


bles de estado que definen el problema de control de trayectoria, está dado de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}) [K_p \bar{\mathbf{q}} + K_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + B \dot{\bar{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (7.4)$$


$$= \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}_d - \bar{\mathbf{q}}) [K_p \bar{\mathbf{q}} + K_v \dot{\bar{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}_d(t) - \bar{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + B \dot{\bar{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (7.5)$$


la cual resulta una ecuación diferencial no lineal de primer orden, no autónoma, y cuyo punto de equilibrio es el origen  $[\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ . La naturaleza no autónoma de la ecuación (7.4) es más evidente en su representación de la ecuación (7.5), donde la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  queda en función de la trayectoria  $\mathbf{q}_d(t)$ , así como la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis queda también en función de la trayectoria de seguimiento y de la velocidad deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  y  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ , respectivamente.

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$  se lleva a cabo de la siguiente forma:

 Para la primera componente de la ecuación de lazo cerrado (7.4)  $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = I \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ , puesto que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva.

Para la segunda componente de la ecuación (7.4) se tienen las siguientes consideraciones:

 Usando la propiedad 5.1, la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa  $M^{-1}(\mathbf{q})$  existe y es definida positiva.

 Las ganancias proporcional  $K_p$  y derivativa  $K_v$  son matrices definidas positivas propuestas por el usuario.

## 7.2 Control PD +



Nótese que  $C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  debido a que en la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (7.5)  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ . Además,  $B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ , puesto que la matriz de coeficientes de fricción viscosa  $B$  es una matriz diagonal definida positiva.



Por otro lado,  $K_p\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , puesto que la ganancia proporcional es una matriz definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (7.5) existe y es único, a condición que las ganancias proporcional y derivativa del control PD (7.3) sean diseñadas como matrices definidas positivas.

La demostración de estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.5) queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov,

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T K_p\tilde{\mathbf{q}} \quad (7.6)$$

Se trata de una función definida positiva ya que las matrices de inercia y ganancia proporcional son definidas positivas.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (7.6) adquiere la siguiente forma:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.7)$$

Sustituyendo la ecuación de lazo cerrado (7.5) en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

(7.8)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_p\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Se concluye que la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.4). También se concluye del corolario (3.2) que  $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n$  y  $\ddot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_2^n$ . En este caso, el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle no puede ser aplicado para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio, debido a que la ecuación en lazo cerrado (7.4) es un sistema dinámico no autónomo. Recuérdese que sólo se aplica para el caso de regulación y trayectorias periódicas. El control de movimiento es mucho más general que las trayectorias periódicas.



### 7.2.1 Análisis de estabilidad asintótica PD+

En 1993 Whitcomb y Koditschek propusieron una función estricta de Lyapunov para llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del algoritmo de control PD+. Posteriormente, Satibañez y Kelly en 1997 empleó esa misma función y la generalizaron también para el caso de regulación. Las referencias especializadas se encuentran al final de este capítulo.

La función (7.7) puede ser perfeccionada para convertirse en una función estricta de Lyapunov, es decir una función definida positiva tal que su derivada sea definida negativa. Con esta finalidad, considere la siguiente función:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \quad (7.10)$$

Para demostrar que la función (7.10) es definida positiva se procede de la siguiente manera. Esta función contiene un término cuadrático del error de la posición, otro término cuadrático del error de la velocidad y una componente de productos cruzados entre el error de posición y error de la velocidad. Por lo tanto la idea es completar un binomio cuadrado perfecto, para eso se introduce un cero y después se agrupan términos de manera conveniente.

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}_{\text{Término cuadrático del error de la velocidad}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}}_{\text{Término cuadrático del error de la posición}} + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}_{\text{Término de productos cruzados}} +$$

$$\underbrace{\frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{Complemento del binomio cuadrado perfecto}} \quad (7.11)$$

Para esta finalidad, la ecuación (7.11) se puede reescribir de la siguiente manera: agrupando los términos primero, tercero y cuarto; por otro lado, al agrupar los términos segundo y quinto, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[ K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[ \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \left[ K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \tilde{\mathbf{q}} \quad (7.12) \end{aligned}$$

El primer término de (7.12) es una función definida positiva debido que la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. Ahora sólo resta obtener las condiciones para que  $\left[ K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2} M(\mathbf{q}) \right]$  sea una matriz definida positiva.

Considérense las siguientes desigualdades:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\begin{aligned} 1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ 1 \geq \frac{1}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} &\geq \frac{1}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \Rightarrow \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \geq \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \\ \epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} &\Rightarrow \epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el teorema de Rayleigh Ritz (3.1):

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{\min} \leq \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{\max} \quad (7.13)$$

$$\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \leq \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \leq \frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \quad (7.14)$$

$$-\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \leq -\frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \leq -\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \quad (7.15)$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



Sumando término a término las desigualdades (7.13) y (7.15), se obtiene lo siguiente:

$$\|\ddot{\mathbf{q}}\|^2 \left[ \lambda_{K_p}^{\min} - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \right] \leq \ddot{\mathbf{q}}^T \left[ K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} M(\mathbf{q}) \right] \ddot{\mathbf{q}} \quad (7.16)$$

Particularmente la cota mínima de (7.16) debe ser positiva, para esta finalidad la condición que debe cumplir el valor propio mínimo de la ganancia proporcional, el valor propio máximo de la matriz de inercia es:

$$0 < \left[ \lambda_{K_p}^{\min} - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \right] \Rightarrow 0 \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\min}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}} \quad (7.17)$$

Por lo tanto la función (7.7) es definida positiva.

La derivada con respecto al tiempo de la función (7.7) se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\ddot{\mathbf{q}}}) &= \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\ddot{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \\ &\quad \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \ddot{\mathbf{q}} \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\ddot{\mathbf{q}}\| [1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \\ &\quad \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\ddot{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

donde

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \right] = - \frac{\epsilon_0}{\|\ddot{\mathbf{q}}\| [1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T \dot{\ddot{\mathbf{q}}}$$

Sustituyendo el error de aceleración de la ecuación en lazo cerrado (7.4) en (7.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\ddot{\mathbf{q}}}) &= - \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q}) [K_p \ddot{\mathbf{q}} + K_v \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + B \dot{\ddot{\mathbf{q}}}] + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \ddot{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \ddot{\mathbf{q}} \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\ddot{\mathbf{q}}\| [1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T \dot{\ddot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\ddot{\mathbf{q}}\|} \dot{\ddot{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q}) [K_p \ddot{\mathbf{q}} + K_v \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\ddot{\mathbf{q}}} + B \dot{\ddot{\mathbf{q}}}] \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{-\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \quad (7.19) \\
&\quad \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q} [C(q, \dot{q})^T + C(q, \dot{q})] \dot{\tilde{q}}}_{M(q) = C(q, \dot{q})^T + C(q, \dot{q})} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T B \dot{\tilde{q}} \\
&= -\dot{\tilde{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T C(q, \dot{q})^T \dot{\tilde{q}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T B \dot{\tilde{q}}.
\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Para continuar con el proceso analítico de la demostración de estabilidad, deben tomarse en cuenta las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
-\dot{\tilde{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{q}} &\leq -[\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min}] \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} &\leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{M(q)}^{max} \leq \epsilon_0 \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{M(q)}^{max} \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T C(q, \dot{q})^T \dot{\tilde{q}} &= \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}^T C(q, \dot{q}) \tilde{q} \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\tilde{q}\| k_C \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tilde{q}\| \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\tilde{q}\| k_C \underbrace{[\|\dot{\tilde{q}}_d\| + \|\dot{\tilde{q}}\|]}_{\|\dot{\tilde{q}}\|} \|\tilde{q}\| &\leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\| \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\| \\
&\quad + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\| \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\| + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2 &\leq \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\| \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\| + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2
\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

donde se ha usado  $\|\dot{\tilde{q}}\| = \|\dot{\tilde{q}}_d - \dot{\tilde{q}}\|$ , entonces  $\|\dot{\tilde{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| = \|\dot{\tilde{q}}_d - \dot{\tilde{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| \leq \|\dot{\tilde{q}}_d\| \|\dot{\tilde{q}}\| + \|\dot{\tilde{q}}\|^2$ , y tomando en cuenta la propiedad de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis:  $\|C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}}\| \leq k_C \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tilde{q}\|$ ,  $\forall q \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\lambda_{M(q)}^{max} = \sqrt{\lambda_{\{M(q)^T M(q)\}}^{max}}$ .

Por otro lado, considérese la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \right| \leq \left| \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \right| \leq \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2 \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{M(q)}^{max}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

$$\leq \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2$$

Entonces la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov puede quedar acotada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq & -[\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min} - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\ & + \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ & - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

Ahora, considérense las siguientes desigualdades:

$$-\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \leq -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{min}$$

$$-\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq \left| \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right| \leq \epsilon_0 [\lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$$

Incorporando las anteriores cotas, la derivada temporal de la función de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq & -[\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min} - \epsilon_0 k_C - \epsilon_0 2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ & + \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{aligned} \quad (7.20)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq & - \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min} - \epsilon_0 k_C - \epsilon_0 2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} & -\frac{\epsilon_0}{2} \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max}] \\ -\frac{\epsilon_0}{2} \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max}] & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Para que la matriz  $Q$  sea definida negativa debe existir algún  $\epsilon_0$  tal que:

$$\frac{4\lambda_{K_p}^{min} (\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min})}{(k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max})^2 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] + 4(\lambda_{K_p}^{min} k_C + 2\lambda_{K_p}^{min} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max})} > \epsilon_0 > 0.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

No es necesario conocer el valor de  $\epsilon_0$ , sólo es suficiente su existencia. Entonces la función (7.21) es definida negativa y por lo tanto se demuestra la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T \Rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$$

### 7.3 Moldeo de energía PD+

La estructura del control PD+ data de la década de los ochenta a la fecha, y en la literatura especializada de robótica se han reportado versiones con modificaciones menores del esquema de control PD+. La técnica de diseño de moldeo de energía presentada para el problema de regulación puede ser generalizada al caso de control de trayectoria; en este contexto se genera una familia muy grande de algoritmos de control, entre ellos como un caso particular se encuentra el control PD+.

Considérese la siguiente estructura de control

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{q}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{q}}) + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q) \quad (7.22)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde  $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{q})$  representa el gradiente de la función de energía potencial  $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0$  y representa la estructura matemática para el control proporcional del error de posición, la cual es una función continua en el error de posición  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$ . La ganancia proporcional  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{q}})$  es el gradiente de la energía potencial artificial del error de la velocidad  $\mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{q}}) > 0$  y representa el control proporcional del error de la velocidad además de que es una función continua en  $\dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n$ .  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, la cual es una matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado que define el problema de control de trayectoria, formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y la técnica de

moldeo energía (7.22), está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}) [\nabla U_p(K_p, \bar{\mathbf{q}}) + \nabla U_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Esto es, una ecuación diferencial de primer orden no lineal, no autónoma, cuyo punto de equilibrio es el origen  $[\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ . La naturaleza no autónoma de la ecuación (7.23) se debe a que la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  queda en función de la trayectoria  $\mathbf{q}_d(t)$ , así como la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis queda también en función de la trayectoria de seguimiento  $\mathbf{q}_d(t)$  y de la velocidad deseada  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ .

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$  de la ecuación (7.23) se lleva a cabo de la siguiente forma:



La primera componente de la ecuación de lazo cerrado (7.23)  $\dot{\mathbf{q}} = I\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonal definida positiva.

Las siguientes consideraciones se tienen para la segunda componente de la ecuación (7.23):



De acuerdo con la propiedad 5.1 de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa  $M^{-1}(\mathbf{q})$  existe y es definida positiva.



Las ganancias proporcional  $K_p$  y derivativa  $K_v$  son seleccionadas por el usuario como matrices diagonales definidas positivas.



Nótese que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  debido a que la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (7.23)  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . Además,  $B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , puesto que la matriz de coeficientes de fricción viscosa  $B$  es una matriz diagonal definida positiva.





El gradiente de la energía potencial del error de posición  $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , debido a que la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz diagonal definida positiva.



Por otro lado,  $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ , debido a que la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (7.23) existe y es único.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.23) en el sentido de Lyapunov se lleva a cabo considerando la siguiente propuesta de función de energía:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.24)$$

la cual es una función definida positiva, debido a que la matriz de inercia  $M > 0$ , las funciones de energía potencial artificial del error de posición y del error de velocidad  $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  y  $\mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , respectivamente, son funciones definidas positivas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La derivada con respecto al tiempo de la función (7.33) se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Tomando en cuenta el error de aceleración de la ecuación en lazo cerrado (7.23) en (7.25) se obtiene:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q}) \left[ \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q}) \left[ \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \right. \\
&\quad \left. C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \\
&= \underbrace{-\tilde{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\
&\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - [\lambda_B^{\min} - 2\epsilon_0 \lambda_M^{\max}(\mathbf{q}) - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \epsilon_0 [k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\| + \lambda_B^{\max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Para continuar con el análisis de estabilidad es necesario especificar la naturaleza del esquema de control: si es con acciones acotadas o del tipo no acotado.

Supóngase que el algoritmo de control PD+ tiene acciones acotadas o saturadas, por ejemplo  $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$  y  $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ , entonces  $\|\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})\| = \|K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \lambda_{K_p}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\|$  y  $\|\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| =$

$\|K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq \lambda_{K_v}^{max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$ . De una generalización del teorema (3.1):

$$\|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \lambda_{K_p}^{min} \leq \mathbf{f}_p^T(\tilde{\mathbf{q}}) K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \leq \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\|^2 \lambda_{K_p}^{max} \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{max}$$

$$\|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\|^2 \lambda_{K_v}^{min} \leq \mathbf{f}_v^T(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) K_v \mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq \|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\|^2 \lambda_{K_v}^{max} \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \lambda_{K_v}^{max}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq & -\lambda_{K_v}^{min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| - [\lambda_B^{min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| \\ & + \epsilon_0 [\lambda_{K_v}^{max} + \lambda_B^{max} + k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

la función (7.26) debe cumplir:

$$\lambda_{K_v}^{min} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| + [\lambda_B^{min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| > \epsilon_0 [\lambda_B^{max} + \lambda_{K_v}^{max} + k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|.$$

Tomando en cuenta la naturaleza de las funciones acotadas  $\|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|$

y  $\|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$  se tiene:

$$[\lambda_B^{min} + \lambda_{K_v}^{min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 > \epsilon_0 [\lambda_B^{max} + \lambda_{K_v}^{max} + k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|.$$

Por lo tanto, se cumple:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_B^{min} + \lambda_{K_v}^{min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{max} - \epsilon_0 k_C & -\frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_B^{max} + \lambda_{K_v}^{max} k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|] \\ -\frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_B^{max} + \lambda_{K_v}^{max} k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|] & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0$$

si existe algún  $\epsilon_0$  que cumpla:

$$\frac{4\lambda_{K_p}^{min} (\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min})}{\lambda_B^{max} + \lambda_{K_v}^{max} + (k_C \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d\|)^2 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] + \lambda_{K_p}^{min} k_C + 2\lambda_{K_p}^{min} \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{max}} > \epsilon_0 > 0,$$

lo cual demuestra estabilidad asintótica del punto de equilibrio  $[\tilde{\mathbf{q}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$  de la ecuación (7.23).

Un razonamiento similar se sigue cuando las estructuras de control del error proporcional y del error proporcional de la velocidad tienen funciones no acotadas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA



### Teorema 7.1 Moldeo de energía para regulación

La función estricta de Lyapunov (7.33) permite abordar el problema de control de posición o regulación  $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ , en este caso  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d \mathbf{0}$  y  $\tilde{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$ , entonces la estructura de moldeo de energía (7.22) reproduce el caso de regulación (6.21):

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

siendo  $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = -\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ .

La función estricta que permite demostrar estabilidad asintótica global está dada como:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\epsilon_0 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (7.27)$$

de esta forma, no se requiere utilizar el teorema (3.2) de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.



### 7.3.1 Ejemplos de control de trayectoria tipo PD+

A continuación se presentan ejemplos de algoritmos de control con la estructura del control de movimiento PD+.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \ddot{q}_1^{2m-1} \\ \ddot{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \ddot{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{2m-1} \\ \dot{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T M(q) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \bar{q}_1^m \\ \bar{q}_2^m \\ \vdots \\ \bar{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \bar{q}_1^m \\ \bar{q}_2^m \\ \vdots \\ \bar{q}_n^m \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{q}\|} \bar{q}^T M(q) \dot{\bar{q}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \sinh(\tilde{q}_1) \\ \sinh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \sinh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \sinh(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T M(q) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{q}\|} \bar{q}^T M(q) \dot{\bar{q}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \tanh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \vdots \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T M(q) \dot{\bar{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{q}\|} \bar{q}^T M(q) \dot{\bar{q}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\dot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\ddot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\ddot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\ddot{q}_n) \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\dot{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{q}\|} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_1) \operatorname{senh}(\dot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_2) \operatorname{senh}(\dot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_n) \operatorname{senh}(\dot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_n)} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\ddot{q}_1) \operatorname{senh}(\ddot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\ddot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\ddot{q}_2) \operatorname{senh}(\ddot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\ddot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\ddot{q}_n) \operatorname{senh}(\ddot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\ddot{q}_n)} \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\dot{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{q}\|} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\dot{q}_2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\ddot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\ddot{q}_2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\ddot{q}_n}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix} + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + B\dot{q}_d + g(q)$$

$$V(t, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_n^2)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \dot{q}_n^2)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{q}\|} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2}] \tilde{q}_1 \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2}] \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2}] \tilde{q}_n \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_1^2}] \dot{\tilde{q}}_1 \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_2^2}] \dot{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_n^2}] \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \operatorname{senh}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_2) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_n) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

## 7.4 Control par calculado

El algoritmo par calculado es una estructura de control de trayectoria que emplea la dinámica de compensación en el lazo de retroalimentación para linealizar y desacoplar la dinámica no lineal del robot manipulador, es decir, este controlador tiene el atributo de obtener una ecuación en malla cerrada lineal en términos de las variables de estado  $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ . El control par calculado, que se denota por  $\tau_{pc}$ , tiene la siguiente expresión:

$$\tau_{pc} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}} \quad (7.28)$$

La ecuación en malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control  $\tau_{pc}$  (7.28) en la ecuación del modelo del robot (5.8) y bajo la suposición de que existe una cancelación exacta del modelo dinámico que interviene en el lazo de retroalimentación, entonces el control par calculado realiza el desacoplamiento dinámico en todas las articulaciones del robot, resultando el siguiente sistema lineal:

$$\ddot{\bar{q}} + K_v \dot{\bar{q}} + K_p \bar{q} = \mathbf{0}, \quad (7.29)$$

el cual puede escribirse en términos del vector de estado  $[\ddot{\bar{q}}^T \dot{\bar{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

donde  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad.

Es importante observar que la ecuación de malla cerrada (7.30) representa una ecuación diferencial lineal y autónoma, cuyo único estado de equilibrio es el origen  $[\ddot{\bar{q}}^T \dot{\bar{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ , el cual tiene estabilidad exponencial si las matrices  $K_p$  y  $K_v$  son simétricas y definidas positivas.



### 7.4.1 Moldeo de energía par calculado

La técnica de moldeo de energía puede ser generalizada para diseñar una familia grande de algoritmos de control con la estructura modificada de control par calculado.

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\ddot{\bar{q}}_d + \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \bar{q}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\bar{q}})] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.31)$$

La ecuación en malla cerrada se obtiene de la ecuación de moldeo de energía para control par calculado (7.31) y la ecuación del modelo del robot (5.8):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -[\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma cuyo origen es el único punto de equilibrio.

La función para realizar el análisis de estabilidad asintótica de Lyapunov

es:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.33)$$

A continuación se describen ejemplos de diseño o casos de estudio de esta metodología:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{2m-1} \\ \tilde{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1^{2m-1} \\ \dot{\tilde{q}}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n^{2m-1} \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \sinh(\tilde{q}_1) \\ \sinh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \sinh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \sinh(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \tanh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$



$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \sinh(\tilde{q}_2)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \sinh(\dot{\tilde{q}}_1)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_2) \sinh(\dot{\tilde{q}}_2)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_n) \sinh(\dot{\tilde{q}}_n)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{\mathbf{q}}\|} \bar{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{q}}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_n}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{\mathbf{q}}\|} \bar{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2}] \tilde{q}_1 \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2}] \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2}] \tilde{q}_n \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} [1 - \beta \exp^{-\alpha \dot{\tilde{q}}_1^2}] \dot{\tilde{q}}_1 \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_2^2}] \dot{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_n^2}] \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\bar{\mathbf{q}}\|} \bar{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \sinh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_v \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \sinh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_2) \sinh(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \sinh(\dot{\tilde{q}}_1) \end{bmatrix} \right] + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$



### Esquemas de control de trayectoria

En la página web del libro se encuentran disponibles programas en MatLab cuyo propósito general es la evaluación e implementación de varios esquemas de control de trayectoria de las familias de moldeo de energía PD+ y par calculado, además de que se presentan aspectos de implementación práctica del diseño de la trayectoria  $\chi_d(t)$ .

## 7.5 Aspectos prácticos

Un elemento importante en la evaluación experimental de controladores de movimiento para robots manipuladores que requiere de una cuidadosa y sistemática investigación es la selección de la clase de trayectorias de entrada para el robot manipulador.

La trayectoria de entrada debe seleccionarse para exhibir un perfil de movimiento sin cambios abruptos en la posición, velocidad y aceleración de principio a fin del movimiento, así como generar un bajo contenido de fricción, de tal manera que la dinámica del robot sea la que predomine, además de prevenir que los servoactuadores entren en zona de saturación.

Si la trayectoria deseada se encuentra en coordenadas cartesianas  $\chi_d(t)$ , entonces las posiciones articulares  $\mathbf{q}_d(t)$  se obtienen directamente de la cinemática inversa. La velocidad y la aceleración articular deseada se obtienen de la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{f}_{cinv}(\chi_d) \quad (7.34)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_d)\dot{\chi}_d \quad (7.35)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_d)\ddot{\chi}_d - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_d)\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_d)(\mathbf{q}_d)\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_d)\dot{\chi}_d \quad (7.36)$$

La planificación de la trayectoria  $\chi_d(t)$  debe evitar singularidades debido a que se emplea la matriz inversa del Jacobiano  $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$  para obtener la velocidad deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  y la aceleración articular  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ .

### Índice de desempeño

En control de trayectoria el índice de desempeño se mide usando la norma  $\mathcal{L}_2$  del error de posición y del error de velocidad de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_2[\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\|\bar{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)\|^2] dt}, \quad (7.37)$$

donde  $T$  representa el tiempo de simulación o de experimentación.

Un valor grande en el índice de desempeño, significa pobre desempeño. Alto desempeño se ve reflejado en un valor pequeño del índice  $\mathcal{L}_2$ .

## 7.6 Resumen

El control de movimiento o control de trayectorias representa un problema con mayor grado de complejidad que el que se presenta en el control de posición o regulación. La complejidad radica en que los algoritmos de control retroalimentan la dinámica completa del robot manipulador ya que forma parte de los fenómenos de compensación dinámica. Además, se deben conocer los valores numéricos de sus parámetros.

Se ha producido una extensión de la técnica de moldeo de energía al caso de control de trayectoria, generando una familia extensa de algoritmos de control con la estructura PD+, y también para el par calculado.



### Videos de robots manipuladores

En la página web del libro se encuentran disponibles diversos videos experimentales del péndulo, robots manipuladores de 2 y 3 gdl con aplicaciones de control de movimiento de las familias PD+ y par calculado.

En estos videos se describen aspectos prácticos de implementación y evaluación experimental de los algoritmos de control, así como del diseño de la trayectoria de seguimiento.



## 7.7 Referencias selectas

A continuación se presenta un conjunto de referencias para que el lector pueda profundizar en el tema de control de trayectorias.



### 7.2 Control PD+

La sección del control PD+ puede consultarse en: <http://www.ebrary.com>



Koditschek, D. E. 1984. “*Natural motion for robot arms*”, Proceedings of the IEEE 23th Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, December 1984, pp. 733-735.



Paden B., Panja, R. 1988. “*Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators.*” International Journal of Control. Vol. 47, No. 6, pp. 1697-1712.

La propuesta de la función estricta de Lyapunov (7.10) que permite obtener la demostración de estabilidad asintótica global del control PD+ se realizó en:



Whitcomb L L, Rizzi A. & Koditschek, D. E. 1993 “Comparative experiments with a new adaptive controller for robot manipulators.” IEEE Transactions on Robotics and Automation. February, Vol. 9, No. 1, pp. 59-70.

También el desarrollo de la demostración de estabilidad asintótica global del control PD+ puede consultarse en:



Kelly, R., V. Santibañez, and A. Loría. “*Control of Robot Manipulators in Joint Space.*” Springer-Verlag London 2005.



R. Kelly y Víctor Santibañez. “*Control de Movimiento de Robots Manipuladores.*” Pearson Education, Prentice-Hall, 2003.



Wen, J. T., Bayard, D., 1988, “*New class of control law for robotic manipulators*” Part I: Non-adaptive case. *International Journal of Control.* Vol. 47, No. 5, pp. 1361-1385.



Kelly, R. 1990. “*Adaptive computed torque plus compensation control for robot manipulators*”. *Mechanism and Machine theory.* Vol. 25, No. 2, pp. 161-165. MIT Press, 1990.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### 7.3 Moldeo de energía PD+



Victor Santibañez & Rafael Kelly. “*Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators*”. *Automatica,* Vol. 53. No. 4. pp. 675-682. 1997

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



Reyes F. & J. Cid. “*Bounded Controller for Robot Manipulators.*” *IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling.* Crete, Greece. June 25-28, pp. 271-276.





Reyes F. and E. Guevara. “*Design of a new control algorithm for robot manipulators.*” *Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems.* May. 19-23, Cancún, México, pp. 118-123.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary




 Reyes F. and V. Pasilla. 2003. "A tracking controller for robot manipulators." Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems. May. 19-23, Cancún, México, pp. 124-127.


 Reyes F. J. Cid, M. Mendoza, I. Bonilla. "A new family of controllers for position control of robots manipulators." ICINCO 2005. September 14-17. Barcelona, Spain. Organized by: INSTICCC, Universitat Politecnica de Catalunya, IFAC, EST SETUBAL and AAI. pp. 361-366.


 F. Hugo Ramírez, Fernando Reyes and Rubí Salazar. "A New Family of Saturated Regulators For Robot Manipulators." Proceedings of the 10th IASTED International Conference on Control and Applications CA-2008. Quebec City, Canada. May 26-28, 2008, pp. 102-106.



## 7.4 Control par calculado

 Kelly, R. 1990. "Adaptive computed torque plus compensation control for robot manipulators". Mechanism and Machine theory. Vol. 25, No. 2, pp. 161-165. MIT Press, 1990.

 Kelly, R., V. Santibañez, and A. Loria. "Control of Robot Manipulators in Joint Space." Springer-Verlag London 2005.

 R. Kelly y Víctor Santibañez. "Control de Movimiento de Robots Manipuladores." Pearson Education, Prentice-Hall, 2003.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



## 7.5 Aspectos prácticos



Kelly R. & F. Reyes. “*Evaluation of real-time motion controllers for a direct drive robot arm.*” International Federation of Automatic Control: on Algorithms and Architectures for Real-Time Control. Cancun, Mexico. April, 1988. Vol V, pp. 149-154.



Reyes F., and R. Kelly. “*Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm.*” International Journal on Mechatronics. 2001. Vol. 11, pp. 267-282. Edit. Pergamon.

## 7.8 Problemas propuestos



Se proponen los siguientes problemas selectos con la finalidad de mejorar la habilidad del lector en análisis y desarrollo de algoritmos de control de trayectoria.



## 7.2 Control PD+

La presente sección contiene una serie de problemas para que el alumno pueda desarrollar la habilidad de diseñar estrategias de algoritmos de control de movimiento.

- 7.2.1 Describir cualitativamente el problema de control de movimiento o control de trayectoria.
- 7.2.2 Describir analíticamente el problema de control de movimiento.
- 7.2.3 Explicar la diferencia entre un controlador y un regulador.
- 7.2.4 Para el esquema de control PD+, llevar a cabo la demostración de estabilidad asintótica global sobre un péndulo-robot.



### 7.3 Moldeo de energía PD+

- 7.3.1 Llevar a cabo el análisis de estabilidad de moldeo de energía para el caso de algoritmos de control con funciones no acotadas: emplear la función (7.26).
- 7.3.2 Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global de la familia de controladores de moldeo de energía para regulación usando la función estricta de Lyapunov (7.27).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### 7.4 Control par calculado

- 7.4.1 Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global de la familia de controladores de moldeo de energía para regulación usando la función estricta de Lyapunov (7.27).
- 7.4.2 Llevar a cabo el análisis de estabilidad de la familia de control par calculado.
- 7.4.3 Explicar cualitativamente el funcionamiento de la estructura de control par calculado.
- 7.4.4 Diseñar una trayectoria circular y elíptica con el esquema control PD+.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### 7.5 Aspectos prácticos

- 7.5.1 Obtener el índice de desempeño para 3 algoritmos de control de la familia moldeo de energía PD+.
- 7.5.2 Obtener el índice de desempeño para 3 algoritmos de control de la familia moldeo de energía par calculado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

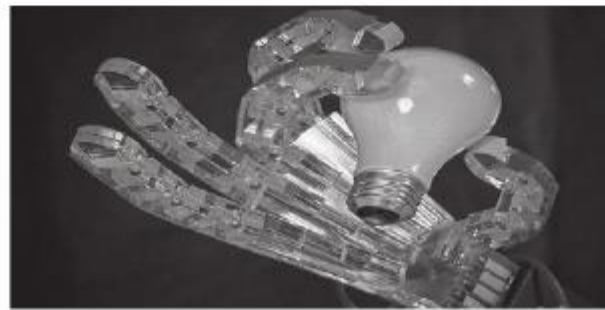


# Control de fuerza/impedancia

*Entre dos hombres iguales en fuerza, el que tiene más razón es el más fuerte.*

*Pitágoras*

Marco Mendoza, Isela Bonilla y Emilio González



- 8.1 Introducción
- 8.2 Sensores de fuerza/par
- 8.3 Sistemas hápticos
- 8.4 Modelado del entorno
- 8.5 Control de fuerza
- 8.6 Control híbrido de fuerza/posición
- 8.7 Control de impedancia
- 8.8 Aplicaciones
- 8.9 Resumen
- 8.10 Referencias selectas
- 8.11 Problemas propuestos

## Objetivos

Proporcionar los fundamentos y conceptos claves del control de interacción y los principales esquemas de control que existen para el control de fuerza e impedancia. Se describen los componentes principales de un sistema robótico que interactúa con su entorno, como lo son el sensado de fuerza, la retroalimentación háptica y el modelado y control del sistema.

## Competencias

Mejorar la habilidad en control de fuerza e impedancia, así como el uso de sensores de fuerza en aplicaciones robóticas, sistemas hápticos, simular tareas de interacción robóticas y desarrollar esquemas de control de interacción para robots manipuladores.



## 8.1 Introducción

En la gran mayoría de procesos industriales, médicos y de servicios automatizados por tecnología robótica, se requiere que un robot manipulador esté en contacto o interactúe con su entorno. Esto hace necesario el control, tanto del movimiento como de la fuerza, del robot restringido por su entorno. La inclusión de información de fuerza en el control de robots incrementa su adaptabilidad en entornos inciertos y provee seguridad ante fuerzas de contacto excesivas.

Durante la interacción, el entorno impone restricciones en las trayectorias que puede seguir el efector final del manipulador. Esta situación se conoce como movimiento restringido, en este caso, el uso de una estrategia de control de movimiento puro para controlar la interacción es candidata a fallar, debido a que cualquier desviación de la trayectoria de referencia provoca una reacción del sistema de control, buscando minimizar esta desviación independientemente de la causa que la generó. Por lo tanto, si la desviación de la trayectoria planeada se debe a la interacción del robot con el entorno, surgen fuerzas de reacción con las cuales la ley de control minimiza esta desviación aumentando en consecuencia la fuerza de contacto hasta el límite de saturación de los actuadores o la deformación de la superficie sobre la que el robot realiza su tarea.

La fuerza de contacto es la cantidad que describe el estado de interacción entre el robot y su entorno, por lo tanto es de esperarse que una mejora en el desempeño pueda lograrse con un control de interacción provisto de mediciones de fuerza. De aquí que para el manejo apropiado de la interacción es necesario considerar estrategias de control de fuerza. El control explícito de fuerza involucra el comando directo y la medición de valores de fuerza, con el objetivo de que la salida siga a la entrada tan cerca como sea posible. Algunos ejemplos de tareas de interacción industriales son perforación, pulido, maquinado o ensamblado. Por otra parte, cuando el manipulador interactúa con seres humanos, como en el

### Control de interacción

El problema de control de interacción consiste en la regulación de las fuerzas y/o pares generados durante el desarrollo de una tarea en la cual el efector final de un robot manipulador tiene contacto físico con su entorno. El objetivo principal es mantener las fuerzas de contacto limitadas, asegurando un comportamiento dócil entre el efector final del robot y su entorno.

Existen dos formas de realizar el control de un robot manipulador que interactúa con su entorno. La primera se conoce como control pasivo, esto es, se integran elementos pasivos en el robot (dispositivos especiales diseñados y montados en el efector final), mientras que la segunda es el control activo donde se controla la dinámica del robot utilizando la información de las fuerzas de contacto. De acuerdo con la forma en que se realiza la regulación de fuerzas se clasifican en *control directo de fuerza* y *control indirecto de fuerza*.

El control directo de fuerza regula el contacto a un valor de fuerza deseado y constante, a través de la inclusión de un lazo de control de fuerza. Por otra parte, los enfoques de control indirecto de fuerza regulan la interacción indirectamente a través del control de posición y/o velocidad.



### Control de impedancia

Es un enfoque de control indirecto de fuerza, donde la interacción es regulada a partir de la relación entre fuerza y posición dada por la impedancia mecánica.

Los términos impedancia y admitancia son equivalentes e intercambiables para sistemas lineales que operan en frecuencia finita. Sin embargo, la manipulación (interacción mecánica) es un problema no lineal y por lo tanto la equivalencia para sistemas lineales no se conserva. En general, los conceptos de impedancia y admitancia no son intercambiables para sistemas no lineales.

En la mayoría de las tareas del manipulador, su entorno contiene al menos una restricción inercial y/o cinemática, esto es, sistemas físicos que aceptan como entrada fuerza y su respuesta está determinada por su propio movimiento (admitancia). Este problema visto desde el robot, considera que el medio ambiente de interacción es una admitancia.

El control de impedancia fue propuesto por primera vez por Hogan en 1985 y tiene hoy en día diversas interpretaciones. Usualmente, el objetivo de control de impedancia consiste en ocasionar que el efector final del robot responda a fuerzas aplicadas externamente de acuerdo con alguna dinámica bien definida.

caso de terapias de rehabilitación, el sistema de control debe garantizar seguridad y estabilidad para el paciente.

El control de interacción ha sido abordado utilizando dos estrategias generales: la primera, llamada **control híbrido de fuerza/posición**, divide el espacio de trabajo del robot en direcciones ortogonales que son restringidas en fuerza o posición y se diseña un controlador apropiado de fuerza o posición para cada dirección. La segunda estrategia, denominada **control de impedancia**, está basada en el control de la relación entre la fuerza de interacción y los errores de posición, resultantes de esta fuerza. La interacción dinámica entre el manipulador y su entorno puede ser regulada y controlada cambiando su impedancia mecánica.

La **impedancia mecánica**  $z(w)$  se define como la relación compleja entre la fuerza y la velocidad a una frecuencia  $w$

$$z(w) = \frac{f(w)}{v(w)} \quad (8.1)$$

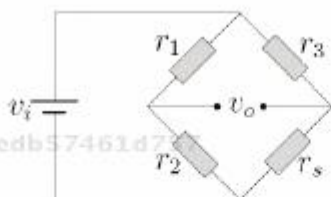
donde  $f(w)$  es la fuerza y  $v(w)$  es la velocidad en la frecuencia  $w$ . En frecuencias de resonancia, la impedancia mecánica es más baja, esto significa que menos fuerza es necesaria para ocasionar que una estructura se mueva a la velocidad dada. La impedancia mecánica es el inverso de la admitancia mecánica o movilidad, y sus unidades son Ns/m.

El término impedancia es un concepto familiar para la ingeniería eléctrica. La impedancia en un sistema eléctrico se define como la razón entre el voltaje y el flujo de corriente alterna. Es decir, la impedancia es la relación entre la fuerza (diferencia de potencial) y el flujo de corriente. Al inverso de la impedancia se le denomina *admitancia*. Por analogía, el concepto de impedancia puede trasladarse a otra clase de sistemas, por ejemplo, la relación voltaje/corriente se le denomina la impedancia de la línea eléctrica; para un sistema mecánico, la relación *fuerza/velocidad* es la impedancia mecánica.



## 8.2 Sensores de fuerza/par

Existen diversos tipos de sensores de fuerza, por lo general celdas de par y carga, también conocidos como transductores de fuerza, son dispositivos útiles para la medición de pares y fuerzas generadas dentro de un sistema mecánico. La medición de una fuerza o par se reduce usualmente a medir la tensión inducida por la fuerza o par aplicado a un elemento extensible. Por lo tanto, una medición indirecta de la fuerza se obtiene a través de la medición de pequeños desplazamientos. El componente básico de un sensor de fuerza es un indicador de tensión, que es una pequeña espira plana de alambre conductor que cambia su resistencia cuando se ejerce fuerza sobre ella. Este indicador se coloca sobre una placa y se mide el cambio en la resistencia para determinar la tensión, debido a que ésta está directamente relacionada con la fuerza aplicada sobre la placa. El indicador de tensión se elige de tal forma que su resistencia  $r_s$  varíe linealmente en un rango de tensión admisible para el elemento extensible.



**Figura 8.1** Puente Wheatstone para el acondicionamiento de la señal.

Un indicador típico de tensión tiene un cambio de resistencia muy bajo cuando se ejerce fuerza sobre él. Los indicadores dentro del transductor de fuerza, usualmente un múltiplo de cuatro, son conectados dentro de una configuración de puente de Wheatstone, como se muestra en la figura 8.1, con la finalidad de convertir la pequeña señal de cambio en resistencia en una señal eléctrica útil. Además, algunos componentes pasivos como resistencias y cables dependientes de la temperatura, son utilizados para compensar y calibrar la señal de salida del puente. La salida de voltaje

### Sensor de fuerza

Es un dispositivo utilizado para medir la presión generada por el contacto entre dos sistemas mecánicos. La salida de un sensor de fuerza es una señal eléctrica, generalmente un voltaje, que es equivalente a la fuerza generada por el contacto.

Los sensores de fuerza se utilizan en diversas aplicaciones por ejemplo, para conocer el entorno, los seres vivos disponemos de un sistema sensorial; sin embargo, para que los robots realicen la misma acción, deben poseer sensores que les permitan saber dónde están, cómo es el lugar donde se encuentran, a qué condiciones físicas se enfrentan, dónde están los objetos con los que deben interactuar, sus parámetros físicos, etc.

De forma específica, la finalidad principal de un sensor de fuerza es mejorar la precisión de diversos procesos (industriales, médicos, etc.), dotando a un manipulador de una mayor autonomía imitando el sentido del tacto del ser humano.

Los sensores de fuerza también son utilizados en diversas aplicaciones, tales como las bolsas de aire de los automóviles, procesos de manufactura, etcétera.



### Puente de Wheatstone

Es un instrumento eléctrico de medida inventado por Samuel Hunter Christie en 1832, mejorado y popularizado por Sir Charles Wheatstone en 1843. Este circuito eléctrico está diseñado para medir elementos pasivos, principalmente resistencias desconocidas, mediante el equilibrio de los brazos del puente. Estos están constituidos por cuatro resistencias que forman un circuito cerrado, siendo una de ellas la resistencia a medir.

El puente de Wheatstone es utilizado en diversos instrumentos de medición, entre ellos, sensores de fuerza, con la finalidad de acondicionar la señal eléctrica de salida. El voltaje de salida del puente, en un sensor de fuerza, es equivalente a la fuerza de contacto entre dos sistemas mecánicos.





Una aplicación muy interesante del puente Wheatstone en la industria es como sensor de temperatura, presión, etc. Asimismo, en los sistemas de distribución de energía eléctrica, se utiliza para detectar roturas o fallas en las líneas de distribución.

es negativa para una determinada dirección de la fuerza, y positiva para la dirección opuesta. El balance de voltaje en el puente está descrito por

$$v_o = \left( \frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_s}{r_3 + r_s} \right) v_i. \quad (8.2)$$

Generalmente los sensores de fuerza utilizados en robots manipuladores son colocados en la muñeca, agregando algún elemento sobre el sensor que actúa como efector final durante la interacción con el entorno. Los rangos de medición de fuerza oscilan entre 50 y 500 N, mientras que para la medición de pares están entre 5 y 70 Nm. La resolución típica es del orden de 0.1% de la fuerza máxima y de 0.05% del par máximo, respectivamente. En cuanto al procesamiento de las señales medidas y la generación de la salida, se tiene una frecuencia en muestreo del orden de 1 kHz.

ATI Industrial Automation es el mayor proveedor de sensores de fuerza/par en el mundo. Miles de sensores de este fabricante están siendo utilizados en una gran variedad de aplicaciones tales como:

-  Verificación del ensamble de componentes mecánicos y eléctricos.
-  Procesos como desbastado, pulido y esmerilado.
-  Retroalimentación de fuerza para robots en ambientes nucleares.
-  Investigación sobre rehabilitación física y prótesis.

A continuación se describen tres modelos de sensores que son útiles para diversas aplicaciones robóticas.



#### 8.2.1 Transductor Nano17

Es uno de los sensores de 6 ejes más pequeño del mundo y está diseñado para aplicaciones en la investigación científica. Algunas de sus principales



aplicaciones son: cirugía robótica, investigación sobre manos robóticas, investigación dental e investigación sobre fuerza en dedos robóticos. Este sensor tiene un diámetro de 17 mm y una altura de 14.5 mm, y su peso aproximado es de 9 gramos.

Tabla 8.1 Características principales del sensor Nano17.

Rangos de Sensado Ejes	Calibraciones		
	SI-12-0.12	SI-25-0.25	SI-50-0.5
$f_x, f_y$ ( $\pm N$ )	12	25	50
$f_z$ ( $\pm N$ )	17	35	70
$t_x, t_y, t_z$ ( $\pm Nmm$ )	120	250	500
Resolución			
$f_x, f_y, f_z$ (N)	1/320	1/160	1/80
$t_x, t_y, t_z$ (Nmm)	1/64	1/32	1/16



### 8.2.2 Transductor Gamma

Este sensor es ampliamente utilizado en tareas de interacción de robots manipuladores tanto para aplicaciones industriales como para investigación científica. Algunas de sus principales áreas de aplicación son: control de fuerza en tiempo real, ensamblado robótico, retroalimentación háptica, pruebas automotrices, pruebas de prótesis, entre otras. Su peso es de 254 gramos, mientras que sus dimensiones son 75.4 mm de diámetro y 33.3 mm de altura.



### 8.2.3 Transductor Omega250

Este sensor es utilizado en tareas de interacción industriales, debido a su amplio rango de sensado de fuerzas y pares. Algunas de sus principales áreas de aplicación son: pruebas de productos, retroalimentación de fuerza, telerobótica, colocación y extracción de partes o componentes que requieren precisión. Su peso es de 38.1 kg, mientras que sus dimensiones



#### Transductor

A un dispositivo diseñado para transformar o convertir un determinado tipo de energía de entrada, en otra energía diferente de salida, se le denomina transductor. Su nombre indica cuál es la transformación que realiza; por ejemplo, un transductor electromecánico transforma una señal eléctrica en mecánica o viceversa. El principio físico de funcionamiento de un transductor de fuerza está regido por la tercera ley de Newton, debido a que a cada componente de fuerza aplicada sobre el transductor corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido opuesto. La fuerza ejercida sobre el transductor flexiona tres placas colocadas simétricamente y acorde con la ley de Hooke:

$$\sigma = k \cdot \varepsilon$$

donde  $\sigma$  es la presión aplicada a la placa (proporcional a la fuerza),  $k$  es el módulo de elasticidad de la placa y  $\varepsilon$  es la deformación que sufre la placa. Adicionalmente se colocan indicadores de tensión sobre las placas, los cuales transforman la tensión aplicada en un valor de resistencia eléctrica dado por:

$$\Delta r = s_a \cdot r_o \cdot \varepsilon$$

donde  $\Delta r$  es el cambio de resistencia en el indicador,  $s_a$  es un factor de tensión del indicador y  $r_o$  es la resistencia del indicador en ausencia de tensión.

Tabla 8.2 Características principales del sensor Gamma.

Rangos de Sensado Ejes	Calibraciones		
	SI-32-2.5	SI-65-5	SI-130-10
$f_x, f_y$ ( $\pm N$ )	32	65	130
$f_z$ ( $\pm N$ )	100	200	400
$t_x, t_y, t_z$ ( $\pm Nm$ )	2.5	5	10
Resolución			
$f_x, f_y$ (N)	1/160	1/80	1/40
$f_z$ (N)	1/80	1/40	1/20
$t_x, t_y, t_z$ (Nm)	1/2000	10/13333	1/800

son 260 mm de diámetro y 95 mm de altura.

Tabla 8.3 Características principales del sensor Omega250.

Rangos de Sensado Ejes	Calibraciones		
	SI-4000-500	SI-8000-1000	SI-16000-2000
$f_x, f_y$ ( $\pm N$ )	4000	8000	16000
$f_z$ ( $\pm N$ )	8000	16000	32000
$t_x, t_y, t_z$ ( $\pm Nm$ )	500	1000	2000
Resolución			
$f_x, f_y$ (N)	1	2	5
$f_z$ (N)	2	4	10
$t_x, t_y, t_z$ (Nm)	1/8	1/4	1/2



Figura 8.2 Sensores de fuerza/par ATI: Nano17, Gamma y Omega250, respectivamente.

## 8.3 Sistemas hápticos

Los dispositivos hápticos buscan aplicar el sentido del tacto a la interacción humana con sistemas informáticos y/o robóticos. Por lo general, mediante un dispositivo de entrada/salida, como una palanca de mando o guantes, se transmiten los movimientos del cuerpo del usuario. El usuario, que interactúa con un sistema háptico, puede no sólo enviar información a una computadora o a un manipulador remoto, sino que también recibe una respuesta en forma de una sensación (fuerza externa) sobre alguna parte del cuerpo.

La operación de un dispositivo háptico generalmente se basa en el siguiente ciclo: en primer lugar, el dispositivo háptico recibe y mide la entrada de su operador, la cual puede ser una posición, velocidad, aceleración, fuerza, actividad muscular, etc. Posteriormente, la entrada sensada es aplicada a un entorno virtual o teleoperado. Para un entorno virtual, el efecto de la entrada del operador sobre objetos virtuales y la respuesta subsecuente pueden ser mostradas al operador a través de modelos y algoritmos informáticos. En teleoperación, un manipulador en un entorno remoto intenta seguir la entrada dictada por el operador. Cuando el manipulador interactúa con un entorno real, la información háptica a ser transmitida al operador es registrada o estimada. Finalmente, los actuadores del dispositivo háptico son utilizados para transmitir físicamente sensaciones táctiles al operador humano. Con base en la retroalimentación háptica, ya sea a través del control humano consciente o inconsciente, o simplemente la dinámica del sistema, la entrada del operador es modificada, comenzando nuevamente el ciclo háptico.

Existe una gran variedad de dispositivos hápticos disponibles en el mercado, desde dispositivos para investigación de alta fidelidad hasta sistemas de entretenimiento de bajo costo. La mayor parte de dispositivos hápticos disponibles en el mercado están diseñados por dos empresas: Sens-

### Háptica

Estrictamente hablando, háptica significa todo aquello referido al contacto, especialmente cuando éste se usa de manera activa. Esta palabra proviene del griego hápto (tocar, relativo al tacto). Sin embargo algunos han extendido el significado de la palabra 'háptica' de manera que con ella hacen alusión por exclusión a todo el conjunto de sensaciones no visuales y no auditivas que experimenta un individuo. El sistema de percepción háptica es especial porque puede incluir los receptores sensoriales ubicados en todo el cuerpo y está estrechamente relacionado con el movimiento del cuerpo, de forma que puede tener un efecto directo sobre el mundo que está percibiendo.

Es decir, un sistema háptico permite a un usuario tocar, sentir, manipular, crear y cambiar objetos tridimensionales simulados dentro de un ambiente virtual o localizados en un entorno remoto (como en el caso de la teleoperación bilateral, realizando la función de manipulador maestro). Estos dispositivos pueden ser usados para entrenar habilidades físicas de un operador en aplicaciones que requieren instrumentos especializados (por ejemplo cirujanos, astronautas, etc.) o permitir el modelado de objetos tridimensionales sin un medio físico.



### Teleoperación

Un sistema teleoperado es aquel que permite controlar un robot *esclavo* (controlar su movimiento y la fuerza ejercida) ubicado en una zona remota (o en un entorno hostil del que haya que proteger al operador) a través de la manipulación de un robot *maestro* localizado en el sitio de trabajo del operador. Así, el movimiento del esclavo debe ser predecible a partir de los movimientos que el operador provoca en el maestro, es decir, el operador debe comprender de manera muy intuitiva cómo mover el maestro para conducir al esclavo por una determinada trayectoria y, además, realizar las labores o trabajos requeridos.

El primer teleoperador háptico desarrollado se construyó en los años cincuenta en Argonne National Laboratory, E.U., por el Dr. Raymond Goertz, el cual permitía operar remotamente sobre sustancias radiactivas. Con base en estas experiencias, el uso de una "fuerza de retorno" se ha empleado en muchos tipos de teleoperación. Específicamente, en el área médica, se cuenta con simuladores que resultan útiles en el entrenamiento del personal, con la finalidad de minimizar los daños en procedimientos invasivos; asimismo, los nuevos pilotos son entrenados mediante de vuelo virtuales.

Able Technologies e Immersion Corporation. La familia de dispositivos Phantom de la empresa SensAble Technologies es un interfaz háptico tridimensional de tipo lápiz. El Phantom Premium ha sido el dispositivo háptico más utilizado para propósitos de investigación. El alto precio de estos dispositivos restringe el desarrollo de aplicaciones comerciales. El Phantom Omni, el cual es en orden de magnitud menos caro que el Phantom Premium, ha ganado también popularidad entre los investigadores en robótica. En 2007, Novint Technologies presentó el Novint Falcon, que es un dispositivo háptico de tres grados de libertad y de menor costo que el Phantom Omni. Este dispositivo está dirigido más hacia aplicaciones de entretenimiento.





**Figura 8.3** Manipulador háptico Phantom Omni (SensAble Technologies, Inc).

El Phantom Omni (figura 8.3) es un manipulador de seis grados de libertad y cuenta con tres actuadores eléctricos para posicionar virtualmente un punto en un espacio tridimensional. Todos los grados de movimiento tienen límites físicos. Los movimientos del dispositivo háptico se pueden clasificar en dos tipos: macromovimientos y micromovimientos. Los macromovimientos sirven para lograr la traslación o posicionamiento de la muñeca, a través del movimiento del cuerpo o base, el hombro y el codo. Por otra parte, los micromovimientos sirven para la orientación del efector final (stylus). Debido a la configuración de estos tres últimos grados de libertad, la muñeca del Phantom Omni es de tipo esférica.

## 8.4 Modelado del entorno

En lo referente a los modelos del ambiente o entorno utilizados en la literatura, éstos pueden ser clasificados en dos grupos principales:

 **Entorno rígido (restringido).** La interacción mecánica entre el robot y un entorno rígido incluye los modelos matemáticos para impacto, contacto, fricción de Coulomb y las restricciones asociadas.

 **Entorno dócil (compliant).** Para precisar los aspectos fundamentales del control de interacción, es conveniente recurrir a un modelo simple pero significativo del contacto. Para este propósito, es considerado un entorno elástico dócil desacoplado el cual está descrito por el modelo

$$\mathbf{f}_e = K_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \quad (8.3)$$

con una rigidez de la superficie  $K_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Esta relación lineal entre fuerza y deformación representa una primera aproximación al modelado de la interacción robot-entorno. Investigando la dinámica de interacción, Hogan llegó a la conclusión de que el entorno puede ser modelado como un sistema masa-resorte-amortiguador generalizado.

## 8.5 Control de fuerza

En algunas aplicaciones es deseable controlar con precisión la fuerza de contacto, lo que hace necesario el uso de esquemas de control que permitan especificar una fuerza de interacción deseada. Un sistema de control directo de fuerza requiere la adopción de una acción estabilizante de control PD (Proporcional-Derivativo) del error de fuerza. Debido a que las mediciones de fuerza suelen contener altos niveles de ruido, la acción derivativa pudiera no ser implementada en la práctica, por lo que se requiere de un

### Tipos de entorno

Un robot por definición es una máquina capaz de interactuar con su entorno, esto es, debe ser capaz de adaptar sus movimientos y sus acciones de interacción con base en las características físicas de los ambientes con los que se encuentra y los objetos que hay en ellos. Para lograr esta capacidad de adaptación, lo primero que necesitan los robots es tener conocimiento del entorno.

Los modelos de entorno descritos en la literatura pueden ser clasificados de la siguiente manera:

**Entorno rígido:** es aquél que impone restricciones cinemáticas y dinámicas, cuando el efector final de un manipulador entra en contacto con él, limitando el movimiento en algunas direcciones. Existen diversos fenómenos físicos que imponen este tipo de restricciones, entre ellos, el impacto y la fricción.

**Entorno dócil:** es aquél que permite una interacción con el efector final del manipulador, debido a que posee un cierto grado de deformabilidad o flexibilidad. El desplazamiento del efector final permitido por este entorno se considera infinitesimal. En general, este entorno puede ser modelado a través de la selección de los parámetros de rigidez, amortiguamiento e inercia.



### Control de fuerza

Consiste en lograr que el efector final de un manipulador aplique un nivel de fuerza deseado durante una tarea de interacción con su entorno. Es decir, una estrategia de control de la fuerza es la que modifica las trayectorias de posición del efector final del robot con base en la fuerza detectada logrando, de esta forma, controlar la interacción entre el robot y su entorno.

El control de fuerza es una tecnología que ha sido desarrollada para llenar un vacío en los procesos de manufactura automatizados, tales como: maquinado, fundición, forjado o moldeado, entre otros. Estos procesos suelen responder a ciertas especificaciones dimensionales, pero además requieren de un proceso adicional para lograr un acabado deseado de la superficie. El uso de control de fuerza en estos procesos industriales permite obtener el resultado deseado.

La retroalimentación y el control de la fuerza es una condición obligatoria para lograr un comportamiento robusto y versátil de un sistema robótico en entornos poco o no estructurados, así como para lograr un funcionamiento seguro y confiable de un robot ante la presencia de los seres humanos.

adecuado amortiguamiento de los términos de velocidad. En consecuencia, un sistema de control de fuerza no se basa sólo en mediciones de fuerza sino también en mediciones de velocidad, y eventualmente de posición. Es importante señalar que una estrategia de control de fuerza tiene sentido solamente en aquellas direcciones del espacio de tarea a lo largo de las cuales existen fuerzas de interacción entre el manipulador y su entorno.

Se pueden derivar diversos esquemas de control de interacción a partir del concepto de control por dinámica inversa, simplemente incluyendo la medición o sensado de las fuerzas y/o pares generados por la interacción entre el robot y su entorno. Por lo tanto, las entradas de control para el robot se eligen como

$$\tau = M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{a} - \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}}) + J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e \quad (8.4)$$

donde la nueva entrada de control  $\mathbf{a}$  se selecciona para que cumpla los requerimientos de la tarea de interacción que debe desempeñar el manipulador. Sustituyendo la ley de control (8.4) en el modelo dinámico se tiene que

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}, \quad (8.5)$$

es decir, que (8.4) es una ley de control linealizante que lleva al sistema a una forma de doble integrador.



#### 8.5.1 Control de fuerza con lazo interno de posición

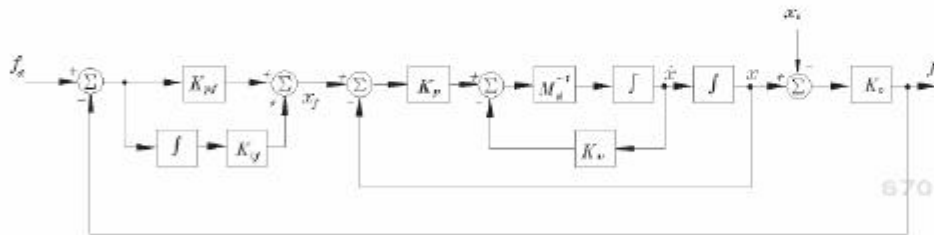
Considerando un controlador de posición PD y la ley de control por dinámica inversa (8.4), se puede diseñar un controlador de fuerza con lazo interno de posición dado por

$$\mathbf{a} = M_d^{-1} [K_p(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}) - K_v\dot{\mathbf{x}}] \quad (8.6)$$

donde la posición de referencia  $\mathbf{x}_f$  está relacionada al error de fuerza con una acción de control proporcional-integral de tal forma que:

$$\mathbf{x}_f = K_{pf}(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) + K_{if} \int_0^t (\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) d\tau \quad (8.7)$$

donde  $K_{pf} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $K_{if} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son las matrices diagonales de ganancias proporcionales e integrales, cuya sintonía permite lograr que el error de fuerza  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e$  tienda a cero conforme el tiempo evoluciona. La fuerza deseada  $\mathbf{f}_d \in \mathbb{R}^m$  es considerada una referencia constante.



**Figura 8.4** Diagrama a bloques del control de fuerza con lazo interno de posición.

Sustituyendo (8.6) en (8.5) se obtiene que la dinámica del sistema de lazo cerrado está dada por:

$$M_d \ddot{\mathbf{x}} + K_v \dot{\mathbf{x}} + K_p \mathbf{x} = K_p \mathbf{x}_f, \quad (8.8)$$

donde las matrices diagonales  $M_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$  representan la inercia deseada, la ganancia derivativa y la ganancia proporcional, respectivamente. Estas matrices son los parámetros de sintonía que permiten hacer que la posición  $\mathbf{x}$  del efector final alcance la posición de referencia  $\mathbf{x}_f$ .



### 8.5.2 Control de fuerza: lazo interno de velocidad

Un control de fuerza con lazo interno de velocidad puede obtenerse si se considera el lazo de retroalimentación de posición abierto, así se obtiene que  $\mathbf{x}_f$  representa ahora una velocidad de referencia. Entonces la ley de control se diseña de tal forma que:

$$\mathbf{a} = M_d^{-1} [K_p \mathbf{x}_f - K_v \dot{\mathbf{x}}] \quad (8.9)$$

donde  $x_f$  se puede elegir como una acción proporcional dada por

$$x_f = K_{pf}(f_d - f_e). \quad (8.10)$$

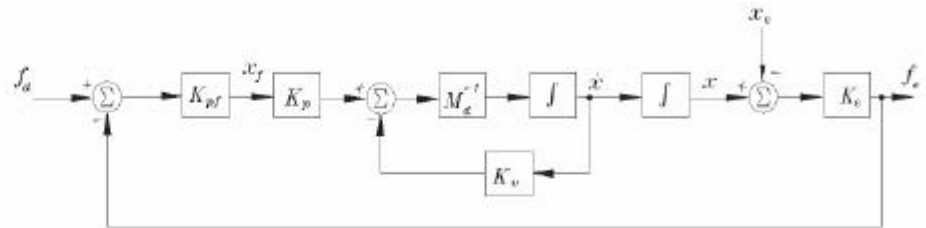


Figura 8.5 Diagrama a bloques del control de fuerza con lazo interno de velocidad.

### ♣ Ejemplo 8.1



#### Sistema robótico controlado por fuerza

En la página web del libro se encuentra el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del sistema robótico de un grado de libertad controlado por fuerza. El programa de simulación está compuesto de dos scripts, el primero corresponde al código del solucionador de la ecuación diferencial y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente a la ecuación diferencial que representa la dinámica del robot y el control de fuerza con lazo interno de velocidad.

El modelo dinámico de un sistema robótico cartesiano de un grado de libertad está dado por

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} [f - f_e - b\dot{x}] \quad (8.11)$$

donde  $m = 2,351$  kg representa la masa,  $b = 2,288$  N·s/m corresponde al coeficiente de fricción viscosa,  $f$  es la fuerza de control aplicada y  $f_e$  la fuerza de interacción con el entorno. Para este sistema se desea regular la interacción con el entorno, del tipo (8.3) con rigidez de 1000 N/m, a un valor deseado de fuerza de 50 N.

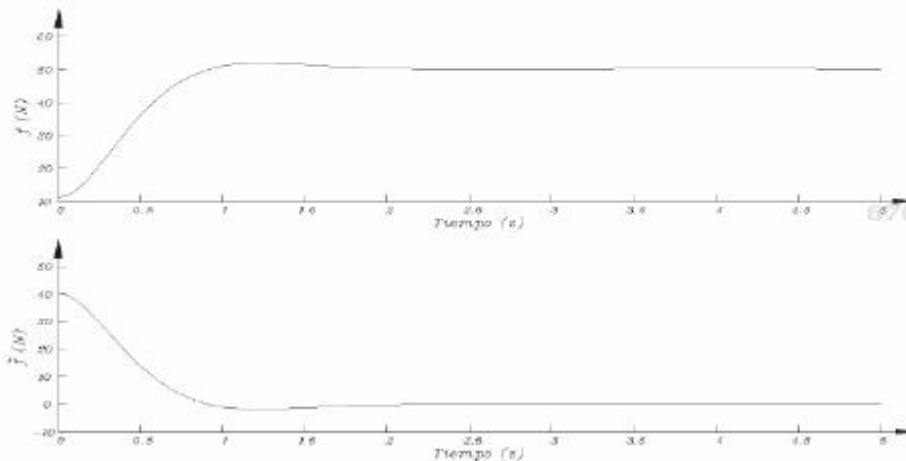
### Solución

Para el control del sistema se utilizó un controlador de fuerza con lazo interno de velocidad y fue simulado numéricamente en MatLab.

Los resultados obtenidos en la simulación se presentan en la figura 8.6. En la gráfica superior se ve el comportamiento de la fuerza aplicada y se



aprecia su convergencia hacia el valor deseado de 50 N. Por otra parte, el error de fuerza tiende a cero conforme el tiempo evoluciona, tal y como se presenta en la parte inferior de la figura, cumpliendo con la tarea de interacción requerida.



**Figura 8.6** Fuerza aplicada y error de fuerza, obtenidos mediante el uso de control de fuerza en un sistema de un grado de libertad.



## 8.6 Control híbrido de fuerza/posición

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El control híbrido de fuerza/posición puede entenderse como una estrategia de planeación de tareas y una técnica de control, en la cual se especifican fuerzas deseadas en aquellas direcciones del espacio de tarea en las cuales el movimiento del efector final está restringido por el entorno, y una trayectoria deseada en las otras direcciones. Por lo tanto, el espacio de tarea es dividido en un subespacio de control de posición y un subespacio de control de fuerza. El control híbrido a nivel articular es fácil de implementar, pero difícilmente corresponde a la naturaleza de la tarea debido a que las articulaciones seleccionadas que proveen la posición y la fuerza no corresponden uno-a-uno con las direcciones restringidas y sin restricción en el espacio de tarea del robot manipulador. Khatib propuso una variante al control híbrido basada en una descripción de la dinámica del

### Control híbrido de fuerza/posición

Es un enfoque de control directo de fuerza que resuelve los problemas de posicionamiento y regulación de fuerza de manera simultánea. Recibe el nombre de control híbrido debido a que se mezcla dentro de un mismo esquema el control de fuerza y el de posición.

La principal limitante de este enfoque de control es que la tarea debe dividirse de acuerdo a las direcciones del espacio en que se desea cumplir con alguno de los dos objetivos de control. Es decir, el control de posición se aplica en una determinada dirección, mientras que el control de fuerza en la dirección o direcciones restantes.

Para superar el problema que presenta el esquema de control híbrido, se utiliza el control paralelo de fuerza/posición el cual combina las características del control de rigidez y el control de fuerza. En este caso, los lazos de posición y fuerza son cerrados en todas las direcciones del espacio de tarea, donde las propiedades estructurales de los controladores aseguran que una asignación apropiada del valor de fuerza de referencia se alcanza en estado estacionario. Así, los dos lazos no están desacoplados; un inconveniente del control paralelo son las perturbaciones mutuas de las variables de posición y fuerza antes de que el estado estacionario se alcance.

robot manipulador vista desde el efector final, la llamada formulación en espacio operacional o de tarea. Esta representación es válida excluyendo las configuraciones singulares en el espacio de tarea.

Debido a que el controlador de posición debe controlar algunas direcciones o grados de libertad y el control de fuerza regulará las restantes, esta estrategia de control es adecuada para tareas donde el comportamiento es predecible. La estructura de un controlador híbrido es la siguiente

$$\tau = J^T(\mathbf{q}) [K_f S(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) + K_p(I - S)(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) - K_v \dot{\mathbf{x}}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (8.12)$$

donde  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal formada por 1's y 0's, que sirve para especificar las direcciones que deben controlarse por fuerza y las que deben controlarse por posición.

Las direcciones correspondientes a los elementos de  $S$  que son 1's se controlan por fuerza y por ende las restantes son controladas por posición, mientras que  $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$  representa una matriz identidad, los parámetros del controlador  $K_f \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$  representan las ganancias proporcionales de fuerza y posición, respectivamente; por otro lado,  $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$  corresponde a la ganancia derivativa relacionada a la velocidad del efector final del robot.

### ♣♣ Ejemplo 8.2

Considérese el manipulador de 5 barras tipo SCARA de dos grados de libertad que se muestra en la figura 8.7, cuya tarea de interacción consiste en el seguimiento de una trayectoria recta aplicando una fuerza de 10 N sobre una superficie plana ubicada dentro de su espacio de trabajo.

Simular el proceso de interacción del robot sobre la superficie plana.

## Solución

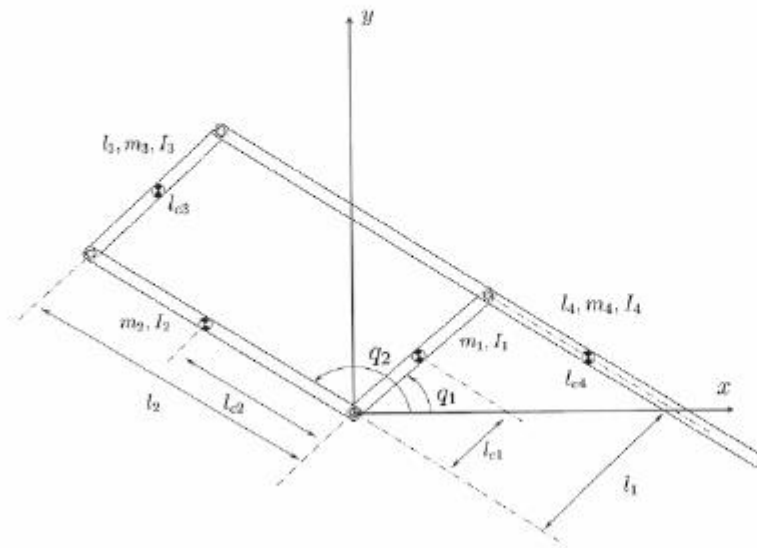


Figura 8.7 Manipulador de 5 barras tipo SCARA de dos grados de libertad.

El comportamiento del robot fue simulado numéricamente utilizando MatLab, para tal propósito el modelo dinámico fue reescrito como

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}})]. \quad (8.13)$$

Para limitar los pares aplicados al robot manipulador se consideraron los límites de saturación de ambos actuadores como 7,86 Nm. Con la finalidad de simular la interacción con el entorno, se considera una superficie en  $y_e = -0,4$  m desde el origen, la cual ejerce una fuerza a lo largo del eje  $y$ . Un entorno elástico (8.3) con una rigidez de  $K_e = \text{diag}\{1500\}$  N/m se simuló con la finalidad de generar la fuerza de interacción. Para realizar esta tarea de interacción se utilizó el control híbrido de fuerza/posición.

En la parte superior de la figura 8.8 se presenta el movimiento del manipulador, en términos de la trayectoria deseada y la trayectoria actual del efector final. Es posible observar que la trayectoria deseada es seguida correctamente por el efector final manteniéndose en contacto con la superficie ubicada en  $y = -0,4$  m. Por otra parte, la fuerza generada por la interacción entre el manipulador y el entorno, se presenta en la

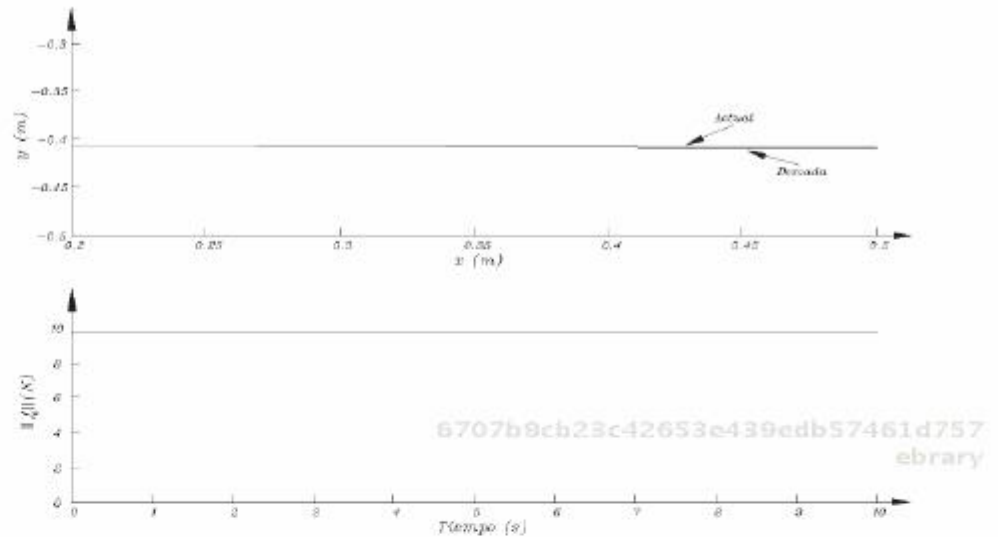
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



### Robot manipulador SCARA

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot manipulador SCARA de cinco barras y dos grados de libertad controlado por fuerza/posición. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados, mientras que el segundo es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la dinámica del robot y el controlador de híbrido de fuerza/posición. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del manipulador durante el desarrollo de la tarea de interacción.





**Figura 8.8** Trayectoria sobre el plano y fuerza de interacción, obtenidas mediante el uso de control híbrido de fuerza/posición.

parte inferior de la misma figura. Puede apreciarse que, durante la interacción con el entorno, la fuerza de contacto es regulada al valor deseado de 10 N. Por lo tanto, se verifica que la tarea de interacción descrita con anterioridad es llevada a cabo correctamente por el manipulador. Las ganancias sintonizadas fueron  $K_p = \text{diag}\{50000\}$  N/m,  $K_f = \text{diag}\{50\}$  y  $K_v = \text{diag}\{5000\}$  N·s/m.

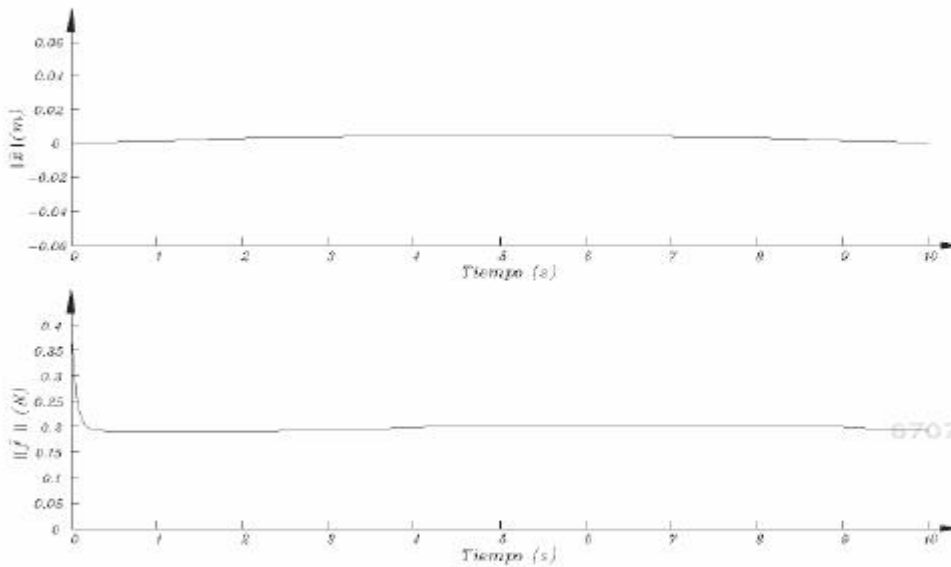
La figura 8.9 permite verificar que, haciendo uso del control híbrido, el error de seguimiento  $\tilde{x}$  y el error de fuerza  $\tilde{f}$  tienden a cero, logrando que el manipulador realice un correcto seguimiento de la trayectoria deseada y aplique el nivel de fuerza deseado durante la interacción.



## 8.7 Control de impedancia

La idea original acerca del control de impedancia propuesta por Hogan, tiene hoy en día diversas interpretaciones. Usualmente, el objetivo de control consiste en ocasionar que el efector final del robot responda a fuerzas





**Figura 8.9** Errores de posición y fuerza, respectivamente, obtenidos mediante el uso de control de híbrido de fuerza/posición.

aplicadas externamente, de acuerdo con alguna dinámica bien definida. Específicamente, la relación dinámica deseada entre la posición del efector final  $\mathbf{x}$ , la trayectoria de referencia  $\mathbf{x}_d$  y el vector de fuerzas de contacto  $\mathbf{f}_e$  está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + \mathbf{B}_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{M}_d(\ddot{\mathbf{x}}_d - \ddot{\mathbf{x}}) \quad (8.14)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

donde  $\mathbf{K}_d$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{B}_d$  es la matriz de amortiguamiento y  $\mathbf{M}_d$  es la matriz de inercia. Estos parámetros caracterizan la impedancia  $Z_d$  de la relación (8.14), la cual es dada en el dominio de la frecuencia por

$$Z_d = \mathbf{K}_d + \mathbf{B}_d s + \mathbf{M}_d s^2. \quad (8.15)$$

Los parámetros de impedancia  $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{k_d\}$ ,  $\mathbf{B}_d = \text{diag}\{b_d\}$  y  $\mathbf{M}_d = \text{diag}\{m_d\}$  pueden seleccionarse de acuerdo con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_d + k_e}{m_d}} \quad (8.16)$$

$$\zeta = \frac{b_d}{2\sqrt{m_d(k_d + k_e)}} \quad (8.17)$$

### Control de impedancia

Es la principal técnica de control indirecto de fuerza y consiste en regular la interacción haciendo uso de la relación de impedancia entre la fuerza aplicada y los errores en el posicionamiento.

La idea principal de este enfoque consiste en generar un sistema de lazo cerrado del tipo masa-resorte-amortiguador, con la finalidad de que el efector final del manipulador responda a la interacción dinámica con el entorno de acuerdo con la selección de los parámetros de rigidez  $K_d$ , amortiguamiento  $B_d$  e inercia  $M_d$ . El control de impedancia ha sido implementado en muchas formas. En su forma más simple puede ser considerado una generalización de los esquemas de control de amortiguamiento y rigidez. De esta manera, es esencialmente un controlador de posición PD, con ganancias de retroalimentación de posición y velocidad ajustadas para obtener impedancias aparentes diferentes.

Considerando el potencial que brinda el control de impedancia en tareas de manipulación que involucren la interacción del robot con su entorno, la rehabilitación neurológica surge como una de sus principales áreas de aplicación. En particular el control de la relación entre fuerza y posición en ortesis robóticas ha mostrado la eficiencia del control de impedancia.



### 8.7.1 Control de impedancia con base en par

En el enfoque de control de impedancia con base en par, la ecuación del comportamiento deseado (8.14) puede ser restringida a la especificación de la aceleración deseada del efector final

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_d + M_d^{-1} [K_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + B_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_e]. \quad (8.18)$$

La ley de control completa puede ser obtenida por la sustitución de (8.18) en (8.5), por lo tanto el vector de pares aplicados está dado por

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\{\ddot{\mathbf{x}}_d + M_d^{-1}[K_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + B_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_e] - \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e. \quad (8.19)$$

### ♣♣♣ Ejemplo 8.3

Considérese nuevamente el robot cartesiano (8.11) de un grado de libertad, el cual interactúa con un entorno de rigidez de 10000 N/m. Se desea regular el sistema mediante control de impedancia, generando tres comportamientos dinámicos para los casos subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ), críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ) y sobre amortiguado ( $\zeta > 1$ ).

### Solución

Se utilizó el esquema de control de impedancia con base en par y el sistema robótico fue simulado en MatLab. Los resultados de la simulación

corresponden a las fuerzas aplicadas y las trayectorias generadas para cada uno de los casos de amortiguamiento. En la figura 8.10 se pueden apreciar las trayectorias obtenidas y se observa claramente la diferencia para los tres factores de amortiguamiento utilizados: 0,2 (subamortiguado), 1 (críticamente amortiguado) y 2 (sobre amortiguado).

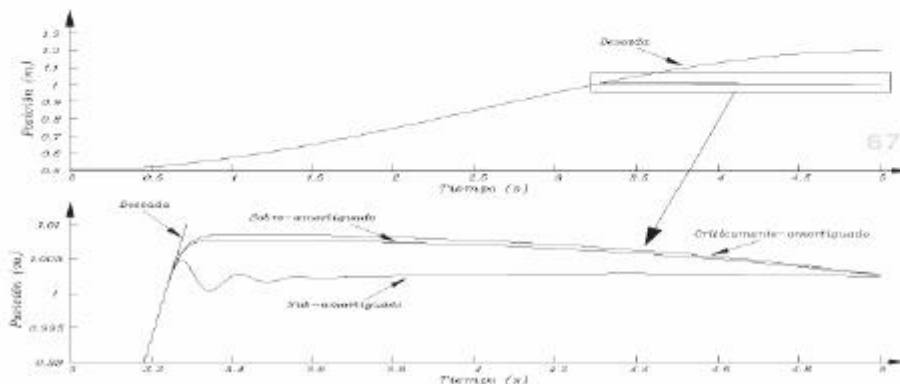


Figura 8.10 Trayectorias sobre el plano obtenidas mediante el uso de control de impedancia con base en par.

Por otra parte, en la figura 8.11 se presentan las fuerzas generadas por la interacción con el entorno. En la figura se distinguen con claridad los tres diferentes comportamientos dinámicos obtenidos mediante la selección de los parámetros de impedancia. Estos resultados permiten verificar la importancia del control de impedancia en tareas de interacción para generar diferentes comportamientos dinámicos de un sistema robótico.



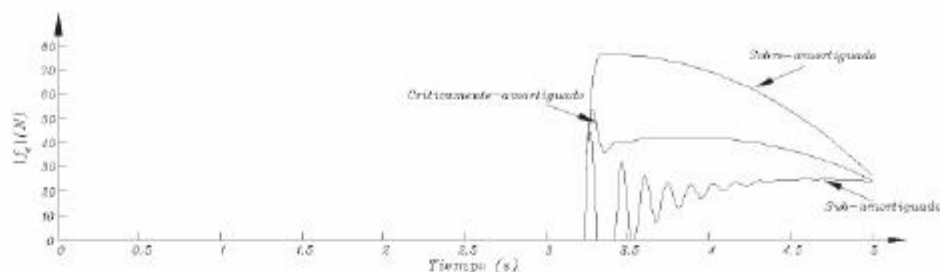
### 8.7.2 Control de impedancia con base en posición

En el enfoque con base en posición, las fuerzas y pares son sensados explícitamente por medio de un sensor de fuerza/par ubicado en la muñeca del manipulador y los comandos de posición se emplean en el lazo interno del controlador. En particular, se crea un vector de ajuste de posición  $x_a$



#### Robot cartesiano de 1 gdl

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot cartesiano de un grado de libertad controlado por impedancia. El programa de simulación está compuesto de dos scripts principales, el primero corresponde al código del solucionador de la ecuación diferencial y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente a la ecuación diferencial que representa la dinámica del robot, el controlador de impedancia y una animación que muestra el movimiento del robot durante la tarea de interacción.



**Figura 8.11** Fuerzas obtenidas mediante el uso de control de impedancia con base en par.

mediante el filtrado de las fuerzas de interacción medidas para satisfacer

$$\mathbf{f}_e = K_d \mathbf{x}_a + B_d \dot{\mathbf{x}}_a + M_d \ddot{\mathbf{x}}_a \quad (8.20)$$

a través de

$$\mathbf{x}_a(s) = (K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e(s). \quad (8.21)$$

Con la simplificación de que  $K_d$ ,  $B_d$  y  $M_d$  sean diagonales, esto se reduce a un filtro pasa bajas de cada componente de la fuerza  $\mathbf{f}_e$  para generar cada componente de  $\mathbf{x}_a$ . El ajuste  $\mathbf{x}_a$  se resta a la trayectoria de posición deseada para generar

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_a. \quad (8.22)$$

Se puede observar que cuando no existe contacto con el entorno,  $\mathbf{f}_e = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_d$ . Si al controlar el manipulador se logra el correcto posicionamiento, es decir  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ , entonces

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (8.23)$$

y por ende (8.20) y (8.21) satisfacen la impedancia deseada especificada por (8.14) y (8.15).

Este enfoque permite un control de posición preciso dentro del lazo de control de impedancia, haciéndolo atractivo para su uso en manipuladores industriales, debido a que están diseñados como dispositivos de

posicionamiento preciso (o al menos repetitivo). Sin embargo, sufre la incapacidad de proveer impedancias muy “suaves”, es decir, rigidez y amortiguamiento pequeños. Generalmente sería deseable en casos donde se requiere control de posición articular rígido, es decir un control de posición con mayor seguridad o un correcto posicionamiento en algunas direcciones cartesianas. Por lo tanto, puede utilizarse una ley de control de posición cartesiana PD con compensación de gravedad, tomando como posición de referencia deseada a  $\mathbf{x}_c$ .



### 8.7.3 Enfoque alternativo al control de impedancia

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Este enfoque de control de impedancia corresponde a una generalización del control de movimiento en el espacio de tarea cartesiano, eligiendo una trayectoria deseada  $\mathbf{x}_d$ . Éste trata de mantener la siguiente relación dinámica, similar a (8.14),

$$\mathbf{x}_d - \mathbf{x} = (K_s + B_s s + M_s s^2)^{-1} \mathbf{f}_e \quad (8.24)$$

donde  $s = \frac{d}{dt}$  denota el operador diferencial y  $K_s$ ,  $B_s$  y  $M_s \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$  son matrices diagonales, obteniendo que  $(K_s + B_s s + M_s s^2)^{-1}$  es un filtro estable lineal multivariable de segundo orden.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Definiendo el error de impedancia  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^m$  como

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\mathbf{x}} - (K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e \quad (8.25)$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$ . Formalmente, el objetivo de este enfoque al control de impedancia consiste en seleccionar  $\boldsymbol{\tau}$  de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{0} \quad (8.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}(t) = \mathbf{0}. \quad (8.27)$$

Es importante notar que en ausencia de contacto, es decir  $\mathbf{f}_e \equiv \mathbf{0}$ , este objetivo de control equivale al del control de movimiento en espacio cartesiano. Por lo tanto, el control de impedancia puede verse como un control

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



de movimiento permitiendo la tolerancia de errores en el seguimiento de la trayectoria deseada en presencia de fuerzas de interacción.

Considerando la definición del error de impedancia (8.25), los vectores

$$\dot{\tilde{\xi}} = \dot{x}_d - \dot{x} - s(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e \quad (8.28)$$

$$\ddot{\tilde{\xi}} = \ddot{x}_d - \ddot{x} - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e \quad (8.29)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

denotarán la primera y segunda derivadas respecto del tiempo del error de impedancia, respectivamente.

Con la finalidad de resolver el problema de control de impedancia se propone

$$a = \ddot{x}_d - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e + M_d^{-1}[\nabla U(K_p, \tilde{\xi}) + K_v \dot{\tilde{\xi}}] \quad (8.30)$$

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de ganancias proporcionales y  $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de ganancias derivativas, ambas diagonales y definidas positivas. Entonces, eligiendo  $a$  como (8.30) y considerando la derivada temporal (8.29), se obtiene la siguiente ecuación de lazo cerrado combinando el modelo del robot y el esquema de control (8.4)

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}} \\ \ddot{\tilde{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}} \\ -M_d^{-1}[\nabla U(K_p, \tilde{\xi}) + K_v \dot{\tilde{\xi}}] \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

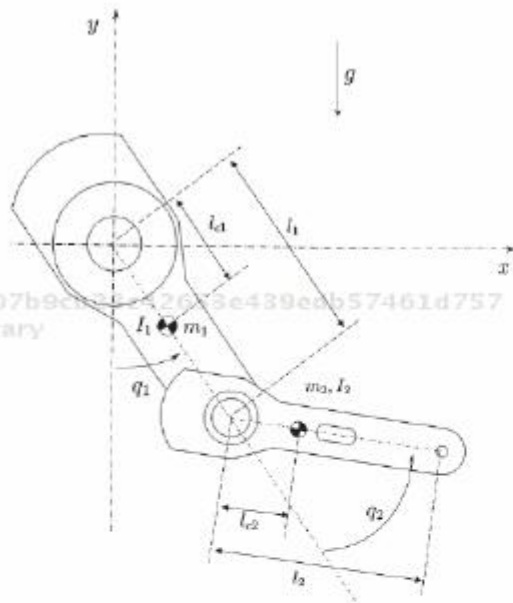
El término  $\nabla U(K_p, \tilde{\xi})$  es el gradiente de una función artificial de energía potencial que representa la acción proporcional del controlador, mientras el término derivativo  $K_v \dot{\tilde{\xi}}$  se incluye para obtener un movimiento amortiguado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

### ♣♣♣ Ejemplo 8.4

Considérese el manipulador serial de dos grados de libertad que se muestra en la figura 8.12. La tarea encomendada al manipulador consiste en realizar el seguimiento de una trayectoria preestablecida durante la ausencia de contacto con su entorno. Mientras que, ante la presencia de fuerzas externas, el manipulador debe seguir la trayectoria impuesta por el entorno, regulando las fuerzas de contacto para lograr un seguimiento adecuado.

### Solución



Parámetro	Notación
Longitud del eslabón 1	$l_1$
Masa del eslabón 1	$m_1$
Centro de gravedad del eslabón 1	$l_{1c1}$
Inercia del eslabón 1	$I_1$
Posición de la articulación 1	$q_1$
Longitud del eslabón 2	$l_2$
Masa del eslabón 2	$m_2$
Centro de gravedad del eslabón 2	$l_{2c2}$
Inercia del eslabón 2	$I_2$
Posición de la articulación 2	$q_2$
Aceleración de la gravedad	$g$

Figura 8.12 Robot manipulador de dos grados de libertad.

El comportamiento del robot fue simulado numéricamente utilizando MatLab. Con este propósito el modelo fue reescrito como (8.13) y se consideraron los límites de saturación de los actuadores como 150 y 15 Nm para el hombro y codo, respectivamente. Para simular la interacción con el en-



### Robot manipulador de 2 gdl

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot manipulador de 2 gdl controlado por impedancia. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la dinámica del robot y el controlador de impedancia. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del robot manipulador durante el desarrollo de la tarea de interacción.

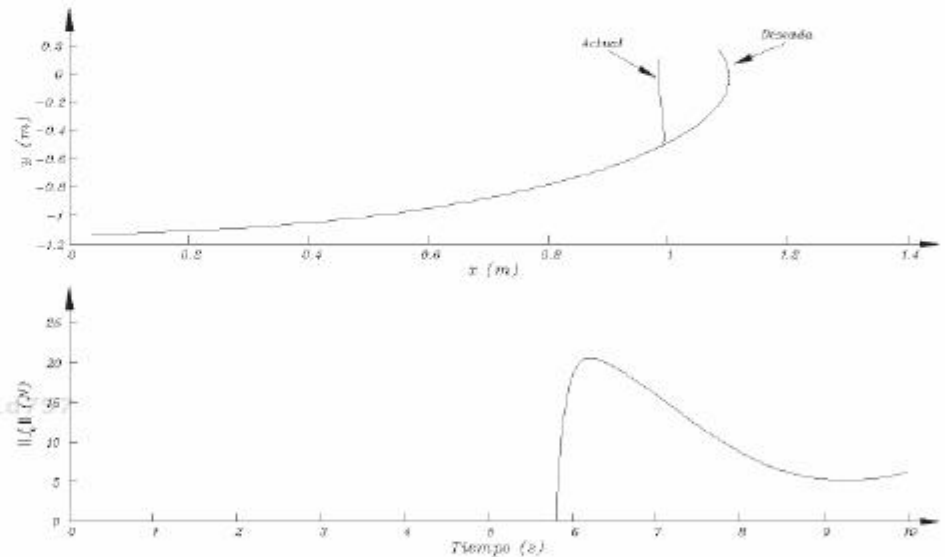


torno, se colocó una pared vertical en  $x_e = 0,98$  m desde el origen, la cual ejerce una fuerza a lo largo del eje  $x$  y obstruye el movimiento deseado del efector final imponiendo una trayectoria vertical sobre la superficie. Se considera un entorno elástico (8.3) con una rigidez de la superficie de  $K_e = \text{diag}\{1200\}$  N/m.

El control de esta tarea de interacción se realizó con la estructura de control (8.30) considerando

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_d - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e + M_d^{-1}[K_p \tanh(\xi) + K_v \xi], \quad (8.32)$$

la cual se puede denominar control de impedancia Tanh-D.



**Figura 8.13** Trayectoria sobre el plano y fuerza de interacción, obtenidas mediante el uso de control de impedancia.

Los resultados de simulación correspondientes al uso de control de impedancia se muestran en la figura 8.13. En la parte superior de la figura 8.13 se presentan el movimiento del manipulador, en términos de la trayectoria deseada y la trayectoria actual del efector final utilizando el controlador Tanh-D. Es posible observar que la trayectoria deseada es seguida correctamente por el efector final hasta que encuentra la pared y ésta le

impone una trayectoria vertical en  $x = 0,98$  m. Durante la interacción con la pared las fuerzas de contacto son reguladas por los parámetros de impedancia, los cuales fueron seleccionados como:  $K_d = \text{diag}\{60\}$  N/m,  $B_d = \text{diag}\{150\}$  N·s/m y  $M_d = \text{diag}\{2\}$  kg. Las fuerzas generadas por la interacción entre el manipulador y la pared se presentan en la parte inferior de la figura 8.13. La regulación de las fuerzas depende de la selección de los parámetros de impedancia y, para las condiciones propuestas, estas fuerzas son menores a 25 N. Por lo tanto, se verifica que la tarea de interacción descrita con anterioridad se lleva a cabo correctamente por el manipulador. Las ganancias sintonizadas fueron  $K_p = \text{diag}\{60\}$  N/m y  $K_v = \text{diag}\{6\}$  N·s/m.

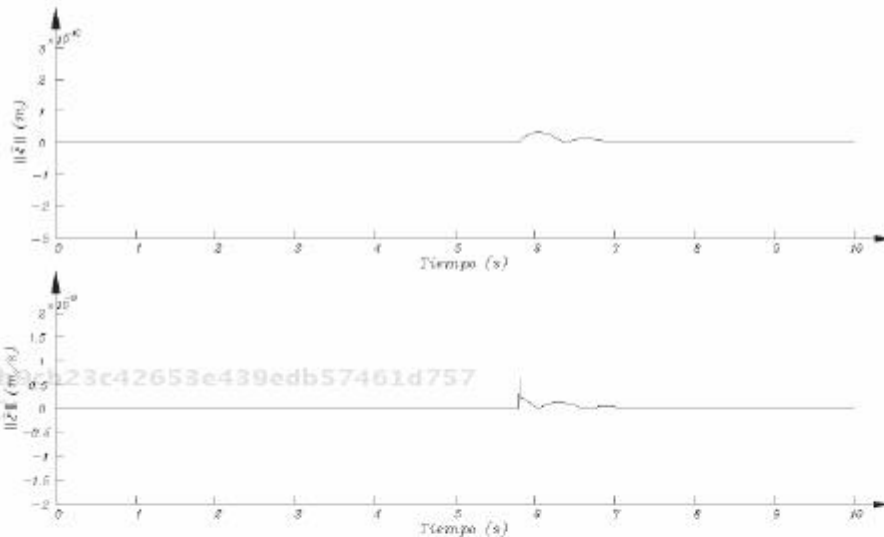


Figura 8.14 Error de impedancia  $\tilde{\xi}$  y su derivada respecto al tiempo  $\dot{\tilde{\xi}}$ , respectivamente, obtenidos mediante el uso de control de impedancia.

La figura 8.14 permite verificar que, haciendo uso del control Tanh-D, el error de impedancia  $\tilde{\xi}$  y su derivada  $\dot{\tilde{\xi}}$  tienden a cero, acorde con el objetivo de control de impedancia definido en las ecuaciones (8.26)-(8.27).



## 8.8 Aplicaciones

### Aplicaciones

En las últimas décadas han surgido investigaciones dentro del área de la interacción humano-robot, por ejemplo: teleoperación bilateral, máquinas de ejercicio inteligentes, robots para rehabilitación, tareas industriales de guiado activo, etc. Un robot manipulador equipado con sensores de fuerza y esquemas de control de impedancia permite la asistencia a personas con capacidades diferenciadas, problemas o atrofas musculares; asimismo, permite a un especialista ampliar sus conocimientos, obtener mejores diagnósticos y selección de rutinas terapéuticas óptimas y eficientes para el paciente, lo que lleva a un rápido proceso de recuperación, logrando los resultados esperados en menor tiempo. De esta forma las expectativas de vida del paciente se amplían.

Las aplicaciones de la robótica siguen aumentando en número a medida que hay avances en los materiales, en el software de control, una mayor robustez y la disminución en el tamaño de los sensores y actuadores, lo que permite a los diseñadores intentar nuevas formas de utilizar la tecnología mecatrónica para promover el bienestar de las personas con discapacidad.

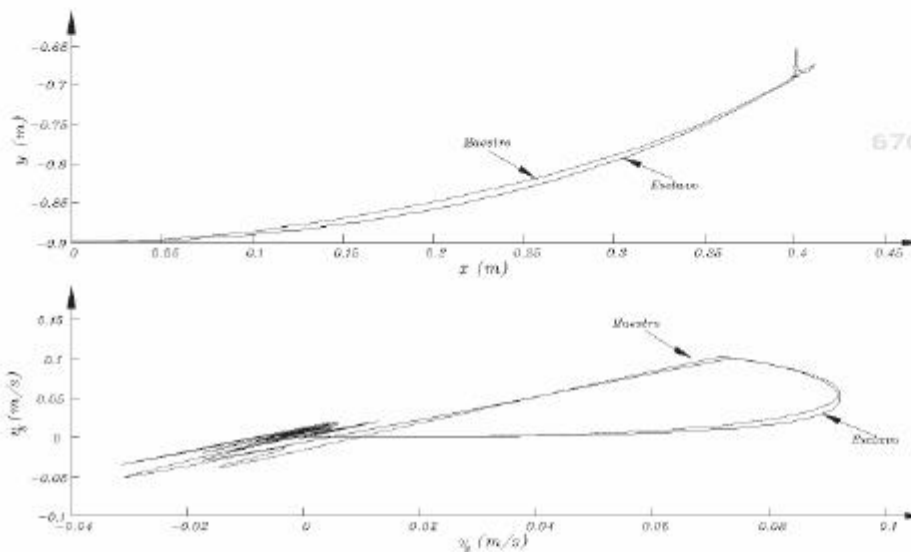
El control de interacción ha sido ampliamente utilizado en diversas tareas que involucren el contacto entre un manipulador y su entorno. Específicamente, el control de impedancia representa una estrategia muy relevante en tareas de interacción humano-robot, obteniéndose excelentes resultados en tareas de fisioterapia asistida por robots. Por otra parte, el control de sistemas robóticos en forma remota o teleoperación, se ha convertido en un tema de gran interés para la comunidad científica, debido a la posibilidad de extender el impacto de los avances logrados en control a una gran cantidad de sectores de la sociedad. Recientemente, la teleoperación ha sido utilizada durante las misiones de exploración en Marte, cirugías asistidas por robots, en zonas de guerra y además se pretende extender su uso a terapias robóticas de rehabilitación neurológica.

Un sistema de teleoperación o teleoperador consta de un par de robots manipuladores conectados en tal forma que permite a un operador manejar un manipulador (el maestro) para operar en un entorno remoto (vía el esclavo). Cuando la información, sobre todo posiciones y velocidades, fluye únicamente desde el maestro hacia el esclavo, se dice que la configuración del teleoperador es unilateral. Para mejorar el desempeño de una tarea de teleoperación, la fuerza de contacto entre el manipulador esclavo y el entorno puede ser reflejada hacia el manipulador maestro. Agregar retroalimentación de fuerza al sistema provee una mejora considerable en el desempeño de tareas complejas y, en este caso, suele denominarse sistema de teleoperación bilateral. La meta deseada para el manipulador esclavo es seguir el comportamiento del maestro con respecto a la fuerza, posición y velocidad.

Tradicionalmente, los esquemas de teleoperación bilateral incluyen controladores de velocidad como lo son el PD o PI. De acuerdo a lo presentado en el presente capítulo, se sabe que estos controladores clásicos funcionan adecuadamente cuando un manipulador trabaja en espacio li-



bre, sin embargo presentan muchas limitaciones al ser utilizados en tareas de interacción debido a que las fuerzas de contacto no son reguladas correctamente. Con la finalidad de mejorar el desempeño de un teleoperador en tareas de interacción, se hace uso del control de impedancia dentro del esquema de teleoperación.

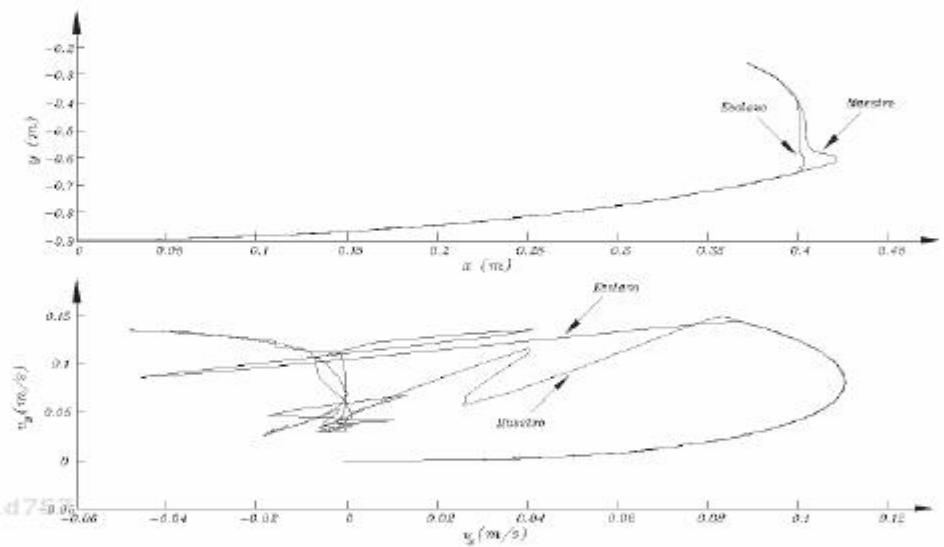


**Figura 8.15** Trayectorias y velocidades de una tarea de interacción teleoperada, empleando control PD.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Los resultados de simulación de una tarea de interacción teleoperada se presentan en las figuras 8.15-8.16. En ellas se muestra el movimiento de los manipuladores maestro y esclavo en términos de las trayectorias y velocidades del efector final. Cuando se utiliza un control PD, como se aprecia en la figura 8.15, se obtiene un pobre seguimiento tanto de posición como de velocidad, en comparación con los resultados presentados en la figura 8.16, donde la trayectoria del maestro es seguida adecuadamente por el efector final del esclavo hasta que éste encuentra la pared y le impone una trayectoria vertical en  $x = 0,4$  m con un adecuado seguimiento de velocidad. Durante la interacción con la pared, las fuerzas de contacto son reguladas por la sintonía de los parámetros de impedancia. Mientras que, cuando se utiliza el controlador clásico, el sobretiro generado por la inter-

acción produce un comportamiento oscilatorio, por lo tanto el movimiento del efector final en contacto con la superficie no es adecuado. Además, el avance del efector final sobre la superficie se vuelve lento debido a que permanece oscilando, como se observa en las gráficas de la figura 8.15. La importancia del control de interacción en tareas de teleoperación se verifica en los resultados presentados, quedando de manifiesto que técnicas como el control de impedancia permiten dotar al sistema de una herramienta muy valiosa para un mejor desempeño de tareas complejas que involucren interacción entre el manipulador esclavo y su entorno.



**Figura 8.16** Trayectorias y velocidades de una tarea de interacción teleoperada, empleando control de impedancia.

La medicina representa una área de gran aplicación de sistemas de control debido a la interacción, que en la actualidad ocurre, entre sistemas robóticos y el ser humano. Como todos los sistemas robóticos, los robots médicos asocian fundamentalmente información con la acción física que permita el mejoramiento significativo de la habilidad humana para desempeñar tareas importantes, como en el caso de intervenciones quirúrgicas, rehabilitación o simplemente ayudar a gente discapacitada en las tareas de la vida diaria. Al igual que los robots para manufactura, los robots

médicos y la cirugía integrada por computadora proveen ventajas si son aceptados y utilizados ampliamente. En primer lugar, y quizás lo más obvio, es la habilidad de los sistemas integrados por computadora para mejorar significativamente la capacidad técnica del cirujano, así como realizar procedimientos más precisos, rápidos o menos invasivos. Por otra parte, este tipo de sistemas promueven la seguridad quirúrgica mediante un desempeño técnico mejorado de procedimientos difíciles, un monitoreo en línea y una asistencia activa para prevenir que las herramientas de los robots se aproximen peligrosamente a estructuras anatómicas delicadas.

De igual modo, los sistemas robóticos para rehabilitación o para asistencia en la vida diaria deben ofrecer ventajas para que puedan ser adoptados. Esto se logra principalmente explotando las capacidades complementarias de los seres humanos (con la discapacidad) y de los robots para cumplir tareas que de otra manera no podría ser viables. Algunos beneficios pueden incluir desempeño más eficiente o consistente de ejercicios después de una lesión o cirugía, restauración parcial de funciones a través de prótesis “*inteligentes*” y ayuda cooperativa para la población de edad avanzada. La interacción inherente a este tipo de aplicaciones médicas hace necesario el uso de esquemas de control de fuerza o impedancia que permiten garantizar un comportamiento dinámico adecuado del sistema, así como la estabilidad necesaria para realizar procedimientos con alto grado de seguridad, sobre todo para el ser humano.

La rehabilitación física de los pacientes con parálisis de un lado del cuerpo (hemiparesia espástica) es un desafío muy complejo. La parálisis puede estar provocada por varias causas, entre ellas la hemorragia cerebral o infarto (apoplejía), traumas, tumores, esclerosis múltiple y defectos congénitos. Con el fin de sobreponerse a la incapacidad causada por los citados ataques, la terapia física tradicional puede ayudar a los pacientes a disminuir el daño. La terapia generalmente involucra la interacción personal con el terapeuta que asiste y motiva a los pacientes a través de un cierto número de ejercicios repetitivos. Esta naturaleza repetitiva de la terapia la hace especialmente adecuada para ser administrada por robots

### Rehabilitación neurológica

Es un programa supervisado por un médico y diseñado para las personas con enfermedades, traumatismos o trastornos del sistema nervioso. La rehabilitación neurológica a menudo puede mejorar la funcionalidad, aliviar los síntomas y aumentar el bienestar del paciente. Un programa de rehabilitación neurológica se diseña para atender las necesidades de cada paciente en particular, dependiendo de su problema o enfermedad específicos. La participación activa del paciente y su familia son fundamentales para el éxito del programa.

La neuro-rehabilitación suele suministrarse por terapeutas profesionales e incluyen terapia física, ocupacional y terapia del habla. Estudios realizados presentan evidencia científica de que la neuro-rehabilitación es un objetivo lógico para la automatización, principalmente debido a la naturaleza repetitiva de las tareas.

Una terapia asistida por robots consiste en mover el efector final del robot de acuerdo con una serie de metas definidas en una interfaz gráfica de usuario (por lo general a través de video juegos). Si durante el desarrollo de la terapia el paciente hemipléjico no pudiera desempeñar la tarea en respuesta a los estímulos visuales, el robot es capaz de asistir y guiar al paciente para completar el ejercicio requerido por la terapia.



diseñados para este propósito. Los robots industriales pueden realizar muchos movimientos tridimensionales. Son precisos, potentes, obedientes y pueden ejecutar muchas de las tareas repetitivas que hasta ahora han tenido que hacer los fisioterapeutas. La idea de utilizar robots para ayudar a los fisioterapeutas en el tratamiento de miembros lesionados es atractiva.

En 1991, un robot llamado MIT-MANUS (llamado así por el enfoque terapéutico y el lema del MIT “mens et manus”, es decir, mente y mano) fue introducido como una base de prueba para el estudio del potencial de usar robots para ayudar y medir la rehabilitación neurológica de las funciones motoras. Este prototipo es un dispositivo planar con dos grados de libertad, que permite los movimientos pasivos y activos asistidos de las articulaciones del hombro y del codo, mientras que el paciente sigue en una pantalla las trayectorias que debe cumplir. En particular, se presentan evidencias de que: 1) la terapia asistida por robots no tiene efectos adversos; 2) los pacientes toleran el procedimiento; 3) la manipulación de las extremidades afectadas influyen en la recuperación a nivel cerebral. Al



Figura 8.17 Robot MIT-MANUS para rehabilitación neurológica.

comparar los resultados experimentales obtenidos mediante robototerapia con el tratamiento fisioterapéutico tradicional se observa, en general, un aumento de la fuerza muscular de las extremidades superiores con paresia, una reducción del déficit motor y una mejora de la funcionalidad de las extremidades superiores tratadas. Se han demostrado mejores resultados motores y funcionales, tanto a corto como a largo plazo. Es un hecho que la manipulación manual de una extremidad incapacitada de una víctima

## 8.9 Resumen

de apoplejía ayuda en la recuperación del uso de esa extremidad. Existen diversos trabajos de investigación que han permitido corroborar y mejorar los excelentes resultados que ha generado el uso de robots en rehabilitación neurológica, aún en el caso de pacientes crónicos.

Considerando el potencial que brinda el control de impedancia en tareas de manipulación que involucran la interacción del robot con su entorno, la rehabilitación neurológica surge como una de sus principales áreas de aplicación. El control de la relación entre fuerza y posición en ortesis robóticas ha mostrado la eficiencia del control de impedancia. Para garantizar el adecuado funcionamiento del sistema de control, se han realizado análisis de estabilidad y desempeño tanto de los algoritmos de control como de los sistemas robóticos. En robots para rehabilitación, la interacción con el entorno altera sustancialmente la dinámica del sistema y esto debe ser considerado en el análisis de estabilidad. Por otra parte, el desempeño de un robot de rehabilitación no es definido sólo en su capacidad de seguir una trayectoria, sino también en su capacidad de proveer una sensación deseada en su efector final. La estabilidad y el desempeño son tratados directamente con el uso de control de impedancia. El control de impedancia regula el comportamiento del robot en el punto de interacción con el entorno y la selección apropiada de la impedancia mecánica puede garantizar la estabilidad. El controlador modula la forma en que el robot reacciona ante una perturbación mecánica de un paciente y asegura un comportamiento dócil.

## 8.9 Resumen



**Control de fuerza/impedancia.** Actualmente los robots manipuladores tienen mayor demanda en aplicaciones donde el robot interactúa con su medio ambiente, por ejemplo, en pulido y esmerilado de materiales, corte de metal, ensamble de piezas automotrices, etc. Las estrategias de control de posición o movimiento son inadecuadas ya que no consideran la dinámica de interacción entre el robot y su entorno. Para abordar el

problema de interacción se requiere de algoritmos de control con una estructura adecuada que combine control de movimiento y control de fuerza. Al problema de interacción mecánica se le denomina con diferentes nombres: **constrained motion control**, **compliance** o **force control**, en este contexto se han sugerido varios enfoques: **control de impedancia**, **control de fuerza**, **control híbrido de fuerza/posición**, etc.



## 8.10 Referencias selectas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Se presenta un conjunto de referencias selectas con la finalidad de que el lector encuentre información de respaldo a las secciones presentadas.



### 8.2 Sensores de fuerza/par



ATI Industrial Automation. “*Multi-axis force/torque sensor*”.  
<http://www.ati-ia.com>



M.H. Lee & H.R. Nicholls. “*Tactile sensing for mechatronics - A State of the art survey*”. *Mechatronics*. 9(1), pp. 1-31, 1999.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

### 8.3 Sistemas hápticos



V. Hayward, O.R. Astley, M. Cruz-Hernandez, D. Grant & G. Robles-De-La-Torre. “*Haptic interfaces and devices*”. *Sensor Rev.* 24(1), pp. 16-29, 2004.



SensAble technologies: [www.sensable.com](http://www.sensable.com) (Woburn 2007).



Immersion corporation: [www.immersion.com](http://www.immersion.com) (San Jose 2007).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757



Novint technologies: [www.novint.com](http://www.novint.com) (Albuquerque 2007).



## 8.4 Modelado del entorno



Y.F. Zheng & H. Hemami. “*Mathematical modeling of a robot collision with its environment*”. J. Robot. Syst. 2(3), pp. 289-307, 1985.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani & G. Oriolo. “*Robotics: modelling, planning and control*”. Springer, London. 2009.



## 8.5 Control de fuerza



D.E. Whitney. “*Force feedback control of manipulator fine motions*”, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 99, pp. 91-97, 1977.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



B. Siciliano & L. Villani. “*Robot force control*”. Kluwer Academic Publishers. Boston, MA. 1999.





## 8.6 Control híbrido de fuerza/posición



M. Raibert & J. Craig. “*Hybrid position/force control of manipulators*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 102, pp. 126-133, 1981.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary


 O. Khatib. "A Unified approach to motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation". IEEE J. of Robot. Autom. 3(1), pp. 43-53, 1987.

 J.K. Mills & A.A. Goldenberg. "Force and position control of manipulators during constrained motion tasks". IEEE Trans. Robot. Autom. 5, pp. 30-46, 1989.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

## 8.7 Control de impedancia

 N. Hogan. "Impedance Control: An approach to manipulation: part I-theory, part II-implementation and part III-applications". ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 107, pp. 1-24, 1985.


 D. Lawrence. "Impedance control stability in common implementations". In Proc. of IEEE Intl. Conf. on Robot. Autom. pp. 1185-1190, 1989.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

 C. Canudas, B. Siciliano & G. Bastin. "Theory of robot control". Springer-Verlag. 1996.



## 8.8 Aplicaciones

 K. Schilling, H. Roth & R. Lieb. "Remote control of a 'mars rover' via internet to support education in control and teleoperations". Acta Astronautica. 50(3), pp. 173-178, 2002.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary



## 8.11 Problemas propuestos



G. Niemeyer & J. Slotine. “*Telemanipulation with time delays*”, Int. J. Robot. Res. 23(9), pp. 873-890, 2004.



C.R. Carignan & H.I. Krebs. “*Telerehabilitation robotics: bright lights, big future?*” J. Rehab. Res. Develop. 43(5), pp. 695-710, 2006.

## 8.11 Problemas propuestos

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de control de fuerza/impedancia de robots manipuladores.



## 8.2 Sensores de fuerza/par

8.2.1 ¿Qué es un sensor de fuerza/par?

8.2.2 ¿Cuántas clases de sensores de fuerza conoce?



## 8.3 Sistemas hápticos

8.3.1 ¿Cuál es la finalidad de un dispositivo háptico?

8.3.2 Realice un diagrama a bloques que describa el ciclo del flujo de información en un sistema háptico.



## 8.4 Modelado del entorno

8.4.1 ¿Qué tipo de fenómenos se consideran para el modelado del entorno?



## 8.4.2 ¿Qué significa movimiento restringido?



## 8.5 Control de fuerza

8.5.1 Realizar la tarea de interacción del ejemplo 9.1 utilizando un controlador de fuerza con lazo interno de posición.

8.5.2 Para el manipulador del ejemplo 9.4, simular su comportamiento utilizando el controlador de fuerza con lazo interno de posición (8.6) para generar una fuerza constante de 100 N sobre una pared que ejerce una fuerza elástica de oposición a lo largo del eje  $x$ .



## 8.6 Control híbrido de fuerza/posición

8.6.1 Para el manipulador y el entorno del ejemplo 9.4 diseñe un controlador híbrido que opere como control de posición a lo largo del eje  $y$  y como control de fuerza a lo largo del eje  $x$ , mientras aplica una fuerza de contacto deseada de 30 N. Implemente esta ley de control en simulación considerando una pared ubicada en  $x_e = 0,8$  m del origen.



## 8.7 Control de impedancia

8.7.1 Implementar en simulación el control de impedancia del sistema robótico del ejemplo 9.3, utilizando el esquema de control de impedancia con base en posición.

8.7.2 Implementar la simulación presentada en el ejemplo 9.4, considerando  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_d - s^2 (K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e + M_d^{-1} [K_p \tilde{\boldsymbol{\xi}} + K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}]$  y comparar los resultados obtenidos.

# 9

## CAPÍTULO

# Robótica móvil

*Nuestra naturaleza está en movimiento. El reposo absoluto es la muerte.*

*Blaise Pascal*

Isela Bonilla y Marco Mendoza



- 9.1 Introducción
- 9.2 Robots móviles
- 9.3 Configuración de robots móviles
- 9.4 Cinemática de robots móviles
- 9.5 Dinámica de robots móviles
- 9.6 Control de robots móviles
- 9.7 Resumen
- 9.8 Referencias selectas
- 9.9 Problemas propuestos

## Objetivos

El presente capítulo tiene la finalidad de presentar un panorama general de los conceptos más importantes relacionados al modelado de robots móviles con ruedas, así como sus principales problemáticas de control y algunas técnicas que han sido empleadas con la finalidad de resolverlas.

## Competencias

Adquirir la habilidad en control de robots móviles y en el análisis cinemático y dinámico en el área de la robótica móvil, así como el control de las principales configuraciones de locomoción usadas para desarrollar robots móviles con ruedas.

## 9.1 Introducción

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, su importancia radica principalmente en que poseen un espacio de trabajo ilimitado, a diferencia de los robots manipuladores fijos los cuales están restringidos a cumplir tareas dentro de un espacio de trabajo determinado por sus dimensiones físicas. Por lo tanto, con la finalidad de aumentar la movilidad del robot y de esta manera su capacidad de trabajo, se hace uso de un sistema locomotor para que el robot pueda desplazarse libremente en su espacio de trabajo. Además, estos robots tienen la capacidad de adaptarse a una gran diversidad de terrenos y actuar en ambientes no estructurados.

El término autonomía hace referencia a la capacidad del robot para responder ante situaciones cambiantes, ambiguas o impredecibles sin necesidad de supervisión humana, sugiere el paso de robots costosos y poco flexibles a robots ligeros y con mayor capacidad de adaptación a diferentes tareas. Los robots móviles se caracterizan por su capacidad de desplazarse en forma autónoma en un entorno desconocido o conocido parcialmente. Sus aplicaciones cubren una gran variedad de campos, entre los cuales se incluyen trabajos subterráneos (minería, construcción de túneles, etc.), misiones espaciales y exploración planetaria (recolección de muestras, mantenimiento de estaciones orbitales, etc.), vigilancia e intervención de seguridad (desactivación de explosivos, operación en zonas radioactivas, etc.), aplicaciones militares, entre otras. En todas estas aplicaciones la justificación más importante para el uso de la robótica móvil es la dificultad o imposibilidad de intervención humana, ya sea de manera directa o teleoperada.

Los robots móviles se pueden clasificar de acuerdo con el tipo de locomoción utilizado. En general, los tres sistemas de locomoción más conocidos son: ruedas, patas y orugas. Es importante señalar que aunque la locomoción por patas y orugas han sido ampliamente estudiadas, el mayor

### Robótica móvil

Los robots móviles han cobrado una importancia creciente desde los años ochentas y noventas. Un robot móvil requiere de mecanismos de locomoción que le permitan moverse ilimitadamente dentro de su entorno. En contraste, los robots manipuladores generalmente se encuentran anclados a una superficie de trabajo fija y limitada físicamente. Hay varias formas para lograr el desplazamiento de un robot, la selección del mecanismo de locomoción es un aspecto importante para el diseño de este tipo de robots. Los robots móviles se clasifican en:

- *Robots terrestres:* son actuados mediante ruedas. Sin embargo, algunos poseen piernas que imitan la forma del caminar de los seres humanos o de animales.
- *Robots aéreos:* suelen ser vehículos aéreos no tripulados (UAV's).
- *Robots subacuáticos:* también conocidos como vehículos subacuáticos autónomos (AUV's), adecuados para entornos marinos.

La rueda ha sido el mecanismo de locomoción más utilizado en la robótica móvil. Este tipo de locomoción presenta una eficiencia aceptable y se logra mediante diseños mecánicos relativamente simples. El balance del robot móvil se obtiene mediante una estructura que permita que todas las ruedas se encuentren en contacto con el suelo en todo momento.



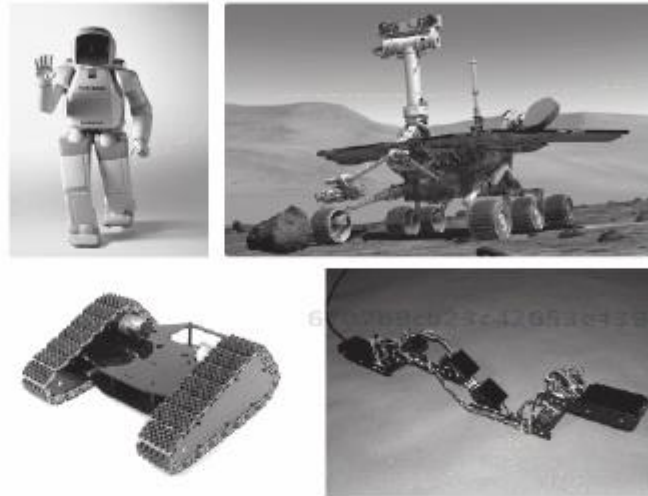
### Vehículos autónomos

El término *autonomía* (del griego *auto*, "uno mismo", y *nomos*, "norma") es, en términos generales, la capacidad de tomar decisiones sin ayuda de otro. Por lo tanto, un *vehículo autónomo* es cualquier vehículo no tripulado con cierto nivel de autonomía integrada, los cuales pueden ser marinos, aéreos o terrestres.

Las características principales de los robots autónomos son las siguientes:

- Un robot autónomo puede percibir un entorno y actuar sobre él, es decir, el robot no actúa sobre modelos, sino directamente en el mundo real.
- Los robots autónomos interactúan con su entorno; sus experiencias y sus acciones sobre él se producen en forma directa haciendo uso de sus propias capacidades físicas.
- Por sus características, este tipo de robots se emplean para realizar diversas tareas como son: detección y neutralización de minas, identificación o recuperación de objetos submarinos, inspección y mantenimiento preventivo de instalaciones submarinas, rescate, control de fronteras, inspección de tuberías de diferentes diámetros, exploración en el espacio, etcétera.

desarrollo se presenta en los robots móviles con ruedas, por ello el presente capítulo se dedica al estudio de este tipo de robots móviles.



**Figura 9.1** Principales sistemas de locomoción para robots móviles.

Un robot móvil con ruedas (RMR) es un vehículo capaz de moverse de manera autónoma sobre una superficie, mediante la acción de las ruedas montadas en el robot. Es importante señalar que se considera que el contacto entre cada rueda y la superficie es solamente un punto de contacto de rodado. Una diferencia esencial entre los RMR's y otros sistemas robóticos son las restricciones cinemáticas entre las ruedas y la superficie sobre la cual se desplazan. Los RMR's constituyen una clase de sistemas mecánicos caracterizados por restricciones cinemáticas no-holonómicas, entre las velocidades en el punto de contacto y las velocidades angulares, las cuales no son integrables en forma de relaciones algebraicas entre las variables de desplazamiento traslacional y rotacional, por lo tanto no pueden ser eliminadas de las ecuaciones del modelo. El resultado de este problema de integrabilidad de las restricciones es la falta de una relación uno-a-uno entre las variables cartesianas y las variables articulares. Esto significa que mientras que los desplazamientos angulares en manipuladores seriales determinan la posición y orientación de su efector final, el desplazamiento angular de las ruedas de un RMR no determina la posición y orientación del cuerpo del vehículo.



## 9.2 Robots móviles

Los robots móviles emplean diferentes tipos de locomoción mediante ruedas, las cuales les confieren características y propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.



### 9.2.1 Descripción de un robot móvil con ruedas

Considerando que un RMR es un robot capaz de moverse sobre una superficie mediante la acción de ruedas montadas en él, se asumen las siguientes hipótesis:

- El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal, es decir, la energía potencial es constante.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- No existen elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo las ruedas.
- El contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary ■ No existe deslizamiento.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, en este libro se aborda el caso bidimensional debido a que el robot se mueve en un plano, así el problema se reduce a encontrar la terna  $(x, y, \theta)$  asociada al sistema de referencia móvil del vehículo, donde las dos primeras componentes corresponden a la traslación y la tercera a la orientación del RMR (figura 9.2).

La localización del robot en el plano puede ser descrita de la siguiente forma: se establece un sistema inercial arbitrario  $(I_1, I_2)$  fijo al plano del movimiento, mientras que un punto de referencia  $P$  en el robot representa

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

ebrary

### Postura del robot móvil

Con el fin de determinar la ubicación de un robot móvil en un plano, se establece una relación entre el marco de referencia global (inercial) del plano y el marco de referencia local (no inercial) unido al robot.

Considerando un movimiento horizontal, la posición del robot móvil queda completamente definida con tres variables escalares, dos lineales y una angular  $(x, y, \theta)$ , donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas de un punto de referencia ( $P$ ) ubicado sobre el robot y  $\theta$  describe la orientación del marco de referencia del robot (no inercial) con respecto al marco de referencia global (inercial). A la representación de forma vectorial se le denomina *postura* del robot móvil.

El primer paso para obtener los modelos cinemáticos de los diferentes tipos de locomoción de robots móviles, ya sea considerando o no la existencia de deslizamiento, consiste en encontrar las relaciones cinemáticas entre los distintos tipos de variables que intervienen en el robot; una de estas variables es la postura. La importancia de obtener un modelo cinemático radica en la utilización de éste en etapas posteriores como son la planificación y el control.

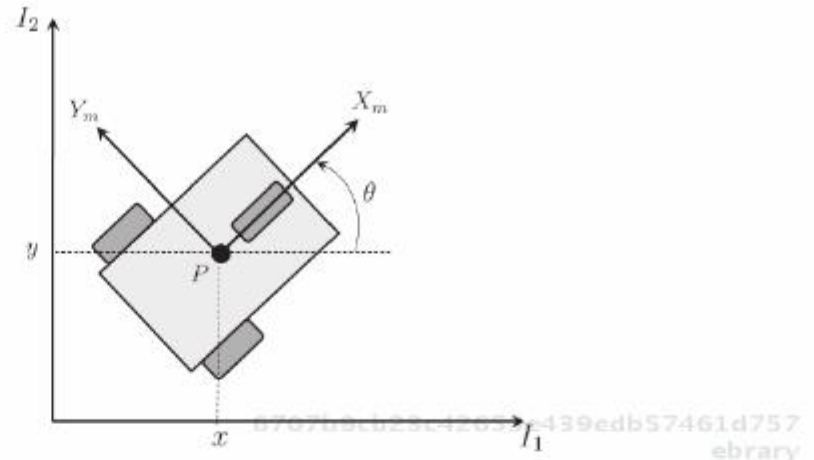


Figura 9.2 Coordenadas de la postura de un robot móvil.

el origen del sistema arbitrario  $(X_m, Y_m)$ , de tal manera que la postura del robot queda completamente especificada por  $(x, y, \theta)$ .

El par  $(x, y)$  representa las coordenadas generalizadas del punto de referencia  $P$  respecto al sistema inercial, es decir,

$$\vec{OP} = x \vec{I}_1 + y \vec{I}_2, \quad (9.1)$$

mientras que  $\theta$  describe la orientación del sistema  $(X_m, Y_m)$  con respecto al sistema inercial  $(I_1, I_2)$ .

Por lo tanto la postura del robot puede ser determinada por el vector

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

mientras que la matriz de rotación que define la orientación del sistema  $(X_m, Y_m)$  con respecto al sistema  $(I_1, I_2)$ , tomando en cuenta que los ejes  $Z$  de ambos sistemas son paralelos, está dada por:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$



### 9.2.2 Tipos de ruedas

Existen dos tipos básicos de ruedas, las ruedas convencionales y las ruedas suecas. Con base en la clasificación presentada por *Campion et al.*, las ecuaciones de restricción para cada uno de los tipos de ruedas están dadas por las siguientes relaciones cinemáticas.

#### Rueda fija

El centro de la rueda es el punto fijo  $A$ , cuya posición respecto al marco de referencia móvil puede ser obtenida en coordenadas polares, es decir, la distancia  $l$  de  $A$  a  $P$  y el ángulo  $\alpha$ . La orientación del plano de la rueda con respecto a  $l$  está representada por el ángulo constante  $\beta$  (figura 9.3). Las ecuaciones de restricción para este tipo de rueda está dadas por:

\* *A lo largo del plano de la rueda*

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0. \quad (9.4)$$

\* *Ortogonal al plano de la rueda*

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (9.5)$$

#### Rueda de centro orientable

Una rueda con centro orientable es aquella en la que el movimiento del plano de la rueda, con respecto a su marco de referencia, es una rotación  $\beta(t)$  alrededor del eje vertical (figura 9.4), pasando a través del centro de la rueda. Sus ecuaciones de restricción son:

\* *A lo largo del plano de la rueda*

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0. \quad (9.6)$$

#### Restricciones de movilidad

Cada rueda individual contribuye al movimiento del robot y, al mismo tiempo, le impone restricciones en su movimiento decrementando el grado de movilidad del vehículo. Las ruedas están unidas entre sí con base en la geometría del chasis del robot, por lo tanto sus restricciones individuales se combinan para formar las restricciones sobre el movimiento global del robot móvil. Las fuerzas y restricciones de cada rueda deben ser expresadas con respecto a un marco de referencia claro y coherente. Esto es importante dentro de la robótica móvil debido a su carácter autónomo y móvil.

Para determinar el modelo cinemático de un robot móvil, las restricciones se expresan con base en los movimientos de las ruedas, debido a que los movimientos individuales de las ruedas influyen en el movimiento global del robot. Existen cuatro tipos básicos de ruedas, cada uno de ellos presenta diferentes propiedades cinemáticas. Al obtener las restricciones de movilidad de cada una de las ruedas se logra la caracterización completa de la movilidad del robot, independientemente del número y tipo de ruedas.

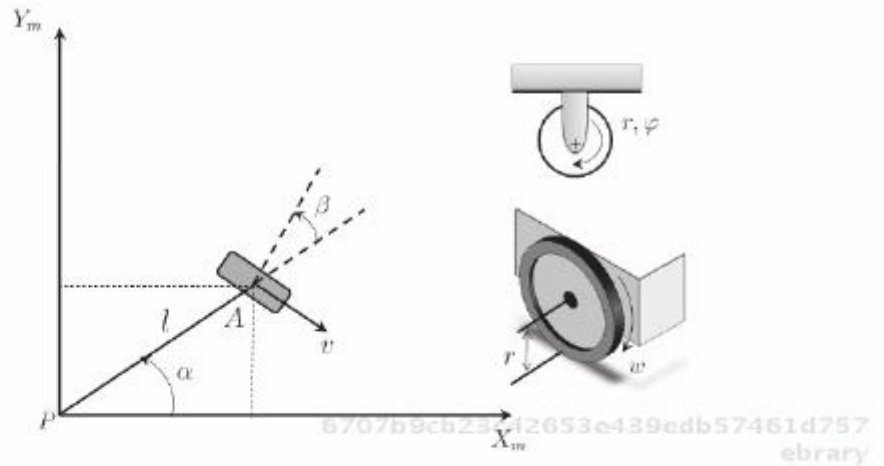


Figura 9.3 Rueda convencional fija.

\**Ortogonal al plano de la rueda*

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \text{sen}(\alpha + \beta) \quad l \text{ sen}(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (9.7)$$

Es importante hacer notar que la descripción es la misma que para una rueda fija, excepto porque ahora el ángulo de orientación  $\beta$  no es constante.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

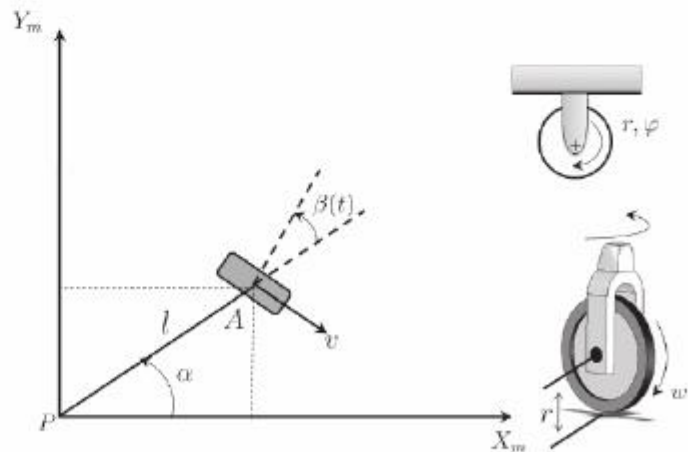


Figura 9.4 Rueda convencional de centro orientable.



### Rueda de centro orientable desplazado (giratoria)

Una rueda de centro orientable desplazado es también una rueda orientable con respecto al marco de referencia, sin embargo la rotación del plano de la rueda es alrededor de un eje vertical que no pasa a través del centro de la rueda. El centro de la rueda es el punto  $B$  y está conectada al punto  $A$  mediante de una varilla rígida, de longitud constante  $d$ , la cual puede rotar alrededor del eje vertical que pasa por el punto  $A$  (figura 9.5). Sus ecuaciones de restricción son:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

\*A lo largo del plano de la rueda

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0. \quad (9.8)$$

\*Ortogonal al plano de la rueda

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + d \dot{\beta} = 0. \quad (9.9)$$

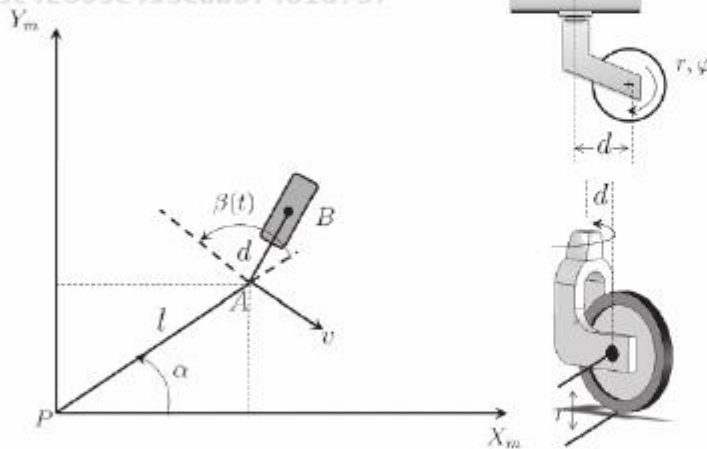
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Figura 9.5 Rueda convencional de centro orientable desplazado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



### Rueda omnidireccional o sueca

La rueda omnidireccional es similar a una rueda convencional, pero posee muchas ruedas direccionales pequeñas que se mueven en un ángulo de 90 grados por su superficie de rodado. Mientras la rueda completa se mueve hacia adelante y hacia atrás, las ruedas pequeñas que cruzan su superficie se mueven indirectamente, por lo tanto, la rueda puede desplazarse en cuatro direcciones (figura 9.6).

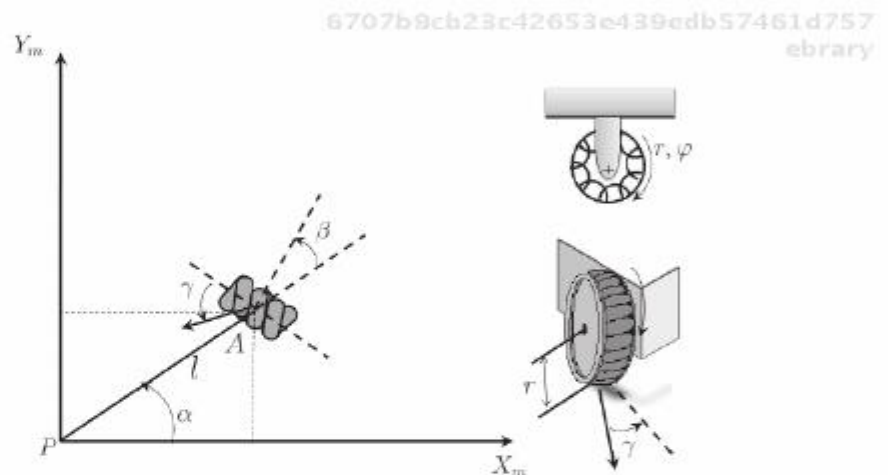


Figura 9.6 Rueda omnidireccional o sueca.

La posición de la rueda con respecto al marco de referencia es descrita como en el caso de la rueda convencional fija. Sin embargo, se requiere un parámetro adicional  $\gamma$  para caracterizar la dirección con respecto al plano de la rueda. Esta configuración sólo tiene una restricción:

\*A lo largo del plano de la rueda

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi} + r \cos(\gamma) \dot{\varphi} = 0. \quad (9.10)$$

### Restricciones en la movilidad de un robot

Considérese un robot móvil equipado con  $N$  ruedas de los cuatro tipos descritos con anterioridad, donde la siguiente relación representa el total de ruedas de cada clase

$$N_f + N_{co} + N_{cd} + N_o = N, \quad (9.11)$$

el subíndice  $f$  representa las ruedas fijas,  $co$  las ruedas de centro orientable,  $cd$  las ruedas de centro orientable desplazado y  $o$  las ruedas omnidireccionales.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

De acuerdo con la representación anterior, las restricciones de movilidad pueden representarse mediante la siguiente forma general:

$$J_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0 \quad (9.12)$$

$$C_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{cd} = 0. \quad (9.13)$$

De la ecuación (9.12) se tiene que

$$J_1(\beta_{co}, \beta_{cd}) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1co}(\beta_{co}) \\ J_{1cd}(\beta_{cd}) \\ J_{1o} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde  $J_{1f}$ ,  $J_{1co}$ ,  $J_{1cd}$  y  $J_{1o}$  son matrices de dimensiones  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_{co} \times 3)$ ,  $(N_{cd} \times 3)$  y  $(N_o \times 3)$ , cuya estructura se deriva directamente de las ecuaciones de restricción (9.4), (9.6), (9.8) y (9.10), respectivamente. Además,  $J_2$  es una matriz diagonal de dimensión  $(N \times N)$  compuesta por los radios de las ruedas, excepto para las ruedas omnidireccionales donde el radio está multiplicado por  $\cos(\gamma)$ .

Por otra parte, de la ecuación (9.13) se tiene que

$$C_1(\beta_{co}, \beta_{cd}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1co}(\beta_{co}) \\ C_{1cd}(\beta_{cd}) \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2cd} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

donde  $C_{1f}$ ,  $C_{1co}$  y  $C_{1cd}$  son matrices de dimensiones  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_{co} \times 3)$  y  $(N_{cd} \times 3)$  formadas a partir de las ecuaciones (9.5), (9.7) y (9.9), respectivamente. Mientras que  $C_{2cd}$  es una matriz diagonal de  $(N_{cd} \times N_{cd})$ , cuyos elementos son igual  $d$ .



## 9.3 Configuración de robots móviles

A continuación se presentan las características más significativas de los sistemas de locomoción con ruedas más comunes en robótica móvil.



### 9.3.1 Configuración Ackerman

Este diseño está compuesto de cuatro ruedas y proporciona una adecuada estabilidad, las ruedas direccionables no son motrices.

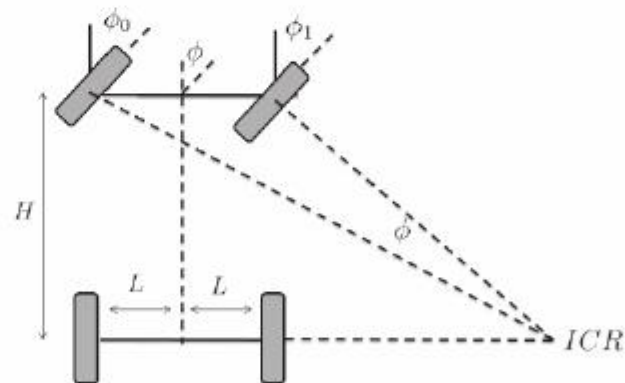


Figura 9.7 Robot móvil en configuración Ackerman.

Ackerman es el término para describir la geometría de conducción que ocasiona que la rueda delantera interior sea más firme que la rueda delantera exterior. La rueda delantera interior gira un ángulo ligeramente superior al exterior  $\phi_1 > \phi_0$  para eliminar el deslizamiento (figura 9.7).

Al prolongar los ejes de las dos ruedas delanteras, éstos intersectan en un punto sobre el eje de las ruedas traseras, y este punto se conoce como Centro Instantáneo de Rotación (ICR, por sus siglas en inglés).



### 9.3.2 Configuración triciclo clásico

La configuración de triciclo más común tiene una rueda delantera y dos ruedas traseras, como puede observarse en la figura 9.8; esta configuración se conoce como *delta*. La premisa principal de un triciclo es proporcionar una plataforma estable. El efecto de la base en un triciclo influye en la

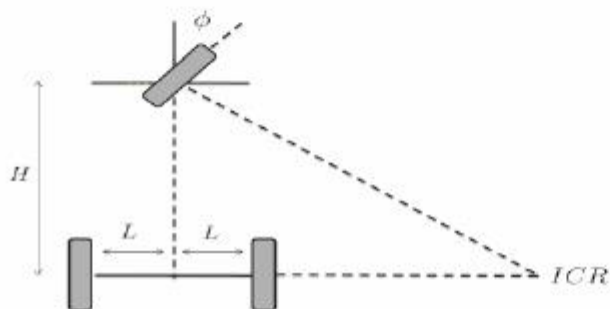


Figura 9.8 Robot móvil en configuración triciclo clásico.

maniobrabilidad y la distribución de peso. La base de un triciclo es la longitud entre el eje de las ruedas traseras y la rueda delantera. Una base corta genera un radio de giro del triciclo muy pequeño, mientras que una base larga hace al radio de giro más grande (ICR). Adicionalmente, un triciclo con una base corta exhibe mayor maniobrabilidad que un triciclo con una base larga.



### 9.3.3 Direccionamiento diferencial

En esta configuración, el punto (ICR) sobre el cual el robot móvil pivotea está sobre una línea perpendicular que atraviesa el centro de las ruedas (figura 9.9). El radio llega a ser mínimo cuando el punto del pivote se localiza en el punto medio entre las dos ruedas. El espacio mínimo para



### Direccionamiento diferencial

El sistema de locomoción en configuración diferencial se considera como el más sencillo de todos. Mediante esta configuración el robot puede realizar movimientos rectos, girar sobre sí mismo y trazar curvas. Consta de dos ruedas situadas en un eje perpendicular a la dirección del robot. Cada una de ellas es actuada mediante un motor, de tal forma que los giros se realizan dándoles diferentes velocidades. Así, si se quiere girar a la derecha daremos mayor velocidad al motor izquierdo, o si se desea girar a la izquierda, será el motor derecho el que posea mayor velocidad. Por lo tanto, igualando las velocidades de ambos motores el robot se moverá en línea recta.

Para lograr el equilibrio del robot es necesario proporcionarle un apoyo adicional a las dos ruedas ya existentes. Dependiendo de la distribución de pesos en el robot se pueden colocar una o dos ruedas de apoyo añadidas al diseño del chasis. Si alguna de las ruedas se encuentra sobre una superficie que le represente mayor resistencia, las velocidades de los motores tenderán a variar y el robot realizará giros, incluso cuando se le haya ajustado para que su movimiento sea en línea recta. Una forma de evitar este comportamiento es controlando la velocidad dinámicamente, es decir, monitorear en forma continua la velocidad del motor y modificarla mientras el robot avanza.

que el robot gire es determinado por la distancia máxima de ese punto a cualquier otro punto en el robot móvil, normalmente la esquina delantera.

El robot puede moverse en línea recta, girar sobre sí mismo y trazar curvas. El equilibrio del robot se obtiene mediante una o dos ruedas adicionales de apoyo formando un diseño triangular o romboidal. El diseño triangular puede no ser suficiente dependiendo de la distribución de peso del robot, y el romboidal puede provocar poca adaptación al terreno si éste es irregular, lo que puede exigir alguna clase de suspensión.

La tracción se consigue mediante las ruedas laterales y la dirección por la diferencia de velocidades de las mismas ( $v_L$  y  $v_R$ ).

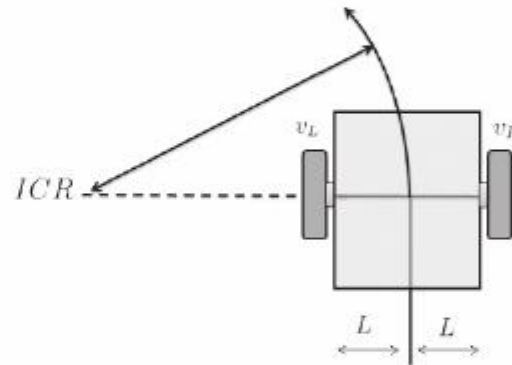


Figura 9.9 Robot móvil en configuración de direccionamiento diferencial.



### 9.3.4 Configuración síncrona

En este diseño todas las ruedas (generalmente tres) son tanto de dirección como de tracción; las ruedas se encuentran ubicadas de tal forma que siempre apuntan en la misma dirección. Para cambiar la dirección, el robot gira simultáneamente todas sus ruedas alrededor de un eje vertical, de modo que la dirección del robot cambia, pero su chasis sigue apuntando en la misma dirección que tenía antes del giro (figura 9.10).

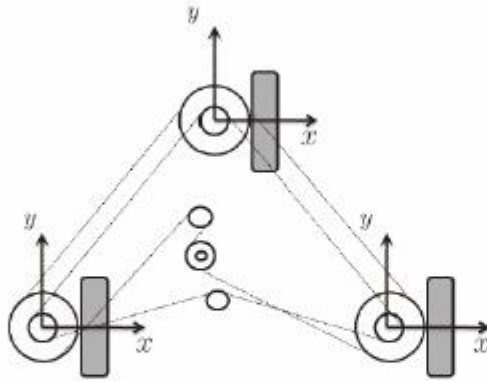


Figura 9.10 Robot móvil en configuración síncrona.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### 9.3.5 Movilidad y direccionabilidad

El término movilidad en robótica se refiere a la habilidad que tiene un robot móvil para desplazarse o moverse con libertad en su entorno. La restricción básica de movilidad es satisfacer la condición de no deslizamiento de las ruedas. Por otra parte, la direccionabilidad es intuitivamente la habilidad de un robot móvil para cambiar de direcciones durante su movimiento dentro de su entorno de trabajo. La capacidad de direccionamiento está directamente relacionada con la cantidad de ruedas direccionables que posee un robot móvil.

Considérese un robot móvil con  $N_f + N_{co}$  ruedas, para el cual las restricciones de no deslizamiento (9.13) pueden ser escritas como

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (9.17)$$

$$C_{1co}(\beta_{co})R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (9.18)$$

Estas restricciones implican que el vector  $R(\theta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}(C_1^*(\beta_{co}))$  donde

$$C_1^*(\beta_{co}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1co}(\beta_{co}) \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

y  $\text{rank}(C_1^*(\beta_{co})) \leq 3$ . Sin embargo, si  $\text{rank}(C_1^*(\beta_{co})) = 3$  entonces  $R(\theta)\dot{\xi} = 0$  y por lo tanto cualquier movimiento en el plano es imposible.

El rango de la matriz  $C_1^*(\beta_{co})$  depende del diseño del robot móvil. El grado de movilidad  $\delta_m$  de un robot móvil puede definirse como

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_{co}))) = 3 - \text{rank}(C_1^*(\beta_{co})). \quad (9.20)$$

Por otra parte, el grado de direccionalidad  $\delta_d$  puede obtenerse a partir del rango de  $C_{1co}(\beta_{co})$ , es decir que

$$\delta_d = \text{rank}(C_{1co}(\beta_{co})). \quad (9.21)$$

Si un robot móvil es equipado con más de  $\delta_d$  ruedas direccionables ( $N_{co} > \delta_d$ ), el movimiento de las ruedas extra debe ser coordinado para garantizar la existencia del ICR en cada instante.

Tabla 9.1 Tipos  $(\delta_m, \delta_d)$  de RMR's.

$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_d$	0	0	1	1	2

De acuerdo con la estructura de los robots móviles, los grados de movilidad y direccionalidad satisfacen las siguientes desigualdades

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (9.22)$$

$$0 \leq \delta_d \leq 2 \quad (9.23)$$

$$2 \leq \delta_m + \delta_d \leq 3. \quad (9.24)$$

Por lo tanto, existen solamente cinco tipos de RMR's de acuerdo con los cinco pares de valores de  $\delta_m$  y  $\delta_d$  que satisfacen las desigualdades (9.22)-(9.24) y se presentan en la tabla 9.1.

El grado de movilidad es el primer índice de maniobrabilidad, éste es igual al número de grados de libertad que pueden ser manipulados directamente desde las entradas  $\eta$ , sin la reorientación de las ruedas. Este número  $\delta_m$  no es igual al número de grados de libertad del robot que pueden ser manipulados mediante  $\eta$  y  $\zeta$ . De hecho este número es igual al grado de maniobrabilidad dado por

$$\delta_M = \delta_m + \delta_d. \quad (9.25)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### ♣ ♣ Ejemplo 9.1

Considérese un triciclo con dos ruedas fijas localizadas en el mismo eje y una rueda de centro orientable desplazado, como el que se muestra en la figura 9.11, al cual se le conoce como robot uniclo (tipo(2,0)). Obtenga la representación de sus restricciones de movilidad.

### Solución

Las constantes características de este triciclo están especificadas en la tabla 9.2.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Tabla 9.2 Constantes características del robot tipo(2,0).

Ruedas	$\alpha$	$\beta$	$l$
1f	0	0	$L$
2f	$\pi$	0	$L$
3cd	$\frac{3}{2}\pi$	-	$L$

Las restricciones de movilidad dadas en (9.12) y (9.13) tienen la forma:

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1cd}(\beta_{cd3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos(\beta_{cd3}) & \sin(\beta_{cd3}) & L \cos(\beta_{cd3}) \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757



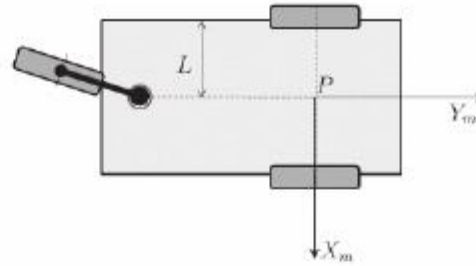


Figura 9.11 Robot móvil tipo(2,0) (uniciclo).

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1cd}(\beta_{cd3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\beta_{cd3}) & -\text{cos}(\beta_{cd3}) & d + L \text{sen}(\beta_{cd3}) \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Es importante notar que las restricciones de no deslizamiento de las 2 ruedas fijas son equivalentes; así, la matriz  $C_1^*$  es de rango igual a 1 como se esperaba.



## ▶ 9.4 Cinemática de robots móviles

El movimiento de un robot móvil puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_{co})\eta \tag{9.26}$$

$$\dot{\beta}_{co} = \zeta, \tag{9.27}$$

donde  $\eta$  y  $\zeta$  representan velocidades y pueden ser interpretadas como entradas de control. Las ecuaciones (9.26)-(9.27) se conocen como *modelo cinemático de postura*.

Reyes Cortés, Fernando. Robótica: control de robots manipuladores.  
 : Alfaomega Grupo Editor, . p 559  
<http://site.ebrary.com/id/10741037?ppg=559>  
 Copyright © Alfaomega Grupo Editor. . All rights reserved.  
 May not be reproduced in any form without permission from the publisher,  
 except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

Sin embargo, es importante reconocer el efecto de las restricciones de movilidad (9.12)-(9.13) a partir de las cuales es posible obtener la evolución de las velocidades de orientación y tracción dadas por

$$\dot{\beta}_{cd} = -C_{2cd}^{-1}C_{1cd}(\beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} \quad (9.28)$$

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1}J_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi}. \quad (9.29)$$

Combinando estas ecuaciones con el modelo cinemático de postura (9.26)-(9.27), las ecuaciones para  $\dot{\beta}_{cd}$  y  $\dot{\varphi}$  pueden ser reescritas como

$$\dot{\beta}_{cd} = D(\beta_{cd})\Sigma(\beta_{co})\eta \quad (9.30)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_{co}, \beta_{cd})\Sigma(\beta_{co})\eta \quad (9.31)$$

donde

$$D(\beta_{cd}) = -C_{2cd}^{-1}C_{1cd}(\beta_{cd}) \quad (9.32)$$

$$E(\beta_{co}, \beta_{cd}) = -J_2^{-1}J_1(\beta_{co}, \beta_{cd}). \quad (9.33)$$

Definiendo  $q$  como el vector de coordenadas de configuración dado por

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_{co} \\ \beta_{cd} \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (9.34)$$

entonces la evolución en el tiempo de este vector puede representarse en forma compacta como:

$$\dot{q} = S(q)u \quad (9.35)$$

donde

$$S(q) = \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_{co}) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{cd})\Sigma(\beta_{co}) & 0 \\ E(\beta_{co}, \beta_{cd})\Sigma(\beta_{co}) & 0 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

$$u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

La ecuación (9.35), conocida como *modelo cinemático de configuración*, tiene la forma estándar del modelo cinemático de un sistema sujeto a restricciones de velocidad independientes.

### ♣ ♣ Ejemplo 9.2

Considere el triciclo clásico (tipo(1,1)) de la figura 9.8, que está formado por dos ruedas fijas en el mismo eje, cuyo centro es el punto  $P$ , y una rueda de centro orientable al frente. Sus constantes características se presentan en la tabla 9.3. Obténgase el modelo cinemático de postura.

### Solución

Tabla 9.3 Constantes características robot tipo(1,1).

Ruedas	$\alpha$	$\beta$	$l$
1f	0	0	$L$
2f	$\pi$	0	$L$
3co	$\frac{3}{2}\pi$	-	$L$

El punto  $P$  debe ser localizado en el eje de las ruedas fijas, en la intersección con la normal que pasa por el centro de la rueda de centro orientable. Para representar la postura de este robot móvil, la matriz  $\Sigma(\beta_{co})$  es seleccionada como

$$\Sigma(\beta_{co}) = \begin{bmatrix} 0 \\ L \operatorname{sen}(\beta_{co3}) \\ \cos(\beta_{co3}) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el modelo cinemático de postura del robot tipo(1,1) está dado

por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{co3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\beta_{co3}) \\ L \cos(\theta) \operatorname{sen}(\beta_{co3}) \\ \cos(\beta_{co3}) \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \eta_1$$

## 9.5 Dinámica de robots móviles

En esta sección se presentan las ecuaciones de movimiento que representan un modelo dinámico general en espacio de estados y describen las relaciones entre las coordenadas de configuración y los pares de los actuadores de un robot móvil con ruedas.

De acuerdo con la formulación de Euler-Lagrange, la dinámica de RMR's puede ser descrita por las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\xi}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi} \right)^T = R^T(\theta) J_1^T(\beta_{co}, \beta_{cd}) \lambda + R^T(\theta) C_1^T(\beta_{co}, \beta_{cd}) \mu \quad (9.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{cd}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{cd}} \right)^T = C_2^T \mu + \tau_{cd} \quad (9.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varphi} \right)^T = J_2^T \lambda + \tau_{\varphi} \quad (9.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{co}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{co}} \right)^T = \tau_{co} \quad (9.41)$$

donde  $\mathcal{K}$  representa la energía cinética,  $\lambda$  y  $\mu$  son multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (9.12) y (9.13),  $\tau_{\varphi}$  representa los pares de las ruedas de tracción,  $\tau_{cd}$  los pares de los actuadores de orientación de las ruedas de centro orientable desplazado, y finalmente  $\tau_{co}$  los pares para la orientación de las ruedas de centro orientable.

Con la finalidad de eliminar los multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones de movimiento (9.38), (9.39) y (9.40), éstas deben premultiplicarse

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

### Sistemas no-holónomos

Las restricciones holónomas se presentan cuando las coordenadas pueden escribirse en la forma  $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, t) = 0$ . El número  $j$  condiciona al número de coordenadas que pueden existir, por lo que suele decirse que estas restricciones permiten eliminar grados de libertad de un sistema. Por otra parte, las restricciones no-holónomas se presentan cuando las coordenadas no pueden escribirse como restricciones holónomas, es decir, son aquellas en que las restricciones sólo pueden expresarse en términos de las velocidades, así las restricciones no-holónomas no permiten eliminar los grados de libertad de un sistema. Para trabajar con este tipo de restricciones se emplean los multiplicadores de Lagrange. Un error común al derivar las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico con limitaciones no-holónomas es sustituir las restricciones en el Lagrangiano y luego aplicar las ecuaciones de Lagrange con la finalidad de eliminar las variables dependientes y minimizar la complejidad en los cálculos. Sin embargo, este procedimiento arroja ecuaciones de movimiento erróneas para el sistema. Por lo tanto, para calcular en forma correcta las ecuaciones de movimiento, siempre se calcula el Lagrangiano sin restricciones, se sustituye en las ecuaciones de Euler-Lagrange y se vuelven a aplicar las restricciones para eliminar las variables dependientes.

ALFAOMEGA



por  $\Sigma^T(\beta_{co})R(\theta)$ ,  $\Sigma^T(\beta_{co})D(\beta_{cd})$ , y  $\Sigma^T(\beta_{co})E(\beta_{co}, \beta_{cd})$ , respectivamente, y después sumándolas se obtiene que

$$\begin{aligned} & \Sigma^T(\beta_{co})R(\theta)[\mathcal{K}]_{\xi} + D(\beta_{cd})[\mathcal{K}]_{\beta_{cd}} + E(\beta_{co}, \beta_{cd})[\mathcal{K}]_{\varphi} \\ & = \Sigma^T(\beta_{co})[D^T(\beta_{cd})\tau_{cd} + E^T(\beta_{co}, \beta_{cd})\tau_{\varphi}] \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{co}} = \tau_{co} \quad (9.43)$$

donde

$$[\mathcal{K}]_{\xi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\xi}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi} \right)^T \quad (9.44)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{cd}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{cd}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{cd}} \right)^T \quad (9.45)$$

$$[\mathcal{K}]_{\varphi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varphi} \right)^T \quad (9.46)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{co}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{co}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{co}} \right)^T \quad (9.47)$$

La energía cinética de un RMR puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \xi^T R^T(\theta) \left[ M(\beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + 2V(\beta_{cd})\dot{\beta}_{cd} + 2W\beta_{co} \right] \\ & + \dot{\beta}_{cd}^T I_{cd} \dot{\beta}_{cd} + \dot{\varphi}^T I_{\varphi} \dot{\varphi} + \dot{\beta}_{co}^T I_{co} \dot{\beta}_{co} \end{aligned} \quad (9.48)$$

con definiciones apropiadas de las matrices  $M(\beta_{cd})$ ,  $V(\beta_{cd})$ ,  $W$ ,  $I_{cd}$ ,  $I_{\varphi}$  e  $I_{co}$  de acuerdo con la distribución de masa del robot y los momentos de inercia de los componentes del mismo.



## 9.6 Control de robots móviles

El control de RMR's continúa generando muchos desafíos o retos de investigación y desarrollo. Algunos objetivos de control son: seguimiento de trayectorias, estacionamiento de vehículos, evasión de obstáculos y colisiones, cooperación con otros robots, así como el control de formación o escolta. El problema de control más desafiante en robótica móvil consiste en diseñar leyes de control por retroalimentación que puedan estabilizar

a un RMR alrededor de un punto de equilibrio. La problemática radica en que un robot no-holonómico no puede ser estabilizado por una retroalimentación de estados suave.

Esta sección se concentra en el control de seguimiento de RMR's, que resulta ser un problema de mayor importancia práctica que la regulación (estabilización alrededor de un punto de equilibrio). El control de seguimiento consiste en la estabilización alrededor de una trayectoria y se conoce como seguimiento estable de un movimiento de referencia. Es importante mencionar que el problema de seguimiento es más fácil de resolver que problema de regulación de RMR's. Existen diversos problemas de control que se relacionan con tareas de seguimiento para robots móviles; a continuación se describen algunos.

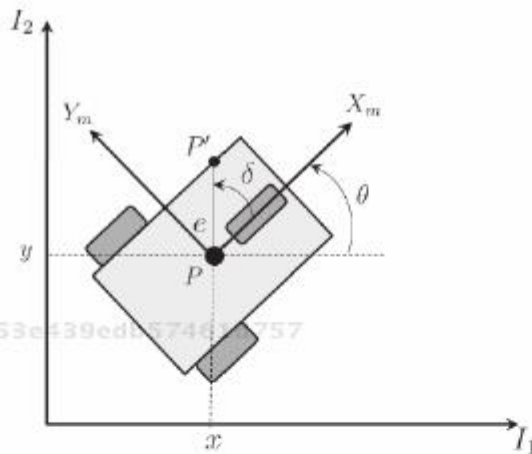


Figura 9.12 Coordenadas del punto  $P'$  en un robot móvil.

El problema de *seguimiento de postura* consiste en diseñar una ley de control por retroalimentación estable que permita el seguimiento de una postura de referencia  $\xi_r(t)$  variante en el tiempo, la cual se asume que es diferenciable al menos dos veces. En términos más formales, consiste en encontrar una ley de control  $v$  acotada que logre que el error de seguimiento  $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \xi_r(t)$  permanezca acotado y converja hacia cero en forma

### Control de robots móviles

Los robots móviles utilizados en la automatización de procesos industriales u otros campos, se encuentran involucrados principalmente en el seguimiento de referencias, por lo tanto, resulta imprescindible tener un control adecuado del vehículo. El control de un robot móvil puede ser de tipo cinemático o dinámico. En el control cinemático se consideran dos lazos de control: el principal denominado cinemático y otro dinámico de bajo nivel para los actuadores en las ruedas; es decir, existe un desacople entre la parte cinemática y la parte dinámica.

En el control dinámico no existen los dos lazos, sino que la ley de control es única y considera todos los elementos del robot móvil: relaciones cinemáticas, actuadores, masas, momentos de inercia, etc. El control dinámico tiene el inconveniente de que el análisis presenta una mayor complejidad, es muy sensible a los errores en los parámetros del modelo y requiere de sensores inerciales, los cuales presentan poca robustez y baja precisión. Por otra parte, el control cinemático es más sencillo y tiene validez siempre y cuando el lazo de control dinámico sea más rápido que el lazo de control cinemático.

asintótica, es decir;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}(t) = 0. \quad (9.49)$$

Por lo tanto, si  $\xi(0) = \xi_r(0)$  entonces  $\xi(t) = \xi_r(t) \forall t$ .

En algunas situaciones particulares no es necesario realizar el seguimiento de la postura completa del robot, por lo tanto resulta suficiente controlar solamente la posición de un punto fijo  $P'$  en la estructura del robot (figura 9.12). Las coordenadas del punto están dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + e \cos(\theta + \delta) \\ y + e \sin(\theta + \delta) \end{bmatrix}. \quad (9.50)$$

El problema de *seguimiento de un punto* es encontrar un controlador estable por retroalimentación de estados que logre el seguimiento de una posición de referencia  $x'_r(t), y'_r(t)$  móvil dada y la cual se asume doblemente diferenciable. En términos formales, diseñar una ley de control  $v(t)$  acotada que permita que los errores de seguimiento  $\tilde{x}'(t) = x'(t) - x'_r(t)$ ,  $\tilde{y}'(t) = y'(t) - y'_r(t)$  tiendan asintóticamente hacia cero, es decir;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}'(t) = 0 \quad (9.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}'(t) = 0. \quad (9.52)$$

Por lo tanto, si  $x'(0) = x'_r(0)$  y  $y'(0) = y'_r(0)$  entonces  $x'(t) = x'_r(t)$  y  $y'(t) = y'_r(t) \forall t$ .

### ♣♣♣ Ejemplo 9.3

Considérese el robot móvil tipo(2,0) conocido como *uniciclo* y cuyo sistema de locomoción es de tipo diferencial. Realizar la simulación en MatLab del modelo cinemático de postura de dicho robot considerando tres casos:

- Caso 1:  $\dot{\varphi}_L \neq \dot{\varphi}_R$ .
- Caso 2:  $\dot{\varphi}_L = -\dot{\varphi}_R$ .
- Caso 3:  $\dot{\varphi}_L = \dot{\varphi}_R$ .

Donde  $\dot{\varphi}_R$  representa la velocidad angular de la rueda derecha y  $\dot{\varphi}_L$  representa la velocidad angular de la rueda izquierda.



### Robot móvil tipo uniclo

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica de la cinemática de un robot móvil tipo uniclo. El programa de simulación está compuesto de dos scripts principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la cinemática del robot móvil. Adicionalmente se presentan una serie de animaciones que muestran las trayectorias generadas por el movimiento del robot móvil.

### Solución

Para el robot tipo(2,0), el modelo cinemático de postura está dado por

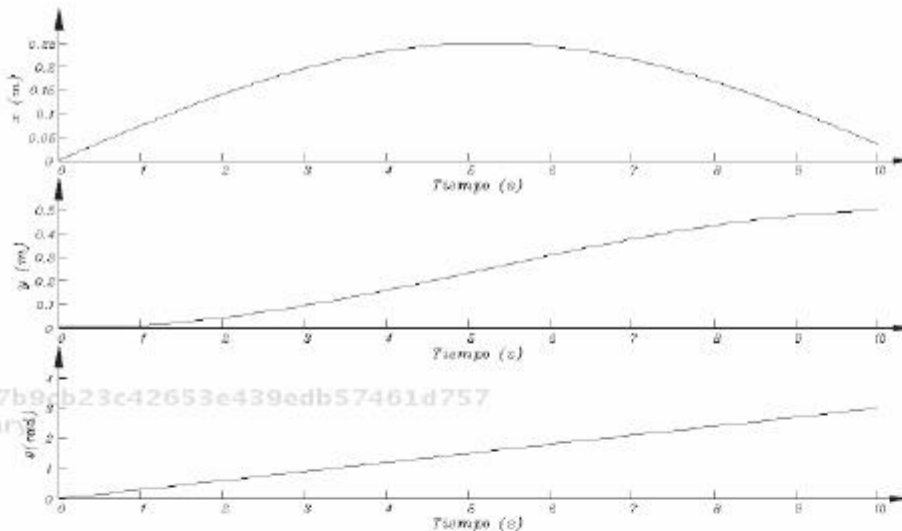


Figura 9.13 Postura de un robot uniclo tipo(2,0) para el caso:  $\dot{\varphi}_L \neq \dot{\varphi}_R$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix},$$

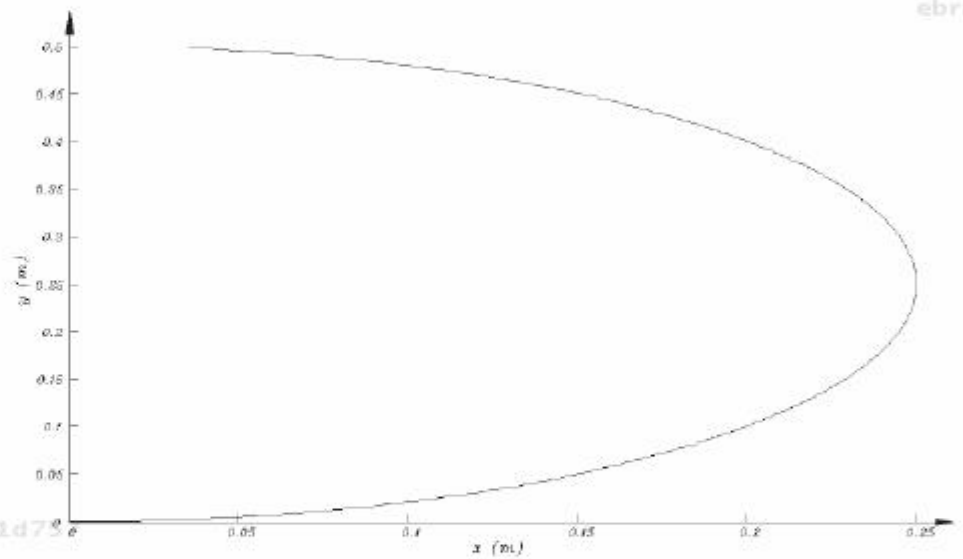
donde  $v$  y  $\omega$  representan las velocidades lineal y angular, respectivamente.



te, del robot móvil. Para el caso del direccionamiento diferencial dichas velocidades están dadas por:

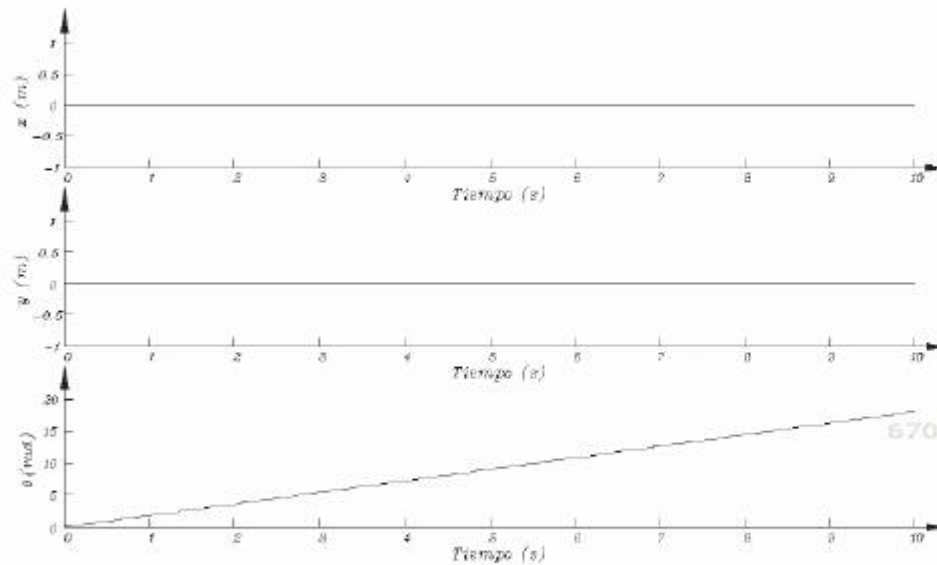
$$v = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L)$$
$$\omega = \frac{r}{L}(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L)$$

donde  $r$  representa el radio de ambas ruedas y  $L$  la distancia desde el centro de la rueda derecha hasta el centro de la rueda izquierda. Para simular numéricamente en MatLab el modelo cinemático se consideró  $r=3$  cm y  $L=10$  cm.



**Figura 9.14** Trayectoria de un robot unicycle tipo(2,0) para el caso:  $\dot{\varphi}_L \neq \dot{\varphi}_R$ .

Los resultados obtenidos en la simulación se presentan en las figuras 9.13-9.16. En el primer caso se consideró  $\dot{\varphi}_R = 3$  rad/s y  $\dot{\varphi}_L = 2$  rad/s. La figura 9.13 presenta la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que las tres componentes ( $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ) muestran un comportamiento variable debido a la diferencia de las velocidades de ambas ruedas. Por lo tanto, el robot móvil debe describir un movimiento de tipo circular, lo cual se verifica en la figura 9.14.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

**Figura 9.15** Postura de un robot unicycle tipo(2,0) para el caso:  $\dot{\varphi}_L = -\dot{\varphi}_R$ .

Para el segundo caso de análisis se consideró  $\dot{\varphi}_R = 3$  rad/s y  $\dot{\varphi}_L = -3$  rad/s. La figura 9.15 muestra la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que las componentes lineales ( $x$ ,  $y$ ) permanecen constantes en la condición inicial (0,0), mientras que la componente angular  $\theta$  presenta un comportamiento variable debido a la diferencia en el sentido de las velocidades de ambas ruedas. Por lo tanto, el robot móvil gira sobre su propio eje.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Finalmente para el tercer caso se consideró  $\dot{\varphi}_R = \dot{\varphi}_L = 3$  rad/s. La figura 9.16 presenta la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que la componente  $x$  varía con el tiempo, mientras que las componentes  $y$  y  $\theta$  permanecen constantes en las condiciones iniciales iguales a cero, esto se debe a que las velocidades de ambas ruedas son iguales en magnitud y sentido.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

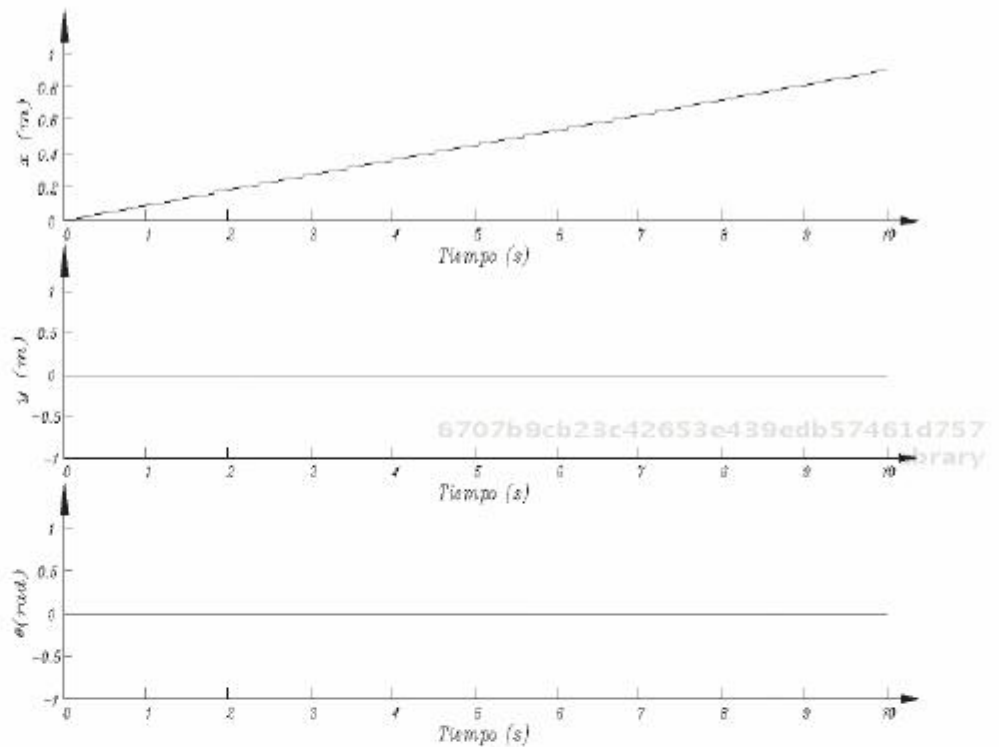


Figura 9.16 Postura de un robot unicycle tipo(2,0) para el caso:  $\dot{\varphi}_L = \dot{\varphi}_R$ .



### 9.6.1 Control por retroalimentación no lineal

Es bien conocido que la linealización vía retroalimentación a través de controladores comunes tiene serias limitaciones para el control de RMR's. En particular, no permite que un robot sea estabilizado alrededor de un punto fijo en el espacio de trabajo. En esta sección se presenta una técnica de control por retroalimentación no lineal que permite resolver el problema de seguimiento de postura.

Considérese el robot unicycle tipo(2,0) que se muestra en la figura 9.17, cuyo modelo cinemático de postura puede expresarse en forma compacta

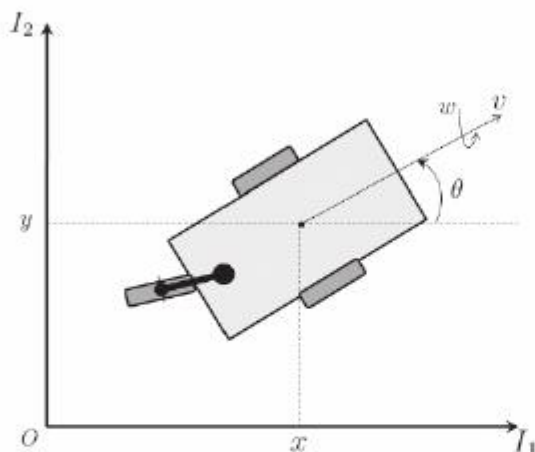
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Figura 9.17 Coordenadas de postura de un robot móvil tipo(2,0).

como:

$$\dot{z} = G(z)u = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (9.53)$$

donde  $z = [x \ y \ \theta]^T$  y las entradas de control son la velocidad lineal  $v$  y la velocidad angular  $\omega$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary Con la finalidad de emplear técnicas de control no lineal, es necesario realizar un cambio de coordenadas para expresar el sistema en una forma canónica, de tal manera que las nuevas coordenadas estarían dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \tan(\theta) \\ x_3 &= y \end{aligned} \quad (9.54)$$

y las nuevas entradas de control serían

$$u_1 = v \cos(\theta) \quad (9.55)$$

$$u_2 = \frac{\omega}{\cos^2(\theta)}, \quad (9.56)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



donde  $\theta \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi) \forall k \in Z$ . Por lo tanto, el sistema (9.53) se transforma a la siguiente forma canónica de cadena

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1. \end{aligned} \tag{9.57}$$

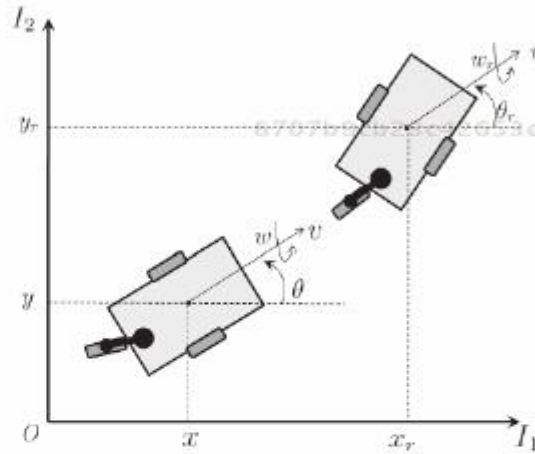


Figura 9.18 Problema de seguimiento de postura.

El problema de seguimiento de postura que se representa en la figura 9.18, consiste en encontrar una ley de control por retroalimentación

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = k(z, z_r, v_r, \omega_r) \tag{9.58}$$

de tal forma que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - z_r(t)) = 0$ . Además se considera que el robot nunca está en reposo, es decir;  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r(t) \neq 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_r(t) \neq 0$ . Para este problema de seguimiento considérese el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \tag{9.59}$$

donde  $e_1$  y  $e_2$  son las coordenadas del error de posición y  $e_3$  representa el error de orientación. Además, las entradas de control están dadas por

$$u_1 = v_r \cos(e_3) - v \tag{9.60}$$

$$u_2 = \omega_r - \omega, \quad (9.61)$$



obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}(e_3) \\ 0 \end{bmatrix} v_r + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (9.62)$$

Con la finalidad de resolver el problema de seguimiento de postura se emplea el siguiente controlador no lineal

$$u_1 = -k_1(v_r, \omega_r)e_1 \quad (9.63)$$

$$u_2 = -k_2 v_r \frac{e_2}{e_3} \text{sen}(e_3) - k_3(v_r, \omega_r)e_3 \quad (9.64)$$

donde  $k_1(v_r, \omega_r)$  y  $k_3(v_r, \omega_r)$  son funciones continuas y definidas positivas, y  $k_2$  es una constante positiva.

### Robot móvil tipo (2,0)

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot móvil tipo uniclo controlado para el seguimiento de postura. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la cinemática del robot móvil y el controlador no lineal para el seguimiento de postura. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del robot móvil durante el desarrollo de la tarea de seguimiento.

### ♣♣♣ Ejemplo 9.4

Considérese nuevamente el robot móvil tipo(2,0) y el algoritmo de control no lineal (9.63)-(9.64). Realizar la simulación en MatLab del control de seguimiento de postura de dicho robot considerando  $\dot{\varphi}_L = 2$  rad/s y  $\dot{\varphi}_R = 3$  rad/s.

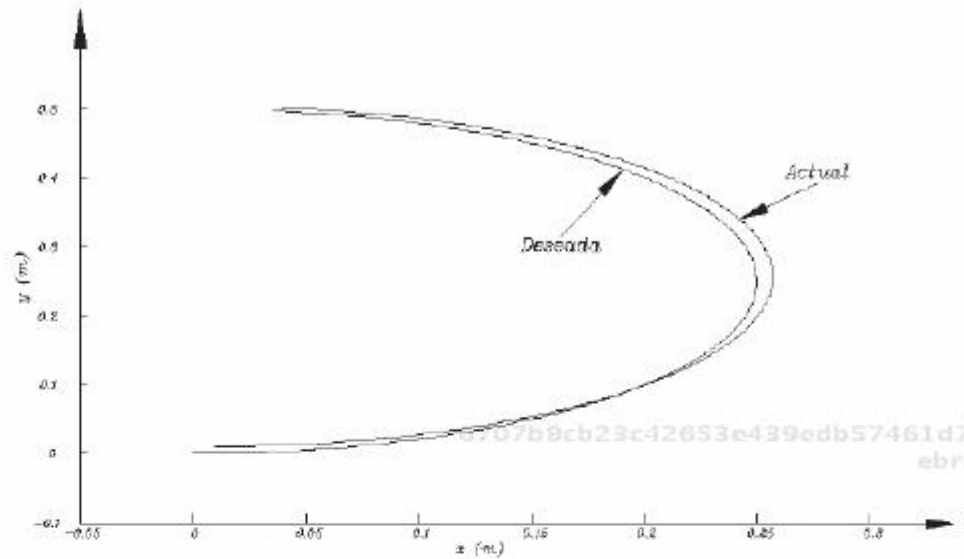
### Solución

Para el controlador de seguimiento de postura se utilizó

$$k_1(v_r, \omega_r) = \text{sen}(v_r)$$

$$k_2 = 10$$

$$k_3(v_r, \omega_r) = \text{sen}(\omega_r).$$



**Figura 9.19** Trayectoria sobre el plano  $x$ - $y$  de un robot uniciclo tipo(2,0) controlado para el seguimiento de postura.

Para simular numéricamente en MatLab el modelo cinemático se consideró  $r=3$  cm y  $L=10$  cm. Los resultados obtenidos en la simulación se presentan en las figuras 9.19 y 9.20. En la figura 9.19 se muestra la evolución de la trayectoria seguida del robot en términos de la trayectoria de referencia (deseada) y la trayectoria generada sobre el plano por el movimiento del vehículo. Se puede apreciar un adecuado seguimiento de la referencia.

Para verificar el cumplimiento del objetivo de control de seguimiento de postura, en la figura 9.20 se presentan las tres componentes del error de seguimiento, las cuales tienden a cero conforme el tiempo evoluciona. Por lo tanto, puede concluirse que el esquema de control no lineal utilizado permite realizar correctamente el seguimiento de postura.

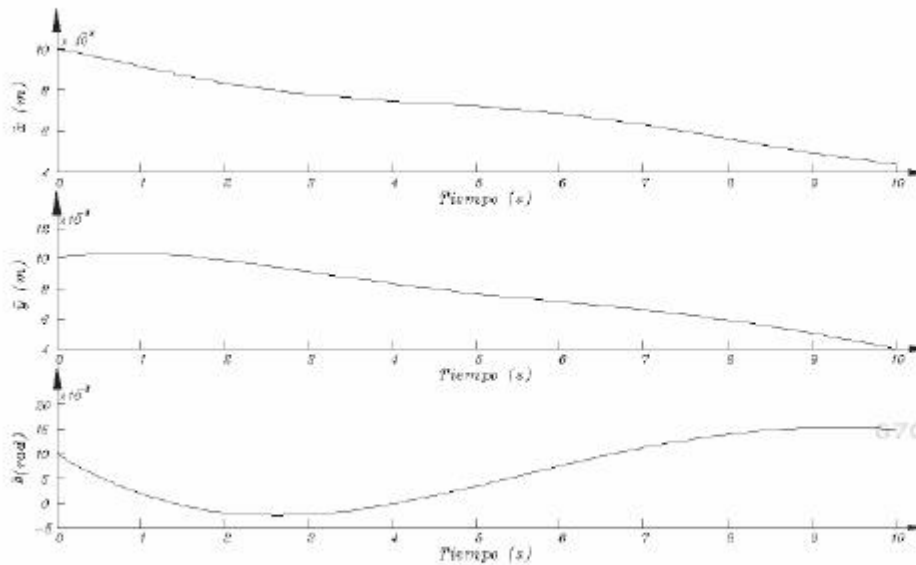


Figura 9.20 Componentes del error de seguimiento de postura  $\tilde{z} = z - z_r$ .

## 9.7 Resumen

La **robótica móvil** es una área de la robótica que se encarga del análisis, diseño, construcción y control de una clase particular de sistemas mecánicos que se desplazan con ruedas, patas o cualquier mecanismo que produzca desplazamiento lineal con respecto al centro de gravedad del robot móvil.

Este capítulo está destinado exclusivamente al estudio de los robots que se desplazan con ruedas y sus aplicaciones específicas científicas, comerciales, domésticas e industriales. El análisis presentado abarca los tipos de ruedas más usadas en robótica móvil, las restricciones de movilidad que las caracterizan y sus tipos de configuración.

De manera particular, se describen la cinemática y dinámica de robots móviles con ruedas, y sus potenciales aplicaciones en control automático. Asimismo, se presentan algunos esquemas de control para robótica móvil.



## 9.8 Referencias selectas

A continuación se presentan algunas referencias selectas de robótica móvil, donde el lector puede profundizar en los temas de cinemática, dinámica y control de robots móviles con ruedas.



### 9.2 Robots móviles

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



J. Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer-Verlag New York, 1995.



P. Muir. “*Modeling and control of wheeled mobile robots*”. Doctoral dissertation, tech. report CMU-RI-TR-88-20. Robotics Institute. Carnegie Mellon University. 1988.



A. Ollero. “*Robótica: manipuladores y robots móviles*”. Marcombo, 2001.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### 9.3 Configuración de robots móviles



J. Ackerman. “*Robust yaw damping of cars with front and rear wheel steering*”. In Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control. Tucson, Arizona, pp. 2586-2590, 1992.



D.M. Brienza & C.E. Brubaker. “*A steering linkage for short wheelbase vehicles: design and evaluation in a wheelchair power base - a technical note*”. J. Rehab. Res. Develop. 36(1), pp. 42-47, 1999.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary





D. Gao & W.J. Book. “*Steerability in planar dissipative passive robots*”. Int. J. Robot. Res. 29(4), pp. 353-366, 2010.



## 9.4 Cinemática de robots móviles



P.F. Muir & C.P. Neuman. “*Kinematic modelling of wheeled mobile robots*”. J. Robot. Syst. 4, pp. 281-329, 1987.



J.C. Alexander & J.H. Maddocks. “*On the kinematics of wheeled mobile robots*”. Int. J. Robot. Res. 8(5), pp. 15-27, 1989.



R.M. Murray, Z. Li & S.S. Sastry. “*A mathematical introduction to robotic manipulation*”. CRC Press. 1994.



## 9.5 Dinámica de robots móviles

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



J.C. Latombe. “*Robot motion planning*”. Kluwer Academic Publishers. Boston, MA. 1991.



G. Campion, G. Bastin & B. D’Andréa-Novel. “*Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots*”. IEEE Trans. Robot. Autom. 12(1), pp. 47-62, 1996.



C. Canudas, B. Siciliano & G. Bastin, “*Theory of robot control*”. Springer-Verlag. 1996.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA



## 9.6 Control de robots móviles



G. Campion, B. D'Andréa-Novel & G. Bastin. “*Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems*”. In Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control. Brighton, UK, pp. 1184-1189, 1991.



C. Canudas, H. Khenouf, C. Samson & O.J. Sordalen. “*Nonlinear control design for mobile robots*”. In: Y. F. Zheng (ed.), *Recent Trends in Mobile Robots*. World Scientific. Singapore, pp. 121-156, 1993.



B. D'Andréa-Novel, G. Campion & G. Bastin. “*Control of non-holonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization*”. Int. J. Robot. Res. 14, pp. 543-559, 1995.



## 9.9 Problemas propuestos

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de robótica móvil.



## 9.2 Robots móviles

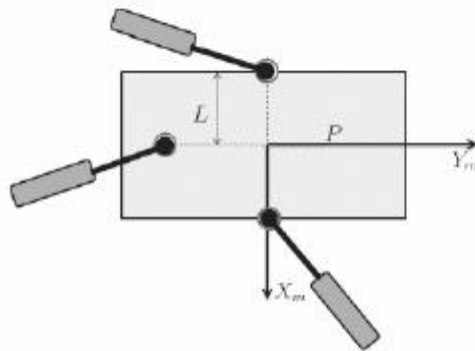
9.2.1 Para el análisis matemático de un RMR, presentado en este capítulo, se consideraron cinco hipótesis, dos de ellas son: “el contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto” y “no existe deslizamiento”, explique cuál es la importancia de estas dos hipótesis y, en qué cambiaría el análisis matemático si no se consideraran.

9.2.2 Compruebe las ecuaciones de restricción 9.4 y 9.5, correspondientes a la rueda fija, con base en la figura 9.3.



### 9.3 Configuración de robots móviles

9.3.1 Considérese el robot móvil tipo(3,0) que se muestra en la figura 9.21, compuesto de tres ruedas de centro orientable desplazado. Determinéense las ecuaciones de restricción (9.12)-(9.13) que representan la estructura de este robot.



**Figura 9.21** Robot móvil tipo(3,0) con ruedas de centro orientable desplazado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary



### 9.4 Cinemática de robots móviles

9.4.1 Obténgase el modelo cinemático de postura del robot móvil tipo(1,2) mostrado en la figura 9.22.

9.4.2 Para el robot móvil tipo(2,0) de la figura 9.11, obténgase su modelo cinemático de configuración.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary

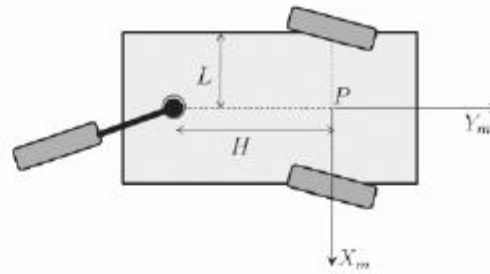


Figura 9.22 Robot móvil tipo(1,2).



## 9.5 Dinámica de robots móviles

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

- 9.5.1 ¿Para qué se utilizan los multiplicadores de Lagrange en el análisis dinámico de un robot móvil con ruedas?
- 9.5.2 Explique los principales fenómenos físicos presentes en la dinámica de un robot móvil con ruedas.



## 9.6 Control de robots móviles

- 9.6.1 Describa dos problemáticas de control para robots móviles con ruedas.
- 9.6.2 Obtenga la representación cinemática para controlar un robot móvil en configuración Ackerman (figura 9.7), considerando como entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  que corresponden a la velocidad de conducción y la velocidad de dirección, respectivamente.
- 9.6.3 Simule el comportamiento cinemático del robot móvil en configuración Ackerman y diseñe un controlador no lineal para resolver el problema de seguimiento de postura.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

# Índice analítico

## A

ABB, 12, 31, 36

acción derivativa, 349,  
350,

353, 355

acciones acotadas, 392

actuadores

14

eléctricos, 47

Adept Technology, 32

adición de vectores, 102

AER, 34

algoritmo

333

de control, 17, 18,

43, 333

recursivo de míni-  
mos cuadrados,  
295

AMCA, 34

AMM, 34

amortiguamiento, 355

amplificador elec-  
trónico, 50

AMROB, 34

análisis cualitativo PD,  
342

análisis de estabilidad,  
122

androide, 4, 11

androides, 10

ángulos

de Euler 207, 209

de orientación, 209

roll, pitch, yaw,  
209

$\theta, \phi, \psi$ , 211

antropomórfico, 203

Arimoto, 336, 337, 359

armadura, 55

arquitectura abierta, 63

articulación, 14, 205

ASIMO, 33

ATI, 476

atractor, 153

AutoCad, 75

Automatix, 32



**B**

BARA, 34  
 Barbashin, 184  
 BCD, 80  
 Bosch, 32  
 brushless, 21  
 brushless resolver, 70  
 BUAP, 33, 61

**C**

código  
     binario cíclico, 80  
     binario digital, 80  
     fuente, 164, 209  
     MatLab, 164  
 cadena cinemática, 211  
 cascabeleo, 58  
 CATIA, 75  
 CCD, 412  
 centrífuga, 269  
 centro de masa, 178  
 CICESE, 32  
 ciclos límite, 183  
 cilíndrico, 203  
 cinemática  
     204, 210

diferencial, 224, 235  
 diferencial directa,  
 218  
 directa, 203, 210,  
 218, 226, 234,  
 238, 243, 245  
 inversa, 212, 224,  
 234

cirugías, 5

coeficiente de fricción, 178

columna de una matriz,  
 107

compliant, 481

configuración

    Ackerman, 520

    cartesiana, 243

    cilíndrica, 241

    esférica, 238

    síncrona, 522

    SCARA, 236

conjunto invariante, 183

conmutador, 55

continuidad Lipschitz,  
 144

control

    5, 18

    arco tangente, 392

    cartesiano, 404

    acciones acotadas,  
 377

    acciones no acotadas,  
 365

    de fuerza, 473, 482

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

de impedancia,  
474, 489

de interacción, 473

de movimiento,  
440

de posición, 334

de robots, 17, 333

de robots móviles,  
531

de trayectoria, 440

híbrido, 486

indirecto, 473

on/off, 393

PD, 336, 338, 341,  
343, 350, 352, 354,  
358, 439

PD péndulo, 343

PD+, 439, 443

PID, 357–359

por visión, 412

proporcional

derivativo, 178,  
336, 351

punto a punto, 336,  
413

signo, 393

tangente hiperbóli-  
co, 392

todo/nada, 393

controladores hiperbóli-  
cos, 392

convención Denavit-  
Hartenberg, 213, 217

convergencia monótona,  
128

Coriolis, 261

CPR, 76

CRW, 33



Denavit, 213

desempeño, 335, 377,  
394

determinante de una  
matriz, 115

determinantes menores,  
135

diagrama fase, 173

diodos LED, 16

DIRA, 34

direct drive, 19, 20, 58

DM1004C, 69

DM1050A, 69

Don Cucuo el Guapo, 32

DrvGII, 67

DrvGIII, 67

DSP, 47

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ALFAOMEGA

**E**

ecuación

- algebraica de Lya-  
punov, 168
- diferencial autóno-  
ma, 359
- en lazo cerrado,  
360

ecuaciones

- de Euler Lagrange,  
255
- de Maxwell, 51

efecto inercial, 259

electronic driver, 49

Elektro, 31

elementos

- eléctricos, 14
- foto-sensibles, 74
- hidráulicos, 14
- neumáticos, 14

encoder

- absoluto, 73,80
- de cuadratura, 78
- incremental 73,77
- magnético, 83
- ópticos, 15,73
- relativo, 77

end effector, 207

energía

- cinética, 255

- mecánica, 19
- potencial, 255
- térmica, 19
- total, 150, 255

engranes, 19

entorno dócil, 481

entorno rígido, 481

EPSON, 13

Epson, 36

equilibrio asintótica

mente estable, 155

equilibrio estable, 158

error de posición, 18,  
334, 339, 342, 345, 351,  
358, 371, 376, 396, 402,  
414, 433

error de seguimiento,  
442

error de velocidad, 442

esférico, 203

eslabón, 205

espacio de trabajo, 206

espacio euclidiano, 101

espacio lineal normado,  
186

espacio vectorial, 100

estabilidad

154

asintótica, 155

asintótica global,  
159, 160

exponencial global,  
160

uniforme, 154

estator, 54

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

estudio cualitativo PD,  
343  
Euler, 255  
exactitud, 90  
extremo final, 207

## F

FAMULUS, 31  
FANUC, 13, 32, 36  
Fanuc-2000iA/165F,  
421  
Faraday, 53  
fenómeno  
    de elasticidad, 19  
    de fricción, 19, 263,  
    378  
    disipativo, 19  
    inercial, 260

fisioterapia, 5  
fotodiodos, 74  
fotosensible, 16  
fototransistor, 16,74  
FPGA, 62  
fricción  
    de Coulomb, 263  
    estática, 263  
    viscosa, 263

fuerza de par, 64  
fuerza  
    centrípetas, 261

de Lorentz, 53  
función  
    acotada, 128  
    candidata de Lya-  
    punov, 157  
    continua, 128, 158  
    creciente, 128  
    cuadrática, 142  
    de energía, 142,  
    336, 340, 363, 370,  
    375  
    decreciente, 128  
    definida negativa,  
    135  
    definida positiva,  
    128,132, 135, 158  
    definida positiva  
    global, 128  
    definida positiva  
    local, 128  
    discontinua, 128  
    escalar, 130, 131  
    indefinida, 135  
    monótona, 128  
    semidefinida nega-  
    tiva, 135  
    semidefinida posi-  
    tiva, 129,134

## G

ganancia  
    derivativa, 358,  
    366, 374

proporcional, 355,  
357, 366, 374

Gauss, 293  
General Electric 32  
General Motors, 32  
gradiente, 138  
gray code, 81  
Gustav Jacobi, 137

## H

háptica, 479  
hamiltoniano, 255  
Hendrik Antoon  
Lorentz, 54  
home position, 224  
Honda Motor, 33

## I

IASTED, 33  
identificación paramétrica, 291  
IEEE, 33  
IFAC, 33  
IFR, 34  
impedancia mecánica, 474  
índice de desempeño, 394, 465  
INTECH, 34  
intelligent drive, 67  
ISO, 13

## J

jacobiano, 219  
jacobiano analítico, 219  
joint, 205

## K

Karel Capek, 4, 10, 31  
Kelly, 32  
Krasovskii, 184  
KUKA, 13, 31, 36

## L

lagrangiano, 255  
Lagrange , 256  
LaSalle, 183, 184, 336,  
376  
led, 48  
LED's, 73  
Leonardo da Vinci, 26,  
28, 30, 44, 263  
ley asociativa, 113  
ley distributiva, 113  
lineal, 14  
linealidad, 90  
linealidad en los  
parámetros, 265  
Lipschitz, 144, 145  
liquid crystal display, 48  
longitud de onda, 73  
Lorentz, 53  
luz infrarroja, 16  
Lyapunov, 122, 150,  
151, 167





marco inercial, 261

matrices

106

adjunta, 117

antisimétrica, 120,

261

cuadrada, 115, 117,

125

de cofactores, 116

de inercia, 260

de rotación, 208

definida negativa,

135, 167

definida positiva,

108, 131, 132, 135

diagonal, 108

especiales, 108

indefinida, 135

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

inversa, 117

jacobiana, 137, 238

ortogonal, 209

semidefinida posi-

tiva, 135

simétrica, 119, 135

transpuesta, 110

Maxwell, 50

mecatrónica, 4

método directo de Lya-

punov, 158

Michael Faraday, 53

mínimos cuadrados,

293, 295

modelo

de energía, 266

de potencia, 267

de potencia filtra-

da, 307

de regresión, 302

dinámico, 253, 257,

359

dinámico carte-

siano, 287

dinámico filtrado,

303

Stribeck, 263

modo

par, 50

posición, 50

velocidad, 50

moldeo de energía, 18,

333, 343, 359, 365, 405,

412, 418, 423, 456, 460

momento de inercia, 178

morfología, 203

MOTOMAN, 13

Motoman, 36

motor

15

eléctrico, 50

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

**N**

## números

- enteros, 101
- naturales, 101
- reales, 101

## norma

- espectral, 126
- euclidiana, 105
- de un vector, 105
- de una matriz, 126

## NSK, 92

**O**

- objetivos de control, 19
- operaciones de matrices, 109
- optoelectrónica, 73
- oscilaciones, 378
- oscilador armónico, 164

**P**

## péndulo

- 178, 182
- robot, 223, 275

## Palletizer, 31

## par

- aplicado, 18
- calculado, 460

- parámetros Denavit-Hartenberg, 223
- Parkercompumotor, 92
- pasividad, 266
- PD+, 443, 446
- performance, 394
- Phantom Omni, 480
- plano fase, 162
- polinomio característico, 126
- pose, 203
- posición
  - articular, 14
  - de casa, 224, 229
  - deseada, 18

- potenciómetros, 71
- precisión, 90
- principio de invariancia, 183
- prismáticas, 14
- producto de matrices, 112
- Programación FANUC, 421
- propiedad
  - asociativa, 102
  - conmutativa, 102
  - de antisimetría, 122
  - distributiva, 103
  - del modelo dinámico, 259

- puede de Wheatstone, 476

## PUMA

- 19, 32
- 600, 19

punto  
 de equilibrio,  
 148,359, 361, 375,  
 376, 388, 389, 403,  
 407  
 de equilibrio es-  
 table, 158

puntos fijos, 148

## Q

quirófano robotizado, 6  
 quirófanos, 6

## R

régimen transitorio, 355  
 rango, 90  
 Rayleigh-Ritz, 136, 341  
 rayos infrarrojos, 73  
 realidad virtual, 7  
 región de atracción, 153  
 regla de la mano  
 derecha, 53  
 regresión lineal, 304  
 regulación, 334  
 regulador  
 413  
 PD, 443  
 rehabilitación neu-  
 rológica, 501

renglón de una matriz,  
 107  
 repetitividad, 90  
 resistencia magnética,  
 84  
 resolution, 89  
 resolver, 70  
 resta de matrices, 111  
 restricciones  
 de movilidad, 515  
 holónomas, 529

Richard S. Hartenberg,  
 215  
 RMR, 512  
 robótica, 3-5, 10, 24, 33  
 Robai, 36

robot  
 3,4  
 antropomórfico,  
 222, 231, 232  
 ASIMO, 11  
 cartesiano, 203,  
 222, 243, 245  
 cilíndrico, 222, 241  
 Cuco el Guapo, 32  
 da Vinci, 6  
 de 2 gdl, 226  
 esférico, 222  
 IMI, 21  
 Institute of Ameri-  
 ca, 4  
 móvil, 9, 511  
 manipulador, 211,  
 359

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

- MIT-MANUS, 502
- pórtico, 222
- PACO-PLUS, 11
- SCARA, 222
- Standford, 31, 238
- robots
  - aéreos, 10
  - humanoides, 10
  - industriales, 12, 222
  - manipuladores, 3
- rotación, 208
- rotacional, 14
- rotor, 15
- rotradi, 315, 319
- RT, 34
- rueda fija, 515
- set point, 334
- simulación de sistemas dinámicos, 166
- simulador péndulo, 352
- singularidades, 220
- sintonía de ganancias, 350
- sistema
  - de engranes, 60
  - de referencia cartesiano, 208
  - dinámico, 144, 174
  - masa resorte amortiguador, 352
  - mecánico oscilador, 162
  - no-holónomos, 529
- SolidWorks, 75
- Sturgeon, 53
- suma
  - de matrices, 109
  - de vectores, 102

**S**

- salida de la fase, 89
- SCARA, 203, 236, 238
- sensor
  - 14
  - de fuerza, 15,475
  - de posición, 50
- servo actuadores, 21
- servo amplificador, 51, 91, 377
- servo mecanismo, 53
- servomotor, 14,50, 64

**T**

- tacómetros, 72
- teach pendant, 16, 421
- teleoperación, 480
- teoría de estabilidad, 150
- teorema
  - de Barbashin
  - Krasovskii LaSalle,

de estabilidad exponencial global, 159  
de Rayleigh-Ritz, 136  
de Sylvester, 132

Torricelli, 150

transductor

48, 84, 477  
nano, 477

transformación homogénea, 203, 208, 218, 226, 240

transmisión directa, 19, 20

translación, 208

traza de una matriz, 115

tribología, 263

TRS, 34

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

## U

Unimate, 36

UNIMATION, 32

Unimation, 20

uniones, 14

## V

valores propios, 125

vectores, 100

vehículos autónomos, 512

velocidad angular, 218

velocidad articular, 14, 218, 219

velocidad de movimiento, 18

velocidad lineal, 218, 219

videos del péndulo, 346

visión artificial, 411

visual servoing, 411, 412

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

## W

Westinghouse Electric Corporation, 31

William Rowan Hamilton, 100

workspace, 206

WSEAS, 33

## Y

Yamaha Robotics, 36

YASKAWA, 36

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary