K}$$

El denominador es, entonces, $s^2 + s + K$. Las raíces de esta ecuación son:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$

Para que sea un sistema críticamente amortiguado es necesario que $1 - 4K = 0$ y, por lo tanto, el compensador debe tener una ganancia proporcional de $K = \frac{1}{4}$.

Resumen

La **función de transferencia** $G(s)$ de un sistema es (transformada de Laplace de la salida)/(transformada de Laplace de la entrada). Para obtener las transformadas de ecuaciones diferenciales o integrales cuando todas las condiciones iniciales son cero se debe reemplazar una función de tiempo $f(t)$ por $F(s)$, reemplazar por la primera derivada $df(t)/dt$ por $sF(s)$, reemplazar una segunda derivada $d^2f(t)/dt^2$ por $s^2F(s)$, reemplazar una integral $\int f(t)dt$ por $F(s)/s$.

Un **sistema de primer orden** tiene una función de transferencia de la forma $G/(ts + 1)$, donde t es el tiempo constante. Un **sistema de segundo orden** tiene una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{b_0 v_n}{s^2 + 2z v_n s + v_n^2}$$

Donde z es el factor de amortiguamiento y v_n es la frecuencia angular libre.

A los valores de s que hacen la función de transferencia infinita se les conoce como **polos**; son las raíces de la ecuación característica. Un sistema es estable si la parte real de todos sus polos es negativa, e inestable si la parte real de cualquiera de sus polos es positiva.

Problemas

- 20.1 ¿Cuáles son las funciones de transferencia de los sistemas cuyas relaciones de entrada/salida son las siguientes?

a) Un sistema hidráulico cuya entrada es q y su salida es h , donde

$$q = A \frac{dh}{dt} + \frac{rgh}{R}$$

b) Un sistema de resorte-amortiguador-masa con entrada F y salida x , donde

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

c) Un circuito RLC con entrada v y salida v_C , donde

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{C} \int v_C dt + v_C$$

- 20.2 ¿Cuáles son las constantes de tiempo de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes: a) $G(s) = 5/(3s + 1)$ y b) $G(s) = 2/(2s + 3)$?

- 20.3 Determine cómo varían con el tiempo las salidas de los siguientes sistemas al someterlos a una entrada tipo escalón unitario en el tiempo $t = 0$: a) $G(s) = 2/(s + 2)$ y b) $G(s) = 10/(s + 5)$.

- 20.4 ¿Cuál es el estado de amortiguamiento de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } G(s) = \frac{5}{s^2 - 6s + 16}, & \text{b) } G(s) = \frac{10}{s^2 + s + 100}, \\ \text{c) } G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 1}, & \text{d) } G(s) = \frac{3s + 20}{s^2 + 2s + 20} \end{array}$$

- 20.5 ¿Cuál es la salida de un sistema con la función de transferencia $s/(s + 3)^2$ y que se somete a una entrada tipo escalón unitario en el tiempo $t = 0$?
- 20.6 ¿Cuál es la salida de un sistema cuya función de transferencia es $G = 2/[(s + 3) * (s + 4)]$ y está sujeta a un impulso unitario?
- 20.7 ¿Cuáles son las funciones de transferencia totales de los siguientes sistemas con realimentación negativa?

Trayectoria directa

Trayectoria de realimentación

a) $G(s) = \frac{4}{s(s + 1)}$

$H(s) = \frac{1}{s}$

b) $G(s) = \frac{2}{s + 1}$

$H(s) = \frac{1}{s + 2}$

c) $G(s) = \frac{4}{(s + 2)(s + 3)}$

$H(s) = 5$

d) dos elementos en serie $G_1(s) = 2/(s + 2)$
y $G_2(s) = 1/s$

$H(s) = 10$

- 20.8 ¿Cuál es la función de transferencia global de un sistema en lazo cerrado que tiene una función de transferencia de la trayectoria directa de $5/(s + 3)$ y una función de transferencia en la trayectoria de realimentación negativa igual a 10?
- 20.9 Un sistema de lazo cerrado tiene una trayectoria directa con dos elementos en serie cuyas funciones de transferencia son 5 y $1/(s + 1)$. Si la trayectoria de realimentación tiene función de transferencia $2/s$, ¿cuál es la función de transferencia global del sistema?
- 20.10 Un sistema de lazo cerrado tiene una trayectoria directa con dos elementos en serie cuyas funciones de transferencia son 2 y $1/(s + 1)$. Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación es s , ¿cuál es la función de transferencia global del sistema?
- 20.11 Un sistema tiene una función de transferencia de $1/[(s + 1)(s + 2)]$. ¿Cuáles son sus polos?
- 20.12 ¿Cuál de los siguientes sistemas son estables o inestables?
 - a) $G_1(s) = 1/(s^2 + 52s + 22)$,
 - b) $G_1(s) = 1/(s^2 - 52s + 22)$,
 - c) $G_1(s) = 1/(s^2 - 52s - 52)$,
 - d) $G_1(s) = 1/(s^2 + s + 12)$,
 - e) $G_1(s) = 1/(s^2 - 2s + 32)$.

Capítulo veintiuno

Respuesta en frecuencia

Objetivos

Después de estudiar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Explicar el significado de la función de respuesta en frecuencia.
- Analizar la respuesta en frecuencia de los sistemas sujetos a entradas senoidales.
- Trazar e interpretar diagramas de Bode.
- Utilizar los diagramas de Bode para la identificación de sistemas.
- Explicar el término ancho de banda.
- Explicar cómo el margen de ganancia y el margen de fase se pueden utilizar para indicar la estabilidad de un sistema.

21.1

Entrada senoidal

En los dos capítulos anteriores la atención se centró en la respuesta de los sistemas a entradas de tipo escalón, impulso y rampa. En este capítulo se ampliará el estudio y se considerarán entradas senoidales. Si bien en muchos sistemas de control no es frecuente encontrar entradas senoidales, éstas son útiles para realizar pruebas, ya que la forma en que el sistema responde a estas entradas es una muy buena fuente de información que ayuda al diseño y el análisis de los sistemas. También es útil porque muchas otras señales se pueden considerar como la suma de una cantidad de señales senoidales. En 1822 Jean Baptiste Fourier propuso que cualquier forma de onda periódica, es decir una forma de onda cuadrada, se puede sacar de una combinación de formas de onda senoidales y al considerar el comportamiento de un sistema para cada forma de onda senoidal individual es posible determinar la respuesta a la forma de onda más compleja.

21.1.1 Respuesta de un sistema para una entrada senoidal

Considere un sistema de primer orden que se describe por la ecuación diferencial

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

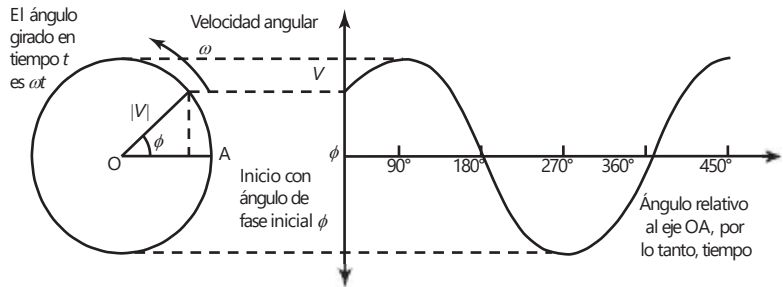
donde y es la entrada y x la salida. Suponga una entrada senoidal de amplitud unitaria de $y = \sin vt$. ¿Cuál será la salida? Se sabe que cuando se suman $a_1 dx/dt$ y $a_0 x$ al final se obtiene la función senoidal $b_0 \sin vt$. Las senoides tienen la propiedad de que su diferenciación da como resultado también una senoide de la misma frecuencia [un coseno es una función senoidal $\sin(vt + 90^\circ)$]. Esto aplica sin importar cuántas veces se lleve a cabo la diferenciación. Por ello, es de esperar que la respuesta de estado estable de x también sea senoidal y con la misma frecuencia. Sin embargo, la salida difiere en amplitud y fase desde la entrada.

21.2

Fasores

Para estudiar las señales senoidales conviene utilizar **fasores**. Considere una señal senoidal descrita por la ecuación $v = V \text{sen}(vt + \mathbf{f})$, donde V es la amplitud, v la frecuencia angular y \mathbf{f} el ángulo de fase. El fasor se representa por una línea de longitud $|V|$ que forma un ángulo \mathbf{f} con el eje de referencia de fase (Figura 21.1). Las líneas \mathbf{f} indican que al especificar la longitud del fasor lo único que nos interesa es su magnitud o tamaño. Al especificar una cantidad fasorial siempre debe indicarse la magnitud y el ángulo de fase correspondientes. La convención generalmente aceptada es representar al fasor con letras en negritas, no cursivas, es decir, V . Cuando aparece este símbolo se entiende que existe una cantidad que tiene una magnitud y un ángulo.

Figura 21.1 Representación de una señal senoidal por un fasor.



Este fasor también se puede representar con la notación de números complejos. Las magnitudes complejas se representan por $(x + jy)$, donde x es la parte real y y la parte imaginaria del número complejo. En una gráfica, la parte imaginaria es el eje y y la parte real es el eje x ; x y y son las coordenadas cartesianas del punto que representa el número complejo (Figura 21.2a).

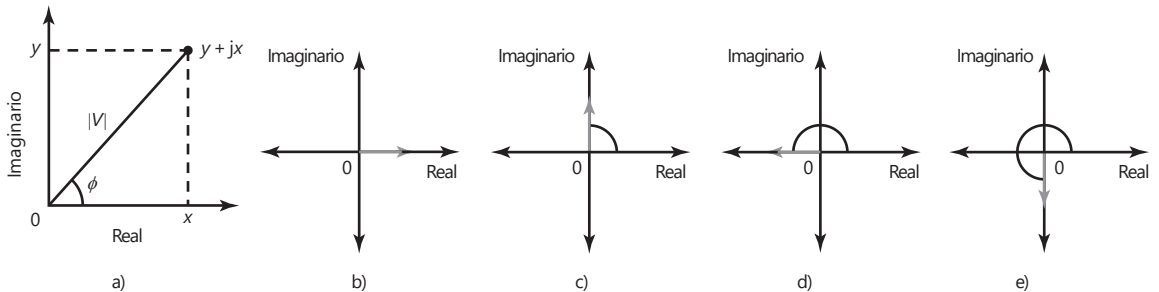


Figura 21.2 a) Representación compleja de un fasor, b) 0° , c) 90° , d) 270° , e) 360° .

Si se considera la línea que une ese punto con el origen de la gráfica como la representación del fasor, el ángulo de fase \mathbf{f} del fasor se representa por

$$\tan \mathbf{f} = \frac{y}{x}$$

y su longitud por el uso del teorema de Pitágoras como

$$\text{longitud del fasor } fVf = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dado que $x = |V| \cos f$ y $y = |V| \sin f$, entonces se puede escribir

$$\mathbf{V} = x + jy = fVf \cos u + j fVf \text{ senu} = fVf(\cos u + j \text{ sen } u)$$

Así, una especificación de las partes reales e imaginarias de una cantidad compleja permite que se especifique un fasor.

Considere un fasor de longitud 1 y un ángulo de fase 0° (Figura 21.2b). Ésta tendrá una representación compleja de $1 + j0$. Ahora considere el mismo fasor de longitud pero con un ángulo de fase de 90° (Figura 21.2c), que tendrá una representación compleja de $0 + j1$. Así, el giro por 90° de un fasor al contrario de las manecillas del reloj corresponde a la multiplicación del fasor por j . Si ahora se gira este fasor más allá de 90° (Figura 21.2d), al seguir la misma regla de multiplicación se tiene el fasor original multiplicado por j^2 . Sin embargo, el fasor es sólo el fasor original en la dirección opuesta, es decir sólo multiplicado por -1 . Por lo tanto, $j^2 = -1$ y así, $j = (-1)$. La rotación del fasor original a través de un total de 270° , es decir, $3 * 90^\circ$, es equivalente a multiplicar el fasor original por $j^3 = j(j^2) = -j$.

Para mostrar lo anterior, considere un voltaje v que varía de manera senoidal con el tiempo de acuerdo a la ecuación

$$v = 10 \text{ sen}(vt + 30^\circ) V$$

Al representarlo por un fasor, a) ¿cuál es su longitud?, b) ¿cuál es su ángulo relativo al eje de referencia?, c) ¿cuáles son las partes reales e imaginarias cuando se representa por un número complejo?

- El fasor tendrá una longitud escalada para representar la amplitud del senoidal y será de 10 V.
- El ángulo del fasor relativo al eje de referencia es igual al ángulo de fase y será de 30° .
- La parte real está dada por la ecuación $x = 10 \cos 30^\circ = 8.7$ V y la parte imaginaria por $y = 10 \sin 30^\circ = 5.0$ V. Así, el fasor está especificado por $8.7 + j5.0$ V.

21.2.1 Ecuaciones fasoriales

Considere un fasor que representa la senoide de amplitud unitaria de $x = \text{sen } vt$. Al diferenciar la senoide se obtiene $dx/dt = v \cos vt$. Pero esto también se puede escribir como $dx/dt = v \text{ sen}(vt + 90^\circ)$. Es decir, la diferenciación sólo produce un fasor con una longitud aumentada por un factor igual a v y con un giro de 90° respecto al fasor original. Por lo tanto, en la notación de los números complejos, el fasor original se debe multiplicar por jv , dado que la multiplicación por j equivale a girar 90° .

Entonces, la ecuación diferencial

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

se puede escribir, en notación compleja, como la **ecuación fasorial**:

$$jva_1\mathbf{X} + a_0\mathbf{X} = b_0\mathbf{Y}$$

donde las literales en negritas, no cursivas, indican que los datos se refieren a fasores. Se puede decir que la ecuación diferencial, que era una ecuación en el

dominio del tiempo, se transformó en una ecuación en el **dominio de la frecuencia**. La ecuación en el dominio de la frecuencia se puede describir como

$$(j\omega a_1 + a_0)\mathbf{X} = b_0\mathbf{Y}$$

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0}$$

Sin embargo, en la sección 20.2, cuando la misma ecuación diferencial se expresó en el dominio de s , se tenía:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1s + a_0}$$

Al sustituir s por $j\omega$ se obtiene la misma ecuación. Ocurre que siempre se puede hacer esto para pasar del dominio de s al dominio de la frecuencia. Este resultado lleva a la definición de **función de respuesta en frecuencia** o **función de transferencia en frecuencia** $G(j\omega)$ en estado permanente o estable, como

$$\frac{\text{factor de salida}}{\text{factor de entrada}}$$

Para ilustrar lo anterior se determinará la función de respuesta en frecuencia de un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene al sustituir s por $j\omega$. Por lo tanto,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

21.3

Respuesta en frecuencia

El procedimiento para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema es el siguiente:

- 1 Reemplace s en la función de transferencia por $j\omega$ para dar la función de respuesta en frecuencia.
- 2 La relación de amplitud entre la salida y la entrada es entonces la magnitud de la función de respuesta en frecuencia, es decir $(x^2 + y^2)$.
- 3 El ángulo de fase entre la salida y la entrada está dado por $\tan \phi = y/x$ o el radio de las partes reales e imaginarias del número complejo que representa la función de respuesta en frecuencia.

21.3.1 Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden

Un sistema de primer orden tiene una función de transferencia que se escribe como

$$G(s) = \frac{1}{1 + ts}$$

donde t es el tiempo constante del sistema (sección 20.2). La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ se puede obtener al reemplazar s por $j\omega$. Por lo tanto,

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega t}$$

Se puede poner esto en una forma más conveniente al multiplicar el dividendo y el divisor de la expresión por $(1 - j\omega t)$ para dar

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega t} \cdot \frac{1 - j\omega t}{1 - j\omega t} = \frac{1 - j\omega t}{1 + \omega^2 t^2}$$

Pero $j^2 = -1$, entonces

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 t^2} - j \frac{\omega t}{1 + \omega^2 t^2}$$

Esto tiene la forma $x + jy$ y así, debido a que $G(j\omega)$ es el fasor de salida dividido entre el fasor de entrada, se tiene el tamaño del fasor de salida más grande que el del fasor de entrada por un factor que se escribe como $|G(j\omega)|$, con

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 t^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 t^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 t^2}$$

$|G(j\omega)|$ indica qué tan grande es la amplitud de la salida con respecto a la amplitud de la entrada. Por lo general, esto es referido como la **magnitud** o **ganancia**. La diferencia de fase \mathbf{f} entre el fasor de salida y el fasor de entrada está dado por

$$\tan \mathbf{f} = \frac{y}{x} = -\omega t$$

El signo negativo indica que el fasor de salida se rezaga detrás del fasor de salida por este ángulo.

Los siguientes ejemplos muestran lo anterior:

- 1 Determine la función de respuesta en frecuencia, magnitud y fase de un sistema (un circuito eléctrico con un resistor en serie con un capacitor a través del cual se toma la salida) que tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se puede obtener al sustituir $j\omega$ por s y así

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

Se puede multiplicar el dividendo y el divisor de la ecuación anterior por $1 - j\omega RC$ y luego reordenar el resultado para dar

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 (RC)^2} - j \frac{\omega (RC)}{1 + \omega^2 (RC)^2}$$

Por lo tanto,

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{1 + \omega^2 (RC)^2}$$

y $\tan \mathbf{f} = -\omega RC$.

- 2 Determine la magnitud y fase de la salida de un sistema cuando está sujeto a una entrada senoidal de $2 \sin(3t + 60^\circ)$ si tiene una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{4}{s + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene al reemplazar s por $j\omega$. Entonces

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 1}$$

Al multiplicar el dividendo y el divisor de la ecuación por $(-j\omega + 1)$,

$$G(j\omega) = \frac{-j4\omega + 4}{\omega^2 + 1} = \frac{4}{\omega^2 + 1} - j \frac{4\omega}{\omega^2 + 1}$$

La magnitud es

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

y el ángulo de fase está dado por $\tan \phi = y/x$ y así

$$\tan \phi = -\omega$$

Para la entrada especificada se tiene $\omega = 3$ rad/s. La magnitud es, por lo tanto,

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 1}} = 1.3$$

y la fase está dada por $\tan \phi = -3$. Así, $\phi = -72^\circ$. Éste es el ángulo de fase entre la entrada y la salida. Así, la salida es $2.6 \sin(3t - 12^\circ)$.

21.3.2 Respuesta en frecuencia para un sistema de segundo orden

Considere un sistema de segundo orden con la función de transferencia (sección 20.3)

$$G(s) = \frac{v_n}{s^2 + 2z v_n s + v_n^2}$$

donde v_n es la frecuencia angular natural y z es el factor de amortiguamiento relativo. La función de respuesta en frecuencia se obtiene al reemplazar s por $j\omega$. Así,

$$G(j\omega) = \frac{v_n}{-\omega^2 + j2z v_n \omega + v_n^2} = \frac{v_n}{(v_n^2 - \omega^2) + j2z v_n \omega}$$

Al multiplicar el dividendo y el divisor de la expresión por

$$1 - a \frac{\omega^2}{v_n^2} + j2z a \frac{\omega}{v_n}$$

se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{1 - a \frac{\omega}{\omega_c}}{1 - a \frac{\omega}{\omega_c} + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Ésta es de la forma $x + jy$ y así, dado que $G(j\omega)$ es el fasor de salida dividido entre el fasor de entrada, se tiene el tamaño o magnitud del fasor de salida más grande que el del fasor de entrada por un factor dado por $(x^2 + y^2)$ como

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \frac{\omega}{\omega_c} + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

La diferencia de fase ϕ entre la entrada y la salida está dada por $\tan \phi = x/y$ y así

$$\tan \phi = - \frac{2a \frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

El signo menos es porque la fase de salida se rezaga detrás de la entrada.

21.4

Diagramas de Bode

La respuesta en frecuencia de un sistema es el conjunto de valores de la magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase ϕ que se presentan cuando una señal de entrada senoidal varía en un intervalo de frecuencias. Esto se puede expresar como dos gráficas, una de la magnitud $|G(j\omega)|$ trazada contra la frecuencia angular ω y la otra de la fase ϕ graficada contra ω . La magnitud y la frecuencia angular se grafican en escalas logarítmicas. A estas dos gráficas se les llama **diagrama de Bode**.

La magnitud se expresa en unidades de decibels (dB):

$$|G(j\omega)| \text{ en dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Por ejemplo, una magnitud de 20 dB significa que

$$20 = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

entonces $1 = \log_{10} |G(j\omega)|$ y $10^1 = |G(j\omega)|$. Así, una magnitud de 20 dB significa que la magnitud es 10; por lo tanto, la amplitud de salida es diez veces la de entrada. Una magnitud de 40 dB significa una magnitud de 100 y que la amplitud de salida es 100 veces la de entrada.

21.4.1 Diagrama de Bode para $G(s) = K$

Considere el diagrama de Bode de un sistema cuya función de transferencia es $G(s) = K$, donde K es una constante. La función de respuesta en frecuencia es, por lo tanto $G(j\omega) = K$. La magnitud es $|G(j\omega)| = K$ y en decibels es $|G(j\omega)| = 20 \log K$. El trazo de la magnitud es entonces una línea de

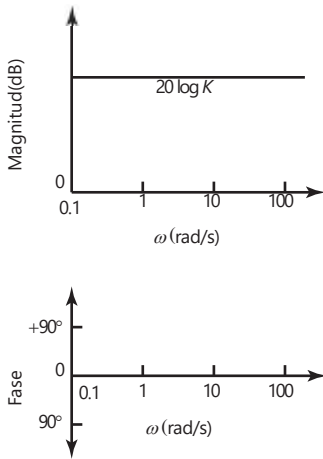


Figura 21.3 Diagrama de Bode para $G(s) = K$.

magnitud constante, y al cambiar K lo único que sucede es que la magnitud sube o baja cierto número de decibeles. La fase es cero. La Figura 21.3 muestra el diagrama de Bode.

21.4.2 Diagrama de Bode para $G(s) = 1/s$

Considere el diagrama de Bode de un sistema cuya función de transferencia es $G(s) = 1/s$. La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ es $1/j\omega$. Al multiplicar esto por j/j se obtiene $G(j\omega) = -j/\omega$. Así, la magnitud $|G(j\omega)|$ es $1/\omega$. En decibeles es igual a $20 \log(1/\omega) = -20 \log \omega$. Cuando $\omega = 1$ rad/s, la magnitud es 0. Cuando $\omega = 10$ rad/s, es -20 dB. Cuando $\omega = 100$ rad/s la magnitud es -40 dB. Cada vez que la frecuencia angular aumenta diez veces, la magnitud disminuye -20 dB. El trazo de la magnitud es entonces una línea recta con pendiente de -20 dB por década de frecuencia y la cual pasa por 0 dB cuando $\omega = 1$ rad/s. La fase de este sistema es

$$\tan f = \frac{-1}{\omega} = -\omega$$

Por lo tanto, $f = -90^\circ$ para todas las frecuencias. La Figura 21.4 ilustra el diagrama de Bode.

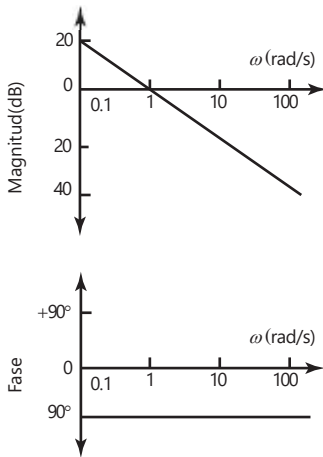


Figura 21.4 Diagrama de Bode para $G(s) = 1/s$.

21.4.3 Diagrama de Bode para un sistema de primer orden

Considere el diagrama de Bode para un sistema de primer orden para el cual la función de transferencia está dado por

$$G(s) = \frac{1}{ts + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia es entonces

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega t + 1}$$

La magnitud (sección 21.2.1) es entonces

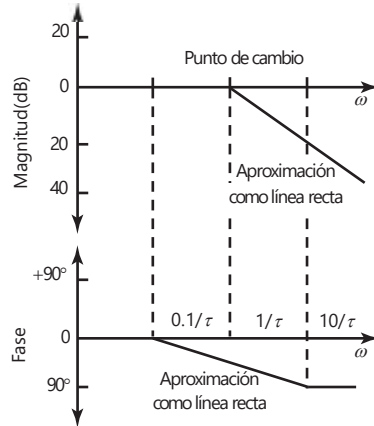
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

En decibeles esto es

$$20 \log a \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} b$$

Cuando $\omega \cdot t \ll 1$, entonces $\omega^2 t^2$ es insignificante comparado con 1 y así la magnitud es $20 \log 1 = 0$ dB. Dado que a frecuencias bajas hay un trazo de magnitud en línea recta con un valor constante de 0 dB. Para frecuencias más altas, cuando $\omega \cdot t \gg 1$, $\omega^2 t^2$ es mucho mayor que 1, de manera que puede ser insignificante. La magnitud es entonces $20 \log(1/\omega t)$, es decir $-20 \log \omega t$. Ésta es una línea recta de pendiente -20 dB por década de frecuencia que interseca la línea 0 dB cuando $\omega t = 1$, es decir cuando $\omega = 1/t$. La Figura

Figura 21.5 Diagrama de Bode para sistema de primer orden.



21.5 muestra estas líneas para frecuencias altas y bajas con su intersección, o así llamadas **punto de rompimiento** o **frecuencia de esquina**, en $\nu = 1/t$. A las dos líneas rectas se les llama aproximación asintótica en el trazo verdadero. El trazo verdadero redondea la intersección de dos líneas. La diferencia entre el trazo verdadero y la aproximación es un máximo de 3 dB al punto de rompimiento.

La fase para el sistema de primer orden (sección 21.2.1) está dada por $\text{tan } \mathbf{f} = -\nu t$. En frecuencias bajas, cuando t es menor que $0.1/t$, la fase es virtualmente -90° . Entre estos dos extremos el ángulo de fase se puede considerar para dar una línea recta razonable en el diagrama de Bode (Figura 21.5). El error máximo al asumir la línea recta es de 5.5° .

Un ejemplo de este sistema es un filtro RC (sección 20.2.2); es decir, una resistencia R en serie con una capacitancia C con la salida como voltaje a través del capacitor. Éste tiene una función de transferencia de $1/(RCs + 1)$ y en consecuencia una función de respuesta en frecuencia de $1/(j\nu t + 1)$ donde $t = RC$. El diagrama de Bode se muestra en la Figura 21.5.

21.4.4 Diagrama de Bode para un sistema de segundo orden

Considere un sistema de segundo orden con una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{v_{2n}}{s^2 + 2z\nu_n s + \nu_{2n}}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene al reemplazar s por $j\nu$:

$$G(j\nu) = \frac{v_{2n}}{-\nu^2 + j2z\nu_n\nu + \nu_{2n}}$$

La magnitud es entonces (sección 21.3.2).

$$|G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{B^2 \left(1 - a \frac{\nu}{\nu_n}\right)^2 + c^2 z a \frac{\nu}{\nu_n}}}$$

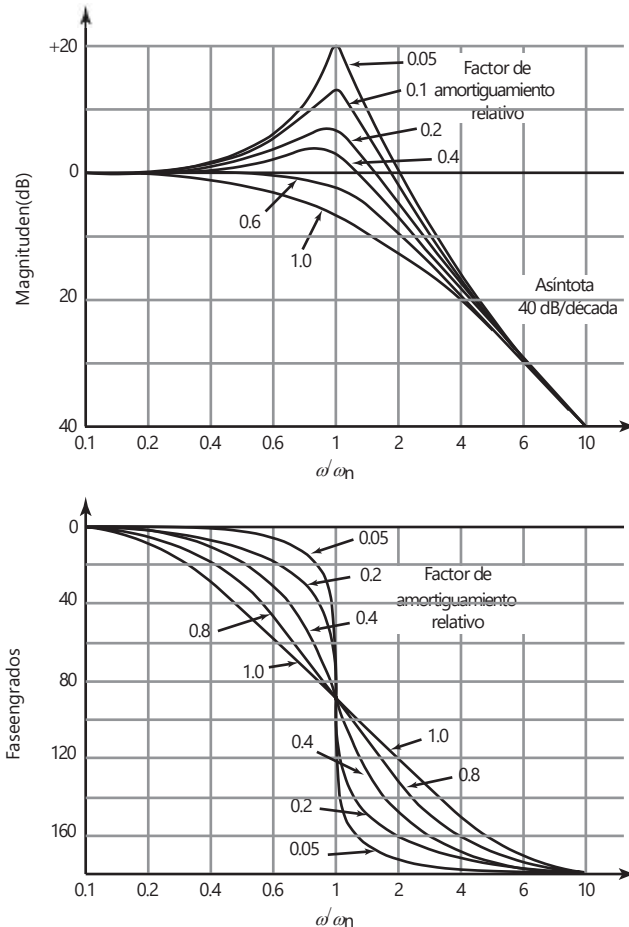
Así, en decibeles, la magnitud es

$$20 \log \frac{1}{B c^2 \left(1 - a \frac{v}{v_n} + d^2 + c^2 z^2 a \frac{v}{v_n} \right)^2}$$

$$= -20 \log B c^2 \left(1 - a \frac{v}{v_n} + d^2 + c^2 z^2 a \frac{v}{v_n} \right)^2$$

Para $(v/v_n) \ll 1$ la magnitud se aproxima a $-20 \log 1$ o 0 dB y para $(v/v_n) \gg 1$ la magnitud se aproxima para $-20 \log(v/v_n)^2$. Así, cuando v aumenta por un factor de 10 la magnitud aumenta por un factor de $-20 \log 100$ o -40 dB. Por lo tanto, a frecuencias bajas el trazo de la magnitud es una línea recta a 0 dB, mientras que a altas frecuencias es una línea recta de -40 dB por década de frecuencia. La intersección de estas dos líneas, es decir el punto de rompimiento, está en $v = v_n$. Por lo tanto, el trazo de la magnitud se da aproximadamente mediante estas dos líneas asintóticas. Sin embargo, el valor verdadero depende del factor de amortiguamiento relativo z . La Figura 21.6 muestra las dos líneas asintóticas y los trazos verdaderos para una cantidad de factores de amortiguamiento relativo.

Figura 21.6 Diagrama de Bode para un sistema de segundo orden.



La fase se obtiene por (sección 21.3.2).

$$\tan \mathbf{f} = - \frac{2z a \frac{v}{v_n}}{1 - a \frac{v}{v_n}}$$

Para $(v/v_n) \ll 1$, por ejemplo, $(v/v_n) = 0.2$, entonces $\tan \mathbf{f}$ es aproximadamente 0 y así $\mathbf{f} = 0^\circ$. Para $(v/v_n) \gg 1$, por ejemplo $(v/v_n) = 5$, $\tan \mathbf{f}$ es aproximadamente $-(\cdot)$, y así, $\mathbf{f} = -180^\circ$. Cuando $v = v_n$, entonces se tiene $\tan \mathbf{f} = -\infty$, y así, $\mathbf{f} = -90^\circ$. Una aproximación razonable está dada por el trazo de una línea recta a través de -90° en $v = v_n$ y los puntos 0° en $(v/v_n) = 0.2$ y -180° en $(v/v_n) = 5$. La Figura 21.6 muestra la gráfica.

21.4.5 Construcción de diagramas de Bode

Considere un sistema que incluye una cantidad de elementos en serie. La función de transferencia del sistema como un todo se obtiene por (sección 20.4)

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \text{ \AA}$$

Por lo tanto, la función de respuesta en frecuencia para un sistema de dos elementos, cuando s es reemplazada por jv , es

$$G(jv) = G_1(jv)G_2(jv)$$

Se escribe la función de transferencia $G_1(jv)$ como un número complejo (sección 21.2).

$$x + jy = |G_1(jv)| (\cos \mathbf{f}_1 + j \operatorname{sen} \mathbf{f}_1)$$

Donde $|G(jv)|$ es la magnitud y \mathbf{f}_1 la fase de la función de respuesta en frecuencia. De manera similar, se puede escribir $G_2(jv)$ como

$$|G_2(jv)| (\cos \mathbf{f}_2 + j \operatorname{sen} \mathbf{f}_2)$$

Así,

$$\begin{aligned} G(jv) &= |G_1(jv)| (\cos \mathbf{f}_1 + j \operatorname{sen} \mathbf{f}_1) * |G_2(jv)| (\cos \mathbf{f}_2 + j \operatorname{sen} \mathbf{f}_2) \\ &= |G_1(jv)| |G_2(jv)| [\cos \mathbf{f}_1 \cos \mathbf{f}_2 \\ &\quad + j(\operatorname{sen} \mathbf{f}_1 \cos \mathbf{f}_2 + \cos \mathbf{f}_1 \operatorname{sen} \mathbf{f}_2) + j^2 \operatorname{sen} \mathbf{f}_1 \operatorname{sen} \mathbf{f}_2] \end{aligned}$$

Pero $j^2 = -1$ y, dado que $\cos \mathbf{f}_2 \cos \mathbf{f}_2 - \operatorname{sen} \mathbf{f}_1 \operatorname{sen} \mathbf{f}_2 = \cos(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$ y $\operatorname{sen} \mathbf{f}_1 \cos \mathbf{f}_2 + \cos \mathbf{f}_1 \operatorname{sen} \mathbf{f}_2 = \operatorname{sen}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$, entonces

$$G(jv) = |G_1(jv)| |G_2(jv)| [\cos(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + j \operatorname{sen}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)]$$

La función de respuesta en frecuencia del sistema tiene una magnitud que es el producto de las magnitudes de los elementos separados y una fase que es la suma de las fases de los elementos separados, es decir

$$\begin{aligned} |G(jv)| &= |G_1(jv)| |G_2(jv)| |G_3(jv)| \text{ \AA} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \text{ \AA} \end{aligned}$$

Ahora, si se considera el diagrama de Bode donde los logaritmos de las magnitudes se determinan,

$$\log |G(j\omega)| = \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \log |G_3(j\omega)| + \dot{A}$$

De esta forma se obtiene el diagrama de Bode de un sistema al añadir los diagramas de Bode de las magnitudes de los elementos constituyentes. Asimismo, el diagrama de fase se obtiene al añadir las fases de los elementos constituyentes.

Mediante el uso de una cantidad de elementos básicos, los diagramas de Bode para un amplio rango de sistemas se pueden conseguir con facilidad. Los elementos básicos que se utilizan son:

- 1 $G(s) = K$ da el diagrama de Bode que se muestra en la Figura 21.3.
- 2 $G(s) = 1/s$ da el diagrama de Bode que se muestra en la Figura 21.4.
- 3 $G(s) = s$ da un diagrama de Bode que es una imagen reflejada de él en la Figura 21.4. $|G(j\omega)| = 20$ dB por década de frecuencia, que pasa a través de 0 dB en $\omega = 1$ rad/s. \angle es constante a 90° .
- 4 $G(s) = 1/(ts + 1)$ da el diagrama de Bode que se muestra en la Figura 21.5.
- 5 $G(s) = ts + 1$ da un diagrama de Bode que es una imagen reflejada de él en la Figura 21.5. Para el diagrama de magnitud, el punto de rompimiento es en $1/t$ con la primera línea en 0 dB y después de ésta en una pendiente de 20 dB por década de frecuencia. La fase es cero en $0.1/t$ y se eleva a $+90^\circ$ en $10/t$.
- 6 $G(s) = v_{2n}/(s^2 + 2z v_n s + v_{2n})$ da el diagrama de Bode que se muestra en la Figura 21.6.
- 7 $G(s) = (s^2 + 2z v_n s + v_{2n})/v_{2n}$ da un diagrama de Bode que es una imagen reflejada de él en la Figura 21.6.

Para ilustrar lo anterior, considere el trazo de las asíntotas del diagrama de Bode para un sistema que cuenta con una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{10}{2s + 1}$$

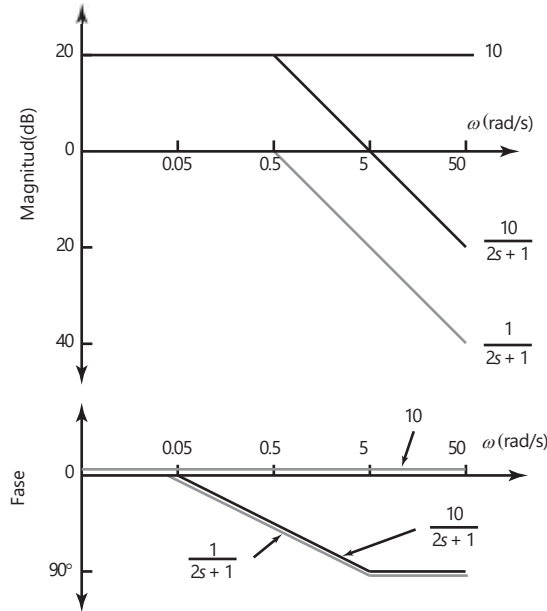
La función de transferencia consta de dos elementos, uno con una función de transferencia de 10 y el otro con una función de transferencia de $1/(2s + 1)$. El diagrama de Bode se puede trazar para cada una de éstas y luego sumarlos para obtener el diagrama requerido. El diagrama de Bode para la función de transferencia 10 será de la forma que se da en la Figura 21.3, con $K = 10$ y ésa para $1/(2s + 1)$ como la que se da en la Figura 21.5 con $t = 2$. El resultado se muestra en la Figura 21.7.

Considere otro ejemplo, el trazo de las asíntotas del diagrama de Bode para un sistema que cuenta con una función de transferencia de

$$G(s) = \frac{2.5}{s(s^2 + 3s + 25)}$$

La función de transferencia consta de tres componentes: uno con función de transferencia de 0.1, otro con una función de transferencia de $1/s$ y el último con función de transferencia de $25/(s^2 + 3s + 25)$. La función de transferencia de 0.1 dará un diagrama de Bode como el de la Figura 21.3 con $K = 0.1$. La función de transferencia de $1/s$ dará un diagrama de Bode como el de la Figura 21.4. La función de transferencia de $25/(s^2 + 3s + 25)$ se puede representar como $v_{2n}/(s^2 + 2z v_n s + v_{2n})$ con $v_n = 5$ rad/s y $z = 0.3$. El punto de rompimiento entonces será cuando $\omega = v_n = 5$ rad/s. La asíntota para la fase pasa a través de -90° en el punto de rompimiento, y es 0° cuando se tiene $(\omega/v_n) = 0.2$ y -180° cuando $(\omega/v_n) = 5$. En la Figura 21.8 se muestra el trazo resultante.

Figura 21.7 Construcción de un diagrama de Bode.



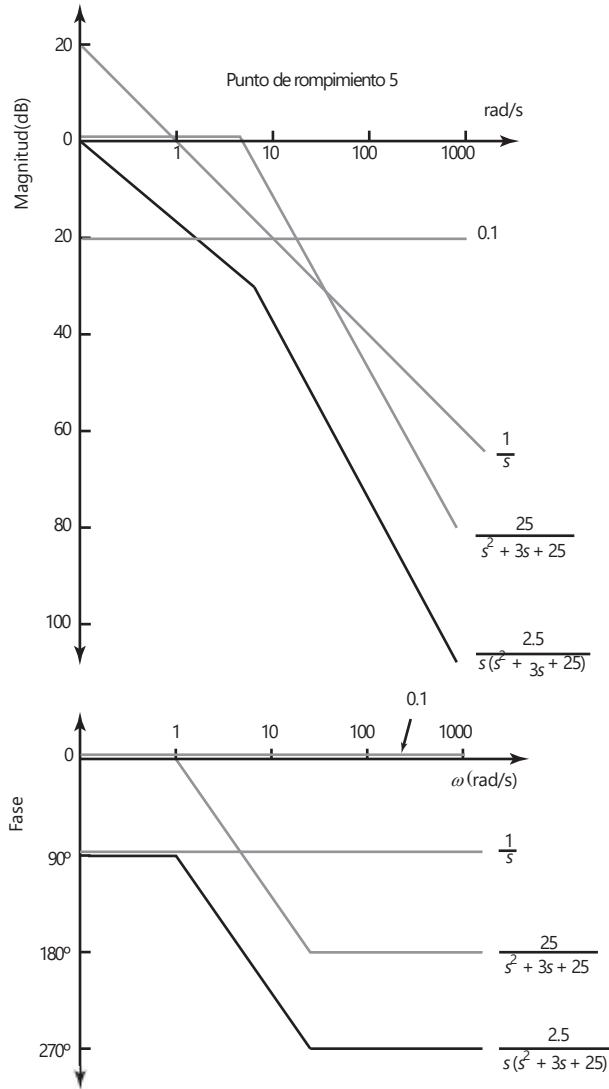
El método anterior para obtener un diagrama de Bode mediante la construcción de sus elementos constituyentes, al utilizar las aproximaciones de línea recta, se usa bastante, pero ahora en la era de la computación no es tan necesario.

21.4.6 Sistemas de identificación

Si se determina de manera experimental el diagrama de Bode para un sistema tomando en cuenta su respuesta a una entrada senoidal, entonces se puede obtener la función de transferencia para el sistema. Básicamente se trazan las asíntotas en la magnitud del diagrama de Bode y se consideran sus pendientes. La curva de ángulo de fase se utiliza para revisar los resultados obtenidos de los análisis de magnitud.

- 1 Si la pendiente en bajas frecuencias antes que la primera frecuencia de esquina es cero, entonces no hay elemento s o $1/s$ en la función de transferencia. El elemento K en el numerador de la función de transferencia se puede obtener del valor de la magnitud de baja frecuencia; la magnitud en $\text{dB} = 20 \log K$.
- 2 Si la pendiente inicial a bajas frecuencias es -20 dB/década , entonces la función de transferencia tiene un elemento $1/s$.
- 3 Si la pendiente se vuelve más negativa en una frecuencia de esquina de 20 dB/década , hay un término $(1 + s/\nu_c)$ en el denominador de la función de transferencia, con ν_c como la frecuencia de esquina en la cual ocurre el cambio. Dichos términos pueden ocurrir en más de una frecuencia de esquina.
- 4 Si la pendiente se vuelve más positiva a una frecuencia de esquina de 20 dB/década , hay un término $(1 + s/\nu_c)$ en el numerador de la función de transferencia, con ν_c como la frecuencia en la que ocurre el cambio. Estos términos pueden ocurrir en más de una frecuencia de esquina.
- 5 Si la pendiente en una frecuencia de esquina se vuelve más negativa de 40 dB/década , hay un término $(s^2/\nu_{z1} + 2zs/\nu_c + 1)$ en el denominador de la función de transferencia. El factor de amortiguamiento relativo z se

Figura 21.8 Construcción de un diagrama de Bode.

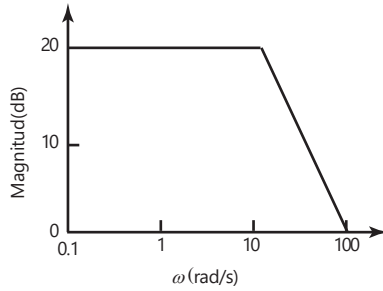


puede encontrar al tomar en cuenta el detalle del diagrama de Bode en una frecuencia de esquina, como en la Figura 21.6

- 6 Si la pendiente de la frecuencia de esquina se vuelve más positiva por 40 dB/década, hay un término $(s^2/\nu_c + 2Zs/\nu_c + 1)$ en el numerador de la función de transferencia. El factor de amortiguamiento relativo z se puede encontrar al considerar el detalle de la frecuencia del diagrama de Bode, como en la Figura 21.6.
- 7 Si la pendiente de baja frecuencia no es cero, el término K en el numerador de la función de transferencia se puede determinar al considerar el valor de la asíntota de baja frecuencia. En bajas frecuencias muchos términos en las funciones de transferencia pueden ser insignificantes y la ganancia en dB aproximada a $20 \log(K/\nu^2)$. Así, en $\nu = 1$ la ganancia en dB es aproximada a $20 \log K$.

Como ejemplo de lo anterior, considere el diagrama de magnitud de Bode que se muestra en la Figura 21.9. La pendiente inicial es 0 y así no hay término

Figura 21.9 Diagrama de Bode.



$1/s$ o s en la función de transferencia. La ganancia inicial es 20 y así $20 = 20 \log K$ y $K = 10$. La pendiente cambia por -20 dB/década a una frecuencia de 10 rad/s. Por lo tanto hay un término que es $(1 + s/10)$ en el denominador. La función de transferencia es así $10/(1 + 0.1s)$.

Como otro ejemplo, considere la Figura 21.10. Hay una pendiente inicial de -20 dB/década y así un término $1/s$. En la esquina de la frecuencia 1.0 rad/s hay un cambio de -20 dB/década en la pendiente y así un término $1/(1 + s/1)$. En la esquina de la frecuencia 10 rad/s hay un cambio de -20 dB/década más en la pendiente y así un término $1/(1 + s/10)$. En $\omega = 1$ la magnitud es 6 dB y por lo tanto $6 = 20 \log y$ y $K = 10^{6/20} = 2.0$. La función de transferencia es así $2.0/s(1 + s)(1 + 0.1s)$.

Figura 21.10 Diagrama de Bode.

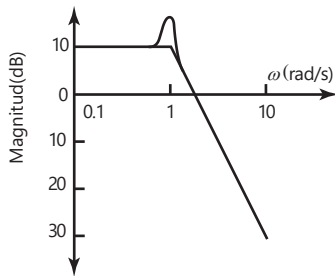
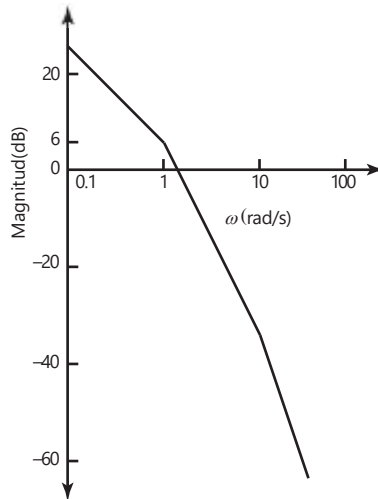


Figura 21.11 Diagrama de Bode.

En la Figura 21.11 se muestra otro ejemplo del diagrama de Bode que tiene una pendiente inicial de cero cambia a -40 dB/década a 10 rad/s. La magnitud inicial es 10 dB y así $10 = 20 \log K$ y $K = 10^{0.5} = 3.2$. El cambio de -40 dB/década a 10 rad/s significa que hay un término $(s^2/10^2 + 2zs/10 + 1)$ en el denominador. Por lo tanto, la función de transferencia es $3.2/(0.01s^2 + 0.2zs + 1)$. El factor de amortiguamiento se puede obtener por comparación en el diagrama de Bode en las frecuencias de esquina con la Figura 21.6, sube cerca de 6 dB por arriba de la esquina y éste corresponde al factor de amortiguamiento de 0.2 . La función de transferencia es entonces $3.2/(0.01s^2 + 0.04s + 1)$.

Para que esta relación de magnitud sea 0.707, la frecuencia de punto límite ν_c se dio por

$$0.707 = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_c^2(RC)^2}}$$

$$1 + \nu_c^2(RC)^2 = (1/0.707)^2 = 2$$

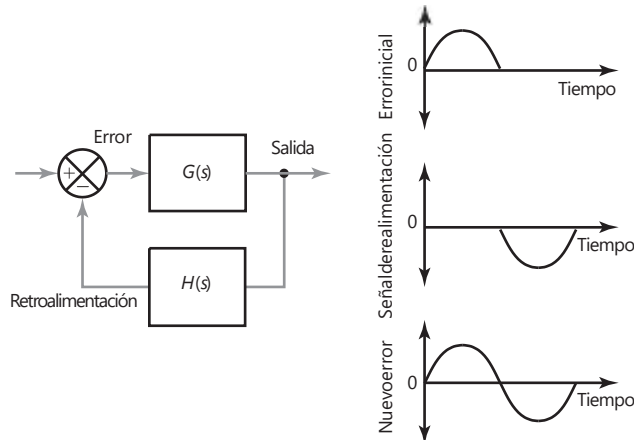
Por lo tanto $\nu_c = 1/RC$. A este circuito se le llama un filtro de paso bajo puesto que bajas frecuencias pasan a la salida con poca atenuación y las frecuencias más altas están atenuadas.

21.6

Estabilidad

Cuando la entrada a un sistema es senoidal, la salida también lo es y la frecuencia angular es la misma, pero puede tener una salida con una amplitud y una fase diferentes a las de la entrada. Considere un sistema de lazo cerrado con realimentación negativa (Figura 21.13) y sin entrada. Suponga que, por alguna razón, la señal de error del sistema es un pulso senoidal con rectificación de media onda y que esta señal llega a la salida, se realimenta y llega al elemento comparador sin modificar su amplitud, pero con un retardo de medio ciclo, es decir con un cambio de fase de 180° , como se observa en la figura. Cuando esta señal se resta a la señal de entrada, se obtiene una señal de error que continúa el pulso inicial rectificado media onda. Este pulso regresa por medio del lazo de realimentación y de nuevo llega a tiempo para continuar la señal. Entonces, existe una oscilación autosustentada.

Figura 21.13 Oscilaciones autosustentadas.



Para que las oscilaciones autosustentadas se produzcan es necesario que la función de respuesta en frecuencia del sistema tenga una magnitud de 1 y una fase de -180° . El sistema por el que pasa la señal es $G(s)$ en serie con $H(s)$. Si la magnitud es menor que 1, la magnitud de cada uno de los pulsos de media onda siguientes será cada vez menor, hasta que la oscilación desaparece. Si la magnitud es mayor que 1, la magnitud de cada pulso será mayor que la del precedente, la señal se incrementa y el sistema es inestable.

- 1 Un sistema de control oscila con amplitud constante si la magnitud que resulta del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es 1 y la fase es -180° .
- 2 Un sistema de control oscila con amplitud cada vez menor si la magnitud que resulta del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es menor que 1 y la fase -180° .
- 3 Un sistema de control oscila con amplitud cada vez mayor y por lo mismo es inestable, si la magnitud resultante del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es mayor que 1 y la fase es -180° .

Para tener un buen sistema de control estable en general es necesario que la magnitud de $G(s)H(s)$ sea significativamente menor que 1. Por lo general, se utiliza un valor entre 0.4 y 0.5. Además, el ángulo de fase debe estar entre -115° y -125° . Estos valores producen un sistema de control poco subamortiguado, el cual produce, con una entrada escalón, alrededor de 20 o 30% de sobrepaso con una razón de decaimiento de cerca de 3 a 1 (consulte la explicación de estos términos en la sección 19.5).

Siempre es interesante saber qué tan estable es un sistema de control y si no tiene posibilidad de oscilar cuando se presenten pequeñas perturbaciones. El término **margen de ganancia** se aplica al factor por el cual se debe multiplicar la relación de la magnitud cuando la fase es de -180° para que tenga el valor 1 y esté al borde de la inestabilidad. El término **margen de fase** se refiere al número de grados que el ángulo de fase es numéricamente menor que -180° cuando la magnitud es 1. Estas reglas significan un margen de ganancia entre 2 y 2.5 y un margen de fase entre 45° y 65° para un buen sistema de control estable.

Resumen

Se puede cubrir desde el dominio de s hasta el **dominio de frecuencia** al reemplazar s por $j\omega$. La **función de respuesta en frecuencia** es la función de transferencia cuando se transforma dentro del dominio de frecuencia.

La respuesta en frecuencia de un sistema es el conjunto de valores de la magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase ϕ que ocurre cuando una señal de entrada senoidal varía en un rango de frecuencias. Esto se puede expresar como dos gráficas, una de la magnitud $|G(j\omega)|$ trazada contra la frecuencia angular ω y la otra de la fase ϕ trazada contra ω . La magnitud y la frecuencia angular están determinadas mediante escalas logarítmicas. Este par de gráficas se conoce como **diagrama de Bode**.

Se puede obtener el diagrama de Bode de un sistema al sumar los diagramas de Bode de las magnitudes de los elementos constituyentes. Asimismo, el trazo de la fase se obtiene al sumar las fases de los elementos constituyentes.

La **resonancia pico** M_p es el valor máximo de la magnitud. El **ancho de banda** es la banda de frecuencia entre la cual la magnitud no cae por debajo de -3dB , las frecuencias en las cuales esto ocurre son llamadas frecuencias de punto límite.

Para que ocurran las oscilaciones autosustentadas con un sistema de realimentación, es decir que estén en el límite de **inestabilidad**, se debe contar con un sistema que tiene una función de respuesta en frecuencia con una magnitud de 1 y una fase de -180° . El **margen de ganancia** es el factor por el cual el radio de magnitud debe multiplicarse cuando la fase es -180° para darle un valor de 1 y así estar en el límite de inestabilidad. El **margen de fase** es el número de grados mediante los cuales el ángulo de fase es numéricamente más pequeño que -180° cuando la magnitud es 1.

Problemas

21.1 ¿Cuáles son las magnitudes y los ángulos de fase de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes?

$$(a) \frac{5}{s+2} \quad (b) \frac{2}{s(s+1)} \quad (c) \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

21.2 ¿Cuál es la respuesta en estado estable de un sistema cuya función de transferencia es $1/(s+2)$, si su entrada es la señal senoidal $3 \sin(5t + 30^\circ)$?

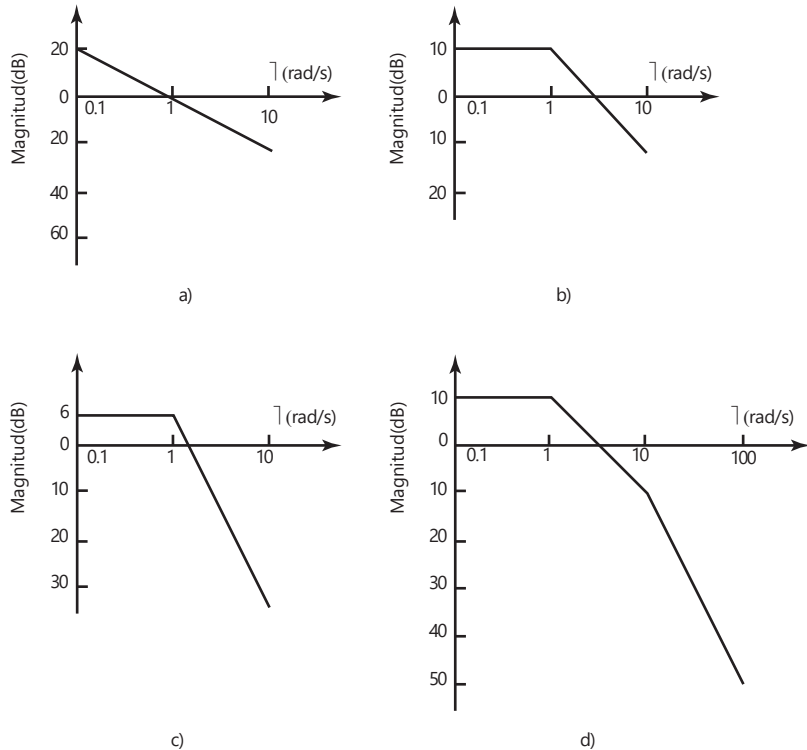
21.3 ¿Cuál es la respuesta en estado estable de un sistema con una función de transferencia $5/(s^2 + 3s + 10)$, si su entrada es la señal senoidal $2 \sin(2t + 70^\circ)$?

21.4 Determine los valores de las magnitudes y ángulos de fase, a las frecuencias angulares de i) 0 rad/s, ii) 1 rad/s, iii) 2 rad/s y iv) ∞ rad/s para sistemas con las siguientes funciones de transferencia: a) $1/[s(2s+1)]$ y b) $1/(3s+1)$.

21.5 Dibuje las asíntotas del diagrama de Bode para los sistemas que tienen funciones de transferencia: a) $10/[s(0.1s+1)]$ y b) $1/[(2s+1)(0.5s+1)]$.

21.6 Obtenga las funciones de transferencia de los sistemas dados en el diagrama de Bode de la Figura 21.14.

Figura 21.14 Problema 21.6.





Capítulo veintidós

Controladores en lazo cerrado

Objetivos

Después de estudiar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Explicar el término error en estado estable.
- Explicar la operación del modo de control de dos posiciones.
- Predecir el comportamiento de los sistemas con control proporcional, integral, derivativo, proporcional integral, proporcional derivativo y PID.
- Describir cómo operan los controladores digitales.
- Explicar cómo se pueden sintonizar los controladores.

22.1

Procesos continuos y discretos

En esencia, el **control en lazo abierto** es sólo un control de encendido-apa-gado; por ejemplo, para calentar una habitación, un calentador eléctrico se enciende o se apaga. En los **sistemas de control en lazo cerrado**, el contro-lador se usa para comparar la salida de un sistema con la condición requerida y convertir el error que resulta en una acción de control diseñada para reducir el error. Éste puede deberse a algún cambio en las condiciones que se están controlando, o a la modificación del valor de interés; por ejemplo, cuando en el sistema se introduce una señal de entrada tipo escalón, para cambiar el valor establecido por uno nuevo. En este capítulo se estudiarán las maneras en que los controladores pueden reaccionar a las señales de error, es decir los **modos de control**, que es como se les conoce, y que se presentan en procesos conti-nuos. Los controladores pueden ser sistemas neumáticos o sistemas basados en amplificadores operacionales, aunque los sistemas de cómputo están reempla-zando con rapidez a muchos de estos sistemas. El término **control digital directo** se usa cuando una computadora está en el lazo de realimentación y se encarga del control. Este capítulo trata el tema del control en lazo cerrado.

Muchos procesos no sólo necesitan controlar que una variable (por ejem-plo, la temperatura) tenga un valor determinado, sino que también incluyen una secuencia de operaciones. Es el caso de una lavadora (sección 1.5.5) donde se deben realizar varias acciones en una secuencia predeterminada. Otro ejemplo es la fabricación de un producto que incluye un sistema contro-lado que ensambla varias partes en una secuencia específica. La secuencia de operaciones puede estar **basada en el reloj** o **basada en los eventos**, o una combinación de ambas. En el primer caso las acciones se realizan en tiempos específicos, y en el segundo cuando la realimentación indica que ha ocurrido un evento en particular.

En muchos procesos puede haber una mezcla de control continuo y discre-to. Por ejemplo, en una lavadora de ropa habrá un control de secuencia para las varias partes del ciclo de lavado con realimentación de control en lazo de la temperatura del agua caliente y el nivel del agua.

22.1.1 Sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado

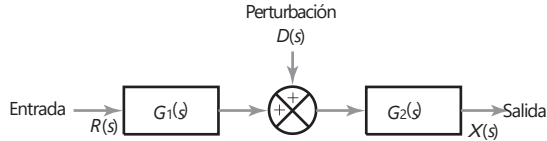
Los sistemas en lazo cerrado difieren de los sistemas en lazo abierto en que tienen retroalimentación. Un sistema en lazo abierto es aquel en el que la señal de entrada no depende automáticamente del proceso real de salida. En un sistema de lazo cerrado hay una retroalimentación desde la salida para modificar la entrada de manera que el sistema mantiene la salida requerida.

Una consecuencia de tener retroalimentación es que ahí se da una reducción de los efectos de señales de perturbación en el sistema. Una señal de perturbación es el tipo de señal que no se desea porque afecta la señal de salida de un sistema. Todos los sistemas físicos están sujetos a algunas formas de señales extrañas durante su operación. En el caso de un motor eléctrico este tipo de señal podría ser el ruido de la escobilla o del interruptor.

Considere el efecto de perturbaciones externas en toda la ganancia de un sistema en lazo abierto. La Figura 22.1 muestra un sistema en lazo abierto de dos elementos, con una perturbación que provoca una entrada entre los dos elementos. Para una entrada de referencia $R(s)$ al sistema, el primer elemento proporciona una salida de $G_1(s)R(s)$. A esto se le agregó la perturbación $D(s)$ para dar una entrada de $G_1(s)R(s) + D(s)$. Entonces toda la salida $X(s)$ del sistema será

$$X(s) = G_2(s)G_1(s)R(s) + G_2(s)D(s)$$

Figura 22.1 Perturbación en un sistema de lazo abierto.



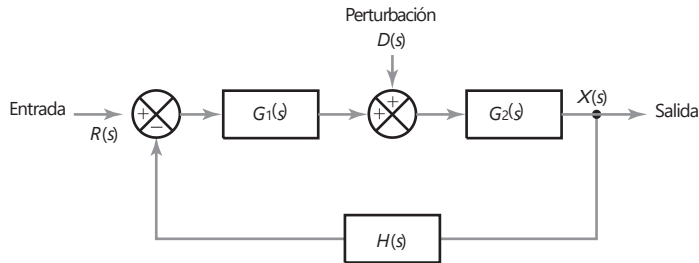
Para el sistema comparable con retroalimentación negativa (Figura 22.2), la entrada del primer elemento de adelanto $G_1(s)$ es $R(s) - H(s)X(s)$ y por lo tanto su salida es $G_1(s)[R(s) - H(s)X(s)]$. La entrada a $G_2(s)$ es $G_1(s)[R(s) - H(s)X(s) + D(s)]$ y por lo tanto su salida es

$$X(s) = G_2(s)G_1(s)[R(s) - H(s)X(s) + D(s)]$$

Entonces

$$X(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

Figura 22.2 Perturbación en un sistema de lazo cerrado.



La comparación de lo anterior con la ecuación del sistema de lazo abierto indica que con el sistema de lazo cerrado el efecto de la perturbación sobre la salida del sistema se ha reducido en un factor de $[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]$. Al haber retroalimentación el efecto de una perturbación se reduce.

22.2

Terminología

Los siguientes términos por lo común se utilizan al estudiar los controladores en lazo cerrado.

22.2.1 Retraso

En todos los sistemas de control hay **retrasos**; esto es, el cambio en una condición que se está controlando no produce de manera inmediata una respuesta correctiva del sistema de control. Esto se debe a que el sistema requiere tiempo para producir las respuestas necesarias. Por ejemplo, cuando se controla la temperatura de una habitación mediante un sistema de calefacción central habrá un retraso entre el momento en que la temperatura baja a menos de la temperatura requerida y el momento en que el sistema de control responde y enciende el calentador. Éste no es el único retraso. Aun cuando el sistema de control responde, la respuesta de la temperatura de la habitación se retrasa porque pasa el tiempo para que el calor se transfiera del calentador al aire de la habitación.

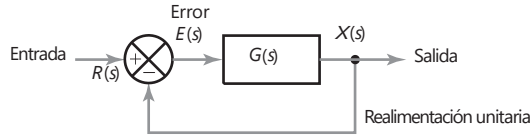
22.2.2 Error en estado estable

Un sistema de control en lazo cerrado utiliza una medida del sistema de salida y una comparación de su valor con la salida deseada para generar una señal de error. En el controlador se produce una señal de error como resultado de un cambio en la variable que se está controlando, o en el valor de entrada establecido. Por ejemplo, se introduce una señal tipo rampa al sistema a fin de que la variable controlada aumente de manera constante con el tiempo. Cuando ocurre un cambio hay algunos efectos transitorios que, sin embargo, desaparecen con el tiempo. El término **error en estado estable** se refiere a la diferencia entre el valor de entrada establecido y la salida una vez que todos los transitorios desaparecen. Es una medida de la exactitud del sistema de control para seguir el valor de entrada establecido. Siempre que se presente un error, la salida *no* está en la salida deseada.

Considere un sistema de control con realimentación unitaria (Figura 22.1). Si la entrada de referencia es $R(s)$, la salida es $X(s)$. La señal de realimentación es $X(s)$, por lo que la señal de error es $E(s) = R(s) - X(s)$. Si $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa, entonces para el sistema completo con realimentación unitaria se tiene

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Figura 22.3 Realimentación unitaria.



Por lo tanto,

$$E(s) = R(s) - X(s) = R(s) - \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}R(s)$$

Por lo tanto, el error depende de $G(s)$.

Para determinar el error en estado estable, se determina cuál es el error e como función del tiempo y después se determina cuál es el valor del error cuando todos los transitorios desaparecen; es decir, el error cuando t tiende a infinito. Si bien es posible obtener la inversa de $E(s)$ y luego calcular su valor cuando $t = \infty$, existe un método más sencillo basado en el **teorema del valor final** (apéndice A), esto involucra calcular el valor de $sE(s)$ cuando s tiende a cero.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Para ilustrar lo anterior, considere un sistema con realimentación unitaria con función de transferencia de la trayectoria directa $k/(ts + 1)$, y sujeto a una señal tipo escalón unitario $1/s$.

$$s \rightarrow 0 \quad s \rightarrow 0 \quad \frac{1}{1 + k/(ts + 1)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + k}$$

Entonces existe un error en estado estable; la salida del sistema nunca alcanza el valor predeterminado. Al aumentar la ganancia k del sistema se puede reducir este error en estado estable.

La trayectoria directa puede ser un controlador con una ganancia de k y un sistema con una función de transferencia $1/(ts + 1)$. Esa ganancia de controlador es conocida como controlador proporcional. El error en estado estable en este caso se denomina **reajuste**, que se puede minimizar al aumentar la ganancia.

Sin embargo, si el sistema con realimentación unitaria tuviera una función de transferencia de la trayectoria directa $k/s(ts + 1)$ y en él se introdujera una entrada escalón, el error en estado estable sería

$$s \rightarrow 0 \quad s \rightarrow 0 \quad \frac{1}{1 + k/s(ts + 1)} \frac{1}{s} = 0$$

En este sistema no existe error en estado estable. En este caso, la trayectoria directa puede ser un controlador con una ganancia de k/s y un sistema con una función de transferencia $1/(ts + 1)$. Esta ganancia de controlador se conoce como controlador integral y no produce reajuste. Por lo tanto, al combinar un controlador integral con uno proporcional es posible eliminar el reajuste. Al agregar un controlador derivativo éste permite al controlador responder más rápido a los cambios.

22.2.3 Modos de control

Una unidad de control puede reaccionar de varias maneras ante una señal de error y proporcionar señales de salida para que actúen los elementos correctores:

- 1 En el *modo de control de dos posiciones*, el controlador es en esencia un interruptor activado por la señal de error y proporciona sólo una señal correctora tipo encendido-apagado.
- 2 El *modo de control proporcional* (P) produce una acción de control que es proporcional al error. La señal de corrección aumentará en la medida en que lo haga el error. Si el error disminuye, también disminuye la magnitud de la corrección y el proceso de corrección es más lento.
- 3 El *modo de control derivativo* (D) produce una acción de control que es proporcional a la rapidez con la que cambia el error. Cuando hay un cambio súbito en la señal de error, el controlador produce una señal de corrección de gran magnitud; cuando el cambio es gradual, sólo se produce una pequeña señal de corrección. Se puede considerar que el control derivativo es una forma de control anticipativo, toda vez que al medir la rapidez con la que cambia el error se anticipa la llegada de un error más grande y se aplica la corrección antes de que llegue. El control derivativo no se usa solo, sino siempre en combinación con el control proporcional y, con frecuencia, con el control integral.
- 4 El *modo de control integral* (I) produce una acción de control que es proporcional a la integral del error en el tiempo. Entonces una señal de error constante producirá una señal de corrección creciente. La señal de corrección seguirá aumentando mientras el error persista. Se puede considerar que el controlador integral "mira hacia atrás", suma todos los errores y responde a los cambios que ocurren.
- 5 *Combinación de modos de control*: proporcional derivativo (PD), proporcional integral (PI) y proporcional integral derivativo (PID). El término **controlador de tres términos** se usa para el modo PID.

En las siguientes secciones de este capítulo se estudiarán estos cinco modos de control. El controlador A puede lograr estos modos mediante circuitos neumáticos, circuitos electrónicos analógicos con amplificadores operacionales, o mediante la programación de un microprocesador o una computadora.

22.3

Modo de control de dos posiciones

Un ejemplo de **modo de control de dos posiciones** es el termostato bimetalico (Figura 2.46), el cual puede usarse con un sistema de control de temperatura sencillo. Éste es un interruptor que se enciende o apaga, dependiendo de la temperatura. Si la temperatura de la habitación es mayor que la requerida, el par bimetalico está en la posición de apagado y también el calentador. Si la temperatura de la habitación baja a menos de la requerida, el par bimetalico cambia a la posición de encendido y el calentador se enciende. En este caso, el controlador sólo puede estar en dos posiciones, apagado o encendido, como se ve en la Figura 22.4a).

La acción de control del modo de dos posiciones es discontinua. En consecuencia ocurren oscilaciones de la variable controlada en torno a la condición requerida. Esto se debe a retrasos en la respuesta del sistema de control y en el proceso. Por ejemplo, en el caso del control de temperatura en un sistema de calefacción central doméstico, cuando la temperatura de la habitación baja a menos del nivel requerido, el tiempo que pasa antes de que el sistema de control responda y encienda el calentador es muy pequeño en comparación con el tiempo que transcurre antes de que el calentador empiece a tener efecto en la temperatura de la habitación. Mientras tanto la temperatura desciende aún más. Sucede lo con-

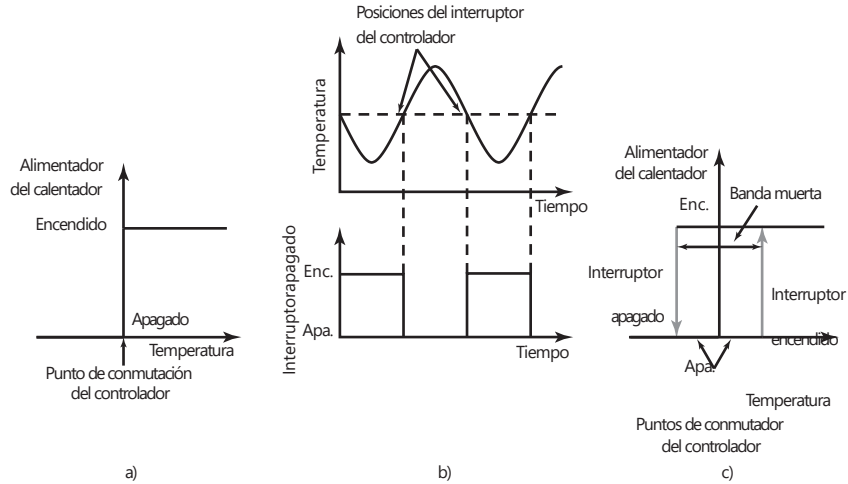


Figura 22.4 Control de dos posiciones.

trario cuando la temperatura aumenta al valor requerido. Como pasa un tiempo antes de que el sistema de control reaccione y apague el calentador, y más tiempo para que se enfríe el calentador y deje de calentar la habitación, la temperatura sobrepasa el valor requerido. El resultado es que la temperatura de la habitación oscila arriba y abajo de la temperatura requerida (Figura 22.4b).

Con el sencillo sistema de dos posiciones antes descrito existe el problema de que cuando la temperatura de la habitación ronda el valor predeterminado, el termostato alterna continuamente entre encendido y apagado, reaccionando a pequeños cambios en la temperatura. Para evitar lo anterior, en vez de usar sólo un valor de temperatura para que el controlador encienda o apague el calentador, se utilizan dos valores y el calentador se enciende a una temperatura menor que a la que se apaga (Figura 22.4c). El término **banda muerta** se refiere a los valores comprendidos entre los valores de encendido y apagado. Una banda muerta grande produce grandes fluctuaciones de la temperatura alrededor del valor predeterminado; una banda muerta pequeña produce un aumento en la frecuencia de conmutación. El elemento bimetálico de la Figura 2.46 tiene un imán permanente que hace contacto para la conmutación; este imán tiene el efecto de producir la banda muerta.

Las acciones del control de dos posiciones tienden a usarse cuando los cambios se producen de manera muy lenta; es decir, en un proceso cuya capacitancia es grande. En el caso del calentamiento de una habitación, el efecto de encender o apagar el calentador para modificar la temperatura produce un cambio lento. El resultado es una oscilación de periodo largo. Si bien el control de dos posiciones no es muy preciso, los dispositivos que utiliza son sencillos y, por lo mismo, es bastante barato. El control de encendido/apagado no se limita a interruptores mecánicos como los pares bimetálicos o los relevadores; mediante el uso de circuitos con tiristores se logra una conmutación rápida (sección 9.3.2); un circuito así puede usarse para controlar la velocidad de un motor y amplificadores operacionales.

2.4 Modo de control proporcional

En el control de dos posiciones, la salida es una señal de encendido o apagado sin importar la magnitud del error. En el **modo proporcional**, la magnitud de la salida del controlador es proporcional al tamaño del error, entre más grande sea el error, más grande será la salida del controlador. Es decir, el

elemento de corrección del sistema de control, por ejemplo una válvula, recibe una señal que es proporcional a la magnitud de la corrección requerida. Así

$$\text{salida del controlador} = K_P e$$

donde e es el error y K_P es una constante. Así, al tomar la transformada de Laplace,

$$\text{salida del controlador}(s) = K_P E(s)$$

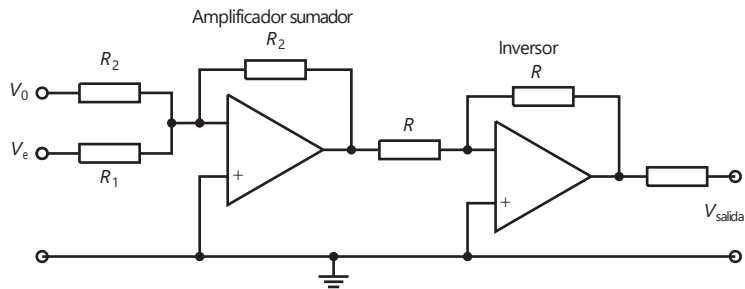
de manera que K_P es la función de transferencia del controlador.

22.4.1 Controlador proporcional electrónico

Un amplificador operacional sumador con un inversor se puede usar como controlador proporcional (Figura 22.5). Para un amplificador sumador se tiene (sección 3.2.3)

$$V_{\text{salida}} = -R_f a \frac{V_0}{R_2} + \frac{V_e}{R_1}$$

Figura 22.5 Controlador proporcional.



La entrada al amplificador sumador a través de R_2 es el valor de voltaje de error cero V_0 , es decir el valor establecido, y la entrada a través de R_1 es la señal de error V_e . Sin embargo, cuando el resistor de realimentación $R_f = R_2$, la ecuación se convierten en

$$V_{\text{salida}} = -\frac{R_2}{R_1} V_e - V_0$$

Si la salida del amplificador sumador pasa por un inversor; es decir, por un amplificador operacional cuya resistencia de realimentación es igual a la resistencia de entrada, entonces:

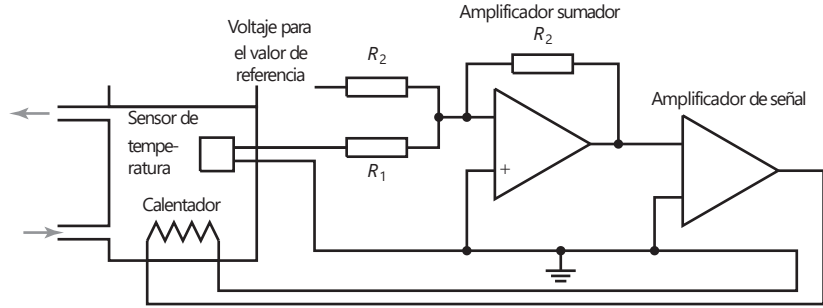
$$V_{\text{salida}} = \frac{R_2}{R_1} V_e + V_0$$

$$V_{\text{salida}} = K_P V_e + V_0$$

Donde K_P es la constante de proporcionalidad. El resultado es un controlador proporcional.

Como ejemplo, la Figura 22.6 muestra un sistema de control proporcional para controlar la temperatura del líquido en un recipiente en el momento en que se bombea.

Figura 22.6 Controlador proporcional para el control de temperatura.

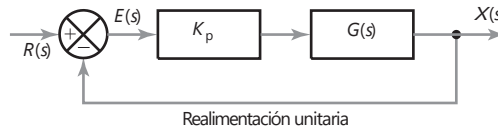


22.4.2 Respuesta del sistema

En el control proporcional hay un elemento de ganancia cuya función de transferencia es K_P en serie con el elemento en la trayectoria directa $G(s)$ (Figura 22.7). El error es entonces:

$$\frac{R(s)}{1 + K_P G(s)}$$

Figura 22.7 Sistema con control proporcional.



y si la entrada es un escalón, el error en estado estable es

$$s=0 \Rightarrow \frac{1}{1 + K_P G(s)}$$

Lo anterior tendrá una magnitud finita; es decir, siempre habrá un error en estado estable. A valores pequeños de K_P corresponden errores de estado estable grandes, pero también respuestas estables. A valores grandes de K_P corresponden errores de estado estable pequeños, aunque una mayor tendencia a la inestabilidad.

22.5

Control derivativo

En el **control derivativo** el cambio de la salida del controlador respecto al valor de referencia es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la señal de error. Esto se representa mediante la ecuación

$$\text{salida del controlador} = K_D \frac{de}{dt}$$

K_D es la constante de proporcionalidad. La función de transferencia se obtiene al tomar las transformadas de Laplace, así

$$\text{salida del controlador} (\xi) = K_D s E(\xi)$$

Por lo que la función de transferencia es $K_D s$.

En el control derivativo, en cuanto la señal de error empieza a cambiar existe la posibilidad de que el controlador produzca una salida de gran mag-

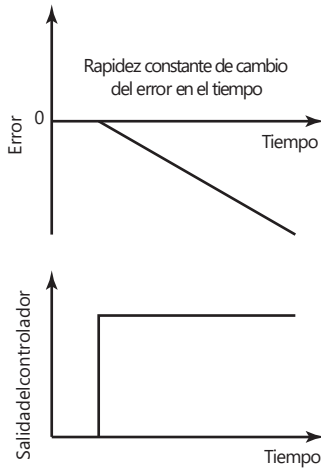
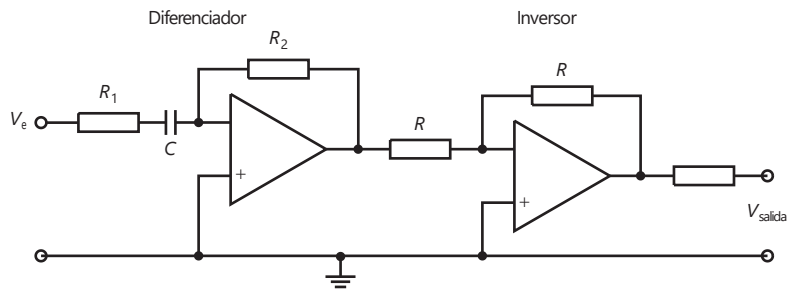


Figura 22.8 Control derivativo.

nitud, ya que es proporcional a la rapidez con que cambia la señal de error, y no a su valor. Por lo tanto, se producen respuestas iniciales rápidas. La Figura 22.8 muestra la salida que produce el controlador cuando la rapidez con que cambia la señal de error en el tiempo es constante. La salida del controlador es constante porque la tasa de cambio también es constante y se produce en cuanto se presenta la desviación. Por otra parte, los controladores derivativos no responden al error en estado estable, pues en este caso la tasa de cambio del error en el tiempo es cero. Por lo anterior, el control derivativo siempre se combina con el control proporcional; la parte proporcional responde a todas las señales de error, incluso señales estables, en tanto que la parte derivativa responde a la tasa del cambio. La acción de derivación también puede ser un problema si la medición del proceso variable da una señal de ruido, las fluctuaciones rápidas del ruido resultan en las salidas que serán vistas por el controlador tan rápido como cambie en el error y así dará un aumento a las entradas importantes desde el controlador.

Figura 22.9 Controlador derivativo.

La Figura 22.9 muestra el circuito de un controlador derivativo electrónico, el cual cuenta con un amplificador operacional configurado como diferenciador, seguido de otro amplificador operacional configurado como inversor. El tiempo derivativo, K_D , es igual a R_2C .



22.5.1 Control proporcional derivativo (PD)

El control derivativo nunca se utiliza solo ya que no es capaz de producir una salida cuando hay una señal de error constante, por lo que no es posible una corrección. Por ello, en forma invariable se utiliza junto con el control proporcional.

Cuando de manera conjunta se utilizan el control proporcional y el control derivativo, el cambio en la salida del controlador respecto al valor de referencia está dado por

$$\text{salida del controlador} = K_{pe} + K_D \frac{de}{dt}$$

K_P es la constante de proporcionalidad y K_D la constante derivativa, de/dt es la tasa de cambio de error. El sistema tiene una función de transferencia dada por

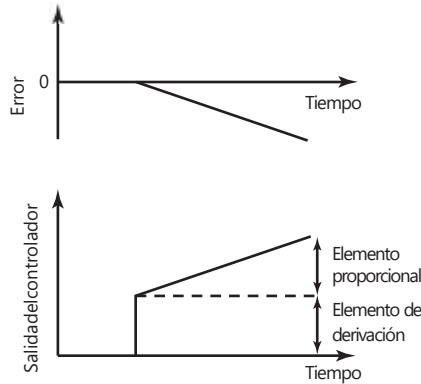
$$\text{salida del controlador } 1s^2 = K_P E 1s^2 + K_D s E 1s^2$$

Por lo tanto, la función de transferencia es $K_P + K_D s$. En general, se expresa como

$$\text{función de transferencia} = K_D a s + 1$$

donde $T_D = K_D/K_P$, es la **constante de tiempo derivativa**.

Figura 22.10 Control PD.



La Figura 22.10 ilustra cómo varía la salida del controlador cuando hay un error que cambia constantemente. Se observa un rápido cambio inicial en la salida del controlador debido a la acción derivativa seguida por el cambio gradual de la acción proporcional. Esta forma de control puede tratar con cambios de proceso rápidos.

22.6 Control integral

El **modo de control integral** es en el que la tasa de cambio de la salida de control I es proporcional a la señal de error de entrada e :

$$\frac{dI}{dt} = K_I e$$

K_I es la constante de proporcionalidad y tiene unidades de $1/s$. Al integrar la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_{I_0}^{I_{salida}} dI = \int_0^t K_I e dt$$

$$I_{salida} - I_0 = K_I \int_0^t e dt$$

$$\frac{I_{salida}}{s} - \frac{I_0}{s} = \frac{1}{s} K E \frac{1}{s^2}$$

I_0 es la salida del controlador en el tiempo cero, I_{sal} es la salida en el tiempo t . La función de transferencia se obtiene al tomar la transformada de Laplace. Entonces función de transferencia = $\frac{K}{s}$

y así,

$$\frac{1}{s^2}$$

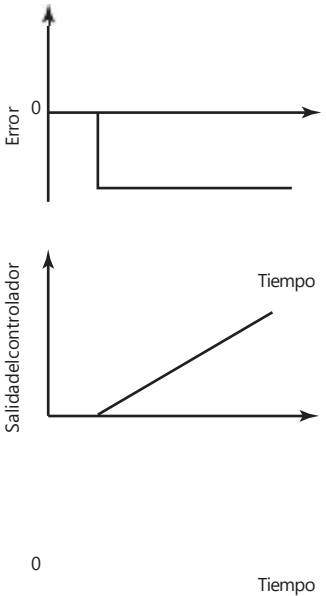


Figura 22.11 Control integral.

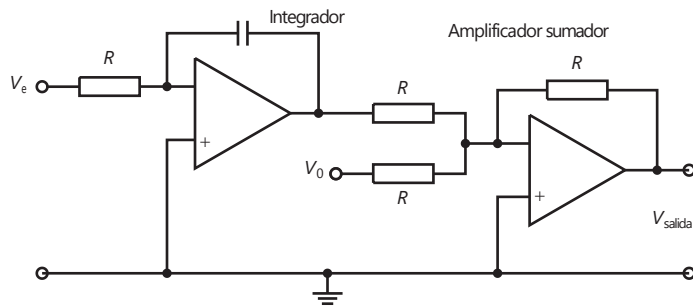
La Figura 22.11 ilustra la acción de un controlador integral cuando hay una señal de error constante como entrada al controlador. Estas gráficas se pueden observar de dos formas. Cuando la salida del controlador es constante, el error es cero; cuando la salida del controlador varía a una tasa constante, el error tiene un valor constante. La otra manera de interpretar las gráficas es en términos del área bajo la curva del error.

área bajo la curva del error entre $t = 0$ y $t = \infty$ $\int_0^{\infty} e dt$

Hasta el momento que se produce el error, el valor de la integral es cero y $I_{\text{salida}} = I_0$. Cuando ocurre el error mantiene un valor constante. Por lo tanto, el área bajo la curva aumenta cuando se incrementa el tiempo. Dado que el área aumenta a una tasa constante, la salida del controlador también aumenta a una tasa constante.

La Figura 22.12 muestra la forma del circuito usado para un controlador integral electrónico, el cual consiste en un amplificador operacional conectado como integrador y seguido por otro amplificador operacional conectado como un sumador para añadir la salida del integrador a la de la salida del controlador a tiempo cero. K_1 es $1/R_1C$.

Figura 22.12 Controlador integral.



22.6.1 Controlador proporcional integral (PI)

El modo de control integral por lo común no se utiliza solo, con frecuencia se usa junto con el modo proporcional. Cuando una acción integral se suma a un sistema de control proporcional, la salida del controlador está dada por

$$\text{salida del controlador} = K_P e + K_I \int e dt$$

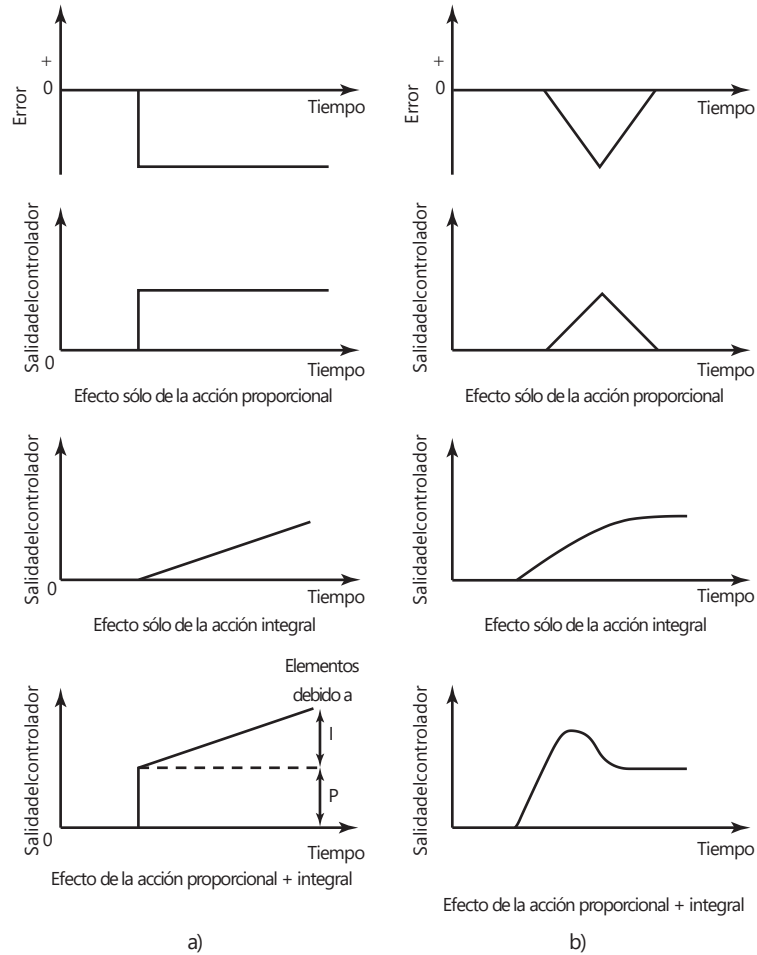
donde K_P es la constante de control proporcional, K_I es la constante de control integral y e el error e . La función de transferencia es entonces

$$\text{función de transferencia} = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = \frac{K_P (s + 1/T_1)}{s}$$

donde $T_1 = K_P/K_I$ y es la **constante de tiempo integral**.

La Figura 22.13a) muestra cómo reacciona el sistema ante un cambio abrupto en un error constante. El error da lugar a una señal de salida del controlador proporcional, la cual permanece constante ya que el error no cambia. A esta acción se sobrepone una señal de salida del controlador que aumenta de manera constante y que se produce por la acción integral. La Figura 22.13b) muestra los efectos de las acciones proporcional e integral cuando se crea una señal de error que aumenta desde un valor de cero y luego disminuye otra vez hasta llegar a cero. Con la acción proporcional por sí sola el controlador lo único que hace es reflejar ese cambio para al final llegar de nuevo a su valor de referencia original. La acción integral del controlador aumenta en proporción con el aumento del área bajo la curva error-tiempo y como, aun cuando el error regrese a cero, todavía queda un valor del área, también existe un cambio en la salida del controlador que persiste después de que el error desaparece.

Figura 22.13 Control PI.



22.7 Controlador PID

Al combinar los tres modos de control (proporcional, integral y derivativo) se obtiene un controlador que no tiene desviación en el error y disminuye la tendencia a producir oscilaciones. Este tipo de controlador se conoce como **controlador de tres modos** o **controlador PID**. La ecuación que describe su comportamiento es

$$\text{salida del controlador} = K_P e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt}$$

donde K_P es la constante proporcional, K_I la constante integral y K_D la constante derivativa. Al aplicar la transformada de Laplace, se obtiene:

$$\text{salida del controlador} (s) = K_P E \frac{1}{s} + \frac{K_I E}{s^2} + s K_D \frac{de}{dt}$$

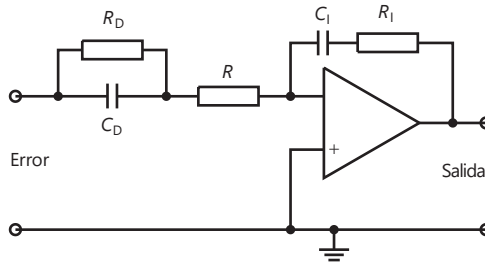
y, por lo tanto,

$$\text{función de transferencia} = K_P e + \frac{1}{s} K_I + s K_D = K_P a \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + T_{ch}$$

22.7.1 Circuitos PID con amplificadores operacionales

Al combinar cada uno de los circuitos descritos en este capítulo para los modos proporcional, integral y derivativo se obtiene un controlador de tres modos. Sin embargo, se puede obtener el mismo controlador de manera más práctica con un solo amplificador operacional. La Figura 22.14 muestra este circuito. La constante proporcional K_P es $R_1/(R + R_D)$; la constante derivativa K_D es $R_D C_D$ y la constante de integración K_I es $1/R_1 C_1$.

Figura 22.14 Circuito PID.



22.8

Controladores digitales

La Figura 22.15 muestra la base de un sistema de control digital directo, que se utiliza en procesos continuos. El término **control digital directo** se usa cuando el controlador digital, básicamente un microprocesador, controla el sistema de control en lazo cerrado. El controlador recibe las señales de entrada de los sensores, ejecuta los programas de control y proporciona una señal que envía a los elementos de corrección. Estos controladores requieren señales de entrada digitales, procesan la información en forma digital y producen una señal de salida digital. Dado que muchos sistemas de control realizan mediciones analógicas, se utiliza un convertidor analógico a digital (ADC) para convertir las señales de entrada. Un reloj envía un pulso a intervalos regulares e indica en qué momento el ADC debe tomar muestras de la variable controlada. Estas muestras se convierten en señales digitales que el microprocesador compara con la magnitud del valor de referencia para producir la señal de error. El microprocesador inicia, entonces, un modo de control que procesa la señal de error y produce una señal de salida digital. El modo de control que utiliza el microprocesador está determinado por el programa de instrucciones que use para procesar las señales digitales, es decir el *software*. La salida digital se utiliza para iniciar la acción de corrección, lo que en general sucede después de procesarla en un convertidor digital a analógico (DAC), dado que los elementos de corrección por lo común requieren señales analógicas.

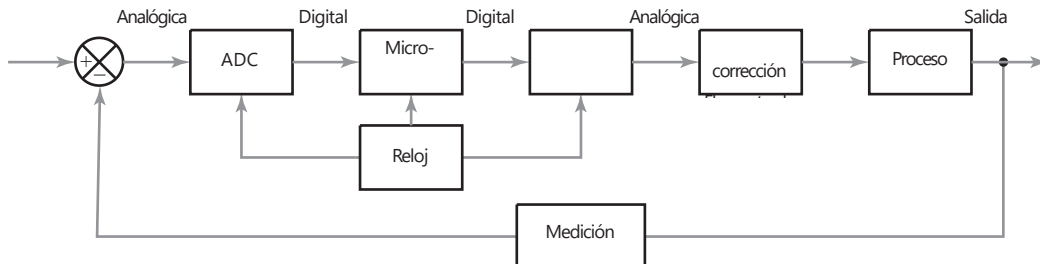


Figura 22.15 Sistema digital de control en lazo cerrado.

El controlador digital realiza básicamente el siguiente ciclo de eventos:

- 1 Muestra la variable de medición.
- 2 Compara con el valor predeterminado y se establece el error.
- 3 Realiza cálculos basados en la magnitud del error, así como en valores guardados de señales de entrada y salida anteriores para obtener la señal de salida.
- 4 Envía la señal de salida al DAC.
- 5 Espera hasta el siguiente tiempo de muestreo para entonces repetir el ciclo.

Los microprocesadores utilizados como controladores aventajan a los controladores analógicos en que la acción de control (por ejemplo, proporcional o de tres modos) se puede alterar con sólo modificar el software de cómputo; no es necesario cambiar el hardware ni el cableado eléctrico. Sin duda el programa de cómputo es capaz de modificar la estrategia de control durante una acción de control en respuesta a la situación que se desarrolla.

También tienen otras ventajas. En el control analógico se requieren controles asignados en forma específica a cada uno de los procesos que se controlan. En cambio, con un microprocesador es posible controlar varios procesos independientes realizando muestreos con un multiplexor (sección 4.4). El control digital proporciona mayor precisión que el analógico dado que las características de amplificadores y demás componentes que se utilizan en los sistemas analógicos varían con el tiempo y la temperatura, y presentan corrimiento; en cambio, como el control digital funciona con base en señales sólo del tipo encendido-apagado, no sufre el corrimiento de la misma manera.

22.8.1 Implementación de los modos de control

Para obtener un controlador digital que proporcione un modo de control en particular es necesario crear un programa adecuado para el controlador. Este programa debe indicar cómo se procesará la señal de error digital en un momento dado para obtener el valor de salida correcto para el siguiente elemento de corrección. Este procesamiento puede involucrar la señal de entrada presente junto con las señales de entrada y salida anteriores. El programa, por lo tanto, pide al controlador resolver una ecuación en diferencias (sección 4.6).

La función de transferencia de un controlador analógico PID es:

$$\text{función de transferencia} = K_P + \frac{1}{s}K_I + sK_D$$

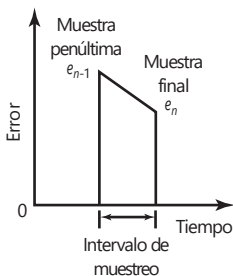


Figura 22.16 Señales de error.

Una multiplicación por s equivale a una diferenciación. Sin embargo, también es posible considerar la derivada de la respuesta en el tiempo de la señal de error en el presente instante de tiempo como (última muestra del error, e_n , menos la penúltima muestra del error, e_{n-1})/(intervalo de muestreo, T_s) (Figura 22.16).

Dividir entre s equivale a integrar. Sin embargo, se puede considerar que la integral del error al término del periodo de muestreo es el área bajo la gráfica error-tiempo durante el último intervalo de muestreo más la suma de las áreas bajo la gráfica de todas las muestras anteriores (Int_{prev}). Si el periodo de muestreo es breve comparado con los tiempos involucrados, entonces, el área durante el último intervalo de muestreo es casi $-(e_n + e_{n-1})/T_s$ (vea en la sección 4.6 otra aproximación conocida como aproximación de Tustin). Por lo

tanto, para la señal de salida x_n del controlador en un instante en particular, el equivalente de la función de transferencia es

$$x_n = K_P e_n + K_I a \frac{1e_n + e_{n-1} 2T_s}{1 + \text{Int}_{\text{prev}} + K_D \frac{e_n - T e_{n-1}}{T_s}}$$

Si se reordena esta ecuación, se obtiene:

$$x_n = A e_n + B e_{n-1} + C \text{Int}_{\text{prev}} 2$$

donde $A = K_P + 0.5K_I T_s + K_D/T_s$, $B = 0.5K_I T_s - K_D/T_s$ y $C = K_I$.

El programa para un control PID consiste en:

- 1 Determinar los valores de K_P , K_I y K_D .
- 2 Determinar los valores iniciales de e_{n-1} , Int_{prev} y el tiempo de muestreo, T_s .
- 3 Reestablecer el temporizador del intervalo de muestreo.
- 4 Introducir el error e_n .
- 5 Calcular y_n con la ecuación anterior.
- 6 Actualizar, dejándolo listo para el siguiente cálculo, el valor del área anterior a $\text{Int}_{\text{prev}} + 0.5(e_n + e_{n-1})T_s$.
- 7 Actualizar, dejándolo listo para el siguiente cálculo, el valor del error definiendo e_{n-1} igual a e_n .
- 8 Esperar a que transcurra el intervalo de muestreo.
- 9 Ir al paso 3 y repetir el ciclo.

22.8.2 Taza de muestreo

Cuando una señal continua es muestreada para los valores de muestra para reflejar la señal continua de manera precisa, debe estar lo suficientemente cerca en tiempo para que la señal no fluctúe de forma importante entre las muestras. Durante un intervalo de muestreo, no se realimenta la información al controlador sobre los cambios en la salida. Al practicar esto tiene sentido que las muestras se tomen a una taza dos veces mayor al componente de frecuencia más alto en la señal continua. A esto se le llama teorema de muestreo de Shannon (sección 4.2.1). En los sistemas de control digital, la taza de muestreo por lo general es mucho mayor a ésta.

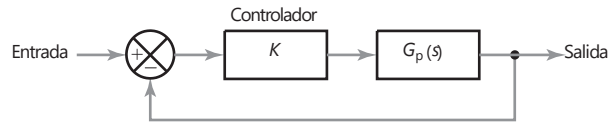
22.8.3 Un sistema de control por computadora

Por lo general, un sistema de control por computadora consta de los elementos que se muestran en la Figura 22.15 con los valores de referencia y los parámetros de control introducidos con un teclado. El software utilizado en este sistema proporciona el programa de las instrucciones necesarias, por ejemplo, para que la computadora ponga en marcha el modo de control PID, proporcione la pantalla del operador, reconozca y procese las instrucciones introducidas por el operador, proporcione información del sistema, proporcione instrucciones para el arranque y paro y proporcione información de reloj/calendario. En la pantalla del operador aparece información como el valor de referencia, el valor real medido, el intervalo de muestreo, el error, la calibración del controlador y el estado del elemento de corrección. La pantalla se actualiza de manera constante cada pocos segundos.

22.9 Desempeño de los sistemas de control

La función de transferencia de un sistema de control se modifica dependiendo de cuál sea el modo de control utilizado en el controlador. Por lo tanto, la respuesta del sistema, por ejemplo, a una entrada tipo escalón, se verá afectada por dicho modo de control. Considere el sencillo sistema que ilustra la Figura 22.17.

Figura 22.17 Sistema de control.



Si se emplea un control proporcional, la función de transferencia de la ruta en sentido directo es $K_p G(s)$ y, por lo tanto, la función de transferencia del sistema de realimentación $G(s)$ es

$$\frac{1}{1 + K_p G(s)}$$

Suponga que la función de transferencia de un proceso de primer orden es $1/(ts + 1)$, donde t es la constante de tiempo (puede representar un motor de c.d., a menudo moldeado como un sistema de primer orden, sección 20.5.1). Si el control es proporcional y la realimentación unitaria, la función de transferencia del sistema de control es:

$$\frac{K_p}{1 + K_p \frac{1}{ts + 1}} = \frac{K_p}{ts + 1 + K_p}$$

El sistema de control sigue siendo un sistema de primer orden. El efecto que produce el control proporcional ha sido modificar la forma de la respuesta de primer orden del proceso. Sin el controlador, la respuesta a una entrada tipo escalón unitario fue (sección 20.2.1).

$$y = 1 - e^{-t/t}$$

Ahora es

$$y = K_p \left[1 - e^{-t/(t/(1+K_p))} \right]$$

El efecto del control proporcional ha sido reducir la constante de tiempo de t a $t/(1 + K_p)$, haciéndolo más rápido con respecto al valor más alto de K_p . Éste también aumenta el error en estado estable.

Si el control es integral la función de transferencia de la trayectoria directa es $K_i G(s)/s$, y así, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{1}{s + K_i G(s)}$$

De esta manera, si ahora se tiene un proceso de primer orden cuya función de transferencia es $1/(ts + 1)$, con un control integral y realimentación unitaria la función de transferencia del sistema de control es

$$\frac{K_i}{s + K_i \frac{1}{ts + 1}} = \frac{K_i}{s ts + 1 + K_i} = \frac{K_i}{ts^2 + s + K_i}$$

El sistema de control es ahora un sistema de segundo orden. Ahora, si la entrada es un escalón, el sistema produce una respuesta de segundo orden en vez de una de primer orden.

Si el sistema tiene un control derivativo, la función de transferencia de la trayectoria directa es $sK_D G(s)$, y con realimentación unitaria, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{1}{1 + sK_D G(s)}$$

Con un proceso de primer orden cuya función de transferencia es $1/(ts + 1)$, el control derivativo produce una función de transferencia global de:

$$\frac{sK_D}{ts + 1 + sK_D}$$

22.10 Sintonización de controladores

El término **sintonización** describe el proceso de selección de los mejores parámetros del controlador. En el controlador proporcional se refiere a la determinación del valor de K_P ; con el controlador PID hay que elegir las tres constantes K_P , K_I y K_D . Existen varios métodos para hacerlo, de los cuales sólo se revisarán dos, ambos propuestos por Ziegler y Nichols. Ellos supusieron que cuando el sistema bajo control es en lazo abierto, una aproximación razonable para describir su comportamiento es un sistema de primer orden al que se incorpora un retardo en el tiempo. Con base en esto, se procede a obtener los parámetros para un desempeño óptimo, lo que se tomó para establecer cuál dio una respuesta transitoria subamortiguada con una relación de retardo (subsistencia) de $1/4$; es decir, el segundo sobrepaso es $1/4$ del primer sobrepaso (sección 19.5). Este criterio de los sobrepasos ofrece un buen compromiso de un tiempo de elevación corto, un tiempo corto de establecimiento y un margen razonable de estabilidad.

22.10.1 Método de la curva de reacción del proceso

Por lo general, el lazo de control del proceso se abre entre el controlador y la unidad de corrección, para que no se produzcan acciones de control. A la unidad de corrección se aplica una señal de entrada de prueba y se determina la respuesta de la variable controlada. La señal de prueba debe ser tan pequeña como sea posible. La Figura 22.18 muestra la forma de la señal de prueba y una respuesta típica. La señal de prueba es una señal tipo escalón y la amplitud del escalón se expresa como el cambio porcentual P en la unidad de corrección. La gráfica de la variable medida en función del tiempo se conoce como **curva de reacción del proceso**. La variable medida se expresa como porcentaje del intervalo a escala total.

Se traza una tangente para obtener el gradiente máximo de la curva. En la Figura 22.18 la pendiente máxima R es M/T . El tiempo entre el inicio de la señal de prueba y el punto donde esta tangente interseca el eje de tiempo se conoce como retardo L . La Tabla 22.1 muestra el criterio recomendado por Ziegler y Nichols para elegir los parámetros del controlador con base en los valores de P , R y L .

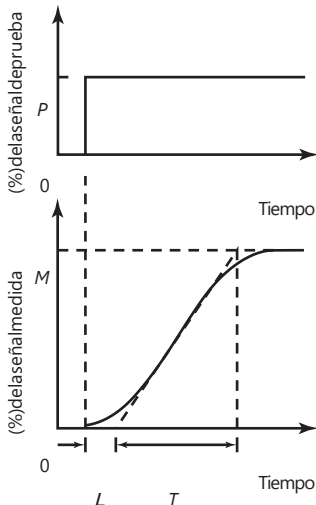


Figura 22.18 Curva de reacción del proceso.

Tabla 22.1 Criterio de la curva de reacción del proceso.

Modo de control	K_P	T_I	T_D
P	P/RL		
PI	$0.9P/RL$	$3.33L$	
PID	$1.2P/RL$	$2L$	$0.5L$

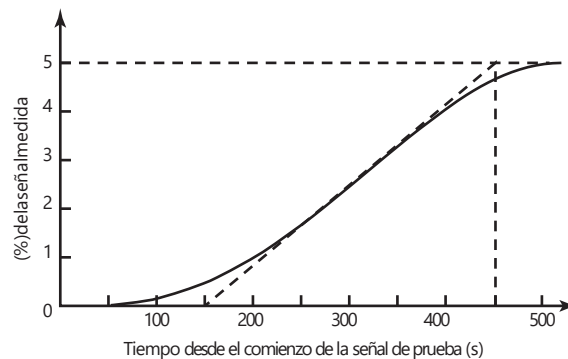
Considere el siguiente ejemplo. Determine los parámetros de un controlador de tres modos cuya curva de reacción del proceso se muestra en la Figura 22.19, cuando la señal de prueba fue 6% de cambio en la posición de la válvula de control. Al dibujar una tangente en la parte de la curva con pendiente máxima se obtiene un retardo L de 150 s y un gradiente R de $5/300 = 0.017/s$. Entonces

$$\frac{1.2P}{0.017 \cdot \frac{150}{6}} = 2.82$$

$$T_I = 2L = 300s$$

$$T_D = 0.5L = 0.5 \cdot 150 = 75s$$

Figura 22.19 Ejemplo de curva de proceso.



22.10.2 Método de la última ganancia

Con este método, las acciones integral y derivativa primero se reducen a sus valores mínimos. Se define un valor bajo de la constante de proporcionalidad K_P que luego se aumenta en forma gradual. Esto equivale a decir que la banda proporcional se estrecha de manera gradual. Al mismo tiempo se aplican pequeñas perturbaciones al sistema. Esto continúa hasta que se producen oscilaciones sostenidas. Cuando esto se produce, el valor crítico de la constante proporcional K_{Pc} se anota y se mide el periodo de las oscilaciones T_c . La Tabla 22.2 muestra la relación entre el criterio recomendado por Ziegler y Nichols

Tabla 22.2 Criterio de la última ganancia.

Modo de control	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_{Pc}$		
PI	$0.45K_{Pc}$	$T_c/1.2$	
PID	$0.6K_{Pc}$	$T_c/2.0$	$T_c/8$

para los parámetros del controlador y este valor de K_{PC} . La banda proporcional crítica es $100/K_{PC}$.

Considere el siguiente ejemplo. Al sintonizar un sistema de control de tres modos mediante el método de la última ganancia se determinó que las oscilaciones se iniciaban cuando K_{PC} es 3.33. Las oscilaciones tienen un periodo de 500 s. ¿Cuáles son los parámetros adecuados para el controlador? Al usar los criterios expuestos en la Tabla 22.2, $K_P = 0.6K_{PC} = 0.6 \cdot 3.33 = 2.0$, $T_I = T_c/2.0 = 500/2 = 2.5$ s, $T_D = T_c/8 = 500/8 = 62.5$ s.

22.11

Control de velocidad

Considere el problema de controlar el movimiento de una carga mediante un motor. Debido a que el sistema del motor es probablemente de segundo orden, un control proporcional hará que la salida del sistema necesite tiempo para lograr el desplazamiento requerido cuando, por ejemplo, entre al sistema una señal tipo escalón, y puede oscilar algún tiempo en torno al valor requerido. Es decir, el sistema requerirá cierto tiempo para responder a la señal de entrada. Al utilizar un control PD en vez de utilizar sólo un control P se logrará una mayor velocidad de respuesta con menos oscilaciones. Existe, sin embargo, una alternativa para lograr el mismo efecto y consiste en emplear un segundo lazo de realimentación que dé una medición relacionada con la rapidez con que cambia el desplazamiento. Esto se conoce como **velocidad de realimentación**. La Figura 22.20 muestra este sistema; en la velocidad de realimentación se utiliza un tacogenerador que produce una señal proporcional a la velocidad de giro del eje del motor y, por lo tanto, la rapidez con la que cambia el desplazamiento, y este desplazamiento se puede monitorear utilizando un potenciómetro rotacional.

22.12

Control adaptable

Existen muchas situaciones de control en las que los parámetros de la planta cambian con el tiempo o tal vez con la carga; por ejemplo, un manipulador de robot que se usa para mover cargas cuando la carga cambia. Si la función de transferencia de la planta cambia, es deseable una resintonización del sistema para determinar los valores óptimos de las constantes proporcional, derivativa e integral. Para los sistemas de control hasta aquí considerados, se ha supuesto que una vez sintonizado el sistema conserva sus valores de las constantes proporcional, derivativa e integral, hasta que el operador proceda a una resintonización. Una alternativa es un **sistema de control adaptable**, el cual se "adapta" a los cambios y modifica sus parámetros de acuerdo con las circunstancias prevalecientes.

El sistema de control adaptable se basa en el empleo de un microprocesador como controlador. Este dispositivo permite que el modo y los parámetros de control utilizados se adapten a las circunstancias, y se puedan modificar cuando éstas cambien.

Es posible considerar que un sistema de control adaptable tiene tres etapas de funcionamiento:

- 1 Empieza a funcionar con las condiciones del controlador definidas con base en una condición supuesta.
- 2 El desempeño deseable se compara continuamente con el desempeño real del sistema.
- 3 El modo y los parámetros del sistema de control se ajustan de manera automática y continua para minimizar la diferencia entre el desempeño deseado y el real.

Por ejemplo, en un sistema de control que funciona en modo proporcional, la constante de proporcionalidad K_P se podría ajustar en forma automática a las

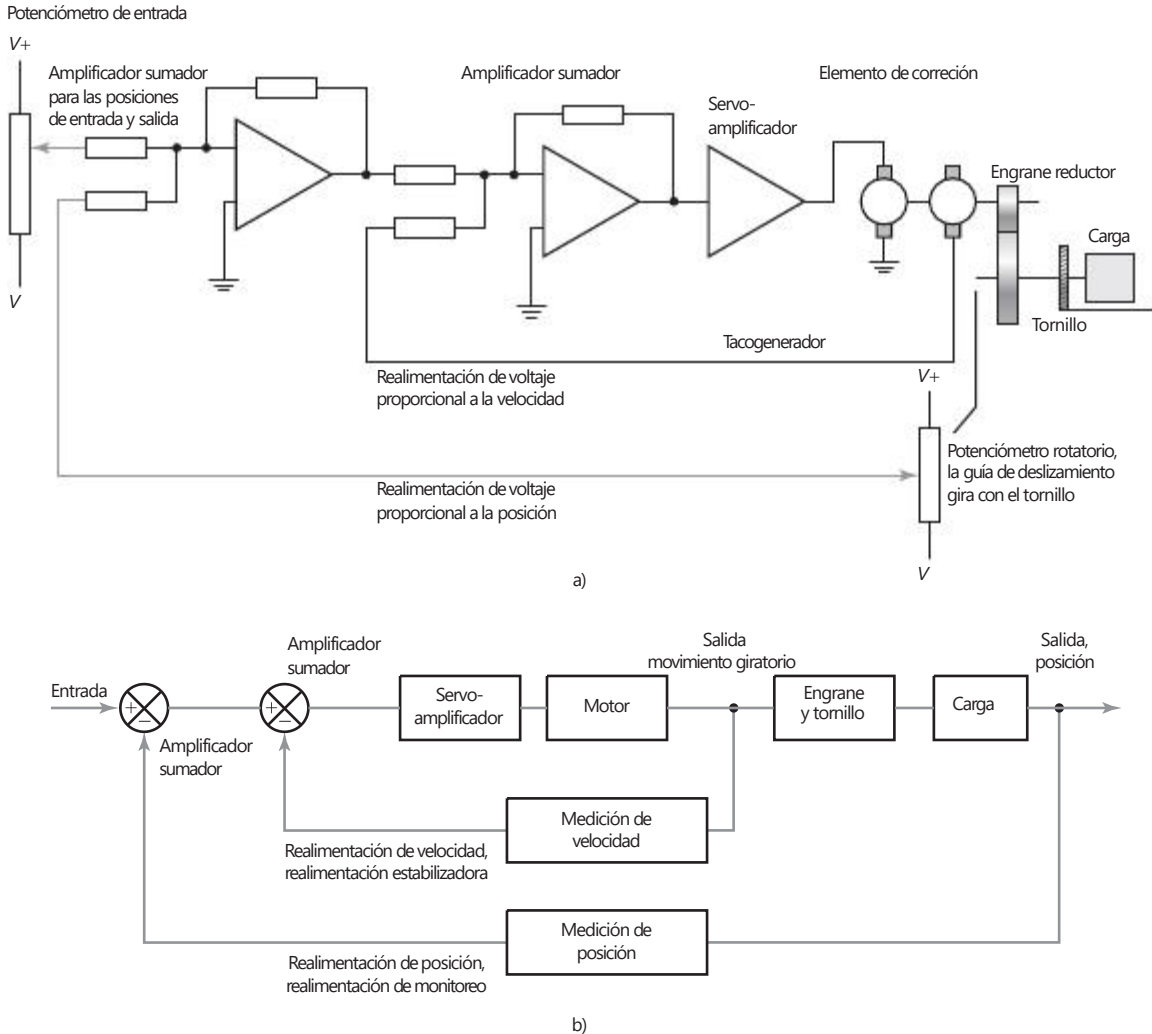


Figura 22.20 Sistema con realimentación de velocidad: a) diagrama descriptivo del sistema, b) diagrama de bloque del sistema.

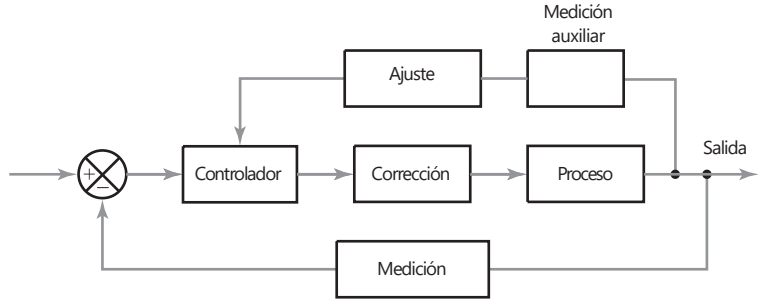
circunstancias, y cambiar cuando ellas cambien. Los sistemas de control adaptables pueden adoptar varias formas. Tres de las más comunes son:

- 1 Control de ganancia preprogramada.
- 2 Control autosintonizable.
- 3 Control basado en un modelo de referencia.

22.12.1 Control de ganancia preprogramada

En el **control de ganancia preprogramada** o, como a veces se le conoce, **control adaptable preprogramado**, los cambios preestablecidos en los parámetros del controlador se realizan con base en alguna medición auxiliar de una variable del proceso. La Figura 22.21 ilustra este método. El término

Figura 22.21 Control de ganancia preprogramada.



control de ganancia preprogramada se utilizó porque el único parámetro que originalmente se ajustaba era la ganancia, es decir la constante de proporcionalidad K_P .

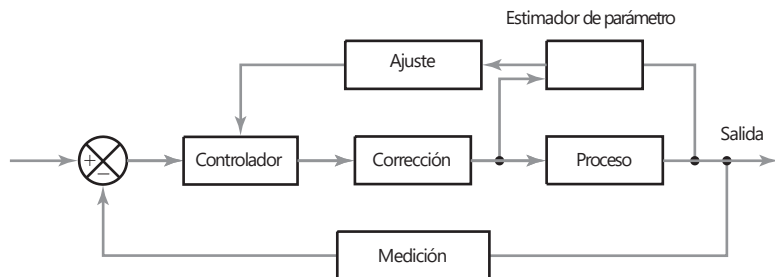
En un sistema de control que se utiliza para controlar la posición de una carga, se calculan los parámetros del sistema para diversos valores de la carga y en la memoria del controlador se almacena una tabla con esos valores. Una celda de almacenamiento puede usarse para medir la carga real y enviar una señal al controlador con el valor de la masa, que después utiliza el controlador para seleccionar los parámetros adecuados.

Una desventaja de este sistema es que se deben determinar los parámetros de control para muchas condiciones de operación, de modo que el controlador elija la que convenga a las condiciones prevalecientes. Una ventaja, sin embargo, es que los cambios en los parámetros se pueden hacer con rapidez cuando cambian las condiciones.

22.12.2 Control autosintonizable

Con el **control autosintonizable** el sistema ajusta sus parámetros en forma continua con base en el monitoreo de la variable que el sistema debe controlar y en la salida del controlador. La Figura 22.22 ilustra las características de este sistema.

Figura 22.22 Regulador autosintonizable.

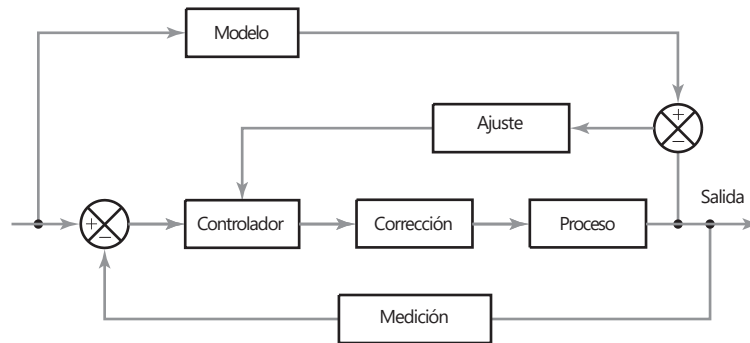


Es frecuente que los controladores PID comerciales cuenten con **autosintonización**. Cuando el operador oprime un botón, el controlador inyecta una pequeña perturbación al sistema y mide la respuesta. Ésta se compara con la respuesta deseada y se ajustan los parámetros de control, mediante una regla de Ziegler-Nichols modificada, para acercar la respuesta real a la respuesta deseada.

22.12.3 Sistemas adaptables basados en un modelo de referencia

En el **sistema adaptable basado en un modelo de referencia** se desarrolla un modelo preciso del sistema. El valor establecido se usa como entrada para el sistema de control real y para el modelo de referencia, y se observa la diferencia entre la salida real y la salida del modelo. La diferencia entre estas señales sirve para ajustar los parámetros del controlador con el fin de minimizar la diferencia. La Figura 22.23 ilustra las características de este sistema.

Figura 22.23 Control basado en un modelo de referencia.



Resumen

El **error en estado estable** es la diferencia entre el valor de entrada establecido y la salida una vez que todos los transitorios desaparecen.

Los **modos de control** pueden ser **en dos posiciones**, en los cuales el controlador provee una señal de corrección de encendido/apagado, **proporcional (P)** en la que la señal de corrección es proporcional al error, **derivativo (D)** en la que señal de corrección es proporcional a la tasa en la que el error está cambiando, e **integral (I)** en la que la señal de corrección es proporcional a la integral del error con el tiempo. La función de transferencia para un sistema PID es

$$\text{función de transferencia} = K_{pe} + \frac{1}{s}K_I + sK_D = K_P a1 + \frac{1}{s} + T_{ck}$$

Un **controlador digital** en esencia opera al muestrear el valor medido, al compararlo con el valor establecido y establecer el error, al llevar a cabo cálculos basados en el valor del error y los valores almacenados de las entradas previas y salidas y así obtener la señal de salida, al extraer y luego esperar a la siguiente muestra.

El término **sintonizado** se usa para describir el proceso de selección de las mejores configuraciones del controlador, es decir los valores de K_P , K_I y K_D .

El término **control adaptable** se emplea en los sistemas que se "adaptan" a los cambios y cambian sus parámetros para adaptarse a la circunstancia prevaleciente. Las tres formas que se usan comúnmente son el control de ganancia preprogramado, el sistema de regulador autosintonizable y el sistema adaptable basado en un modelo de referencia.

Problemas

- 22.1 ¿Cuáles son las limitaciones del control de dos posiciones (encendido-apagado) y en qué situaciones es común emplear este tipo de control?
- 22.2 Un controlador de dos posiciones enciende el calentador de una habitación cuando la temperatura desciende a 20°C y lo apaga cuando llega a 24°C . Cuando el calentador está encendido, el aire de la habitación aumenta su temperatura a razón de 0.5°C por minuto; cuando el calentador está apagado, se enfría a 0.2°C por minuto. Si los retrasos del sistema de control son despreciables, ¿qué tiempo se necesita para que a) el calentador pase de encendido a apagado, b) el calentador pase de apagado a encendido?
- 22.3 Un controlador basado en el modo de control de dos posiciones se utiliza para controlar el nivel del agua de un tanque abriendo o cerrando una válvula; en su posición abierta permite la entrada del agua con un gasto de $0.4\text{ m}^3/\text{s}$. El área transversal del tanque es de 12 m^2 y el agua sale de él a un gasto constante de $0.2\text{ m}^3/\text{s}$. La válvula se abre cuando el nivel del agua sube a 4.0 m y se cierra a 4.4 m . ¿Qué tiempo tarda a) en pasar la válvula de abierta a cerrada, b) en pasar la válvula de cerrada a abierta?
- 22.4 Un controlador proporcional se utiliza para controlar la altura del agua en un tanque cuando el nivel puede variar entre 0 y 4.0 m . La altura requerida es 3.5 m y el controlador debe cerrar por completo una válvula cuando la altura del agua es 3.9 m y abrirla por completo cuando la altura es 3.1 m . ¿Qué banda proporcional y función de transferencia se necesitarán?
- 22.5 Describa y compare las características del a) control proporcional, b) control proporcional integral, c) control proporcional integral derivativo.
- 22.6 Determine las configuraciones de K_P , T_I y T_D que se requieren para un controlador de tres modos que da una curva de reacción de proceso con un retraso L de 200 s y una pendiente R de $0.010\%/s$ cuando la señal de prueba tuvo un cambio de 5% en la posición de la válvula de control.
- 22.7 Al sintonizar un sistema de control de tres modos por el método de la última ganancia se encontró que las oscilaciones comenzaron cuando el valor crítico proporcional era 5 . Las oscilaciones tuvieron un tiempo periódico de 200 s . ¿Cuáles son los valores apropiados de K_P , T_I y T_D ?
- 22.8 Explique las bases en las cuales funcionan los siguientes sistemas de control adaptable: a) ganancia preprogramada, b) autosintonizable, c) modelo de referencia.
- 22.9 Un motor de c.d. se comporta como un sistema de primer orden con una función de transferencia de posición de salida relacionada para lo cual ha girado un poco con una señal de entrada de $1/s(1 + st)$. Si el tiempo constante τ es 1 s y el motor se va a utilizar en un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria y un controlador proporcional, determine el valor de la constante de proporcionalidad que dará una respuesta en lazo cerrado con 25% de sobrepaso.
- 22.10 El pequeño motor ultrasónico que se usa para mover las lentes para el enfoque automático con una cámara (sección 24.2.3) conduce al anillo con tan poca inercia que la función de transferencia relacionada de la posición angular con la señal de entrada se representa con $1/cs$, donde c es la constante de proporcionalidad relacionada con el par de fricción y la velocidad angular. Si el motor va a ser controlado por un sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria, ¿qué tipo de comportamiento se puede esperar si se utiliza el control proporcional?



Capítulo

veintitrés

Inteligencia artificial

Objetivos

Después de estudiar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Explicar qué es una máquina inteligente y las capacidades de esas máquinas.
- Explicar el significado de redes neurales y su importancia para el reconocimiento de un patrón.
- Explicar el término lógica difusa.

23.1

¿Qué significa inteligencia artificial?

¿Cómo está compuesta una máquina inteligente? Una definición de inteligencia en un diccionario puede ser: "dotado con la capacidad del razonamiento". Se tiene la idea de que entre más inteligente es una persona, tiene más habilidad para aprender, generalizar a partir del conocimiento adquirido, tener la capacidad de raciocinio y poder hacer predicciones al considerar lo que es posible al aprender de los errores. Se puede aplicar el mismo criterio a una máquina: una **máquina inteligente** está dotada con la capacidad de razonar.

Un sistema de calefacción central toma decisiones sobre sus acciones. Por ejemplo, ¿debe un calentador encenderse o apagarse como resultado de la información del termostato? No, sin embargo, se considera inteligencia a la capacidad de tomar decisiones bajo un rango de condiciones. Por ejemplo, no puede reconocer un patrón en entradas desde un termostato y de esta manera hacer predicciones sobre si encender o apagar el calentador, sólo realiza el trabajo para el cual fue programado. "No piensa por sí mismo".

En este capítulo se repasarán brevemente los conceptos básicos asociados con las máquinas inteligentes.

23.1.1 Autorregulación

Se pueden considerar los sistemas de realimentación en lazo cerrado de los capítulos anteriores como sistemas de autorregulación en los que éstos son capaces de regular la salida de un sistema para un valor requerido. De esta manera, se usa un sistema de calentamiento central controlado para mantener la temperatura de la habitación en el valor establecido para el termostato. Sin embargo, a estos sistemas no se les puede considerar inteligentes, sólo hacen lo que tienen indicado.

23.2

Percepción y cognición

La **percepción** con un sistema inteligente es la reunión de información con sensores y la organización de la información reunida de manera que se puedan tomar decisiones. Por ejemplo, un sistema de control que se usa con la línea de producción puede tener una cámara de video para observar los componentes en una banda transportadora. Estas señales recibidas de la cámara permi-

ten una representación computarizada de los componentes para lograr que se puedan identificar las características. Ésta contendrá información sobre los elementos importantes de los componentes, entonces se les puede comparar con sus representaciones de forma que se puedan tomar esas decisiones por el sistema de control si el componente del clima está bien ensamblado o qué otro componente lo está. Luego se pueden tomar medidas mediante el sistema de control tal vez para rechazar los componentes que fallan o enviar componentes particulares a cajas destinadas a éstos.

Así, con un sistema mecatrónico, la percepción involucra sensores que reúnen información apropiada sobre un sistema y su medio ambiente, decodificándolo y procesándolo para dar información útil que se pueda emplear en otra parte del sistema para la toma de decisiones.

23.2.1 Cognición

Una vez que la máquina ha reunido y organizado la información, tendrá que decidir qué hacer con ella. A esto se le conoce como **cognición**. El **patrón de reconocimiento** es vital para esta percepción y cognición. ¿Cuáles son los patrones en los datos reunidos?

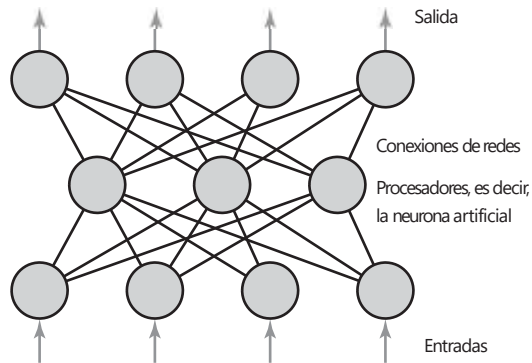
El ser humano es muy bueno para reconocer patrones. Piense en el personal de seguridad que observa los monitores de televisores. Es capaz de mirar los monitores y reconocer patrones inusuales; es decir, una persona donde no debería haber alguien, un objeto que han movido, etc. Ésta es la habilidad requerida en las máquinas inteligentes. Un sistema autopiloto en una aeronave monitorea mucha información y, basado en los patrones percibidos de estos datos, se toman decisiones como la manera de ajustar los controles de la aeronave.

El patrón de reconocimiento se puede llevar a cabo cuando la máquina con un conjunto de patrones en su memoria y los patrones reunidos se comparan y se ajustan a lo que se buscaba. Los patrones en su memoria pueden surgir de modelos o un proceso de preparación en el que se reúnen datos para un rango de objetos o situaciones y los códigos de identificación dados. Por ejemplo, para reconocer monedas, se debe reunir información sobre su diámetro y color. De esta manera, una moneda de una libra en particular se puede clasificar como de un diámetro de 2.25 cm y un color que representa un grado particular de rojo (es una moneda de bronce). Sin embargo, una máquina inteligente necesitará tomar en cuenta el desgaste y la suciedad de las monedas y aún así ser capaz de reconocer la moneda de una libra.

23.2.2 Redes neurales

En el ejemplo de las monedas sólo se consideraron dos dimensiones, diámetro y color. En situaciones más complejas pueden haber quizás más dimensiones. El cerebro humano debe elegir y clasificar información multidimensional y lo logra con la ayuda de las **redes neurales**. Las redes neurales artificiales se usan ahora con máquinas inteligentes. Dichas redes no necesitan programarse pero pueden aprender y generalizar de ejemplos y preparación. Una red neural (Figura 23.1) está compuesta de una gran cantidad de unidades de procesamiento interconectadas, donde las salidas de algunas unidades son las entradas de otras. Cada procesador en la red recibe información en sus entradas, y multiplica cada una por un factor de ponderación. Si funcionan como AND, entonces suma las entradas ponderadas y da una salida de 1 si la suma

Figura 23.1 Red neuronal.



excede a cierto valor o es positiva. Por ejemplo, se puede tener una entrada de 1 con un factor de ponderación de -1.5 para dar -1.5 , otra entrada de 1 con un factor de ponderación de 1.0 para dar 1.0 y una tercera entrada de 1 con un factor de ponderación de 1.0 que da 1.0 . Por lo tanto, la suma de estas entradas ponderadas es $-1.5 + 1.0 + 1.0 = 0.5$ y así una salida de 1 si los valores son positivos para una salida. Con estas entradas como $1 * -1.5$, $0 * 1.0$ y $0 * 1.0$, la suma ponderada es de -1.5 , por lo tanto, una salida de 0. La red se puede programar mediante el aprendizaje de ejemplos y de esta manera ser capaz de aprender.

23.3

Razonamiento

El **razonamiento** es el proceso de partir de lo conocido a lo desconocido. Existen numerosos mecanismos para llevar a cabo el razonamiento.

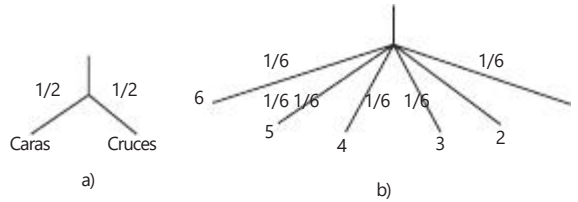
23.3.1 Mecanismos de razonamiento

Un ejemplo de **razonamiento determinístico** es el uso de la regla "si-entonces". Por lo tanto, se puede deducir que si una moneda tiene un diámetro de 1.25 cm entonces es una libra. Si la primera parte del enunciado es verdad, entonces la segunda parte de éste también es verdad; si la primera parte del enunciado es falsa, entonces la segunda parte no es verdad. En esta forma de razonamiento se tiene una situación de *verdadero-falso* y se supone que no hay conocimiento predeterminado, de manera que cuando se hace la deducción no hay excepciones. De esta forma, en el ejemplo anterior, no se puede tomar en cuenta si es una moneda de otro país con el mismo diámetro.

El **razonamiento no determinístico** permite hacer predicciones basadas en la probabilidad. Si se lanza una moneda, hay dos formas de que caiga cara o cruz. De estas dos formas sólo hay una en la que caerá cruz. Por lo tanto, la probabilidad de su caída cara arriba es de 1 en 2 o $1/2$. Una forma alternativa de llegar a este valor es al lanzar la moneda varias veces y, después de un tiempo, en $1/2$ de las veces caerá cara arriba. La Figura 23.2a) muestra cómo se puede representar esto como un árbol de probabilidad. Si se lanza un dado, la probabilidad de su caída con uno de sus lados boca arriba será de $1/6$. En la Figura 23.2b) se muestra cómo se puede representar esto como un árbol de probabilidad. En cada rama del árbol se escribe la probabilidad. La oportunidad de que una moneda caiga cara o cruz es de 1. Así, para un árbol, la probabilidad total será de 1.

Por lo tanto, en el ejemplo de la moneda de libra tal vez se quiera considerar que hay una probabilidad de 0.9 de una moneda con un diámetro de

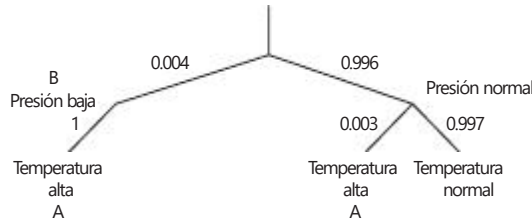
Figura 23.2 Árboles de probabilidad: a) una moneda, b) un dado.



1.25 cm siendo una moneda de libra. En el caso de un sistema mecatrónico podríamos monitorearla por 1000 horas más o menos, y durante ese tiempo el número de horas en que la temperatura ha sido alta fue de 3 horas. Entonces se puede decir que la probabilidad de la temperatura cuando es alta es de $3/1000 = 0.003$.

Algunas veces se quiere conocer la probabilidad de que ocurra un evento y establecer la probabilidad de que resultará en otro evento. De esta forma, en un sistema mecatrónico podríamos saber, por ejemplo, cuáles son las posibilidades de cuando un sensor detecta una presión baja que sobrecalentará el sistema, si se tiene en cuenta que debe haber otras razones para una temperatura alta. Esto se puede representar como en el árbol de la Figura 23.3.

Figura 23.3 Un árbol de probabilidad condicional.



La **regla de Bayes** se puede usar para resolver este problema. Esto se establece como

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \cdot p(A)}{p(B)}$$

$p(A|B)$ es la probabilidad de que A suceda dado que B ya sucedió, $p(B|A)$ es la probabilidad de que B suceda dado que A ya sucedió, $p(A)$ es la probabilidad de que A suceda, $p(B)$ es la probabilidad de que B suceda. Así, si la probabilidad para el sistema de que una alta temperatura $p(A)$ ocurra es 0.003; es decir, 3 veces en 1000 de que una temperatura alta se dé, y la probabilidad de que ahí exista una presión baja $p(B)$ es 0.004, es decir 4 veces en 1000 ocurre una presión baja, entonces se puede tener la certeza de que el sistema se sobrecalienta si la presión es baja, es decir $p(A|B)$ es 1, se debe tener una probabilidad condicional de $(1 \cdot 0.003)/0.004 = 0.75$ de que el sistema se sobrecalentará cuando se detecte una presión baja.

23.3.2 Razonamiento basado en la regla

En el corazón de un **sistema basado en la regla** hay un conjunto de reglas. Éstas, cuando se combinan con hechos, es decir en mecatrónica, serían entradas desde sensores y usuarios que permiten hacer inferencias que luego sirven para accionar actuadores y salidas de control. La Figura 23.4 ilustra esta secuencia. A la combinación de hechos con la regla de base de datos se le conoce como la base del conocimiento para una máquina. La inferencia es cuando

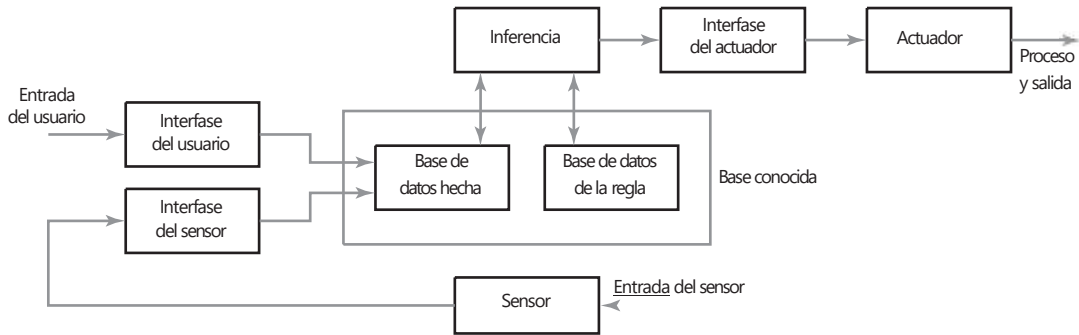


Figura 23.4 Sistema basado en la regla.

el razonamiento es el resultado de los hechos de entrada combinados con las reglas y decisiones hechas que luego son alimentados a los actuadores.

Las reglas que se aplican a menudo son enunciados "si-entonces". De esta manera, se puede tener un grupo de reglas para un sistema de calentamiento central de la forma:

Si el calentador está encendido

Entonces la bomba está encendida

Si la bomba está encendida y la temperatura de la habitación es menor que 20° C

Entonces la válvula se abre

Si el calentador no está encendido

Entonces la bomba no está encendida

etcétera.

La base de datos de este sistema contendría los siguientes hechos:

Temperatura de la habitación < 20° C

Temporizador encendido

Válvula abierta

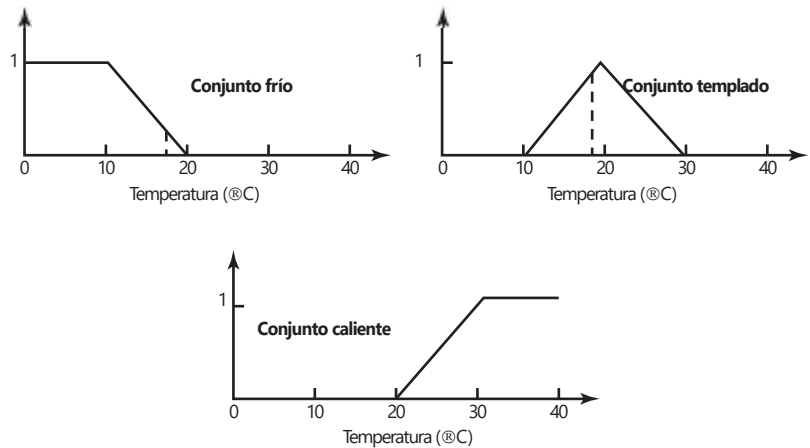
Calentador encendido

Bomba encendida

Las reglas también pueden presentarse como proposiciones que implican los enunciados de probabilidad o de lógica difusa.

En 1965, Lotfi Zadeh propuso una forma de razonamiento que se ha llegado a conocer como **lógica difusa**. Una de sus ideas principales es que las proposiciones no se necesitan clasificar como verdaderas o falsas, pero su veracidad o falsedad puede ponderarse de manera que se puedan clasificar entre las dos en una escala. Una **función de pertenencia** es definida por un valor si es un miembro de un conjunto en particular. Así, se puede definir un conjunto de los valores de temperatura como 0 a 20° C y otro como 20 a 40° C. Si la temperatura es, por ejemplo, 18° C, entonces la pertenencia del conjunto de 0 a 20° C es 1 y la del conjunto de 20 a 40° C es 0. Sin embargo, con la lógica difusa se pueden definir conjuntos superpuestos; es decir, frío de 0 a 20° C, templado de 10 a 30° C y caliente de 20 a 40° C. Una temperatura de 18° C es, por lo tanto, un miembro de dos conjuntos. Si las funciones de pertenencia del conjunto difuso están definidas como se muestra en la Figura 23.5, entonces 18° C tiene una función fría de 0.2, una función templada de 0.8 y una función caliente de 0. Con base en datos como éstos, se pueden plantear las reglas para ejecutar la acción apropiada. Por ejemplo, una función fría de 0.2 puede tener el encendido de calentamiento en bajo, pero una función fría de 0.6 podría tenerlo encendido en alto.

Figura 23.5 Funciones de pertenencia del conjunto difuso.



Hoy día, la lógica difusa se utiliza en varios productos típicos. Por ejemplo, las lavadoras de ropa pueden sentir el tipo de tela, suciedad y tamaño de la carga y ajustar el ciclo de lavado de acuerdo con esto.

23.4

Aprendizaje

Las máquinas que pueden aprender y extender su conocimiento básico tienen una gran ventaja comparada con las máquinas que no lo pueden hacer. El **aprendizaje** se puede considerar como adaptable al medio ambiente basado en la experiencia. Con las máquinas el aprendizaje se puede lograr en diferentes formas.

Un método sencillo de aprendizaje es mediante nuevos datos ingresados y acumulados en la memoria. Las máquinas también pueden aprender por los datos que reciben, los cuales se usan para modificar parámetros en la máquina.

Otro método de aprendizaje que se puede emplear es cuando el razonamiento está definido en términos de probabilidades y esto es para actualizar las probabilidades que se usan a la luz de lo que pasa. Se puede pensar así en términos de un ejemplo sencillo: suponga que hay una bolsa con diez pelotas, todas rojas excepto por una negra. Cuando se extrae la primera pelota de la bolsa, la probabilidad de extraer la negra es de $1/10$. Si se extrajo una roja, la próxima vez que se extraiga una pelota la posibilidad de sacar la pelota negra será de $1/9$. La "máquina" puede aprender de la primera pelota roja al ajustar su valor de probabilidad para una pelota negra extraída. La regla de Bayes que se da en la sección 23.3.1 se puede emplear para actualizar una máquina, que se escribe como

$$p(H|E) = \frac{p(E|H)p(H)}{p(E)}$$

donde H es la hipótesis con la que comenzamos con E el ejemplo anterior. Entonces $p(H|E)$ es la probabilidad de que la hipótesis H sea verdadera dado que el ejemplo E sucedió, $p(E|H)$ es la probabilidad del ejemplo E que tuvo lugar dado que la hipótesis H es verdadera, $p(E)$ es la probabilidad de que un ejemplo E suceda, $p(H)$ es la probabilidad de que la hipótesis H sea verdadera. Esto permite a la máquina actualizar la probabilidad de H cada vez que llega nueva información.

Todavía hay otro método en el que una máquina puede aprender de ejemplos. Esto es cuando una máquina generaliza desde un conjunto de ejemplos. Estos pueden ser el resultado de preparar con ejemplos que ofrece la máquina

de manera que se puedan construir sus reglas o como consecuencia de eventos que ha encontrado. El reconocimiento del patrón por lo general implica esta forma de aprendizaje. Así, dado un ejemplo del número 2 en un arreglo de píxeles, la máquina puede aprender a reconocer el número 2. Las redes neurales (sección 23.2.2) también implican el aprendizaje mediante el ejemplo.

Una máquina también puede aprender al sacar analogías entre un problema resuelto antes y uno nuevo.

Resumen

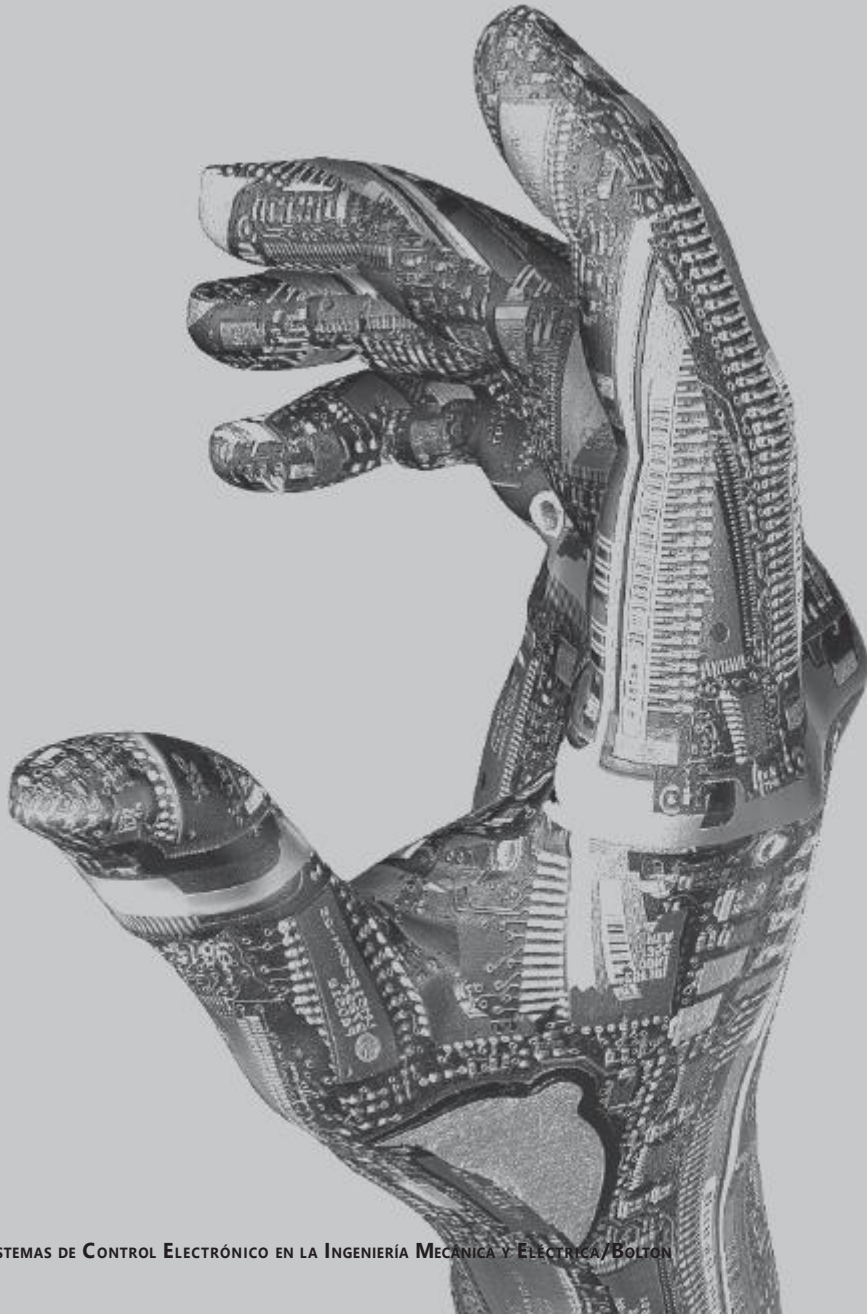
Una **máquina inteligente** es la que está dotada con la habilidad de razonar. La **percepción** con un sistema inteligente es la reunión de información por medio de sensores y la organización de la información reunida, de manera que se puedan tomar decisiones. El **razonamiento** es el proceso de partir de lo conocido a lo desconocido. Un ejemplo de **razonamiento determinístico** es cuando se emplea la regla "si-entonces". El **razonamiento no determinístico** permite hacer predicciones basadas en la probabilidad. Con la **lógica difusa** no es necesario clasificar las proposiciones como falsas o verdaderas, pero su veracidad o falsedad se puede ponderar de manera que se puedan clasificar entre las dos en una escala. El **aprendizaje** se puede adquirir mediante la adaptación al medio ambiente basado en la experiencia.

Problemas

- 23.1 Examine una gama de monedas de su país y produzca una tabla patrón de reconocimiento.
- 23.2 ¿Cuál es la probabilidad de que a) al lanzar un dado salga seis, b) al lanzar dos dados uno de ellos salga seis, c) al extraer de una bolsa que contiene nueve bolas rojas y una negra salga una bola negra?
- 23.3 Si la probabilidad de un sistema mecatrónico que muestra una temperatura alta es de 0.01, ¿cuál es la probabilidad de que no mostrará una temperatura alta?
- 23.4 Se ha monitoreado una máquina durante 2000 horas y durante ese tiempo el sistema de enfriamiento sólo ha mostrado fugas por 4 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran fugas?
- 23.5 La probabilidad de un sistema de enfriamiento de una máquina con pérdidas se ha encontrado que es de 0.005 y la probabilidad del sistema muestra una alta temperatura de 0.008. Si una pérdida es seguro que provocará una temperatura alta, ¿cuál es la probabilidad de que una pérdida de un sistema de enfriamiento provoque una temperatura alta?
- 23.6 La probabilidad de que haya un mal funcionamiento en una máquina que consta de tres elementos A, B y C es de 0.46. Si la probabilidad del elemento A en actividad es de 0.50, la probabilidad de que se presente un mal funcionamiento con A es de 0.70, ¿cuál es la probabilidad de que A sea responsable por un mal funcionamiento?
- 23.7 Proponga reglas de "si-entonces" para un controlador de temperatura que se utiliza para operar un calentador con una válvula que permite que el agua circule por los radiadores de calefacción central cuando éste sólo opera en cierto periodo.

Parte V

Conclusión



Capítulo veinticuatro

Sistemas mecatrónicos

Objetivos

Después de estudiar este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Desarrollar soluciones posibles para diseñar problemas considerados desde el punto de vista de la mecatrónica.
- Analizar casos de estudio de soluciones mecatrónicas.

24.1

Diseños mecatrónicos

Este capítulo integra varios temas estudiados en este libro, para analizar soluciones de mecatrónica para diseñar problemas y proporcionar casos de estudio.

24.1.1 Interruptor temporizado

Suponga la necesidad de un dispositivo que debe activar un actuador, por ejemplo, un motor durante cierto tiempo preestablecido. Entre las posibles soluciones se puede contar con:

- 1 Una leva giratoria
- 2 Un PLC
- 3 Un microprocesador
- 4 Un microcontrolador
- 5 Un temporizador, por ejemplo, 555

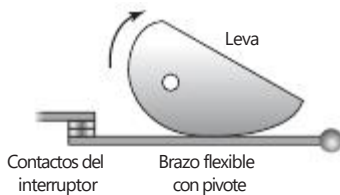


Figura 24.1 Interruptor de operador de leva.

La solución mecánica podría ser una leva giratoria (Figura 24.1) (sección 8.4). La leva podría girar a una velocidad constante al igual que el seguidor de la leva utilizado para activar un interruptor, el lapso en el que el interruptor permanece cerrado depende de la forma de la leva. Ésta es una solución que se ha usado ampliamente en el pasado.

Una solución PLC sería el arreglo mostrado en la Figura 24.2, con el programa de escalera dado. Esto tendría ventaja sobre la leva giratoria de contar con tiempos de apagado o encendido que se pueden ajustar con sólo cambiar los valores del tiempo preestablecido en el programa, mientras que se necesitaría una leva diferente si se tuvieran que cambiar los tiempos. La solución con software es mucho más fácil de implementar que la de hardware.

Un solución basada en un microprocesador podría implicar un microprocesador combinado con un chip de memoria e interfaces de entrada/salida. El programa se usa para conectar y desconectar una salida, una vez transcurrido cierto retardo, que se produce en un bloque del programa en el que hay un ciclo de temporización. Esto genera un retardo mediante una derivación que recorre un lazo las veces que sea necesario para generar el tiempo requerido. Así, en lenguaje ensamblador se tiene:

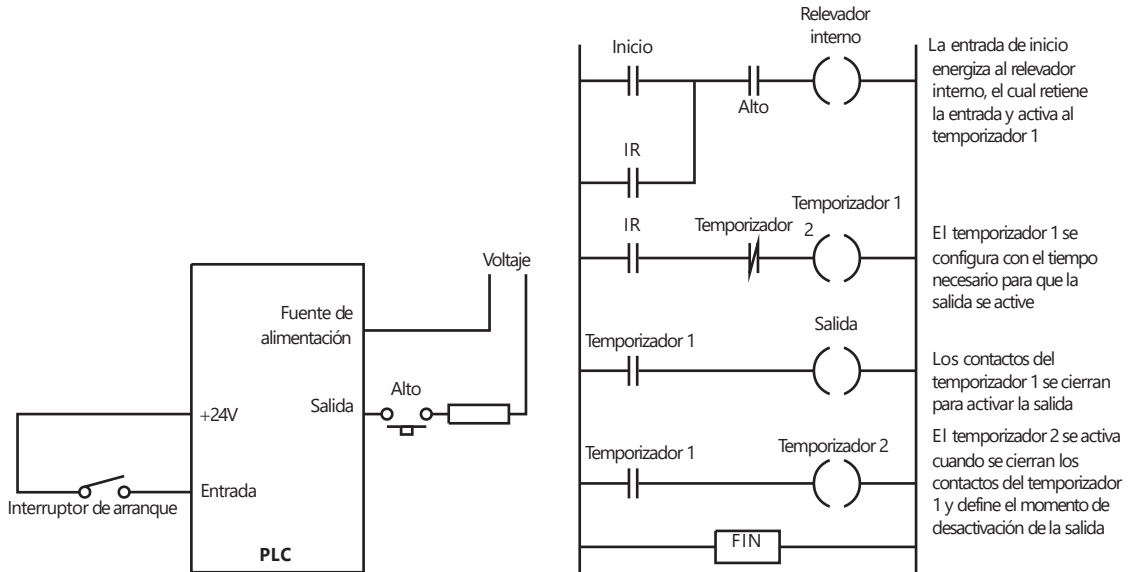


Figura 24.2 Sistema temporizador con PLC.

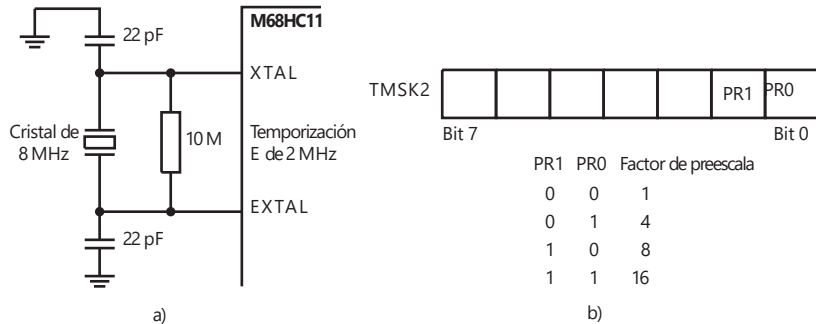
```

DELAY    LDX    #F424    ; F424 es el número de ciclos
LOOP     DEX
        BNE    LOOP
        RTS
    
```

DEX disminuye el registro de índice; esto y BNE se bifurcan si no son iguales, cada uno toma 4 ciclos de reloj. Al lazo entonces le lleva 8 ciclos y habrá n lazos hasta que $8n + 3 + 5$ da el número F424 (LDX tarda 3 ciclos y RTS tarda 5 ciclos). En lenguaje C las líneas del programa se escribirían utilizando la función while.

Otra posibilidad es utilizar el sistema temporizador en un microcontrolador como el MC68HC11. Éste se basa en un contador de 16 bits TCNT que se activa mediante la señal del sistema de temporización E (Figura 24.3a). El sistema de temporización E se puede preescalar al establecer bits en el registro 2 de la máscara de interrupción del temporizador (TMSK2), en la dirección \$1024 (Figura 24.3b). El registrador TCNT comienza con \$0000 cuando el procesador está reiniciando y cuenta de manera continua hasta que éste alcance el conteo máximo de \$FFFF. Al siguiente pulso se desborda y lee \$0000

Figura 24.3 a) Generación de un reloj interno de 2 MHz, b) factor de preescala.

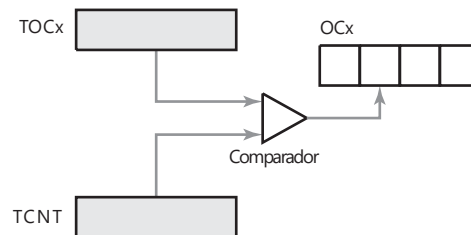


una vez más. Al desbordarse, establece el indicador de desbordamiento del temporizador TOF (bit 7 en el registro 2 de indicador de interrupción de temporizador diverso, TFLG2, en la dirección \$1025). Así, con un factor de preescala de 1 y una frecuencia de temporizador E de 2 MHz, el desbordamiento se produce después de 32.768 ms.

Una forma de aplicar lo anterior para una temporización es cuando el indicador TOF se observa por muestreo. Al definir el indicador, el programa aumenta su contador. El programa restablece el indicador al escribir un 1 en el bit 7 del registro TFLG2. De esta manera, la operación de temporización sólo consiste en dejar que el programa espere los números requeridos del indicador de desbordamiento.

Una mejor opción para realizar la temporización es utilizar la función de comparación de la salida. Se puede utilizar el puerto A del microcontrolador para entradas o salidas en general o para funciones de temporización. Las terminales de salida del temporizador son OC1, OC2, OC3, OC4 y OC5, y sus registros internos TOC1, TOC2, TOC3, TOC4 y TOC5. Se puede hacer uso de la función de comparación de la salida para comparar los valores en los registros TOC1 a TOC5 con el valor en el contador autónomo TCNT. Este contador inicia en 0000 cuando la CPU se reinicia y luego se ejecuta de manera continua. Cuando coinciden los valores de un registro y del contador, se define el bit respectivo del indicador OCx y hay salida por la terminal de salida que corresponda. La Figura 24.4 ilustra esto. Al programar los registros TOCx, también se definen los tiempos en que ocurren las salidas. La función de comparación de la salida puede generar retardos con precisión mucho más alta que el indicador de desbordamiento.

Figura 24.4 Comparación de la salida.



El siguiente programa ilustra cómo comparar la salida para producir un retardo. El lapso máximo de retardo que se puede generar en una operación de comparación de la salida es de 32.7 ms cuando el temporizador E es de 2MHz. Para generar retardos más largos, se requieren operaciones de comparación de salida múltiple. De esta manera, cada operación de comparación de salida produce un retardo de 25 ms y repite esto 40 veces para dar un retardo total de 1 s.

REGBAS	EQU	\$1000	; Dirección base de los registros
TOC2	EQU	\$18	; Compensación de TOC2 originada en REGBAS
TCNT	EQU	\$0E	; Compensación de TCNT originada en REGBAS
TFLG1	EQU	\$23	; Compensación de TFLG1 originada en REGBAS
OC1	EQU	\$40	; Máscara para poner en cero la terminal OC1 y el indicador OC1F
CLEAR	EQU	\$40	; Limpiar el indicador OC2F
D25MS	EQU	50000	; Número de ciclos del temporizador E para generar un retardo de 25 ms
NTIMES	EQU	40	; Número de operaciones de comparación de salida necesarias para obtener un retardo de 1 s
	ORG	\$1000	
COUNT	RMB	1	; Ubicación de memoria para controlar el número de operaciones de comparación de salida pendientes de ejecución

	ORG	\$C000	; Dirección de inicio del programa
	LDX	#REGBAS	
	LDAA	#OC1	; Borrado del indicador OC1
	STAA	TFLG1,X	
	LDAA	#NTIMES	; Inicializa la cuenta de comparación de la salida
	STAA	COUNT	
	LDD	TCNT,X	
WAIT	ADDD	#D25MS	; Agrega un retardo de 25 ms
	STD	TOC2,X	; Inicia la operación de comparación de la salida
	BRCLR	TFLG1,X OC1	; Espera hasta que se define el indicador OC1F
	LDAA	#OC1	; Borra el indicador OCIF
	STAA	TFLG1,X	
	DEC	COUNT	; Disminuye el valor del contador de comparación de la salida
	BEQ	OTHER	; Brinca a OTHER después de transcurrir 1 s
	LDD	TOC2,X	; Preparación para iniciar la siguiente operación de comparación
OTHER	BRA	WAIT	; Las otras operaciones del programa que se presentan después del retardo 1 s

Otro método posible para producir una señal de salida temporizada es utilizar un módulo temporizador, por ejemplo el 555. Con el temporizador 555, los intervalos de temporización se establecen mediante resistores y capacitores externos. En la Figura 24.5 se muestra un temporizador y la circuitería externa necesaria para dar una salida encendida cuando hay activación, con una duración de salida de $1.1 RC$. Lapsos mayores necesitan valores grandes de R y C . R está limitado hasta alrededor de $1 M\Omega$, de otra manera, las fugas se vuelven un problema, y C está limitada a más o menos 10 mF si los capacitores electrolíticos con problemas de fuga y precisión baja se evitan. De esta manera, el circuito mostrado está limitado a tiempos menores que 10 s . El límite más bajo es alrededor de $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 100 \text{ pF}$, por ejemplo, tiempos de una fracción de un milisegundo. Para mayores tiempos, desde 16 ms hasta días, se puede usar un temporizador alternativo como el ZN1034E.

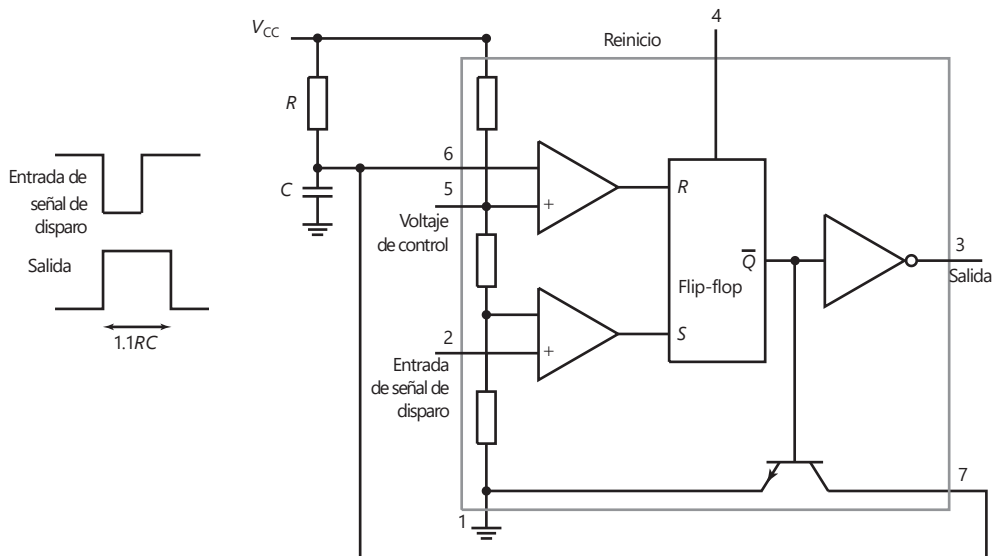


Figura 24.5 Temporizador 555.

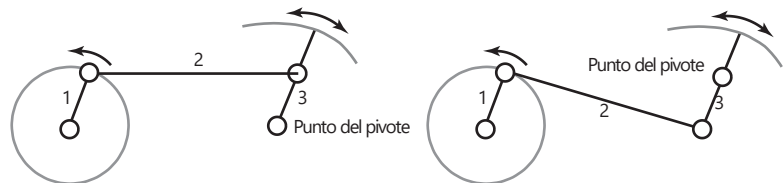
24.1.2 Movimiento del limpiaparabrisas

Suponga que se requiere de un dispositivo mediante el cual oscile un brazo describiendo un arco, hacia delante y hacia atrás como el limpiaparabrisas. Algunas soluciones posibles pueden ser:

- 1 Enlace mecánico y un motor de c.d.
- 2 Un motor paso a paso

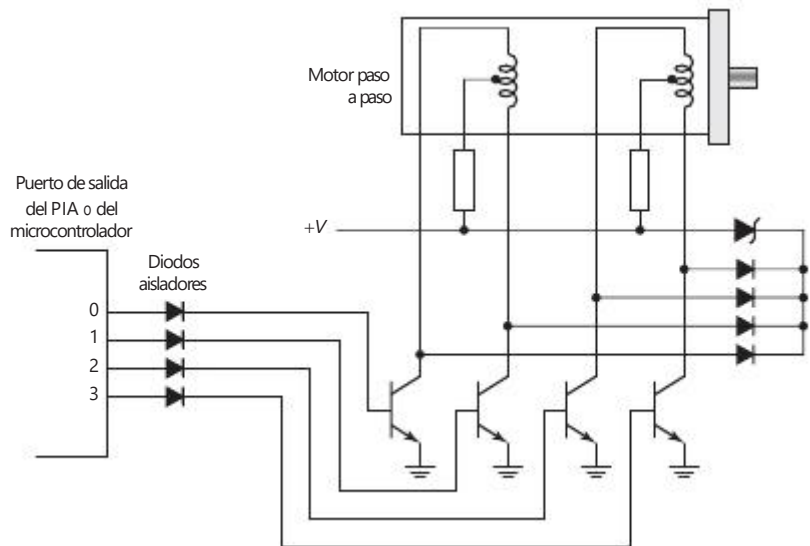
En la Figura 24.6 se muestra una solución mecánica que consiste en girar el brazo 1 mediante un motor que provoca que el brazo 2 imparta un movimiento oscilatorio del brazo 3. Los limpiaparabrisas de un auto por lo general utilizan un mecanismo con un motor de imán permanente de c.d.

Figura 24.6 Mecanismo de un limpiaparabrisas.



Una solución alternativa es utilizar un motor paso a paso. La Figura 24.7 muestra cómo utilizar un microprocesador con un PIA, o un microcontrolador, con un motor paso a paso. Se necesita que la señal que entra a este motor lo haga girar varios pasos en una dirección, luego invierta la dirección y gire la misma cantidad de pasos en la dirección opuesta.

Figura 24.7 Interfaz para un motor paso a paso.



Si el motor paso a paso tiene una configuración de "paso total", las salidas deben ser como indica la Tabla 24.1a. Para arrancar y hacer girar el motor en dirección de avance se utiliza la secuencia A, 9, 5, 6 y se repite empezando por 1. Para el retroceso se utiliza la secuencia 6, 5, 9, A y se repite empezando por 6. Si se utiliza la configuración de "medio paso" las salidas deben ser como se indica en la Tabla 24.1b. Para un movimiento hacia adelante se utiliza la secuencia A, 8, 9, 1, 5, 4, 6, 2, regresando a A; para el retroceso se utiliza la secuencia 2, 6, 4, 5, 1, 9, 8, A, regresando a 2.

Tabla 24.1 a) Configuración de paso total, b) configuración de medio paso.

a)						b)					
Paso	Bit 3	Bit 2	Bit 1	Bit 0	Código	Paso	Bit 3	Bit 2	Bit 1	Bit 0	
1	1	0	1	0	A	1	1	0	1	0	
2	1	0	0	1	9	2	1	0	0	0	
3	0	1	0	1	5	3	1	0	0	1	
4	0	1	1	0	6	4	0	0	0	1	
1	1	0	1	0	A	5	0	1	0	1	
						6	0	1	0	0	
						7	0	1	1	0	
						8	0	0	1	0	
						1	1	0	1	0	

Los elementos básicos de un programa serían:

Avanzar un paso

Saltar a la rutina de retardo y dar tiempo para completar el paso

Hacer un ciclo o repetir lo anterior hasta completar la cantidad necesaria de pasos hacia adelante

Invertir la dirección

Repetir lo anterior la misma cantidad de pasos, pero en retroceso

En lenguaje C, los tres medios pasos de avance y los tres medios pasos de retroceso, seguidos de la inclusión del archivo de encabezados correspondiente, constarían de los siguientes elementos:

```
main ( )
{
  portB = 0xa; /*primer paso*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
  portB = 0x8; /*segundo paso*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
  port B = 0x9; /*tercer paso*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
  port B = 0x8; /*regresa un paso*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
  port B = 0xa; /*regresa otro paso*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
  port B = 0x2; /*regresa a donde inició el motor*/
  delay ( ); /*incorpora retardo programado de 20 ms*/
}
```

Cuando hay muchos pasos, un programa sencillo es incrementar un contador cada paso y repetir el ciclo hasta que el contador llegue al número requerido. Un programa de este tipo tendría esta forma básica:

Avanzar un paso

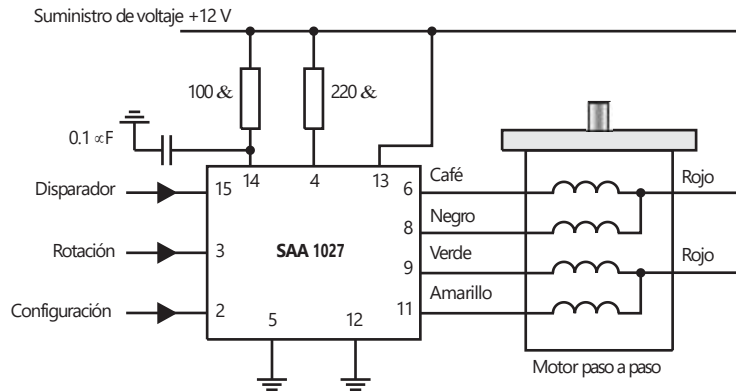
Saltar a la rutina de retardo y dar tiempo para completar el paso

Aumentar el valor del contador

Hacer un ciclo o repetir lo anterior hasta llegar al número requerido de pasos en dirección de avance
 Invertir la dirección
 Repetir lo anterior el mismo número de pasos, pero en retroceso

Existen circuitos integrados específicos para el control de un motor paso a paso, que simplifican las interfaces y el software. La Figura 24.8 muestra cómo utilizar estos circuitos. Basta especificar la cantidad de impulsos de entrada para disparar, mientras el motor avanza en la transición bajo a alto durante un pulso alto-bajo-alto. Si en la entrada de rotación hay un valor alto, el motor avanza en sentido contrario de las manecillas del reloj; un valor bajo lo hace girar en sentido de las manecillas del reloj. Basta una señal de salida del microcontrolador para que los pulsos de salida vayan al obturador y una salida a la rotación. Una salida a la terminal de configuración restablece el motor a su posición original.

Figura 24.8 Circuito integrado SAA 1027 para motor paso a paso.



En los párrafos anteriores se ha indicado cómo se podría usar un motor paso a paso para dar una rotación angular. ¿Pero cómo se comportará un motor paso a paso cuando se le da una señal de voltaje en su entrada? ¿Se podría esperar que rotara al ángulo de interés sin sobrepaso y sin oscilaciones antes de detenerse en el ángulo requerido? Para ilustrar cómo se puede desarrollar un modelo para un sistema de un motor paso a paso y así predecir su comportamiento, considere el siguiente análisis simplificado (un análisis más detallado se encuentra en *Stepping Motors and their Microprocessor Controls* de T. Kenjo, Oxford University Press, 1984).

El sistema que involucra un motor paso a paso manejado por pulsos generados en un microcontrolador es un sistema de control en lazo abierto. El motor paso a paso de imán permanente (sección 9.7) tiene un estator con un número de polos, los cuales se energizan mediante una corriente que pasa a través de las bobinas devanadas sobre ellos. Es posible determinar un modelo para ver cómo girará el rotor cuando hay un pulso de voltaje en su entrada considerando, por simplicidad, un motor paso a paso con sólo un par de polos y tratándolo igual que el motor de c.d. que se analizó en la sección 18.3.2. Si v es el voltaje aplicado al par de bobinas del motor y v_b la fuerza contraelectromotriz, entonces:

$$v - v_b = L \frac{di}{dt} + Ri$$

donde L es la inductancia, R la resistencia e i la corriente del circuito. Se hará la suposición para simplificar de que la inductancia no cambia en forma significativa y por lo tanto L es constante.

La fuerza contraelectromotriz será proporcional a la razón a la cual está cambiando el flujo magnético en las dos bobinas. Esto dependerá del ángulo u , que es la diferencia angular relativa entre el rotor y los polos considerados. Entonces se puede escribir:

$$v_b = -k_b \frac{d}{dt} \cos u = k_b \operatorname{senu} \frac{du}{dt}$$

donde k_b es una constante. Entonces:

$$v - k_b \operatorname{senu} \frac{du}{dt} = L \frac{di}{dt} + Ri$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta ecuación resulta:

$$V(s) - k_b s \operatorname{senu} u(s) = sL I(s) + R I(s) = (sL + R) I(s)$$

Como con el motor de c.d., la corriente a través de un par de bobinas generará un par (un par sobre el imán, es decir, el rotor, es la reacción que resulta del par ejercido sobre las bobinas; tercera ley de Newton). El par es proporcional al producto de la densidad de flujo en las espiras de la bobina y la corriente a través de ellas. La densidad de flujo dependerá de la posición angular del rotor y así se puede escribir:

$$T = k_t i \operatorname{senu}$$

donde k_t es una constante. Este par causará una aceleración angular a y como $T = Ja$, donde J es el momento de inercia del rotor:

$$\frac{dT}{dt} = k_t i \operatorname{senu}$$

Al tomar la transformada de Laplace de esta ecuación se tiene:

$$s^2 J u(s) = k_t \operatorname{senu} I(s)$$

y así se puede escribir:

$$V(s) - k_b s \operatorname{senu} u(s) = (sL + R)(s^2 J u(s)) k_t \operatorname{senu}$$

y la función de transferencia entre el voltaje de entrada y el desplazamiento angular resultante es:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{u(s)}{V(s)} = \frac{1}{(sL + R)(s^2 J) k_t \operatorname{senu}} \\ &= \frac{1}{s} * \frac{k_t \operatorname{senu}}{JLs^2 + JRs + k_b k_t \operatorname{senu}^2} \end{aligned}$$

Cuando se suministra un impulso de voltaje a las bobinas del motor, puesto que para un impulso unitario $V(s) = 1$:

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{1}{s} * \frac{k_t \operatorname{senu}}{JLs^2 + JRs + k_b k_t \operatorname{senu}^2} \\ &= \frac{1}{s} * \frac{(k_t \operatorname{senu}) > JL}{s^2 + (R > L)s + (k_b k_t \operatorname{senu}^2) > JL} \end{aligned}$$

La ecuación cuadrática en s es de la forma $s^2 + 2z\nu_n s + \nu_n^2$ (sección 20.3.1) y tiene una frecuencia natural ν_n de $\sqrt{(k_b k_t \sin^2 \alpha) / J L}$ y el factor de amortiguamiento relativo z de $(R/L) / 2\nu_n$. El rotor girará a algún ángulo y oscilará alrededor del ángulo con oscilaciones amortiguadas conforme el tiempo avanza. El método que generalmente se usa para los limpiaparabrisas de un automóvil es el varillaje mecánico operado por un motor de corriente directa. En el sitio de Wikipedia que corresponde a limpiaparabrisas se ofrece un estudio de los sistemas de limpiaparabrisas y una demostración de su operación.

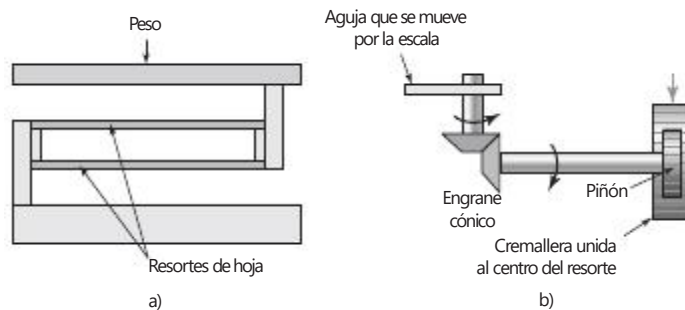
24.1.3 Báscula de baño

Suponga el diseño de una báscula sencilla, por ejemplo, para baño. Los principales requisitos son que una persona se pare en una plataforma y su peso aparezca en un indicador. El peso deberá aparecer con razonable rapidez y exactitud y ser independiente de la parte de la plataforma donde se pare la persona. Las siguientes son algunas soluciones posibles.

- 1 Un sistema puramente mecánico basado en un resorte y un engrane.
- 2 Una celda cargada y un sistema microprocesador/microcontrolador.

Una opción es aprovechar el peso de la persona sobre la plataforma para deformar dos resortes de hoja paralelos (Figura 24.9a). En este caso, la deformación es casi independiente del lugar en la plataforma en que está la persona. La deformación se transforma en el desplazamiento de una aguja por una escala, como se muestra en la Figura 24.9b). Para transformar el movimiento lineal en un movimiento circular en torno a un eje horizontal se utiliza un piñón y una cremallera. Este movimiento se transforma en un giro alrededor del eje vertical, y a su vez, en el desplazamiento de la aguja por una escala, mediante un engrane cónico.

Figura 24.9 Báscula de baño.



Otra solución posible es usar un microprocesador. La plataforma se monta sobre celdas de presión en las que se utilizan deformímetros tipo resistencia eléctrica. Cuando la persona está sobre la plataforma se deforman los deformímetros y la resistencia varía. Si los deformímetros están montados en un puente de Wheatstone con cuatro brazos activos, la salida de voltaje desbalanceada del puente es una medida del peso de la persona. Esto se amplifica mediante un amplificador operacional diferencial. La señal analógica obtenida se alimenta a un convertidor analógico a digital con un latch, para alimentarla a un microprocesador, por ejemplo el Motorola 6820. La Figura 24.10 muestra la interfaz de entrada. También sería necesario contar con una memoria no borrrable, y para ello se usa un chip ROM (EPROM) apagable y programable, por ejemplo el Motorola 2716. La señal de salida al visualizador se obtiene a través de un PIA, como el Motorola 6821.

Sin embargo, si se utiliza un microcontrolador, la memoria se encuentra dentro del chip del microprocesador; y si se elige el microcontrolador idóneo,

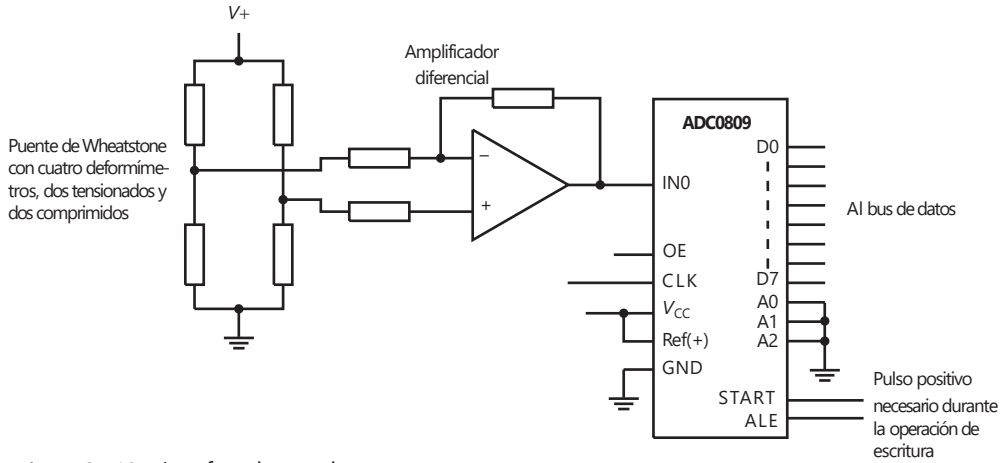


Figura 24.10 Interfase de entrada.

como el M68HC11, se puede obtener la conversión analógica a digital de las entradas. El sistema consiste en deformímetros que, a través de un amplificador operacional, entregan voltaje al puerto E del microcontrolador (la entrada del ADC), la salida pasa por los controladores adecuados, llega al decodificador y a una pantalla de LED pasando por los puertos B y C (Figura 24.11).

La estructura del programa sería:

Inicialización poniendo en cero la pantalla de LED y la memoria

Inicio

¿Hay alguien en la báscula? Si no, mostrar 000

Si sí

introducir datos

convertir los datos del peso en una salida adecuada

salida al decodificador y a la pantalla de LED

retardo para retener el visualizador

Repetir desde el principio para obtener un nuevo peso

Si se tiene en cuenta el diseño de las partes mecánicas de la báscula de baño es necesario considerar qué pasará cuando alguien se para en ella. Se tiene un sistema masa-resorte-amortiguador como el que se describió en la Figura 14.3a) (sección 14.2.2) y de esta manera su comportamiento se puede describir mediante:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

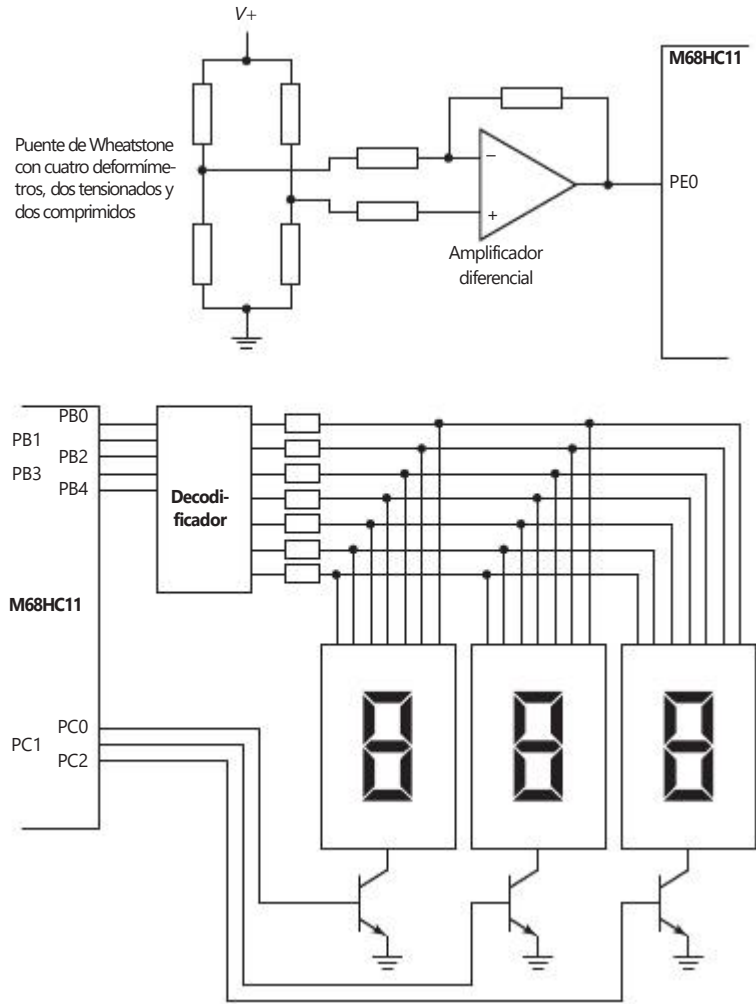
donde x es la deflexión vertical de la plataforma cuando se aplica una fuerza F . Al tomar la transformada de Laplace se obtiene:

$$ms^2 X(s) + c s X(s) + k X(s) = F(s)$$

y así el sistema se puede describir mediante una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Figura 24.11 Báscula de baño.



Se puede considerar una persona de peso W parada en la plataforma como una entrada escalón, y de esta manera:

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{W}{s}$$

El término cuadrático es de la forma $s^2 + 2z\omega_n s + \omega_n^2$ (sección 20.3.1) y de esta manera tiene una frecuencia natural ω_n de $\sqrt{2(mk)}$ y el factor de amortiguamiento relativo z de $\frac{c}{2\sqrt{2(mk)}}$.

Cuando una persona se para sobre la báscula y quiere que la báscula indique con rapidez su peso y no oscile por un tiempo largo alrededor del valor. Si el amortiguamiento fue ajustado a que fuese crítico tomaría más tiempo en alcanzar el valor final del peso, y por esto el amortiguamiento necesita ajustarse para que se tengan algunas oscilaciones que se amortigüen pronto. Sería deseable considerar un tiempo de asentamiento t_s para variaciones de 2% (sección 19.4) de, por ejemplo, 4 s. Debido a que $t_s = 4/z\omega_n$ entonces se requiere $z\omega_n = 1$ y así $z = \frac{1}{\omega_n}$ y así $\frac{c}{2\sqrt{2(mk)}} = \frac{1}{\sqrt{2(mk)}}$. Una manera sencilla de alterar el amortiguamiento es cambiar la masa.

Lo anterior indica cómo se puede usar un modelo matemático para predecir el comportamiento de un sistema y qué factores se pueden cambiar para mejorar su desempeño.

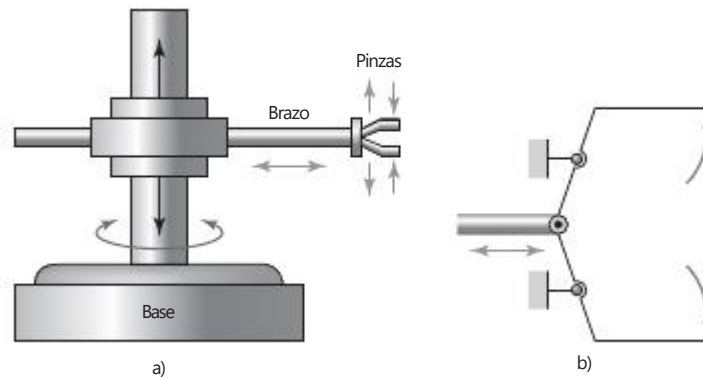
24.2 Casos de estudio

Los siguientes son ejemplos resumidos de sistemas mecatrónicos.

24.2.1 Robot para levantar y depositar objetos

La Figura 24.12a) ilustra la forma básica de un robot que levanta y deposita objetos. El robot tiene tres ejes de movimiento: rotación alrededor de su base, en sentido de las manecillas del reloj y en sentido contrario; extensión o contracción del brazo y subirlo o bajarlo. El mecanismo de sujeción o pinza se abre y se cierra. Estos movimientos se producen con cilindros neumáticos accionados por válvulas solenoide con interruptores limitadores para indicar cuándo termina un movimiento. Por ejemplo, para la rotación en el sentido de las manecillas del reloj (cw) se usa la extensión de un pistón; para la rotación en sentido inverso (ccw) se usa la contracción del pistón. El movimiento ascendente del brazo se obtiene mediante la extensión del émbolo de un pistón lineal; el movimiento descendente con la retracción del émbolo. La extensión del brazo se logra mediante la extensión del émbolo de otro pistón; el movimiento de regreso mediante la retracción del pistón. Para abrir o cerrar las pinzas se usa la extensión o retracción del émbolo de un pistón lineal. La Figura 24.12b) muestra el mecanismo básico que puede usarse.

Figura 24.12 Robot para:
a) levantar y depositar, b) para sujetar.



Un programa típico para este robot podría ser:

- 1 Cerrar y colocar la pinza en un componente manejado desde un alimentador elevado.
- 2 Contraer el brazo de manera que el componente se retire del alimentador.
- 3 Girar el brazo en un plano horizontal de manera que apunte en dirección a la pieza de trabajo.
- 4 Extender el brazo de forma que la pinza se coloque sobre la pieza de trabajo.
- 5 Girar la muñeca de manera que las manos del componente estén en posición hacia abajo desde la pinza.
- 6 Soltar la pinza de forma que el componente caiga en la posición requerida.
- 7 Girar la pinza a una posición hacia arriba.
- 8 Contraer el brazo.
- 9 Girar el brazo de forma que apunte hacia el alimentador.

Repetir la secuencia para el siguiente componente.

En la Figura 24.13 se muestra cómo usar un microcontrolador para controlar válvulas solenoides y por lo tanto los movimientos del robot.

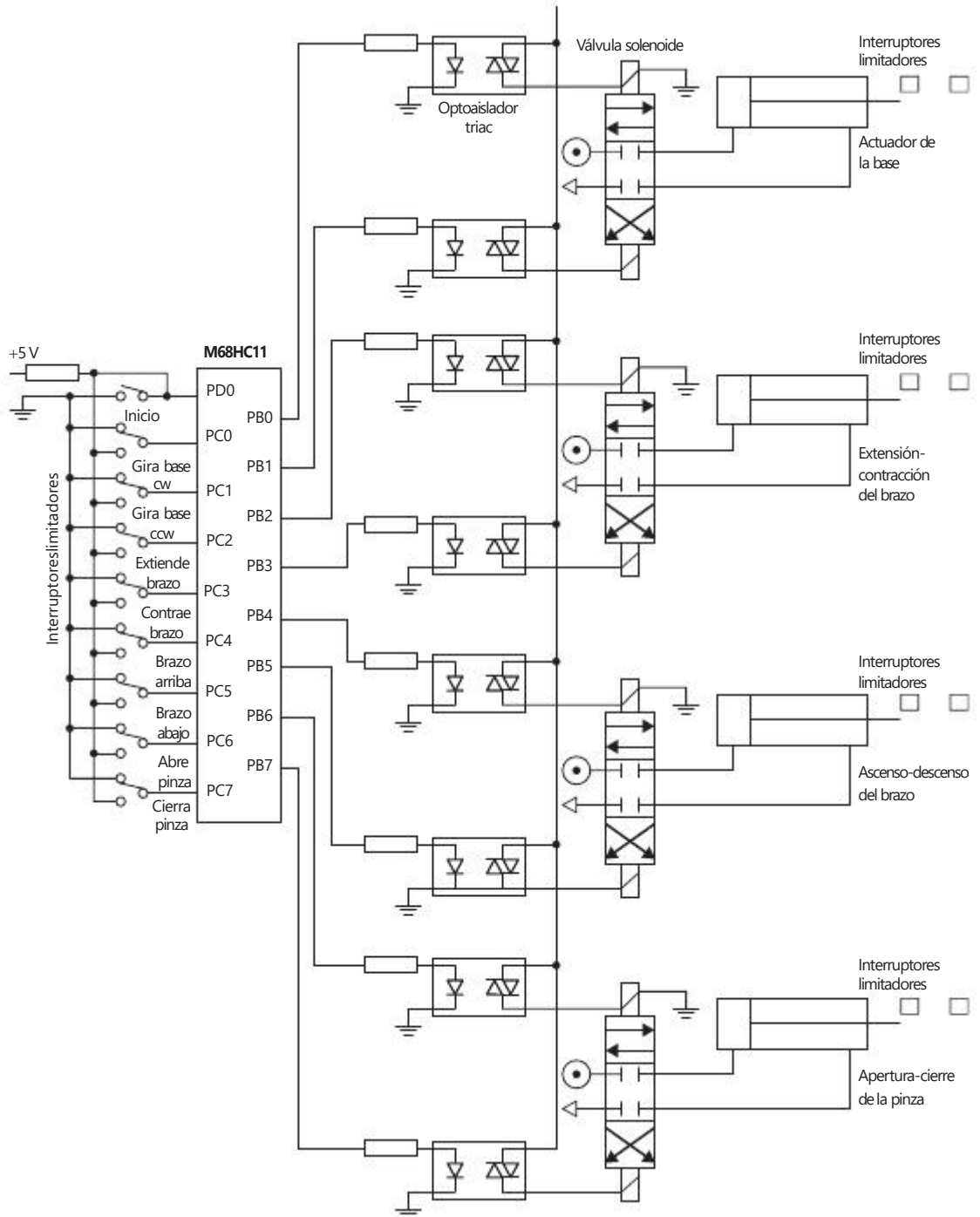


Figura 24.13 Control del robot.

Los arietes hidráulicos y neumáticos se usan ampliamente para manejar los brazos del robot de manera que se puedan controlar con facilidad para mover los miembros a una velocidad relativamente baja, mientras que los motores eléctricos necesitarían operar a través de una caja de velocidades.

Las posiciones del brazo y de la pinza en la Figura 24.13 están determinadas por interruptores limitadores. Esto significa que sólo se pueden atender con precisión dos posiciones con cada actuador y las posiciones no se pueden cambiar fácilmente sin movimiento físico de las posiciones de los interruptores. El arreglo es un sistema de control en lazo cerrado. En algunas aplicaciones esto no sería un problema.

Sin embargo, es más común usar un control de lazo cerrado con las posiciones de un brazo y pinza monitoreados por sensores y retroalimentados para que se pueda comparar en el controlador con la posición requerida. Cuando existe una diferencia en la posición requerida, el controlador opera los actuadores para reducir el error. La posición angular de la junta a menudo se monitorea con un decodificador (sección 2.3.7), que tenga la capacidad de una precisión alta. En la Figura 24.14 se muestra un arreglo en lazo cerrado que se puede emplear para el movimiento lineal del brazo robótico.

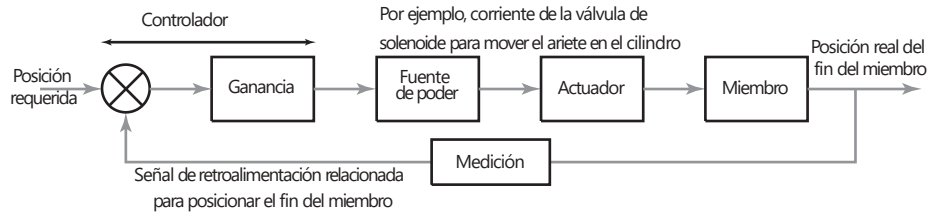


Figura 24.14 Control en lazo cerrado para un miembro.

La salida del actuador es una fuerza F aplicada para mover el fin del miembro. Para una posición fija de y_s y una posición real y , la señal de error será $y_s - y$, suponiendo que el sistema de medición tiene una ganancia de 1. Si se considera que el controlador tiene una ganancia de G_c y G_a para el ensamble del actuador, entonces $F = G_c G_a (y_s - y)$. Las masas que se acelerarán con esta fuerza son las masas de la carga que el brazo lleva, la masa del brazo y la masa de las partes del movimiento del actuador. Si ésta es una masa total de m , entonces la ley de Newton da $F = ma$, donde la aceleración a se puede escribir como d^2y/dt^2 . Sin embargo, esto no toma en cuenta la fricción y puesto que se puede tomar la fuerza de fricción para ser proporcional a la velocidad, la fuerza de fricción es $k dy/dt$. Así se escribe

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt}$$

por lo tanto,

$$y_s = \frac{m}{G_c G_a} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{G_c G_a} \frac{dy}{dt} + y$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden y así la deflexión y será como se describe en la sección 20.3.1 y la forma que tomará dependerá del factor de amortiguamiento. Un sistema bajo amortiguamiento tendrá una frecuencia angular natural ν_n dada por

$$\nu_n = \frac{\sqrt{G_c G_a}}{A m}$$

Esta frecuencia angular determinará qué tan rápido responde el sistema a un cambio (sección 19.5): cuanto más grande es la frecuencia angular, más rápido responde el sistema (el tiempo elevado es inversamente proporcional a la frecuencia angular), lo que significa que al aumentar la ganancia del controlador o disminuir la masa, se puede aumentar la velocidad de respuesta. El factor de amortiguamiento relativo z se da desde una ecuación diferencial como la siguiente

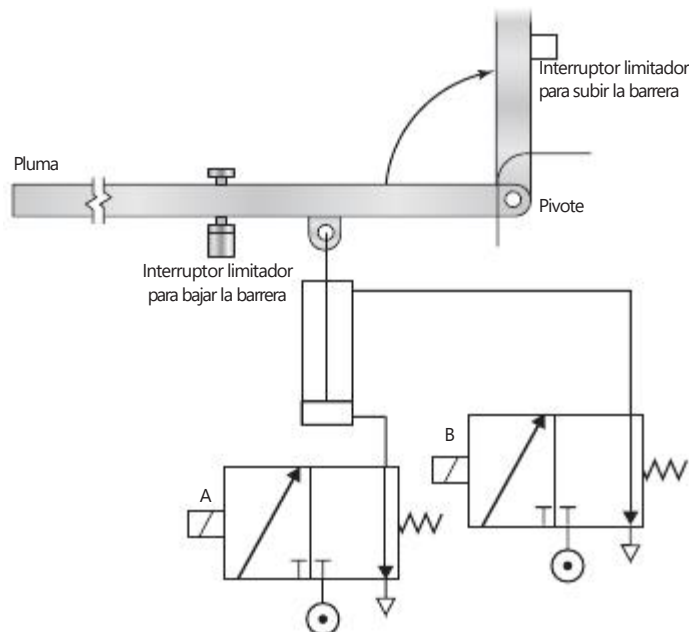
$$z = \frac{k}{2\zeta G_c G_d m}$$

El tiempo que lleva desde la oscilación hasta su desvanecimiento, es decir, el tiempo establecido (sección 19.5), es inversamente proporcional al factor de amortiguamiento y de esta forma, por ejemplo, al aumentar cualquier parte de la masa dará como resultado una disminución en el factor de amortiguamiento y así a las oscilaciones les toma más tiempo desvanecerse.

24.2.2 Barreras (plumas) de estacionamiento

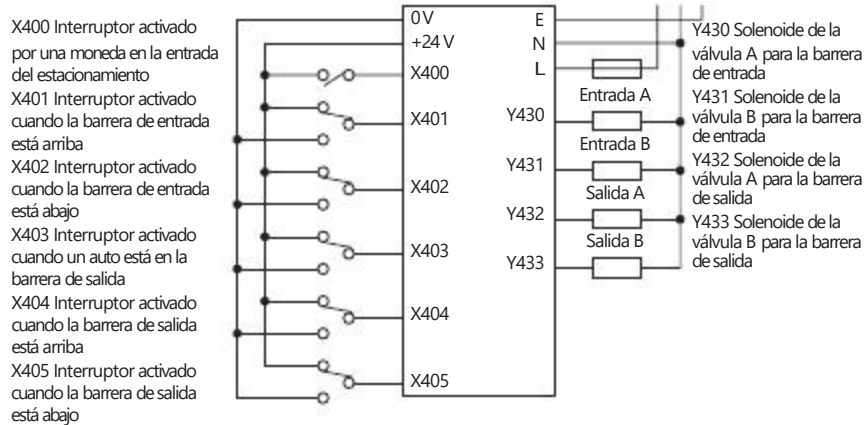
Un ejemplo de la aplicación de un PLC son las plumas activadas con monedas en un estacionamiento. La pluma de entrada se abre al introducir la moneda correcta en el depósito recolector y la pluma de salida cuando se detecta un automóvil frente a la pluma. La Figura 24.15 muestra los sistemas de válvulas que se utilizan para levantar y bajar las plumas.

Figura 24.15 Sistema para subir y bajar una barrera (pluma) de estacionamiento.



Cuando circula corriente en el solenoide de la válvula A, el pistón del cilindro sube y hace girar la pluma en torno a su pivote, levantándola y permitiendo el paso de un auto. Cuando se interrumpe la corriente que circula por el solenoide de la válvula A, el resorte de regreso de la válvula la devuelve a su posición original. Cuando la corriente circula en el solenoide de la válvula B, la presión se aplica para que la pluma baje. Se usan interruptores limitadores para detectar cuándo la barrera está abajo y cuándo está totalmente arriba.

Figura 24.16 Conexiones del PLC.



Con dos sistemas como el de la Figura 24.15, uno para la entrada y otro para la salida, así como las conexiones de las entradas y salidas del PLC que aparecen en la Figura 24.16, el programa de escalera puede ser de la forma que ilustra la Figura 24.17.

24.2.3 Cámara digital

Una cámara digital es la que captura imágenes y las almacena en un formato digital en una tarjeta de memoria, a diferencia de las cámaras de película anteriores en donde la imagen era almacenada en una forma análoga como un cambio químico en la película. La Figura 24.18 muestra los elementos básicos de una cámara digital no muy cara.

Cuando el fotógrafo oprime el botón del obturador hasta su primera posición (es decir, oprimido en forma parcial), el microcontrolador principal calcula la velocidad del obturador y los valores de configuración de apertura con base en el valor que proporciona el sensor de medición; éstos aparecen en el visor y en la pantalla externa de LCD. Al mismo tiempo, el microcontrolador procesa la información del sensor de rango y envía señales al motor para ajustar el enfoque de la lente. Si el fotógrafo oprime el botón del obturador hasta su segunda posición (todo oprimido), el microcontrolador principal envía señales para subir el espejo, modificar la apertura hasta lograr la que se requiere, abrir el obturador hasta el tiempo de exposición correspondiente y, para concluir, una vez que cierra el obturador, procesa la imagen recibida en el sensor de imagen y la almacena en la tarjeta de memoria. Además, cuando el botón del obturador es parcialmente oprimido, el sistema de control de enfoque automático se utiliza para mover los lentes de manera que la imagen esté en foco (para más detalles de los sistemas de autoenfoque vea la sección 1.7.1 y más adelante en esta sección para abordar el tema del motor que se usa para mover las lentes).

La luz del objeto que es fotografiado pasa a través de un sistema de lentes y se enfoca dentro del sensor de imagen. Esto es por lo general un dispositivo acoplado por carga (CCD) (sección 2.10), que consiste en un arreglo de varias celdas pequeñas sensibles a la luz, denominados píxeles, los cuales están expuestos a la luz que pasa por la lente cuando el obturador electromecánico se abre por un intervalo breve de tiempo. La luz que cae en la celda se convierte en una pequeña cantidad de carga eléctrica, la cual una vez completada la exposición, se lee y almacena en un registro antes de ser procesada y almacenada en la tarjeta de memoria.

Figura 24.17 Programa de escalera.

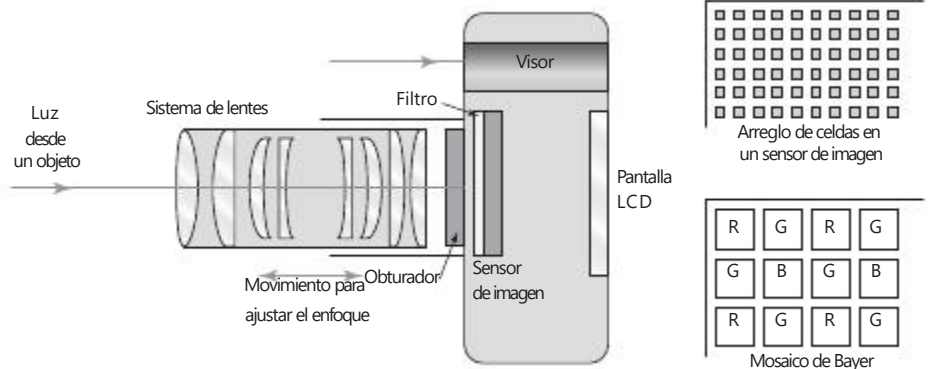
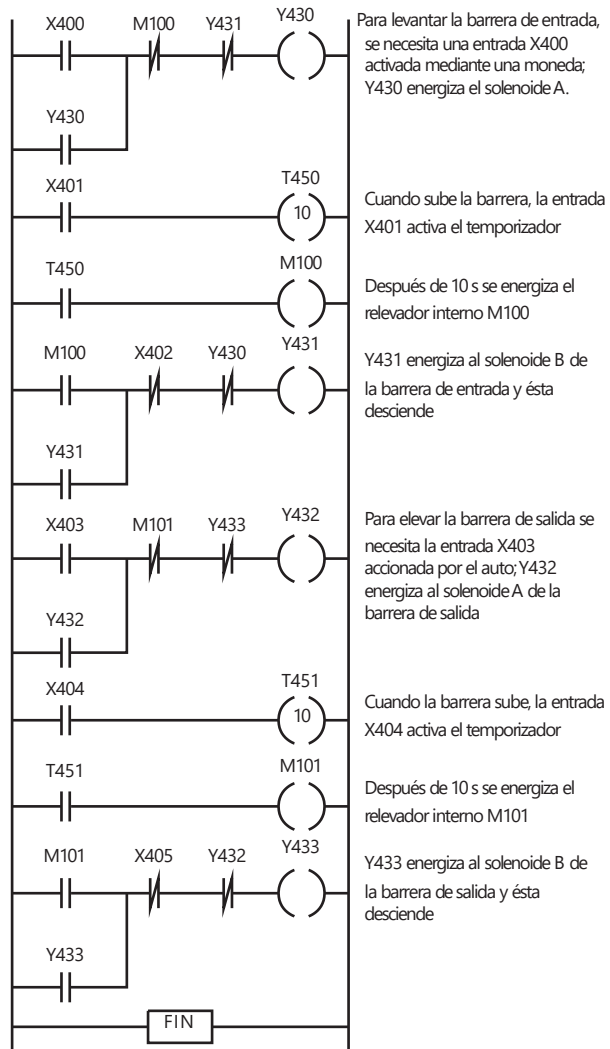


Figura 24.18 Elementos básicos de una cámara digital.

Los sensores no detectan los colores y así, para poder dar color a las fotografías, una matriz filtro de color se antepone al arreglo de celdas. Existen filtros separados, azul, verde o rojo para cada célula. El diseño más común para la matriz es el mosaico de Bayer, que cuenta con los tres colores arreglados en un patrón, de manera que ningún filtro del mismo color queden juntos y hay dos veces tantos filtros verdes como rojos o azules, esto se debe a que el verde es áspero en el centro del espectro visible y ofrece más detalles. El resultado es un mosaico de píxeles rojos, verdes y azules. Los archivos de los resultados para los píxeles en esta etapa se definen como archivos RAW en los que no se ha hecho ningún proceso. Para poder ofrecer una gama de colores a un píxel en particular, se utiliza un algoritmo en el que el color es asignado a un píxel en particular denominado al tomar en cuenta las intensidades de los colores de los píxeles vecinos.

El siguiente paso en procesar la señal es comprimir los archivos de manera que ocupen la menor memoria posible. De esta manera se puede almacenar más en la tarjeta de memoria que en lo que se guardaría en los archivos RAW. Por lo general, el formato del archivo comprimido es JPEG (Joint Photographic Experts Group) que utiliza el principio de muchas fotografías, muchos de los píxeles en la misma área son idénticos, así que en lugar de almacenar la misma información para cada uno, almacena una de manera efectiva y pide a los otros que sólo la repitan.

Un microcontrolador determina la exposición requerida de la cámara en respuesta a la salida desde un sensor como un fotodiodo detector de intensidad de la luz, el cual ofrece salidas que sirven para controlar la apertura y la velocidad del obturador. El sistema de manejo de apertura con una cámara digital puede ser un motor paso a paso que abre o cierra un conjunto de hojas de diafragma según la señal recibida desde el microcontrolador. El mecanismo del obturador que se usa con una cámara digital por lo general de la forma en la que se muestra en la Figura 24.19. El obturador incluye dos juegos de laminillas, cada una controlada por un pestillo con resorte. A falta de una corriente para el electromagneto, el resorte fuerza el pestillo en una posición que tiene el conjunto superior de laminillas inferiores para traslaparse con el juego inferior. Cuando una corriente pasa a través de un electromagneto éste provoca que el pestillo gire y al hacerlo levanta el conjunto superior de laminillas. El conjunto inferior de laminillas está en un principio sujeto al fondo por una corriente a través de su electromagneto que sostiene el pestillo. Al apagarse la corriente de

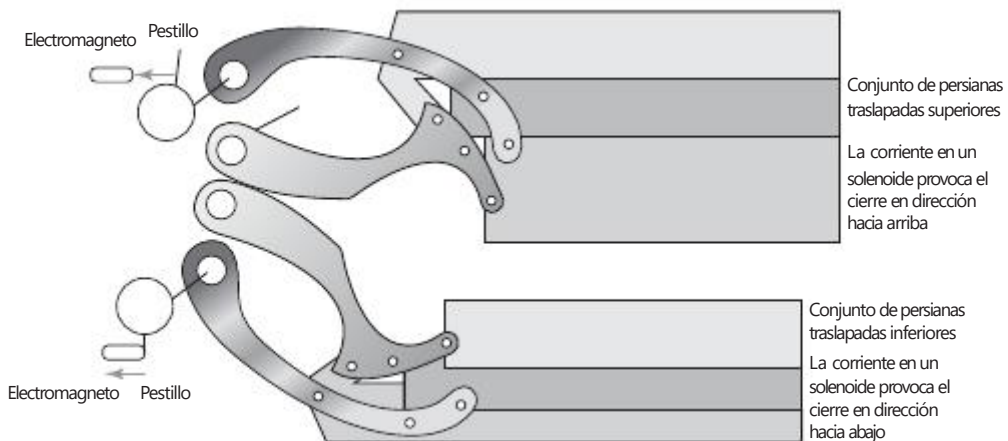


Figura 24.19 Mecanismo del obturador.

la laminilla inferior del pestillo, las laminillas se elevan. Así, la apertura del orificio a través del sensor de imagen se determina por el tiempo entre enchufar una corriente hacia el pestillo superior y apagarla en un pestillo más bajo.

El enfoque requiere que el mecanismo mueva la lente. A menudo esto lo hace un motor ultrasónico que consiste en una serie de elementos piezoeléctricos como el titanato zirconato de plomo (PZT). Cuando una corriente es alimentada por un elemento piezoeléctrico de este tipo, éste se expande o contrae según la polaridad de la corriente (Figura 24.20a). Los elementos PZT están unidos por ambos lados de una tira delgada de resorte de acero y, cuando se aplica una diferencia potencial en la tira, la única forma en la que el PZT se puede expandir o contraer es doblando la tira de metal (Figura 24.20b). Al aplicarse la polaridad opuesta a elementos alternos, se pueden doblar en direcciones opuestas (Figura 24.20c). De esta manera, al utilizar una corriente alterna con una secuencia de tales elementos alrededor de un anillo, se puede hacer una onda de desplazamiento que viaje por el anillo piezoeléctrico, ya sea en dirección de las manecillas del reloj, o en dirección opuesta a las manecillas del reloj. La amplitud de esta onda de desplazamiento es de sólo 0.001 mm. Hay una tira de material con diminutos dientes adheridos en el exterior de los elementos PZT y cuando la onda de movimiento se desplaza por los elementos PZT son capaces de empujar la montura de la lente (Figura 24.20d) y de esta forma manejar el elemento de enfoque.

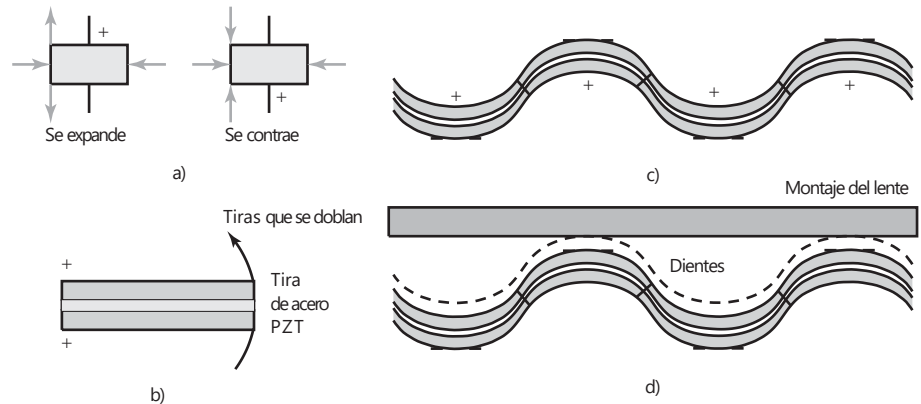


Figura 24.20 Motor piezoeléctrico.

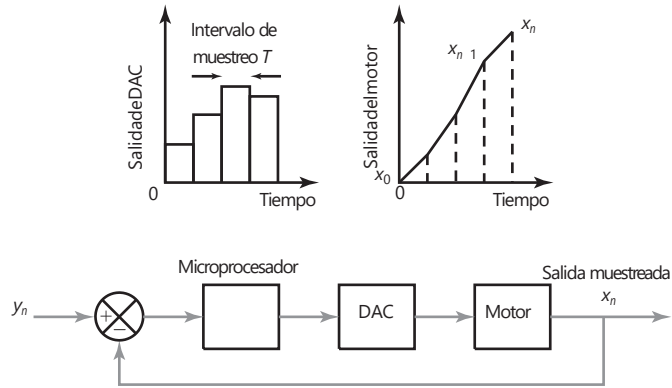
Para complementar la información del uso de técnicas de modelaje tratadas en capítulos anteriores de este libro, considere el motor ultrasónico. Se requiere que el par de torsión T que genera el motor gire el anillo del motor a alguna posición angular u . Este anillo es muy ligero y por ello su inercia es despreciable en comparación con la fricción entre los anillos. Al suponer que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad angular v , entonces $T = cv = cdu/dt$, donde c es la fricción constante. Entonces la integración da

$$u = \frac{1}{c} \int dt$$

y así una función de transferencia es $G(s)$ de $1/s$.

El sistema de control para un motor ultrasónico es de la forma en la que se muestra en la Figura 24.21. y_n es el n -ésimo pulso de entrada y x_n es el n -ésimo pulso de salida. Si el microprocesador ejerce la ganancia de control proporcional K , la entrada para éste es $y_n - x_n$ y la salida es $K(y_n - x_n)$. Ésta pasa por el DAC y produce una salida analógica que consta de una serie de pasos (Figura 24.21).

Figura 24.21 Sistema de control.



El motor actúa como integrador y su salida será $1/c$ veces la suma progresiva de las áreas bajo los escalones (Figura 24.21). Cada escalón cuenta con un área de (cambio DAC en la salida del escalón) $\cdot T$. Por lo tanto,

$$x_n - x_{n-1} = (\text{salida del DAC para } x_{n-1})T/c = K(y_{n-1} - x_{n-1})T/c$$

Por lo tanto,

$$x_n = [1 - (KT/c)]x_{n-1} + (KT/c)y_{n-1}$$

Suponga que $K/c = 5$ y un intervalo de muestreo de 0.1 s. Así,

$$x_n = 0.5y_{n-1} + 0.5x_{n-1}$$

Si hay una entrada al sistema de control para el enfoque de una secuencia de pulsos de tamaño constante 1 y antes de eso no existía una entrada, es decir $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1, \dots$, entonces:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 1 = 0.5$$

$$x_2 = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 1 = 0.75$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 1 = 0.875$$

$$x_4 = 0.5 \cdot 0.875 + 0.5 \cdot 1 = 0.9375$$

$$x_5 = 0.5 \cdot 0.9375 + 0.5 \cdot 1 = 0.96875$$

$$x_6 = 0.5 \cdot 0.96875 + 0.5 \cdot 1 = 0.984375$$

$$x_7 = 0.5 \cdot 0.984365 + 0.5 \cdot 1 = 0.9921875$$

y así sucesivamente

La salida tarda siete periodos de muestreo, es decir 0.7 s, para lograr el enfoque. Esto es demasiado largo. Sin embargo, suponga que se eligen valores tales que $KT/c = 1$. La ecuación diferencial es, entonces $x_n = y_n - 1$. Por lo tanto,

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

...

Esto significa que la salida alcanzará la posición requerida después de sólo una muestra. Ésta es una respuesta mucho más rápida. Para lograr una respuesta

rápida se puede usar una tasa de muestra alta, respuesta que se denomina como **respuesta aperiódica**.

24.2.4 Sistemas de control automotriz

El automóvil moderno incluye muchos sistemas de control electrónico. Éstos pueden agruparse en las siguientes categorías.

- 1 **Control del tren de potencia.** Este término se usa para los sistemas de control del motor y de la transmisión. La unidad de control del motor (ECU, engine control unit) intenta asegurar que el motor opere en condiciones óptimas en todo momento e incluye elementos tales como el control de inyección de combustible, el control del carburador, el control del cronometraje de la chispa, el control de la velocidad de la marcha en vacío o sin carga y el control antidetonante. Esto lo hace leyendo valores provenientes de muchos sensores dentro de la crujía del motor, interpretando los resultados y luego ajustando los actuadores del motor en consecuencia. El control de la transmisión está incluido principalmente en las transmisiones automáticas. Con frecuencia se usa la misma unidad de control del motor tanto para el motor como para el control de la transmisión. La unidad de control del motor incluye un microcontrolador, con el software operativo almacenado en EPROM o en una memoria instantánea. La Figura 24.22 ilustra algunas de las entradas y salidas básicas para un sistema de control de motor.

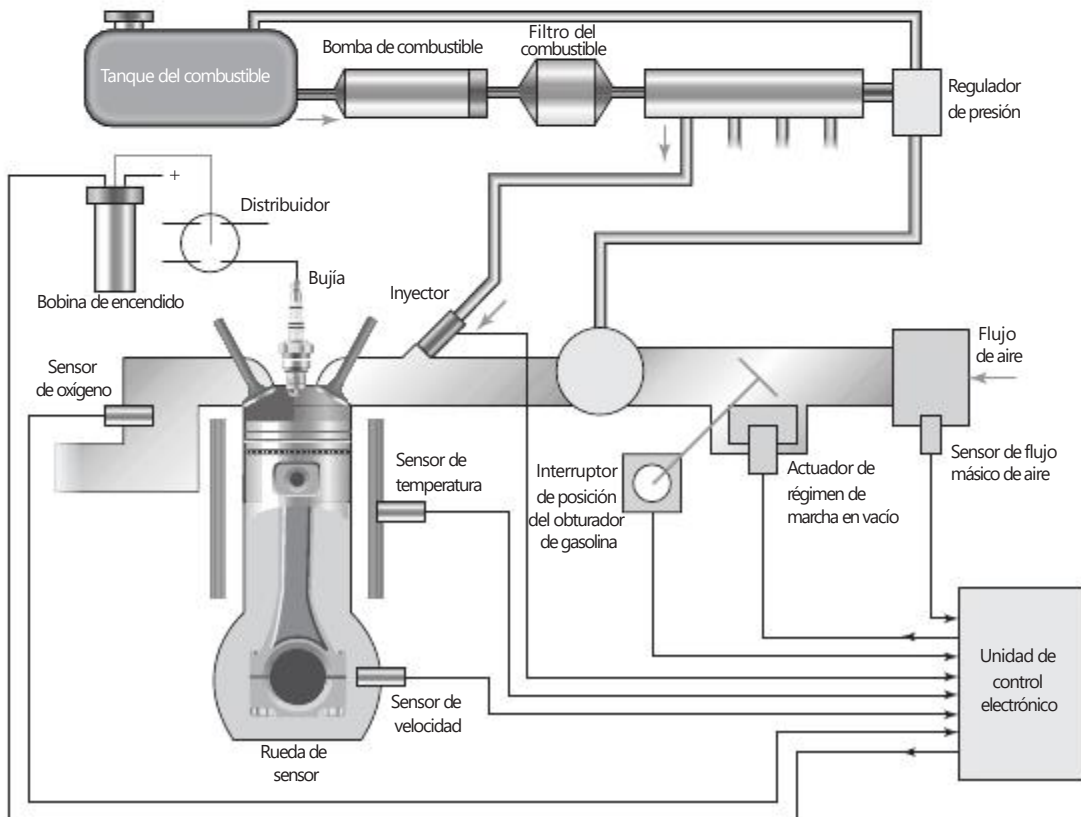


Figura 24.22 Sistema para administración de un motor.

- 2 **Control del vehículo.** Esto incluye el control de la suspensión, el control del volante, el control de la velocidad de cruce, el control de los frenos y el control de la tracción.
- 3 **Control de las personas.** Esto incluye sistemas tales como el aire acondicionado, las carátulas de los instrumentos, los sistemas de seguridad, los sistemas de comunicación, los sistemas de bolsas de aire y la detección de obstáculos en la parte trasera.

Hay varios sistemas de control en un automóvil y se usa una red para la comunicación de la información entre ellos. La red estándar que se usa para permitir que los microcontroladores y los dispositivos se comuniquen entre sí es la **red zonal de control (CAN, controller area network)** (sección 15.6.4).

Enseguida se estudian algunos de los sistemas de control que se incluyen en los sistemas de control automotriz.

La **relación aire-combustible (AFR, air-fuel ratio)** es la relación molar de aire a combustible presente en un motor de combustión interna. Si se suministra exactamente el aire suficiente para quemar completamente todo el combustible, la relación se conoce como la mezcla estequiométrica. Para gasolina, la mezcla estequiométrica aire-combustible es aproximadamente 14.7:1 y por lo tanto, por 1 g de combustible se requieren 14.7 g de aire. La relación de equivalencia de aire-combustible, λ (lambda), es la relación de la AFR real entre la estequiométrica para una mezcla dada. Entonces si tenemos $\lambda = 1.0$, la mezcla es estequiométrica, para una mezcla rica $\lambda < 1.0$, y para una mezcla pobre $\lambda > 1.0$. El sensor de gas oxígeno en el escape (EGO, *exhaust gas oxygen*) es entonces el sensor clave en el circuito de retroalimentación de control de combustible del motor, que produce una salida de voltaje que está relacionada con la cantidad de oxígeno en el escape. El sensor de gas oxígeno en el escape de dióxido de circonio se usa ampliamente. Cuando se calienta, el elemento de dióxido de circonio produce un voltaje que depende de la cantidad de oxígeno en el escape comparado con el que está al aire libre. Una mezcla de campo estequiométrica da una salida de aproximadamente 0.45 V, el voltaje que varía de aproximadamente 0.2 V para una mezcla pobre a 0.8 V para una mezcla rica (Figura 24.23).

El sistema de control que se usa con el sensor lambda es básicamente un controlador PI de un sistema de motor que es esencialmente de primer orden. La Figura 24.24 muestra el modelo básico del sistema. El motor puede modelarse básicamente como un sistema de primer orden (sección 20.2), y entonces tiene una función de transferencia G_e de la forma:

$$G_e(s) = \frac{K}{ts + 1}$$

Figura 24.23 El circuito de control lambda.

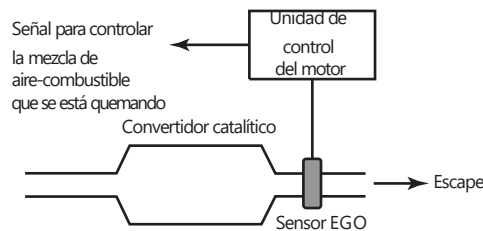
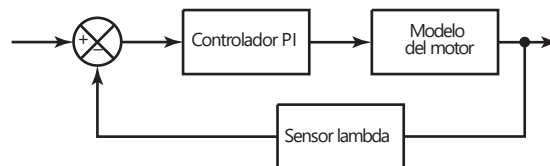


Figura 24.24 El sistema de control lambda.



El controlador PI tiene una función de transferencia G_c de $K_p + K_I/s$, donde K_p es la constante de control proporcional y K_I es la constante de control integral (sección 15.6.1). Entonces, considerando que el sensor lambda tiene una función de transferencia de 1, el sistema cerrado de control de circuito tiene una función de transferencia total $T(s)$ de:

$$T(s) = \frac{G_e(s) G_c(s)}{1 + G_e(s) G_c(s)}$$

Esto da un sistema de segundo orden con una frecuencia natural y una relación de amortiguamiento. Entonces podemos determinar el desempeño del sistema para una entrada dada, considerando también factores tales como el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento (sección 19.5).

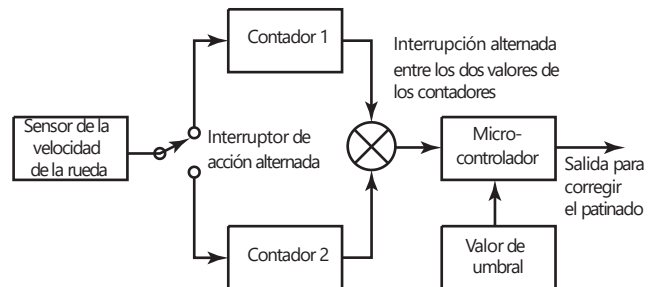
Sin embargo, hay una demora de tiempo T_L en el sensor lambda que responde a un cambio en el nivel de oxígeno, comúnmente de 50–500 ms, y entonces si se considera esto, la función de transferencia para el motor puede modificarse introduciendo un término de demora:

$$G_e(s) = \frac{K e^{-s T_L}}{s + 1}$$

Otro ejemplo de un sistema de control que se usa en los automóviles es el **sistema de frenado anti amarrado (ABS, anti-lock braking system)**.

El principal componente de un sistema ABS consiste de dos contadores que miden en forma alterna la velocidad de una rueda (Figura 24.25). Si la velocidad de la primera rueda sobrepasa a la velocidad de la rueda subsiguiente por un valor previamente establecido, entonces se considera que se presenta una condición de patinado. Entonces el sistema ABS genera una señal eléctrica que reduce la presión hidráulica lo suficiente como para eliminar al freno amarrado. El sensor de la velocidad de la rueda que generalmente se usa es un tacogenerador de reluctancia variable (sección 2.4.2) que consiste de una rueda dentada ferrosa la cual, a medida que gira, produce pulsos en una bobina captadora. Los pulsos, al contarse, dan una medida de la velocidad de la rueda. Se escoge un sensor magnético ya que, a diferencia de los sistemas de sensor óptico, aquél no es afectado por la contaminación inevitable de la rueda y del sensor por el lodo y el agua.

Figura 24.25 Sistema de frenado antiarrastado.



24.2.5 Lector de código de barras

Una escena familiar en las cajas registradoras de los supermercados es que pasan los artículos por un haz luminoso, o los acercan un lector óptico para leer el código de barras y determinar de manera automática el tipo de mercancía y su precio. Este código consta de una serie de barras negras y blancas de ancho variable. Por ejemplo, en la contraportada de este libro hay un código de barras.

Figura 24.26 Código de barras.



La Figura 24.26 ilustra la forma básica del código de barras que se utiliza en las ventas al menudeo. El código de barras representa una serie numérica; cuenta con un prefijo que identifica el tipo de codificación utilizada; la configuración del código universal de productos (UPC) que se usa en Estados Unidos sólo tiene un dígito, y en el número de artículo europeo (EAN), el prefijo tiene dos dígitos. El UPC usa un prefijo 0 para indicar abarrotes y un 3 para medicinas. El prefijo del EAN va del 00 al 09 y es posible leer el UPC dentro de un código EAN. Después de este prefijo aparecen cinco dígitos que representan al fabricante, cada uno tiene asignado un número único. A continuación aparece la parte central del patrón del código, identificado con dos barras más altas. El número de cinco dígitos siguiente representa al producto. El número final es un dígito de verificación que permite cerciorarse de que el código se leyó en forma correcta. Al inicio y al final del patrón de barras se usa un patrón de protección de dos barras más altas.

Cada número se codifica con siete dígitos 0 o 1. Los códigos empleados a cada lado de la línea central son diferentes para poder determinar la dirección de la digitalización. A la derecha, los caracteres tienen un número par de unos, es decir paridad par; en el UPC, a la izquierda hay un número impar de unos, es decir paridad impar; la codificación EAN a la izquierda es una combinación. La Tabla 24.2 contiene las codificaciones UPC y EAN; UPC es la codificación a la izquierda de A y EAN usa códigos de caracteres a la izquierda de A y de B.

Los unos se representan con una barra oscura. El carácter 2 a la derecha sería 1101100, con las barras oscuras adyacentes que aparece como una barra oscura de doble ancho seguida por un espacio angosto, por otra barra oscura de doble ancho y por un espacio de doble ancho. Lo anterior se ilustra en la Figura 24.27. El patrón de protección en los extremos del código representa 101 y la banda central de barras es 01010.

Tabla 24.2 Codificaciones UPC y EAN.

Número decimal	Caracteres A a la izquierda	Caracteres B a la izquierda	Caracteres a la derecha
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	0011100
5	0110001	0111001	0001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100



Figura 24.27 Código de barras para 2 del lado derecho.

El código de barras de la Figura 24.26 es el que apareció en la primera edición de este libro en inglés. Se usó el código EAN y el prefijo 97 lo identifica como publicación, 80582 identifica al editor, 25634 identifica la obra y el dígito de verificación es 7. Observe que el código de barras contiene las partes relevantes del número ISBN, que también es un número para identificar al editor y la obra específica.

El procedimiento para usar el dígito de verificación del código es:

- 1 Empezar por la izquierda, sumar todos los caracteres, excluyendo el dígito de verificación, que están en posiciones impares, es decir primero, tercero, quinto, etcétera y multiplicar la suma por 3.
- 2 Empezando por la derecha, sumar todos los caracteres de las posiciones pares.
- 3 Sumar los resultados de los pasos 1 y 2. El carácter de verificación es el número más pequeño, que al añadirse a esta suma produce un múltiplo de 10.

Un ejemplo de cómo usar el dígito de verificación es suponer que el código de barras de este libro es: 9780582256347. Para los caracteres impares se tiene: $9 + 8 + 5 + 2 + 5 + 3 = 32$, que al multiplicar por 3 da 96. En el caso de los caracteres pares se tiene: $7 + 0 + 8 + 2 + 6 + 4 = 27$. La suma da 123 y por lo tanto, el dígito de verificación será 7.

La lectura del código de barras consiste en determinar el ancho de las bandas oscuras y claras. Para ello se utiliza un láser de estado sólido que enfoca un haz luminoso, intenso y angosto, en el código para detectar la luz reflejada en una fotocelda. Por lo general, en la versión de digitalizador que se usa en los supermercados, el láser está fijo y con un espejo giratorio la luz enfoca el código de barras y se recorren todas las barras. Para acondicionar la señal se amplifica la salida de la fotocelda con amplificadores operacionales y un circuito comparador que usa un amplificador operacional; se produce una salida de valor alto, es decir un 1, cuando hay una barra oscura, y un valor de salida bajo, es decir un 0, si hay un espacio en blanco. Esta secuencia de ceros y unos se alimenta, por ejemplo, a un PIA conectado a un microprocesador 6800 de Motorola. La configuración general del programa del microprocesador es:

- 1 Inicializar para borrar las diversas posiciones en la memoria.
- 2 Recuperar datos en la entrada. De manera continua se prueba la entrada para determinar si es un valor 0 o 1.
- 3 Procesar los datos para obtener los caracteres en formato binario. La entrada es una señal en serie que consta de ceros y unos de diferente duración, dependiendo del ancho de los espacios de las barras oscuras. El microprocesador está programado para obtener el ancho del tiempo del módulo al dividir el tiempo de muestreo entre las barras del marcador y el número de módulos; un módulo es una banda clara u oscura que representa un 0 o un 1. El programa determina si una banda oscura o clara representa a uno o varios dígitos, y con esto interpreta la señal del digitalizador.
- 4 Convertir el resultado binario en la información correspondiente al artículo adquirido y su costo.

24.2.6 Disco duro

La Figura 24.28a) muestra la forma básica de un disco duro que consiste en un disco revestido con una capa de metal que es magnetizado. El espacio entre la cabeza de escritura/lectura y la superficie del disco es muy pequeña, apenas

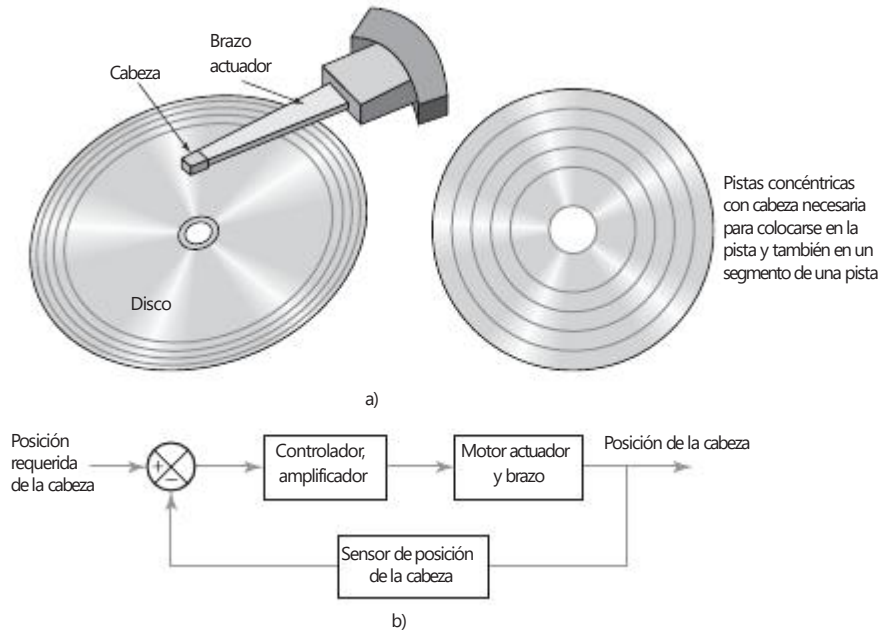
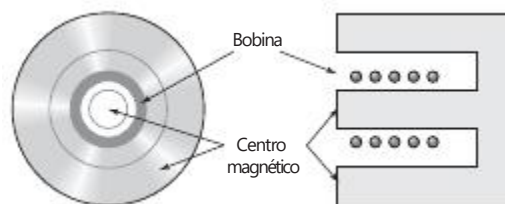


Figura 24.28 Disco duro: a) forma básica, b) sistema básico en lazo cerrado para la colocación de la cabeza de lectura/escritura.

0.1mm. Los datos se almacenan en la capa de metal como una secuencia de celdas de bits (sección 6.3.2). Un motor gira el disco a la rev/min típica de 3600, 5400 o 7200 y un brazo actuador tiene que posicionarse de manera que la pista concéntrica relevante y la parte relevante de la pista se posicionen bajo la cabeza de lectura/escritura al final de ese brazo. Un sistema en lazo cerrado controla la cabeza (Figura 24.28b) para posicionarlo. La información del control se escribe en un disco durante el proceso de formateo, lo que permite a cada pista del sector ser identificada. El proceso de control implica que la cabeza emplee esta información para dirigirse a la parte requerida del disco.

El movimiento del actuador por lo general incluye un actuador de bobina de voz (Figura 24.29) para rotar el brazo. Este actuador de bobina de voz es esencialmente una bobina montada en una parrilla de manera que cuando una corriente pasa a través de la bobina ésta se mueve, el arreglo que es como un altavoz de bobina en movimiento, de manera que es capaz de mover el brazo actuador para colocar la cabeza en la pista requerida. La cabeza lee el campo magnético en el disco y ofrece una señal de retroalimentación del amplificador de control.

Figura 24.29 Actuador de bobina de voz.



El actuador de bobina de voz es una forma de motor de c.d. de imán permanente de campo controlado y tiene una función de transferencia de la misma forma (sección 20.5). Así, la función de transferencia que relaciona el

desplazamiento con el tiempo, por ejemplo, la integral de la función de tiempo de velocidad dada en la sección 20.5, el actuador de bobina de voz cuenta con una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{k}{s(t_L s + 1)} = \frac{kRc}{s(t_L s + 1)}$$

El término $(ts + 1)$ por lo general está cerca de 1 y entonces la función de transferencia se aproxima a

$$G(s) = \frac{kRc}{s(t_L s + 1)}$$

Así, el sistema de control de lazo cerrado en la Figura 24.26a), con un amplificador de control con una ganancia proporcional de K_a , y la transferencia de posición de la cabeza con una ganancia de 1, podría tener una función de transferencia general que da la relación entre la señal de salida $X(s)$ y la señal requerida de la entrada $R(s)$ de

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)}$$

De esta manera, si tenemos $G(s) = 0.25/s(0.05s + 1) = 5/s(s + 20)$ y $K_a = 40$, entonces,

$$X(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s)$$

Entonces, para una unidad de entrada de paso, por ejemplo, $R(s) = 1/s$, la salida será descrita por

$$X(s) = \frac{200}{s(s^2 + 20s + 200)}$$

El término cuadrático es de la forma $s^2 + 2z\zeta v_n s + v_n^2$ (sección 20.3.1) y así tiene una frecuencia natural v_n de $\sqrt{200}$ y un factor de amortiguamiento relativo ζ de $10/\sqrt{200}$. Por lo tanto, se puede resolver cuál será la respuesta de este sistema de segundo orden para señales de entrada y qué tanto el sistema necesitará adaptarse; por ejemplo, 2% del tiempo establecido (sección 19.5) es $4/\zeta v_n$ y así $4/10 = 0.4$ s. Esto es más bien un largo tiempo y se necesitaría considerar cómo se puede reducir para tal vez milisegundos. Habría que considerar reemplazar el amplificador con su ganancia proporcional por un control PD en ejercicio.

24.3

Robótica

El término **robótica** se usa para la tecnología que tiene que ver con el diseño, la construcción, la operación y la aplicación de los robots. Un **robot** es un aparato que puede considerarse como una máquina inteligente. Puede pensarse que una máquina no inteligente es un mecanismo operado manualmente y que es accionado por un operador. La máquina inteligente no es operada por un humano sino por una computadora y por lo tanto funciona automáticamente, ya que no requiere que un humano tome decisiones acerca de qué hacer enseguida, sino que responde por sí misma a las señales que provienen de su entorno.

Los siguientes son algunos de los acontecimientos cruciales en el desarrollo de la robótica.

1922	El autor checo Karel Capek introdujo el término <i>robot</i> en su obra de teatro <i>Robots universales</i> que trataba de una fábrica en la cual se hacía gente artificial que él llamaba robots. El término robot viene de la palabra eslávica <i>robota</i> que significa trabajo.
1942	El escritor de ciencia ficción Isaac Asimov en una historia llamada <i>Mentiroso</i> introdujo el término robótica y luego procedió a desarrollar sus tres leyes de la robótica.
1956	George Devol y Joe Engelberger fundaron una compañía llamada Unimation y desarrollaron el primer brazo robótico industrial al que llamaron el <i>Unimate</i> .
1961	A George Devol se le concedió una patente estadounidense por la "transferencia del artículo programado", una base del robot <i>Unimate</i> , y ellos instalaron el primer robot industrial. General Motors instaló su primer robot por parte de Unimation en su línea de producción, usándolo para secuenciar y apilar piezas calientes de metal fundidas a presión.
1967	General Motors instaló los primeros robots de soldadura por puntos y así hizo posible automatizar hasta el 90 % de las operaciones de soldadura en carrocerías.
1973	El primer robot industrial con seis ejes impulsados electromecánicamente fue desarrollado por la gráfica Robot KUKA y se le denominó <i>Famulus</i> .
1974	El primer robot industrial controlado por un microprocesador fue desarrollado para ASEA, una compañía de ingeniería mecánica en Suecia. Su movimiento de brazo imitaba al de un brazo humano. Se usó un microprocesador Intel de 8 bits.
1978	Unimation desarrolló la Programmable Universal Machine for Assembly (PUMA) (máquina universal programable para ensamblado) para una línea de ensamblado que manejaba partes pequeñas de la General Motors.
1979	Nachi en Japón desarrolló, para la soldadura por puntos, los primeros robots impulsados por un electromotor, reemplazando a los robots anteriores impulsados hidráulicamente.
1986	Honda introdujo su primer robot humanoide.
1987	Se fundó la Federación Internacional de Robótica (IFR) (International Federation of Robotics).

24.3.1 Las tres leyes de la robótica

Las siguientes **tres leyes** son un conjunto de reglas diseñadas por el autor de ciencia ficción Isaac Asimov en 1942.

- 1 Un robot no debe herir a un ser humano ni, a través de la falta de acción, deberá permitir que un ser humano resienta un daño.
- 2 Un robot debe obedecer las órdenes que le den los seres humanos, excepto cuando estas órdenes entren en conflicto con la primera ley.
- 3 Un robot debe proteger su propia existencia siempre que esta protección no entre en conflicto con la primera o la segunda ley.

Los robots no obedecen inherentemente las tres leyes; si las leyes van a ser obedecidas, sus creadores humanos deben elegir programarlos con ellas.

Hasta el día de hoy, los robots no son lo suficientemente inteligentes como para tener la capacidad de entender cuándo están causando dolor o daño ni saben cómo detenerse. Sin embargo, pueden construirse con suficientes salvaguardas físicas tales como defensas, timbres de advertencia, jaulas de seguridad, etcétera, para evitar accidentes.

Posteriormente Asimov añadió una cuarta ley o ley cero que antecede a las demás:

- 0 Un robot no debe dañar a la humanidad ni, mediante la falta de acción, debe permitir que la humanidad resienta un daño.

24.3.2 Componentes de un robot

Los siguientes elementos son básicos en los robots.

- 1 **Manipulador.** Éste es el cuerpo principal del robot, la estructura que hace la manipulación. Consiste de eslabones, juntas y otros elementos estructurales.
- 2 **Efector terminal.** Ésta es la parte conectada con la última junta de un manipulador y tiene que ver con el manejo de objetos o con hacer conexiones con las máquinas. Son las "manos" del robot. Un efector terminal común es el agarrador, que consiste de solamente dos dedos que pueden abrirse y cerrarse para levantar los objetos y luego liberarlos. El agarrador puede sostener el objeto por medio de la fricción o de quijadas envolventes. Los robots que levantan y que colocan se usan para objetos grandes tales como parabrisas de automóviles; a menudo usan agarradores al vacío que requieren una superficie lisa de dónde agarrarse para asegurar la succión. El término efector terminal robótico incluye no solamente los agarradores robóticos, sino también dispositivos tales como los cambiadores de herramientas robóticos, las pistolas robóticas de pintura, las herramientas robóticas para quitar rebabas, las pistolas robóticas de soldadura de arco, etcétera.
- 3 **Actuadores.** Éstos son los medios mediante los cuales el robot mueve sus juntas y eslabones. Son en cierto modo los "músculos" de un robot. Los actuadores más populares de los robots son los motores eléctricos que hacen girar a una rueda o un engrane, y los actuadores lineales, movidos por aire comprimido o aceite, hacen que los pistones se muevan en los cilindros.
- 4 **Sensores.** El robot los usa para recolectar información acerca del entorno y del estado de sus juntas y eslabones. Se han desarrollado sensores que imitan las propiedades mecánicas y que tocan los receptores de los dedos humanos. Por ejemplo, los potenciómetros rotatorios pueden usarse para monitorear los ángulos entre las juntas en una mano y corresponden a las juntas equivalentes de los nudillos. Los sensores sensibles a la fuerza y al tacto pueden usarse en los dedos y en la palma de la mano para retroalimentar cuando se haya hecho un contacto y la presión entre un objeto y la mano. La figura 24.30 muestra un ejemplo de un arreglo de sensores de este tipo, el cual cuenta con émbolos que interrumpen el haz de luz entre los LED y los sensores. Otro método que se ha usado consiste en la medición de la resistencia de un elastómero

Figura 24.30 Un ejemplo de un sensor táctil. El tocamiento hace que el émbolo interrumpa el haz de luz y por lo tanto la señal detectada por el LED.

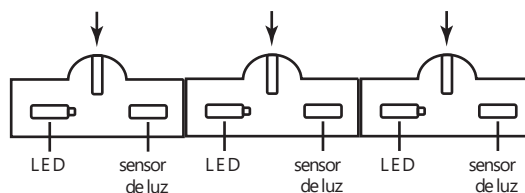
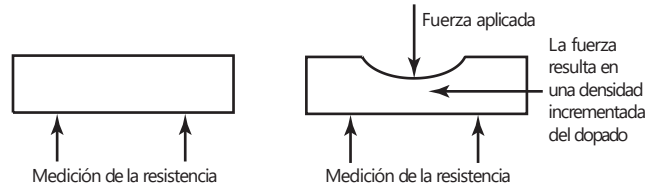


Figura 24.31 La resistencia del elastómero dopado entre los puntos de contacto cambia con la aplicación de la fuerza.



conductor, tales como un hule dopado con carbono, entre dos puntos. La resistencia cambia con la aplicación de la fuerza (Figura 24.31). Se han desarrollado sensores que usan cuerdas elastómeras dispuestas según un patrón de rejilla midiéndose las resistencias en los puntos de intersección. Los sensores táctiles individuales detectan información diferente acerca del tamaño y la forma del objeto, dependiendo de cuáles sean activados. Se puede usar un sensor táctil y antideslizante en el dedo pulgar para indicar cuándo un objeto que está siendo agarrado, se resbala y por lo tanto debe aplicarse un agarre más fuerte. Esto puede lograrse mediante la interpretación de las salidas de un conjunto de sensores táctiles o puede necesitarse un sensor de deslizamiento especialmente diseñado.

5 **Controlador.** Es necesario controlar la estructura mecánica de un robot para realizar tareas. Esto supone el uso de la información del sensor, y luego procesar esta información en forma de comandos para actuadores y posteriormente una acción controlada. El "cerebro" detrás del controlador es una computadora.

24.3.3 Aplicaciones de los robots

Las siguientes son algunas aplicaciones de los robots.

- 1 **Carga de una máquina.** Los robots se usan para abastecer a otras máquinas con partes y para retirar las partes procesadas de las máquinas.
- 2 **Operaciones de recogida y de colocación.** Los robots se usan para recoger partes y colocarlas tal vez en una paleta, o posiblemente recoger dos partes y ensamblarlas; por ejemplo, colocar objetos en una caja, poner partes en un horno o retirarlas del mismo.
- 3 **Soldadura.** El actuador terminal del robot es una antorcha de soldadura que se usa para soldar dos partes.
- 4 **Pintura.** El actuador terminal es una pistola de pintura que se usa para pintar un ensamblado o una parte.
- 5 **Ensamblado.** Esto puede consistir en localizar e identificar partes y luego ensamblarlas.
- 6 **Inspección.** Esto podría ser la inspección de partes usando tal vez rayos X, ultrasonido o en forma "visual".
- 7 **Ayuda a personas discapacitadas.** Esto podría ser mediante extremidades artificiales inteligentes que permitan a las personas desarrollar tareas cotidianas.
- 8 **Operaciones en lugares peligrosos o inaccesibles.** Los robots pueden diseñarse para operar en ambientes que no serían factibles para los humanos en la práctica.

24.3.4 El robot Arduino

El sitio de red Arduino describe un robot básico con ruedas que ha sido diseñado para operar con la tarjeta de control Arduino y con la tarjeta de motor

(sección 10.3.4). Ambas tarjetas de motor y de control tienen un microcontrolador. Cada uno de los elementos del robot, es decir el hardware, el software y la documentación, se consiguen libremente y son de fuente abierta. El robot puede programarse con Arduino. Los procesadores del robot Arduino vienen previamente quemados con un **cargador de arranque** que permite que se le descargue código nuevo sin el uso de un programador externo de hardware. Enseguida se muestra un programa sencillo para mover el robot hacia atrás y hacia adelante en forma repetida. Una vez que usted lo haya descargado, desconecte el cable USB del robot ya que, por razones de seguridad, mientras que la USB esté conectada los motores no interactúan. Cuando se conecta la energía, el robot comienza a funcionar.

```
#include <ArduinoRobot.h> //importar la biblioteca del robot
void setup()
{
  Robot.begin();// inicializar la biblioteca
}
void loop()
{
  Robot.motorsWrite(255,255);// sintonizar las velocidades de los
  motores a la velocidad máxima
  delay(1000);// moverse durante un segundo
  Robot.motorsWrite(0,0);// dejar de moverse
  delay(1000);// detenerse durante un segundo
  Robot.motorsWrite(-255,-255);// invertir ambos motores
  delay(1000);// moverse hacia atrás durante un segundo
  Robot.motorsWrite(0,0);// dejar de moverse
  delay(1000);// detenerse durante un segundo
}
```

Un programa más complejo podría incluir el uso de sensores IR para movimiento a la izquierda, a la derecha y hacia adelante, de modo que el robot puede programarse para moverse a través de un laberinto sin chocar con las paredes.

Resumen

La **mecatrónica** es una integración coordinada y desarrollada al mismo tiempo de ingeniería mecánica con electrónica y el control inteligente de computadora en el diseño y manufactura de productos. Esto implica el desarrollo de una solución integrada en lugar de un enfoque disciplinar por separado. En el desarrollo de soluciones, hay que considerar los modelos para realizar predicciones, así como para saber su función probable.

Problemas y tareas

- 24.1 Presente una descripción de soluciones para los diseños posibles para obtener lo siguiente:
- El controlador de temperatura de un horno.
 - Un mecanismo para clasificar objetos pequeños, medianos y grandes que se desplazan sobre una banda transportadora, para que al final cada uno de ellos se envíe a distintos recipientes para su empaque.

- c) Un graficador x - y (dispositivo para trazar gráficas que muestran cómo varía la entrada de x conforme cambia la entrada de y).

Tareas para investigación

- 24.2 Investigue el sistema de frenado antibloqueo que se usa en los automóviles y describa los principios de su funcionamiento.
- 24.3 Investigue el mecanismo de una impresora de matriz de punto y describa los principios de su funcionamiento.
- 24.4 Investigue el protocolo de red de área de control (CAN) que se utiliza en los automóviles.

Tareas para diseño

- 24.5 Diseñe un sistema de termómetro digital que muestre temperaturas entre 0 y 99° C. Como posible solución se sugiere usar un microprocesador con chips de RAM y de ROM o un microcontrolador.
- 24.6 Diseñe un óhmetro digital que presente la lectura del valor de la resistencia que esté conectada entre sus terminales. Se sugiere como posible solución usar un multivibrador monoestable, como el 74121, que produce un impulso cuya amplitud en tiempo guarda relación con la constante de tiempo RC del circuito utilizado.
- 24.7 Diseñe un barómetro digital que muestre el valor de la presión atmosférica. Se sugiere como posible solución utilizar un sensor de presión MPX2100AP.
- 24.8 Diseñe un sistema para controlar la velocidad de un motor de c.d. Se sugiere como posible solución usar la tabilla de evaluación M68HC11.
- 24.9 Diseñe un sistema que incluya un PLC para colocar cajas agrupadas en lotes de cuatro sobre una banda transportadora.

Apéndices





Apéndice A: La transformada de Laplace

A.1 La transformada de Laplace

Considere una cantidad que es una función del tiempo. Se puede decir que esta cantidad está en el **dominio del tiempo** y representa funciones como $f(t)$. En muchos problemas sólo se tiene interés en valores de tiempo mayores o iguales a 0, es decir $t \geq 0$. Para obtener la transformada de Laplace de esta función se multiplica por e^{-st} y se integra con respecto al tiempo de cero a infinito. Aquí, la s es una constante con unidades de $1/\text{tiempo}$. El resultado es lo que se denomina **transformada de Laplace** y se dice entonces que la ecuación está en el **dominio de s** . De esta manera, la transformada de Laplace de la función del tiempo $f(t)$, que se escribe como $L\{f(t)\}$, está dada por

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

La transformada es **unilateral** ya que sólo se consideran los valores de tiempo entre 0 y ∞ , y no en el intervalo completo de tiempo de $-\infty$ a ∞ .

Se pueden realizar manipulaciones algebraicas con una cantidad en el dominio de s como adición, sustracción, división y multiplicación, igual que con cualquier cantidad algebraica. No se podría haber hecho esto con la función original, suponiendo que hubiera estado en la forma de una ecuación diferencial, en el dominio del tiempo. Con esto se quiere decir que se puede obtener una expresión mucho más sencilla en el dominio de s . Si se quiere ver cómo varía la cantidad con el tiempo en el dominio del tiempo, se tiene que realizar la transformación inversa. Esto implica encontrar la función en el dominio del tiempo que pudiera haber dado la expresión simplificada en el dominio de s .

Cuando en el dominio de s se escribe una función, entonces es una función de s , como $F(s)$. Es común utilizar F mayúscula para la transformada de Laplace y f minúscula para la función del tiempo $f(t)$. Así,

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

Para la operación inversa, cuando se obtiene la función del tiempo a partir de la transformada de Laplace, se puede escribir

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Esta ecuación se lee como: $f(t)$ es la transformada inversa de la transformada de Laplace $F(s)$.

A.1.1 Transformada de Laplace a partir de principios básicos

Para ilustrar la transformación de una cantidad del dominio del tiempo al dominio de s , considere la función que tiene el valor constante de 1 para todos

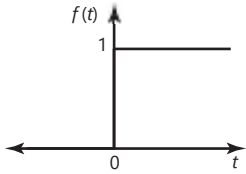


Figura A.1 Función escalón unitario.

los valores de tiempo mayores que 0, es decir $f(t)$ para $t \geq 0$. Esto describe una función **escalón unitario** y se muestra en la Figura A.1.

La transformada de Laplace es entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}$$

Debido a que con $t = \infty$ el valor de e^{-st} es 0 y con $t = 0$ el valor de e^{-st} es 1, entonces

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Como otro ejemplo se muestra cómo determinar, a partir de los principios básicos, la transformada de Laplace de la función e^{at} donde a es una constante. La transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$ es

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\left[\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty}$$

Cuando $t = \infty$ el término entre corchetes se hace 0 y cuando $t = 0$ éste se hace 1. Entonces

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

A.2 Escalones unitarios y pulsos

Las funciones de entrada comunes a los sistemas son el escalón unitario y el pulso. En lo que sigue se indica cómo se obtienen sus transformadas de Laplace.

A.2.1 Función escalón unitario

La Figura A.1 muestra una gráfica de una función escalón unitario. Cuando se presenta el escalón en $t = 0$, tiene la ecuación

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \text{ para todos los valores de } t \text{ mayores que } 0 \\ f(t) &= 0 \text{ para todos los valores de } t \text{ menores que } 0 \end{aligned}$$

La función escalón describe un cambio abrupto en alguna cantidad desde cero hasta su valor estable; por ejemplo, el cambio en el voltaje aplicado a un circuito cuando se enciende.

Así, la función escalón unitario no se puede describir por $f(t) = 1$ debido a que esto implicaría una función que tiene un valor constante de 1 en todos los valores de 0 a ∞ , positivos y negativos. La función escalón unitario que cambia de 0 a 1 en $t = 0$ se describe por convención con el símbolo $u(t)$ o $H(t)$, la H viene del apellido de su originador O. Heaviside. Por ello, algunas veces recibe el nombre de **función Heaviside**.

La transformada de Laplace de esta función escalón es, como se obtuvo en la sección anterior,

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

La transformada de Laplace de una función escalón de altura a es

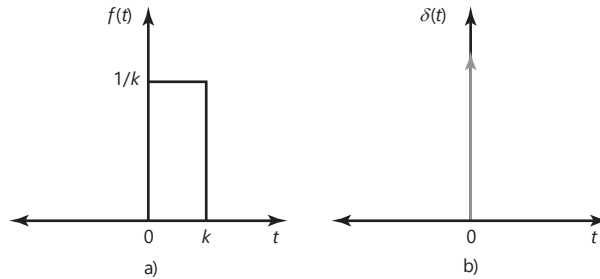
$$F(s) = \frac{a}{s}$$

A.2.2 Función pulso

Considere un pulso rectangular de magnitud $1/k$ que ocurre en el tiempo $t = 0$ y que tiene un ancho de pulso k ; es decir, el área del pulso es 1. La Figura A.2a) muestra este pulso que se puede describir como

$$f(t) = \begin{cases} 1/k & \text{para } 0 \leq t < k \\ 0 & \text{para } t \geq k \end{cases}$$

Figura A.2 a) Pulso rectangular, b) impulso.



Si se mantiene constante esta área del pulso en 1 y después se disminuye el ancho del pulso (es decir, k se reduce), la altura se incrementa. Entonces, en el límite cuando $k \rightarrow 0$ se acaba sólo con una línea vertical en $t = 0$, la altura de la gráfica se va a infinito. El resultado es una gráfica que es cero excepto en un solo punto donde se tiene una espiga infinita (Figura A.2b). Esta gráfica se puede usar para representar un pulso. Se dice que el pulso es unitario porque el área que encierra es 1. Esta función se representa mediante $d(t)$, la **función pulso unitario** o la **función delta de Dirac**.

La transformada de Laplace para el pulso rectangular de área unitaria en la Figura A.2a) está dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^k \frac{1}{k} e^{-st} dt + \int_k^{\infty} 0 e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{sk} e^{-st} \right]_0^k = -\frac{1}{sk} (e^{-sk} - 1) \end{aligned}$$

Para obtener la transformada de Laplace para el pulso unitario se necesita encontrar el valor de la última expresión cuando $k \rightarrow 0$. Esto se puede hacer mediante la expansión en serie del término exponencial. Así

$$e^{-sk} = 1 - sk + \frac{(-sk)^2}{2!} - \frac{(-sk)^3}{3!} + \dots$$

y se puede escribir

$$F(s) = 1 - \frac{sk}{2!} + \dots$$

Entonces en el límite cuando $k = 0$ la transformada de Laplace tiende al valor 1:

$$L\{d(t)\} = 1$$

Como el área del pulso anterior es 1 se puede definir la magnitud de tal pulso como si fuera 1. Así, la ecuación anterior da la transformada de Laplace para un pulso unitario. Un pulso de magnitud a se representa por $ad(t)$ y la transformada de Laplace es

$$L\{ad(t)\} = a$$

A.3

Transformada de Laplace de funciones estándar

Al determinar las transformadas de Laplace de funciones, por lo común no es necesario evaluar las integrales, ya que se dispone de tablas que dan las transformadas de Laplace de las funciones más comunes. Éstas, cuando se combinan con el conocimiento de las propiedades de esas transformadas (vea la siguiente sección), permiten resolver la mayoría de los problemas encontrados con más frecuencia. La Tabla A.1 da algunas de las funciones de tiempo más comunes y sus transformadas de Laplace. Observe que en la tabla $f(t) = 0$ para todos los valores negativos de t y los términos $u(t)$ se han omitido desde la mayor parte de las funciones de tiempo y se tienen que asumir.

Tabla A.1 Transformadas de Laplace.

Función de tiempo $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s)$
1 $d(t)$, pulso unitario	1
2 $d(t - T)$, pulso unitario retardado	e^{-sT}
3 $u(t)$, escalón unitario	$\frac{1}{s}$
4 $u(t - T)$, escalón unitario retardado	$\frac{e^{-sT}}{s}$
5 t , rampa unitaria	$\frac{1}{s^2}$
6 t^n , rampa de n -ésimo orden	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7 e^{-at} , decaimiento exponencial	$\frac{1}{s + a}$
8 $1 - e^{-at}$, crecimiento exponencial	$\frac{a}{s(s + a)}$
9 te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
10 $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$

(continúa)

Tabla A.1 (continuación)

Función de tiempo $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s)$
11 $t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s + a)}$
12 $e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b - a}{(s + a)(s + b)}$
13 $(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s + a)^2}$
14 $1 - \frac{b}{a} e^{-at} - \frac{a}{b} e^{-bt}$	$\frac{ab}{s(s + a)(s + b)}$
15 $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{a - b} - \frac{e^{-ct} - e^{-bt}}{b - c}$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$
16 $\text{sen } vt$, onda de seno	$\frac{v}{s^2 + v^2}$
17 $\text{cos } vt$, onda de coseno	$\frac{s}{s^2 + v^2}$
18 $e^{-at} \text{sen } vt$, onda de seno amortiguada	$\frac{v}{(s + a)^2 + v^2}$
19 $e^{-at} \text{cos } vt$, onda de coseno amortiguada	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + v^2}$
20 $1 - \text{cos } vt$	$\frac{v^2}{s(s^2 + v^2)}$
21 $t \text{cos } vt$	$\frac{s^2 - v^2}{(s^2 + v^2)^2}$
22 $t \text{sen } vt$	$\frac{2vs}{(s^2 + v^2)^2}$
23 $\text{sen}(vt + \theta)$	$\frac{v \text{cos } u + s \text{senu}}{s^2 + v^2}$
24 $\text{cos}(vt + \theta)$	$\frac{s \text{cos } u - v \text{senu}}{s^2 + v^2}$
25 $\frac{v}{2\sqrt{1 - z^2}} e^{-zvt} \text{sen } v\sqrt{1 - z^2} t$	$\frac{v^2}{s^2 + 2zvs + v^2}$
26 $1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - z^2}} e^{-zvt} \text{sen}(v\sqrt{1 - z^2} t + \mathbf{f}), \text{cos } \mathbf{f} = z$	$\frac{v^2}{s(s^2 + 2zvs + v^2)}$

N.T: $f(t) = 0$ para valores negativos de t . Se han omitido los términos $u(t)$ de la mayoría de las funciones del tiempo y éstas se tienen que suponer

A.3.1 Propiedades de la transformada de Laplace

En esta sección se exponen las propiedades básicas de la transformada de Laplace. Estas propiedades permiten que la tabla de transformadas de Laplace de funciones estándar se use en una amplia gama de situaciones.

Propiedad de linealidad

Si dos funciones de tiempo separadas, por ejemplo $f(t)$ y $g(t)$, tienen transformada de Laplace, entonces la transformada de la suma de las funciones de tiempo es la suma de las dos transformadas de Laplace separadas.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}f(t) + b\mathcal{L}g(t)$$

a y b son constantes. De esta manera, por ejemplo, la transformada de Laplace de $1 + 2t + 4t^2$ está dada por la suma de las transformadas de los términos individuales en la expresión. Así, al usar los elementos 1, 5 y 6 de la Tabla A.1,

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s^3}$$

Propiedad de corrimiento en el dominio de s

Esta propiedad se usa para determinar la transformada de Laplace de funciones que tienen un factor exponencial y algunas veces recibe el nombre de **primer teorema de corrimiento**. Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$$

Por ejemplo, como la transformada de t^n está dada por el elemento 6 en la Tabla A.1 como $n!/s^{n+1}$, la transformada de Laplace de $e^{at}t^n$ está dada por

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

Propiedad de corrimiento en el dominio del tiempo

Si una señal está retardada un tiempo T entonces su transformada de Laplace está multiplicada por e^{-sT} . Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces

$$\mathcal{L}\{f(t - T)u(t - T)\} = e^{-sT}F(s)$$

Al retardo de una señal un tiempo T se le conoce como **segundo teorema de corrimiento**.

La propiedad de corrimiento en el dominio del tiempo se puede aplicar a todas las transformadas de Laplace. Así, para un pulso $d(t)$ que se retrasa un tiempo T para dar una función $d(t - T)$, la transformada de Laplace, que es 1, se multiplica por e^{-sT} para dar $1e^{-sT}$ como transformada de la función retardada.

Funciones periódicas

Para una función $f(t)$, la cual es una función periódica de periodo T , la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{1 - e^{-sT}}F_1(s)$$

donde $F_1(s)$ es la transformada de Laplace de la función para el primer periodo. Así, por ejemplo, considere la transformada de Laplace de una sucesión de pulsos rectangulares periódicos de periodo T , como se muestra en la Figura A.3. La transformada de Laplace de un solo pulso rectangular está

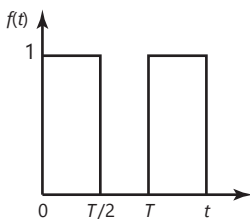


Figura A.3 Pulsos rectangulares.

dada por $(1/s)(1 - e^{-sT/2})$. Por lo tanto, al usar la ecuación anterior, la transformada de Laplace es

$$\frac{1}{s} * \frac{1 - e^{-sT/2}}{s} = \frac{1}{s^2(1 + e^{-sT/2})}$$

Teoremas del valor inicial y final

El teorema del valor inicial se puede establecer como si una función de tiempo $f(t)$ tiene transformada de Laplace $F(s)$, entonces en el límite cuando el tiempo tiende a cero, el valor de la función está dado por

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Por ejemplo, el valor inicial de la función dado por la transformada de Laplace $3/(s + 2)$ es el valor límite de $3s/(s + 2) = 3/(1 + 2/s)$ cuando s tiende a infinito y su valor es 3.

El teorema del valor final se puede establecer como si una función del tiempo $f(t)$ tiene la transformada de Laplace $F(s)$, entonces en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, el valor de la función está dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Derivadas

La transformada de Laplace de la derivada de una función $f(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

donde $f(0)$ es el valor de la función cuando $t = 0$. Por ejemplo la transformada de Laplace de $2(dx/dt) + x = 4$ es $2[sX(s) - x(0)] + X(s) = 4/s$ y si se tiene $x = 0$ en $t = 0$ cuando es $2sX(s) + X(s) = 4/s$ o $X(s) = 4/[s(2s + 1)]$.

Para una segunda derivada

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

donde $df(0)/dt$ es el valor de la primera derivada en $t = 0$.

Integrales

La transformada de Laplace de la integral de una función $f(t)$ que tiene una transformada de Laplace $F(s)$ que está dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Por ejemplo, la transformada de Laplace de la integral de una función e^{-t} entre los límites de 0 y t está dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-t} dt\right\} = \frac{1}{s(s + 1)}$$

A.4

Transformada inversa

La transformación inversa de Laplace es la conversión de una transformada de Laplace $F(s)$ en una función de tiempo $f(t)$. Esta operación se puede escribir como

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

La operación inversa generalmente se puede realizar usando la Tabla A.1. La propiedad de linealidad de la transformada de Laplace significa que si se tiene una transformada como la suma de dos términos separados, entonces se puede tomar la inversa de cada uno por separado y la suma de las dos transformadas inversas es la transformada inversa requerida.

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}F(s) + b\mathcal{L}^{-1}G(s)$$

De este modo, para ilustrar cómo manipular una función, con frecuencia se puede poner en la forma estándar que se muestra en la tabla, la transformada inversa de $3/(2s + 1)$ se puede obtener arreglándola como

$$\frac{3(1/2)}{s + (1/2)}$$

La tabla (elemento 7) contiene la transformada $1/(s + a)$ con la transformada inversa de e^{-at} . La transformación inversa es ésta multiplicada por la constante $(3/2)$ con $a = (1/2)$, es decir, $(3/2)e^{-t/2}$.

Como otro ejemplo, considere la transformada inversa de Laplace de $(2s + 2)/(s^2 + 1)$. Esta expresión se puede arreglar como

$$\frac{s + 1}{s^2 + 1}$$

El primer término entre corchetes tiene una transformada inversa de $\cos t$ (elemento 17 de la Tabla A.1) y el segundo término $\sin t$ (elemento 16 de la Tabla A.1). Así, la transformada inversa de la expresión es $2 \cos t + 2 \sin t$.

A.4.1 Fracciones parciales

Con frecuencia $F(s)$ es un cociente de dos polinomios y no se puede identificar fácilmente con una transformada estándar de la Tabla A.1. Se tiene que convertir en términos de fracciones sencillas antes de poder usar las formas estándar. El proceso de convertir una expresión en términos de fracciones sencillas se denomina descomposición en **fracciones parciales**. Esta técnica se puede usar siempre que el grado del polinomio del numerador sea menor que el grado del polinomio del denominador. El grado del polinomio es la potencia más alta de s en la expresión. Cuando el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el del denominador, el denominador se divide entre el numerador hasta que el resultado sea la suma de los términos con un término fraccional como residuo que tenga un numerador con grado menor que el denominador.

Se puede considerar que habrá básicamente tres tipos de fracciones parciales:

- 1 El denominador contiene factores que son únicamente de la forma $(s + a)$, $(s + b)$, $(s + c)$, etc. La expresión es de la forma

$$\frac{f(s)}{(s + a)(s + b)(s + c)}$$

y tiene las fracciones parciales

$$\frac{A}{(s + a)} + \frac{B}{(s + b)} + \frac{C}{(s + c)}$$

- 2 Existen factores repetidos $(s + a)$ en el denominador; es decir, el denominador contiene potencias de dicho factor, y la expresión es de la forma

$$\frac{f(s)}{(s + a)^n}$$

Entonces ésta tiene fracciones parciales de

$$\frac{A}{(s + a)^1} + \frac{B}{(s + a)^2} + \frac{C}{(s + a)^3} + \dots + \frac{N}{(s + a)^n}$$

- 3 El denominador contiene factores cuadráticos y éstos no se pueden factorizar sin términos imaginarios. Para una expresión de la forma

$$\frac{f(s)}{(as^2 + bs + c)(s + d)}$$

las fracciones parciales son

$$\frac{As + B}{s^2 + d} + \frac{C}{s + d}$$

Los valores de las constantes A, B, C , etc., se pueden encontrar ya sea usando el hecho de que la igualdad entre la expresión y las fracciones parciales debe ser verdadera para todos los valores de s que los coeficientes de s^n en la expresión deben ser iguales a los de s^n en la expansión en fracciones parciales. El uso del primer método se ilustra con el siguiente ejemplo donde las fracciones parciales de

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)}$$

son

$$\frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

Entonces, para que las expresiones sean iguales, se debe tener que

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A(s + 2) + B(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

y en consecuencia $3s + 4 = A(s + 2) + B(s + 1)$. Esto debe ser cierto para todos los valores de s . El procedimiento es entonces elegir los valores de s que permitan que algunos de los términos que involucran constantes se hagan cero y así se puedan determinar otras constantes. Entonces, si se hace $s = -2$ se tiene $3(-2) + 4 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$ y así $B = 2$. Si ahora se hace $s = -1$ entonces $3(-1) + 4 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1)$ y así $A = 1$. De esta manera

$$\frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s + 2}$$

Problemas

- A.1 Determine las transformadas de Laplace de: a) $2t$, b) $\text{sen } 2t$, c) una unidad de pulso en el tiempo $t = 2$ s, d) $4 \frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$ en $t = 0$, e) $3 \frac{d^2x}{dt^2}$ cuando $x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$, f) la integral entre t y 0 de e^{-t} .
- A.2 Determine las inversas de las transformadas de Laplace: a) $1/s^2$, b) $5s/(s^2 + 9)$, c) $(3s - 1)/[s(s - 1)]$, d) $1/(s + 3)$.
- A.3 Determine el valor inicial de la función con la transformada de Laplace $5/(s + 2)$.



Apéndice B: Sistemas numéricos

B.1

Sistemas numéricos

El **sistema decimal** se basa en el uso de 10 símbolos o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cuando un número se representa en este sistema, la posición de una cifra indica el valor de dicha cifra en función de los valores exponenciales de la base, de derecha a izquierda:

... 10^3 10^2 10^1 10^0
 millares centenas decenas unidades

El **sistema binario** se basa en sólo dos símbolos o estados: 0 y 1, a los que se les denomina dígitos binarios o **bits**. En este sistema los números se pueden representar como la suma de varias potencias de dos, de derecha a izquierda:

... 2^3 2^2 2^1 2^0
 bit 3 bit 2 bit 1 bit 0

Por ejemplo, el número decimal 15 en el sistema binario es 1111. En un número binario el bit 0 se denomina como el **bit menos significativo** (LSB) y el bit más alto como el **bit más significativo** (MSB).

El **sistema octal** se basa en ocho dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Cuando un número se representa en este sistema, la posición del dígito en el número aumenta por un factor de 8 de derecha a izquierda:

... 8^3 8^2 8^1 8^0

Por ejemplo, el número decimal 15 en el sistema octal es 17.

El **sistema hexadecimal** se basa en 16 dígitos/símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Cuando un número se representa en este sistema, la posición del dígito en el número aumenta por un factor de 16 de derecha a izquierda:

... 16^3 16^2 16^1 16^0

Por ejemplo, el número decimal 15 es F en el sistema hexadecimal. Este sistema por lo general se usa en la escritura de programas para sistemas basados en microprocesadores, ya que es un método muy compacto de introducción de datos.

El **sistema decimal codificado en binario** (sistema BCD) es muy utilizado con las computadoras. Cada dígito decimal se codifica de manera separada en binario. Por ejemplo, el número decimal 15 en BCD es 0001 0101. Este código es útil para salidas desde sistemas basados en microprocesadores donde la salida tiene que manejar pantallas en decimal, cada dígito decimal en la pantalla es suministrado por el microprocesador con su propio código binario.

Tabla B.1 Sistemas numéricos.

Decimal	Binario	BCD	Octal	Hexadecimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F

La Tabla B.1 ofrece ejemplos de números en los sistemas decimal, binario, BCD, octal y hexadecimal.

B.2

Matemáticas binarias

Para la suma de números binarios se observan las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
 0 + 0 &= 0 \\
 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 \\
 1 + 1 &= 10 \quad \text{es decir, 0 + lleva 1} \\
 1 + 1 &= 11 \quad \text{es decir, 1 + lleva 1}
 \end{aligned}$$

En números decimales la suma de 14 y 19 da como resultado 33. En números binarios esta suma sería de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 \text{Sumando} \quad 01110 \\
 \text{Sumando} \quad 10111 \\
 \hline
 \text{Suma} \quad 100001
 \end{array}$$

Para el bit 0, $0 + 1 = 1$. Para el bit 1, $1 + 1 = 10$ y así se tiene 0 con 1 llevado a la siguiente columna. Para el bit 3, $1 + 0 + \text{portador de } 1 = 10$. Se continúa así a través de varios bits y termina con la suma más el portador 1. Entonces, el número final es 100001. Al agregar números binarios A y B para dar C , es decir $A + B = C$, A se denomina como el **sumando 1**, B como el **sumando 2** y C como el resultado o la **suma**.

La resta de los números binarios sigue las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
 0 - 0 &= 0 \\
 1 - 0 &= 1 \\
 1 - 1 &= 0 \\
 0 - 1 &= 10 - 1 + \text{prestado} = 1 + \text{prestado}
 \end{aligned}$$

Al evaluar $0 - 1$, un 1 se toma prestado de la columna cercana de la izquierda que tiene un 1. El siguiente ejemplo muestra esto. En números decimales la resta de 27 menos 14 da 13.

Minuendo	11011
<u>Sustraendo</u>	<u>01110</u>
Diferencia	01101

Para el bit 0 se tiene $1 - 0 = 1$. Para el bit 1 se tiene $1 - 1 = 0$. Para el bit 2 se tiene $0 - 1$. Se pide prestado 1 de la siguiente columna y entonces se tiene $10 - 1 = 1$. Para el bit 3 se tiene $0 - 1$; recuerde que se pidió prestado el 1. Una vez más se pide prestado el 1 de la siguiente columna, entonces se tiene $10 - 1 = 1$. Para el bit 4 se tiene $0 - 0 = 0$; recuerde que se pidió prestado el 1. Al restar números binarios A y B dan C , es decir $A - B = C$, entonces A se denomina como el **minuendo**, B como el **sustraendo** y C como la resta o **diferencia**.

La resta de números binarios se lleva a cabo con mayor facilidad electrónicamente cuando se emplea un método alternativo de sustracción. Al ejemplo de resta anterior se le puede considerar como la suma de un número positivo y un número negativo. Las siguientes técnicas indican cómo se pueden especificar los números negativos y así convertir la resta en suma. Esto también permite manejar números negativos en cualquier circunstancia.

A los números utilizados hasta el momento se les llaman números **sin signo**. Esto es porque el número por sí mismo no contiene ninguna indicación si es negativo o positivo. Se dice que un número tiene **signo** cuando el bit más significativo se utiliza para indicar el signo del número, se usa un 0 si el número es positivo y un 1 si es negativo. Cuando se tiene un número positivo entonces se escribe de forma normal con un 0 precediéndolo. Así, un número binario positivo de 10010 se escribiría como 010010. Un número negativo de 10010 se escribiría como 110010. Sin embargo, ésta no es la forma más útil de representar números negativos ya que las computadoras facilitan su manipulación.

Una forma más útil de representar números negativos es con el método de complemento de dos. Un número binario tiene dos componentes conocidos como **complemento de uno** y **complemento de dos**. El complemento de uno de un número binario se obtiene al cambiar todos los unos en el número sin signo en ceros y los ceros en unos. Entonces, el complemento de dos se obtiene al añadir 1 al complemento de uno. Cuando se tiene un número negativo entonces se obtiene el complemento de dos y luego se le añade el signo con un 1, al número positivo se le pone signo con un 0. Considere la representación del número decimal -3 como un número complemento de dos con signo. Primero se escribe el número binario para el 3 sin signo como 0011, entonces se obtiene el complemento de uno de 1100, se le suma 1 para dar el complemento de dos de 1101 sin signo, y finalmente ponerle signo con un 1 para indicar que es negativo. Así, el resultado es 11101. El siguiente es otro ejemplo, el complemento de dos con signo obtenido como un número de 8 bits para -6 :

Número binario sin signo	000 0110
Complemento de uno	111 1001
Sumar 1	1
Complemento a dos sin signo	111 1010
Complemento a dos con signo	1111 1010

Tabla B.2 Números con signo.

Número denario	Número con signo		Número denario	Número con signo	
+127	0111 1111	Sólo el número	-1	1111 1111	Complemento
...		binario con	-2	1111 1110	a dos con
+6	0000 0110	signo con un 0	-3	1111 1101	signo con un 1
+5	0000 0101		-4	1111 1100	
+4	0000 0101		-5	1111 1011	
+3	0000 0011		-6	1111 1010	
+2	0000 0010		...		
+1	0000 0001		-127	1000 0000	
+0	0000 0000				

Cuando se tiene un número positivo entonces se escribe en la forma normal con un 0 precediéndole. De esta manera, un número binario positivo de 100 1001 se escribiría como 01001001. La Tabla B.2 ofrece algunos ejemplos de números en este sistema.

La resta de números positivos implica la obtención del complemento de dos con signo del sustraendo y luego sumarlo al minuendo con signo. Así, la resta del número decimal 6 del número decimal 4 resulta

Minuendo con signo	0000 0100
<u>Sustraendo, complemento a dos con signo</u>	<u>1111 1010</u>
Suma	1111 1110

El bit más significativo del resultado es 1 y el resultado es negativo. Esto es el complemento de dos con signo para -2.

Considere otro ejemplo, restar 43 de 57. El número positivo con signo de 57 es 0011 1001. El complemento de dos con signo para -43 da

Número binario sin signo para 43	010 1011
Complemento a uno	101 0100
<u>Sumar 1</u>	<u>1</u>
Complemento a dos sin signo	101 0101
Complemento a dos con signo	1101 0101

Así, por medio de la suma del número positivo con signo y el número de complemento de dos con signo, se obtiene

Minuendo con signo	0011 1001
<u>Sustraendo, complemento a dos con signo</u>	<u>1101 0101</u>
Suma	0000 1110 + acarreo de 1

El portador 1 se ignora, luego el resultado es 0000 1110 y puesto que el bit más significativo es 0, el resultado es positivo. El resultado es el número decimal 14.

Si se quisieran sumar dos números negativos entonces se obtendría el complemento de dos con signo para cada número y luego se sumarían. Siempre que un número es negativo, se utiliza el complemento de dos con signo, cuando es positivo sólo se utiliza el número con signo.