









-  Ahmed A. Shabana. “*Dynamics of multibody systems*”. Second Edition. Cambridge University Press. 1998.
-  Jerry B. Marion. “*Dinámica clásica de las partículas y sistemas*”. Editorial Reverté. S. A. 2000.
-  H. Goldstein. “*Mecánica clásica*”. Editorial Reverté. S. A. 2000.
-  M. R. M. Crespo da Silva. “*Intermediate dynamics*”. McGrawHill. 2004.



### 5.3 Modelo dinámico

Las propiedades del modelo dinámico en coordenadas articulares o generalizadas fueron consultadas en:


-  Takegaki M. & S. Arimoto. “*A new feedback method for dynamic control of manipulators*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. 103: pp. 119–125. 1981.
-  Ortega R. & M. Spong. 1989. “*Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial*”. Automatica. 25(6): pp. 877–888 1989.
-  Jorge Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer. 1997.
-  R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003.

-  R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loria. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005.
-  L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.
-  Mark W. Spong, Seth Hutchinson & M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley & Sons, Inc. 2006.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

#### 5.4 Modelo dinámico cartesiano

El desarrollo de las propiedades del modelo dinámico cartesiano fueron depuradas y reformuladas de:



-  Pablo Sánchez & Fernando Reyes “*Cartesian control for robot manipulators*”. Edit Intech Croatia. Robot manipulators, trends and development. pp. 165- 212. 2010.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757


ebrary





#### 5.5 Identificación paramétrica


-  B. Armstrong, O. Khatib & J. Burdick, “*The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm*”. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. pp. 510-518, (1986).
-  G. C. Goodwin & K. S. Sin. “*Adaptive filtering prediction and control*”. Prentice-Hall, NY. 1984.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary


 M. Gautier & W. Khalil. “*On the identification of the inertial parameters of robot*”. Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control. Austin, Texas, pp. 2264–2269. 1988.


 C. Canudas and A. Aubin. “*Parameters identification of robot manipulators via sequential hybrid estimation algorithms*”. Proc. IFAC’90 Congress, Tallin, pp. 178–183, (1990).


 M. Prüfer, C. Schmidt & F. Wahl. “*Identification of robot dynamics with differential and integral models: a comparison*”. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Diego, California, Vol 1, pp. 340–345. 1994.

 F. Reyes F. & R. Kelly. “*A direct drive robot for control research*”. Proc. IASTED International Conference, Applications of Control and Robotics, Orlando, FL. pp. 181–184. 1996

El modelo de regresión de potencia fue tomado de las siguientes referencias:

 F. Reyes & R. Kelly. “*Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot*”. Robotica. Cambridge University Press. 15, pp. 563-571. 1997.

 F. Reyes F. & R. Kelly. “*On parameter identification of robot manipulators*”. Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Albuquerque, New Mexico. April. pp. 1910-1915. 1997.

 F. Reyes, and R. Kelly. “*An identification scheme for vision systems*”. International Federation of Automatic Control, Beijing P. R. China, July 5-9. Vol X, pp. 1400–1406. 1999.



F. Reyes, & E. Lopez. "A new hamiltonian-based identification scheme for robot manipulators". Proceedings of the 5th WSEAS-IMCCAS. Cancun, Mexico, May 11-14. pp. 126-131. 2005.



## 5.6 Robot experimental



F. Reyes. & Jaime Cid. "Rotradi: robot de transmisión directa de 3 gdl". Reporte interno de la Escuela de Ciencias de la Electrónica, BUAP. 1998.



F. Reyes. "Celda robótica". Reporte técnico CONACYT 31927. 2002.

## 5.9 Problemas propuestos

Se presenta un conjunto de problemas propuestos para la reflexión, así como para mejorar las habilidades y conocimientos de dinámica de robots

manipuladores.

ebrary



## 5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

- 5.2.1 ¿Por qué se emplean las ecuaciones de Euler Lagrange en la obtención del modelo dinámico de un robot manipulador?
- 5.2.2 ¿Cuál es la interpretación física de la energía cinética?
- 5.2.3 Explique la energía potencial.
- 5.2.4 ¿Cómo interpreta el hamiltoniano?
- 5.2.5 Proporcione alguna interpretación física del lagrangiano.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA





### 5.3 Modelo dinámico

5.3.1 Explicar cualitativamente el fenómeno inercial de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad.

5.3.2 Explicar cualitativamente el fenómeno de fuerzas centrípetas y de Coriolis de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad.

5.3.3 ¿Qué es el fenómeno de fricción y por qué se dice ser disipativo?

5.3.4 Mencione las principales hipótesis que validan al modelo dinámico de un robot manipulador.

5.3.5 Demostrar la propiedad de antisimetría del modelo dinámico en coordenadas articulares.



### 5.4 Modelo dinámico cartesiano

5.4.1 ¿Cómo es la energía cinética cartesiana en el modelo dinámico (5.54)?

5.4.2 ¿Por qué la matriz jacobiana del robot debe ser de rango completo en el modelo dinámico cartesiano?

5.4.3 ¿Tiene singularidades la ecuación (5.52)?

5.4.4 ¿Se conservan las propiedades del modelo dinámico en coordenadas articulares al ser convertido en coordenadas cartesianas?



## 5.5 Identificación paramétrica

5.5.1 Considérese el siguiente sistema

$$\dot{x} = -\text{sen}(x) + 0.768x^2$$

Obtenga el regresor de este sistema para encontrar los valores de  $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$  y realice la implementación en lenguaje MatLab empleando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (5.84). Realice la simulación para la condición inicial  $x(0) = 3.45$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

5.5.2 Obtenga el regresor del siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = -0.00456x + 0.00034u$$

donde  $u = 1$ .

Realice la implementación del regresor en MatLab empleando mínimos cuadrados recursivo (5.84).

5.5.3 Obtenga el regresor del siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{sen}(t) \quad (5.115)$$

donde  $t$  es la variable del tiempo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Implemente en MatLab el regresor usando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (5.84) para  $t = 0 \dots 10$  segundos.

5.5.4 Implemente en MatLab para el caso de un péndulo-robot los siguientes modelos de regresión usando mínimos cuadrados (5.84):

- modelo de energía del ejemplo 5.8.
- modelo dinámico y dinámico filtrado del ejemplo 5.7.
- modelo de la potencia filtrada del ejemplo 5.9.

¿Qué criterios toma para seleccionar el parámetro  $\lambda$ ?

5.5.5 Implemente en MatLab para el caso de un robot de 2 gdl los siguientes modelos de regresión usando mínimos cuadrados (5.84):

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

- a) modelo dinámico y dinámico filtrado del ejemplo 5.10.
- b) modelo de energía del ejemplo 5.11.
- c) modelo de la potencia filtrada del ejemplo 5.12.



## 5.6 Robot experimental

5.6.1 Realice una búsqueda en las principales universidades y centros de investigación de México para determinar el tipo y características de la infraestructura de robótica que poseen.

Producto de esa búsqueda de información:

- a) ¿Qué porcentaje de esa infraestructura es comprada?
- b) ¿Qué porcentaje de esa infraestructura fue diseñada y desarrollada en el país (tecnología nacional)?
- c) ¿Cómo ha impactado en beneficio de alumnos, planta académica, institución y sociedad?
- d) ¿Qué conclusiones generales puede presentar?

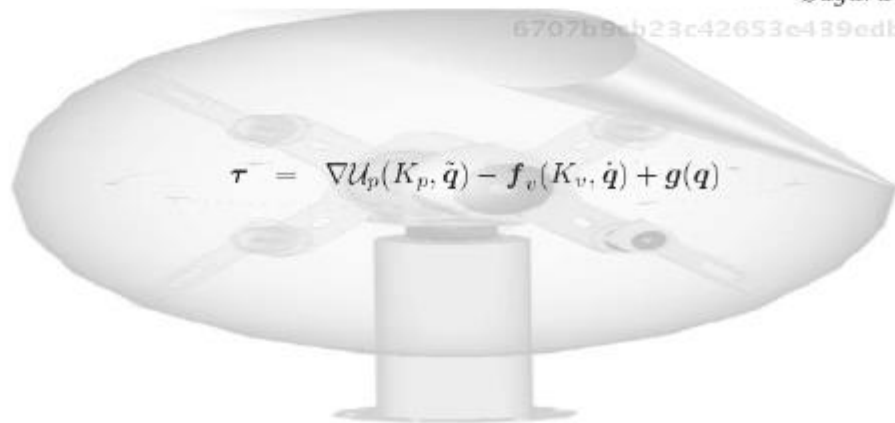
# 6

## CAPÍTULO

# Control de posición de robots manipuladores

*La robótica es matemática en movimiento.*

*Suguru Arimoto*



6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary




- 6.1 Introducción
- 6.2 Regulación
- 6.3 Moldeo de energía
- 6.4 Índice de desempeño
- 6.5 Aplicaciones del control de posición
- 6.6 Resumen
- 6.7 Referencias selectas
- 6.8 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

## Objetivos





Presentar la metodología de moldeo de energía como técnica moderna de control automático para análisis y diseño de nuevas estructuras de control de posición para robots manipuladores.

### Objetivos particulares:

-  Análisis y diseño de una familia extensa de algoritmos de control.
-  Aplicaciones de control de posición en control punto a punto, guiado de robots e implementación de instrucciones robot para programación industrial.
-  Desempeño de esquemas de control.

## Competencias

Adquirir la habilidad y grado de conocimientos en:

-  Diseño de nuevos esquemas de control de alto desempeño.
-  Zonas de operación de servo amplificadores.
-  Desarrollo tecnológico de robots industriales.
-  Aplicaciones de control punto a punto.

## 6.1 Introducción

Hoy en día, la temática del control de robots manipuladores ha atraído la atención de la comunidad científica de robótica. Un punto de interés se ubica en el diseño de sistemas de control para robots manipuladores en aplicaciones industriales tales como estibado de cajas, ensamble, traslado, pintado de objetos, etc. Puesto que los robots industriales son capaces de realizar correctamente una variedad de actividades, a simple vista parecería innecesario desarrollar investigación sobre el tema de control de robots manipuladores. Sin embargo, es importante resaltar que la ejecución de la tarea encomendada al robot requiere alto desempeño y exactitud en sus movimientos.

El diseño de nuevos esquemas de control implica grandes retos teóricos que mejoran sustancialmente problemas de origen práctico. Además, su estudio resulta indispensable en aplicaciones que no pueden ser llevadas a cabo por medio de algoritmos de control tradicionales. De ahí que el diseño de controladores sigue siendo un problema de gran interés. Este capítulo está destinado a presentar la metodología de *moldeo de energía* para diseñar una familia extensa de algoritmos de control de robots manipuladores.

El problema general de control en coordenadas articulares de robots manipuladores es el control de trayectoria o *control de movimiento*, el cual consiste en determinar los pares aplicados a los servoactuadores que forman las articulaciones, de tal forma que las posiciones asociadas a las coordenadas articulares del robot  $\mathbf{q}(t)$  sigan con exactitud a la posición deseada  $\mathbf{q}_d(t)$  variante en el tiempo.

El control de posición o regulación de control de robots manipuladores es un caso particular de control de movimiento en el cual no hay una referencia variante en el tiempo que el robot haga seguimiento como en el caso de control de trayectoria, más bien es un punto constante en el tiempo al

### Algoritmo de control

En la práctica, una estrategia de control se lleva a la etapa de evaluación experimental o simulada a través de reglas gramaticales o sintaxis de un lenguaje de programación como por ejemplo C, C++, C#, MatLab, etc. Un algoritmo es un conjunto de reglas o instrucciones bien definidas para realizar un procedimiento; en este caso es la implementación de la ecuación del esquema de control. Por lo tanto, para los propósitos de la presente obra el término algoritmo de control será un sinónimo del concepto de programar o implementar la ecuación de la ley de control para su proceso de aplicación práctica, ya sea a nivel simulación o evaluación experimental.



que se le denomina posición deseada o *set point*. El objetivo de control es posicionar el extremo final del robot en ese punto y que permanezca ahí de manera indefinida. Por supuesto, para propósitos prácticos industriales una vez que el extremo final del robot alcanza el punto deseado, deberá pasar uno o más periodos de muestreo para cambiar de valor el punto deseado, entonces el actual punto deseado tomará el papel de condición inicial y el extremo final del robot se moverá al nuevo punto deseado, y así sucesivamente. Este concepto da la posibilidad de interpolar curvas para que el robot pueda seguir la trayectoria a través de un esquema de control de posición con puntos cercanos entre sí. En control automático se le denomina **control punto a punto**. Para realizar esta aplicación es necesario que el esquema de control que forma parte de la ecuación en lazo cerrado genere un punto de equilibrio asintóticamente estable, ya que no dependería de las condiciones iniciales.

Es importante aclarar que en control punto a punto no es controlada la velocidad de movimiento como en el caso de control de trayectoria, donde el error de posición y error de velocidad son controlados simultáneamente.

### Control de posición

Dentro de las aplicaciones industriales el control de posición ocupa un papel destacado; hoy en día la gran mayoría de aplicaciones de control punto a punto como traslado y pintado de objetos, estibado y pintura de carrocerías, etc., se realizan a través de control de posición. El problema de control de posición también se conoce como regulación: consiste en mover el extremo final del robot manipulador independientemente de su posición inicial  $\mathbf{q}(0)$  hacia una posición deseada constante  $\mathbf{q}_d$ . Los puntos intermedios entre la posición inicial y la referencia deseada no son controlados como tal, forman parte de la etapa transitoria de la respuesta del robot incluido en la señal de error  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  definida como la diferencia entre la posición deseada y la posición actual del robot  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$ . El punto final  $\mathbf{q}_d$  es la posición clave donde se realiza el control.

El objetivo de control se cumple cuando  $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ .

## 6.2 Regulación

El problema de control de posición o regulación consiste en mover el extremo final del robot manipulador desde cualquier posición inicial hacia una posición deseada. Esto significa que la *i*-ésima articulación del robot deberá moverse hacia la respectiva *i*-ésima posición deseada. Un ejemplo ilustrativo se muestra en la figura 6.1 donde el robot parte de la posición de reposo (posición de casa) para llegar a la configuración deseada permaneciendo indefinidamente en el punto de equilibrio. Formalmente, el objetivo del problema de control de posición está determinado por encontrar una ley de control  $\boldsymbol{\tau}$  que proporcione los pares aplicados a las articulaciones o servomotores del robot, de tal forma que la posición actual del robot  $\mathbf{q}(t)$  y la velocidad articular de movimiento  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  tiendan asintóticamente hacia la posición deseada  $\mathbf{q}_d$  y velocidad cero, respecti-

vamente, sin importar las condiciones iniciales. Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Nótese que en la figura 6.1 el robot se encuentra en su punto de equilibrio,



Figura 6.1 Control de posición: configuración inicial y deseada.

lo que significa que el objetivo de control (6.1) se cumplió sin depender de las condiciones iniciales, entonces la posición deseada se alcanza, por lo que la posición del extremo final robot permanece constante ( $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$ ) y por lo tanto la velocidad de movimiento es cero ( $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ).

Un algoritmo de control de posición o regulación es una fórmula o ecuación cuya principal característica es generar un atractor en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del algoritmo de control. Lo anterior significa que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. La importancia de esta problemática radica en proponer estrategias de control que no sólo cumplan con el objetivo de control  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{\mathbf{q}}^T(t) \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T(t)]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ , sino también que el desempeño práctico sea alto.

El *desempeño* de un algoritmo de control se refiere a realizar de manera



correcta y exacta la tarea programada al robot, lo que lo habilita a llevar a cabo diversas aplicaciones de *control punto a punto*. Por lo tanto, el espectro de aplicaciones comerciales, domésticas, científicas e industriales se incrementa.

### Control PD

El algoritmo de control proporcional derivativo (PD) es el más conocido y empleado en el área de control automático. En los inicios de la robótica (1950), este esquema de control se empleaba para controlar a los robots manipuladores. En esa época ya se conocía como esquema de control al algoritmo Todo/Nada, también conocido como control On/Off. No obstante, su desempeño práctico era muy pobre comparado al control PD. Durante muchos años el algoritmo de control PD fue empírico, es decir carecía de un sustento científico, y su empleo se reducía a la experimentación o aplicaciones prácticas por intuición. La demostración formal de estabilidad para la ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot manipulador y el algoritmo de control PD se realizó en 1981 por Takegaki y Arimoto, sentando las bases para el desarrollo de control de robots manipuladores.



### 6.2.1 Control proporcional-derivativo

El algoritmo de control *proporcional-derivativo* (PD) es el esquema de controlador más simple y más popular que puede ser usado en robots manipuladores. En 1981, Takegaki y Arimoto demostraron que la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador y el control proporcional derivativo tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable. La demostración consistió en formular una función de energía o función candidata de Lyapunov compuesta por la energía cinética del robot manipulador, más un término que realiza el papel de energía potencial artificial (una función cuadrática del error de posición) tal que su potencia o derivada temporal de la energía sea una función semidefinida negativa. Empleando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se demuestra la estabilidad asintótica del punto de equilibrio en forma global.

Para propósitos académicos, a continuación se explican en detalle todos los pasos de la demostración matemática realizada por Takegaki y Arimoto en 1981, de la estabilidad asintótica global del punto equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por el control PD y de la dinámica del robot manipulador de  $n$  gdl. El lector puede consultar en la sección de referencias selectas el trabajo presentado por Takegaki y Arimoto en 1981, donde por razones de espacio no se exponen los detalles de la demostración.

El control proporcional derivativo más compensación de gravedad (PD) está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = K_p \ddot{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad (6.2)$$

donde  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de error de posicionamiento que se define como la diferencia entre la posición deseada  $q_d$  y la posición actual del robot  $q$ .  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa la cual es una matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado en variables de estado que definen el problema de control de posición es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} [K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

la cual es una ecuación diferencial autónoma.

El diagrama a bloques del control proporcional derivativo con compensación de gravedad se muestra en la figura 6.2.

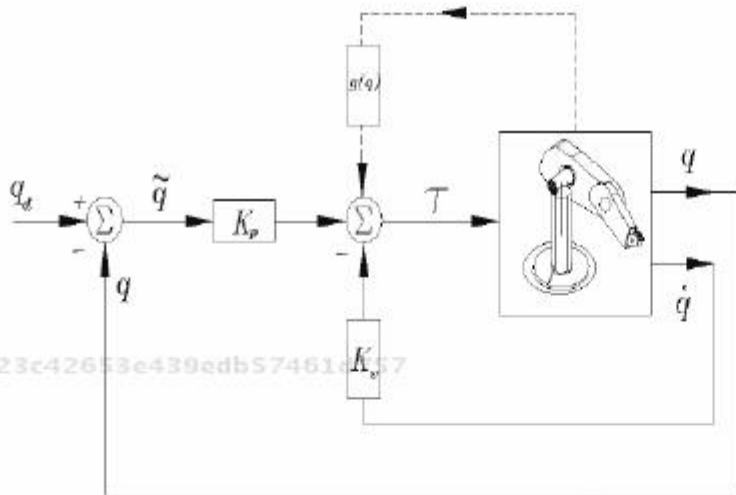


Figura 6.2 Diagrama a bloques del control PD

La posición articular del robot  $q$  se retroalimenta para generar la señal de error de posición  $\tilde{q} = q_d - q$ . La velocidad de movimiento  $\dot{q}$  se emplea para inyección de amortiguamiento. Obsérvese que el signo menos de la acción de control derivativa sirve para contrarrestar la energía al control proporcional. El término de compensación de gravedad  $g(q)$  es una componente esencial para la unicidad del punto de equilibrio. Sin embar-

### Suguru Arimoto (1936....)




Suguru Arimoto nació el 3 de agosto de 1936 en Hiroshima, Japón. Licenciado en matemáticas por la Universidad Kyoto en 1959. Trabajó para eléctrica de Oki de 1959 a 1961. Doctor en Ingeniería de Control por la Universidad de Tokyo en 1967. De 1962 a 1967 fue investigador asistente en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Tokyo. En 1968 estuvo en la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la misma Universidad. Desde 1997 ha sido profesor del Departamento de Robótica de la Universidad de Ritsumeikan. El profesor Arimoto ha realizado importantes contribuciones en la teoría de control, cibernética, máquinas inteligentes; particularmente en robótica propuso las bases de moldeo de energía para control de posición, diversos esquemas de pasividad, control de impedancia, control cartesiano, etc. De 1995 a 1997 fue el presidente de la Sociedad de Robótica de Japón (RSJ). Ha recibido múltiples reconocimientos.


go, esta condición no es suficiente, también se requiere que las ganancias proporcional y derivativa sean matrices definidas positivas.

El término  $g(q)$  se requiere en la implementación del control PD, y se debe conocer como parte de la dinámica parcial del robot si el movimiento es en un plano vertical o en general en su espacio tridimensional. Para el caso en que el movimiento sea en un plano horizontal, la energía potencial es constante y el gradiente de la energía potencial o par gravitacional  $g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$  es cero.


Para realizar el análisis sobre la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{q}^T \ \dot{q}^T]^T = [0^T \ 0^T]^T$  se tienen las siguientes consideraciones:


 Obsérvese que en la primera componente de la ecuación (6.3) en lazo cerrado  $-\dot{q} = -I\dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0$ , puesto que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.

Por otro lado, en la segunda componente de la ecuación (6.3) se tiene lo siguiente:

 Por propiedades matemáticas del modelo dinámico del robot manipulador la matriz de inercia  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa existe  $M(q)^{-1}$  y es definida positiva (propiedad 5.1).

 Por diseño, las ganancias proporcional  $K_p$  y derivativa  $K_v$  son matrices definidas positivas.

 Debido a que se ha demostrado para la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.3) que  $\dot{q} = 0$ , entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface  $C(q, \dot{q}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (propiedad 5.7).

 Por otro lado  $K_p \tilde{q} = 0 \iff \tilde{q} = 0$ , debido a que la ganancia proporcional es una matriz definida positiva, es decir  $K_p > 0$ .



Por lo tanto, queda demostrado que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (6.4)$$

El primer término de esta ecuación es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. El segundo término realiza el papel de energía potencial artificial, la cual es una función cuadrática del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y por diseño la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz definida positiva. Por lo tanto la función  $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$  es definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.4) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.5)$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (6.6)$$

La derivada del error es  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$  debido a que la posición deseada  $\mathbf{q}_d$  es una constante. Sustituyendo la aceleración contenida en la segunda componente de la ecuación (6.3) se obtiene:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (6.7)$$

$$= \underbrace{\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \quad (6.8)$$

Obsérvese que el primero y último término de (6.8) se cancelan (ver capítulo 3, Preliminares matemáticos, sección 3.2.1 producto interno  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$  =



$\mathbf{y}^T \mathbf{x}$  para  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ). Es decir, para este caso sí  $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{y} = K_p \tilde{\mathbf{q}}$ , entonces  $\underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}_{\mathbf{x}^T \mathbf{y}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}}_{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}$ , donde  $K_p^T = K_p$ . Además, empleando la propiedad de antisimetría del modelo dinámico 5.9, agrupando los términos tercero y cuarto de la ecuación (6.8) se obtiene:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} [ \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) ] \dot{\mathbf{q}} = 0.$$

Tomando en cuenta los anteriores argumentos, la derivada temporal de la función de energía (6.4) obtiene la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (6.9)$$

es decir, cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, por lo que queda demostrada la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3).

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.3) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (6.10)$$

Nótese que  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ , si  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y  $\tilde{\mathbf{q}}$  puede ser cualquier vector. Para que la solución  $[\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  de la ecuación en lazo cerrado (6.3) pertenezca a  $\Omega$  es necesario que  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Además, puesto que  $K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  sólo si  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , entonces el máximo conjunto invariante en  $\Omega$  es  $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \right\} \quad (6.11)$$

puesto que  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$  es una función positiva definida con un único y global mínimo en  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0}$ , entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en  $\Omega$ . Por lo tanto, usando el principio de invariancia

de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Considérese un estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones de la ecuación en lazo cerrado (6.3) sobre las cotas de las trayectorias. Debido a que la ecuación (6.4) es una función definida positiva y su derivada con respecto al tiempo (6.9) es una función semidefinida negativa, entonces la función de energía es decreciente, es decir:

$$0 < V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

por lo que se deduce que:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0,$$

utilizando el teorema 3.1 de Rayleigh-Ritz se obtienen las siguientes cotas:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

(6.13)

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}(K_p)}} \leq \sqrt{\frac{\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^{2\beta} + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 \lambda_{\max}(K_p)}{\lambda_{\min}(K_p)}}$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}} \leq \sqrt{\frac{\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^{2\beta} + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 \lambda_{\max}(K_p)}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}}$$

(6.14)

Para el controlador PD con compensación de gravedad pueden obtenerse ciertas condiciones que permitan obtener la sintonización de las ganancias proporcional y derivativa  $K_p$  y  $K_v$ , respectivamente, de tal forma que el controlador permanezca en acciones de control acotadas. Para esta finalidad el objetivo es mantener  $\tau_i \leq \tau_i^{\text{Max}}$  donde  $\tau_i^{\text{Max}}$  es el par máximo

capaz de suministrar el  $i$ -ésimo actuador, la selección de  $K_p$ ,  $K_v$  se realiza de la siguiente manera:

$$\alpha_1 \lambda_{K_p}^{max} + \alpha_2 \lambda_{K_v}^{max} \leq \tau_i^{max} \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

$$\|\bar{\mathbf{q}}(t)\| \leq \alpha_1 \quad \forall t \geq 0,$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \alpha_2 \quad \forall t \geq 0$$

donde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}}{\lambda_{K_p}^{min}}} \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| + \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{max}}{\lambda_{K_p}^{max}}} \|\bar{\mathbf{q}}(0)\| \quad (6.16)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}}} \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| + \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}}} \|\bar{\mathbf{q}}(0)\|. \quad (6.17)$$

donde  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}$ ,  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ ,  $\lambda_{K_p}^{max}$ , y  $\lambda_{K_p}^{min}$  representan los valores propios mínimos y máximos de las matrices de inercia  $M(\mathbf{q})$  y de la ganancia proporcional  $K_p$ , respectivamente.



## 6.2.2 Análisis cualitativo del control PD

El algoritmo de control proporcional-derivativo más compensación de gravedad (6.2) tiene en su estructura matemática el esquema de control proporcional y la acción de control derivativo. El control proporcional está formado por  $K_p \bar{\mathbf{q}}$  donde  $K_p$  es una matriz definida positiva denominada ganancia proporcional. El nombre de *control proporcional* resulta más que evidente, puesto que el producto de la ganancia proporcional por el error de posición justifica por sí sólo su nombre; en otras palabras, la ley de control es directamente proporcional al error de posición. La acción de control derivativa formada por  $K_v \dot{\mathbf{q}}$  donde  $K_v$  es una matriz definida positiva denominada ganancia derivativa tiene el efecto de amortiguamiento o freno mecánico a través de la inyección de la velocidad

articular  $\dot{q}$ . Normalmente sucede que el término  $K_v \dot{q}$  se confunde como control derivativo, lo cual es una mala interpretación, ya que siempre debe ser visto como una acción de control derivativo cuya finalidad es mejorar el desempeño del control proporcional.

La estructura del control PD tiene un término parcial de la dinámica del robot, el par gravitacional, el cual se emplea en robots que se mueven en el plano vertical o en general en el espacio tridimensional. En los robots cuyo movimiento se encuentra restringido a un plano horizontal, la energía potencial es constante y por lo tanto el par gravitacional es cero.

Para entender el funcionamiento práctico del control proporcional derivativo con compensación de gravedad, considérese un péndulo-robot como el de la figura 5.2: se desea colocar el extremo final del péndulo en  $q_d = 90$  grados. Las condiciones iniciales son: posición  $q(0) = 0$  grados y para la velocidad  $\dot{q} = 0$  grados/seg.; la posición de casa es colocada sobre el eje  $y_-$ .

El estudio cualitativo del control PD se llevará a cabo en dos fases. La primera etapa consiste en estudiar únicamente el esquema de control proporcional sin incluir la acción derivativa, entonces se observará la respuesta del péndulo sin freno mecánico, es decir con  $k_v = 0$ . La segunda etapa consiste en incluir el efecto de amortiguamiento.

Con respecto a la primera fase, la ganancia derivativa  $k_v$  es cero, entonces se obtiene lo siguiente:

$$\tau = k_p \ddot{q} + mglc \operatorname{sen}(q) \quad (6.18)$$

Para una fácil interpretación en los resultados de las gráficas de error de posición y posición articular se encuentran en grados y la velocidad de movimiento en grados/seg. La figura 6.3 muestra la respuesta del péndulo-robot cuando se encuentra bajo el control del esquema proporcional más compensación de gravedad. Obsérvese que la respuesta del péndulo-robot



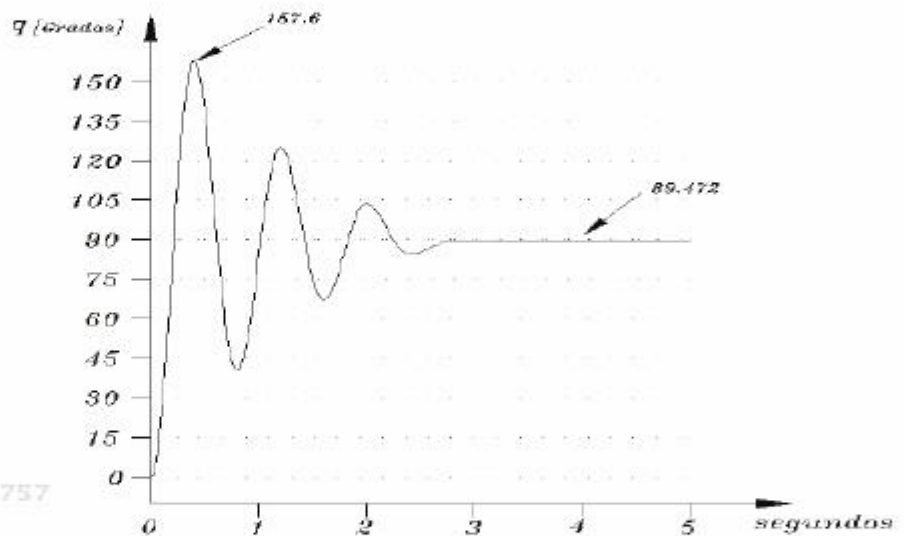
### Control PD péndulo

Programas escritos en código fuente para MatLab que realizan simulación de algoritmos de control con el péndulo-robot se encuentran disponibles en el sitio web del libro.

En este mismo portal, también, pueden ser descargada documentación de análisis comparativo del algoritmo de control PD contra nuevos esquemas diseñados a través de moldeo de energía.

presenta un estado transitorio abrupto compuesto de varios sobre impulsos que rebasan la referencia deseada de 90 grados; este tipo de respuesta corresponde al escenario típico del control proporcional cuando la acción derivativa es cero.

El primer pico llega a 157.6 grados en tan sólo 0.5 segundos, los demás sobre impulsos disminuyen su amplitud paulatinamente hasta alcanzar el estado estacionario en 3 segundos. El valor de la posición en estado estacionario es de 89.472 grados, es decir el error permanente  $\tilde{q}$  es de 0.528 grados. Una desventaja característica del algoritmo de control proporcional



**Figura 6.3** Posición del péndulo-robot: control proporcional más compensación de gravedad.

cional es que el robot exhibe una respuesta transitoria con varios sobre impulsos, mientras que en estado estacionario presenta un error permanente (conocido como *offset*), esto significa que el error de posición  $\tilde{q}(t)$  tiende a una constante diferente de cero, lo cual se debe al fenómeno de fricción estática.

Cuando el péndulo se encuentra en estado estacionario la siguiente ecuación

gobierna su comportamiento

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} [k_p \tilde{q} - f_e] \end{bmatrix}$$

la fricción estática  $f_e$  genera un número infinito de puntos de equilibrios de la ecuación en lazo cerrado,  $k_p \tilde{q} - f_e = 0$ , entonces el error de posición queda confinado a la región  $-\frac{f_e}{k_p} \leq \tilde{q} \leq \frac{f_e}{k_p}$ , o bien  $|\tilde{q}| \leq \frac{f_e}{k_p}$ .

Por lo tanto, es verdadera la frase común que se maneja en ingeniería: **el error de posición disminuye, aumentando la ganancia proporcional.**

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Comúnmente, en control automático se acostumbra a describir los aspectos prácticos o cualitativos de algoritmos de control con referencia a la gráfica del error de posición del robot, más que referirse a la gráfica de la posición. Esta característica se debe a que el algoritmo de control está diseñado para lograr la convergencia asintótica  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)]^T = [0, 0]^T$ . Es decir, si  $\tilde{q}(t) = 0$ , entonces  $q(t) = q_d$ . Esta afirmación se encuentra en la gráfica 6.4 donde se muestra la tendencia asintótica del error de posición  $\tilde{q}(t)$  del péndulo-robot hacia cero.

670

ebrary

La gráfica del error de posición 6.4 contiene la información de la gráfica de la posición 6.3 y viceversa. Por ejemplo, en la gráfica de posición del robot 6.3, el error se encuentra representado en el lado izquierdo del perfil de la curva de la posición, rotado 180 grados hacia abajo como si fuera visto en un espejo colocado en forma perpendicular sobre la flecha del eje de posición  $q(t)$ . Este efecto se puede ver en la figura 6.5. Evidentemente, el eje del error de posición  $\tilde{q}(t)$  tiene su propia escala. El eje del tiempo sigue siendo igual para ambas gráficas. De manera equivalente, la gráfica del error de posición 6.4 ya se encuentra auto contenida en la gráfica de la posición. La parte fundamental para describir el desempeño de un algoritmo de control con los resultados de posición o del error de posición resulta de una adecuada interpretación de cualquiera de esas gráficas.

La figura 6.5 muestra simultáneamente la información de la posición y

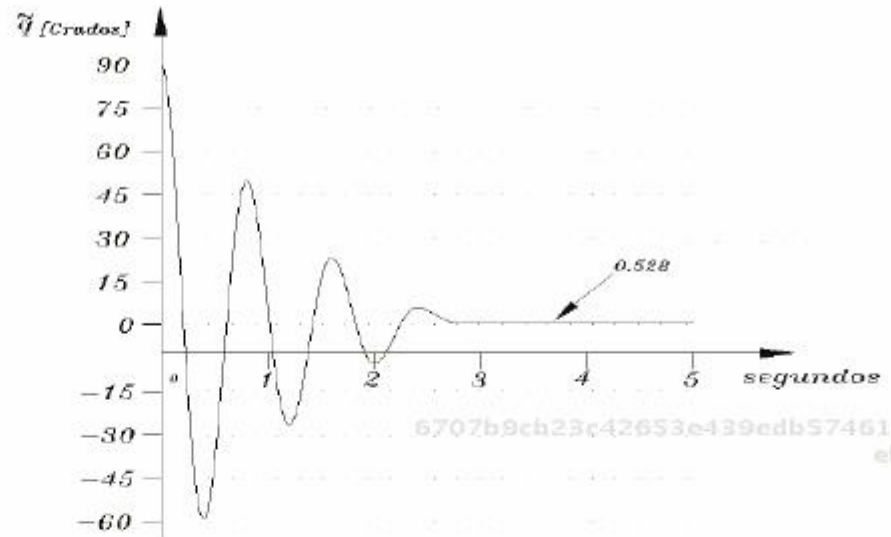
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary





### Videos del péndulo

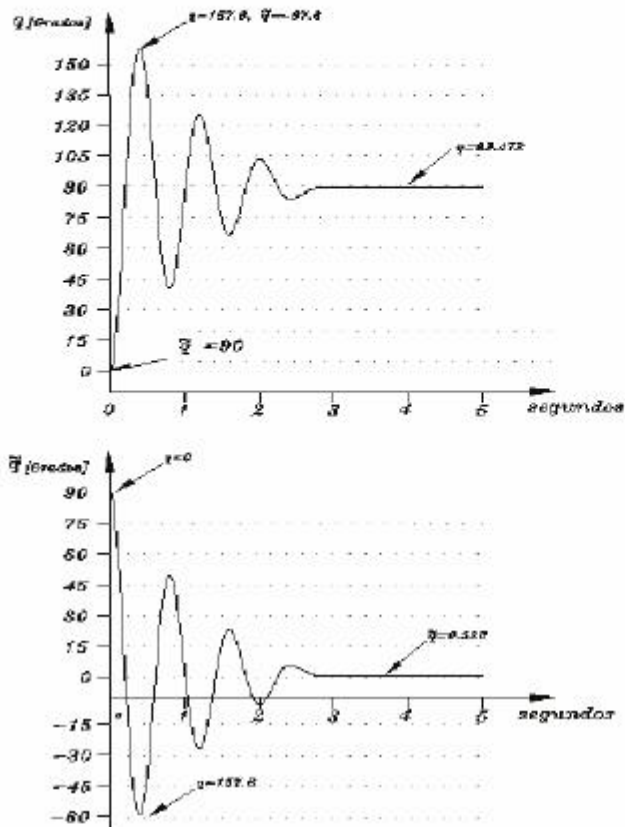
En la página web del libro se encuentran disponibles una serie de videos que contienen experimentos que explican los aspectos fundamentales del algoritmo de control proporcional derivativo con el péndulo robot de transmisión directa. Se destaca el funcionamiento cualitativo del control proporcional sin la acción de control derivativa, los sobre impulsos que presenta en régimen transitorio, así como la disminución de éstos incluyendo el efecto de amortiguamiento a través de la inyección de velocidad de la acción de control derivativa. Respecto de la exposición teórica hecha, estos videos son una validación experimental de la región de atracción y la estabilidad asintótica de las variables de estado error de posición y velocidad articular hacia el punto de equilibrio.



**Figura 6.4** Error de posición: control proporcional más compensación de gravedad.

del error de posición del péndulo-robot. Nótese que mientras la posición en  $q(0) = 0$  grados, el error de posición  $\tilde{q}(0) = 90 - q(0) = 90$  grados. La magnitud del primer pico de la posición corresponde a 157.6 grados, para  $t = 0.4$  segundos o de manera equivalente  $\tilde{q}(0.4) = -67.6$  grados. La magnitud de la posición en estado estacionario es de 89.472 grados o  $\tilde{q} = 0.525$  grados, ambos datos son equivalentes entre sí.

La figura 6.6 muestra la evolución en el tiempo del par aplicado al péndulo-robot. Obsérvese que el perfil del par es muy parecido a la gráfica del error de posición. Esta similitud no es casual, más bien es natural debido a que la ley de control es directamente proporcional al error de posicionamiento. En el régimen estacionario, la magnitud que mantiene el par aplicado es de 0.5826 Nm, este valor incluye el error de posicionamiento (0.528 grados o 0.00921 rad), la ganancia proporcional  $k_p = 10\text{Nm/rad}$  y el valor del par gravitacional de 0.4905 Nm. Por esto, la magnitud del control proporcional debido a este error de posicionamiento es (por ejemplo en  $t = 4$  segundos,  $q(4) = 89.472$  grados)  $\tau(4) = k_p \tilde{q}(4) + mgl_c \sin(89.472 \frac{\pi}{180}) = 10 \cdot 0.00921536 + 0.4905 = 0.5826$  Nm.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

**Figura 6.5** Comparación cualitativa de la respuesta de posición y del error de posición.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

En la gráfica izquierda de la figura 6.7 se muestra la trayectoria que sigue el extremo final del péndulo en su espacio de trabajo  $xy$ . Obsérvese que el péndulo exhibe fluctuaciones muy pronunciadas, esto se debe a que no existe la acción de control derivativa, entonces el algoritmo de control aplica toda la energía disponible al péndulo, provocando picos con grandes amplitudes en la posición recorriendo una trayectoria grande que inicia desde su posición de casa ubicada sobre el eje  $y_-$  hasta colocarse en el primer cuadrante ( $q = 157.6$  grados) para el primer sobre impulso y regresando al cuarto cuadrante, cuando la velocidad cambia de signo positivo a negativo. Así sucesivamente hasta posicionarse cerca del punto deseado de 90 grados.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

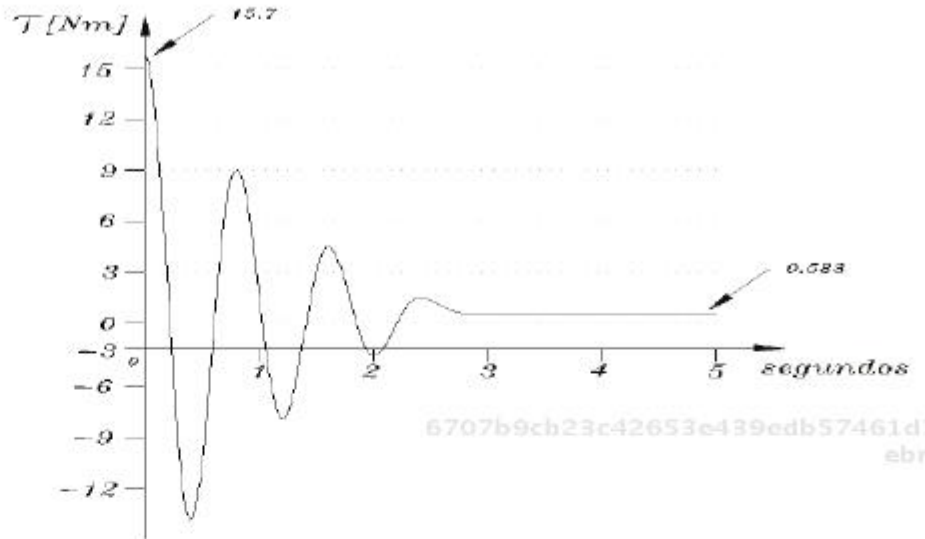


Figura 6.6 Par aplicado del control proporcional más compensación de gravedad sobre el péndulo-robot.

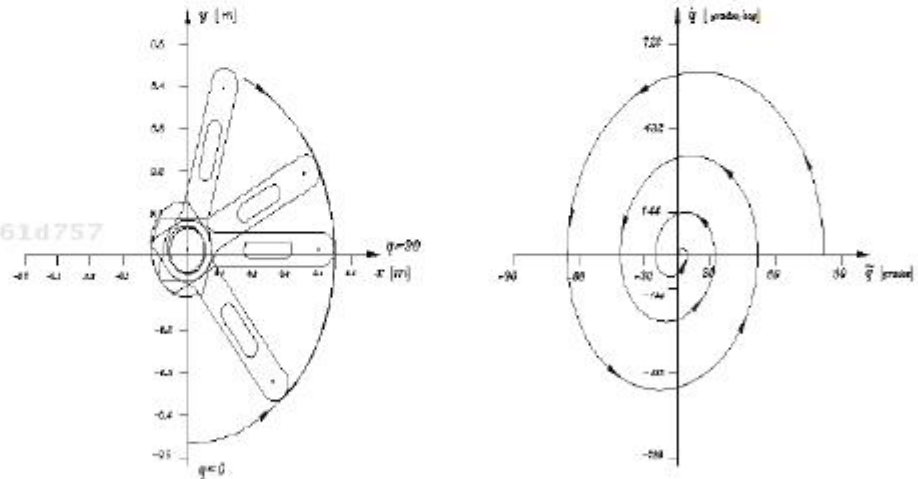


Figura 6.7 Diagrama fase y trayectoria dentro del espacio de trabajo del péndulo-robot con control proporcional.

En la gráfica derecha de la figura 6.7 se presenta en el espacio de estado el plano fase  $\dot{q}$  versus  $q$ . La condición inicial es  $[\dot{q}(0), \tilde{q}(0)]^T = [0, 90]^T$

grados. Se observa un rápido incremento en la velocidad del péndulo, el cual se mueve en la dirección del primer al cuarto cuadrante, esto se ve reflejado en la trayectoria exterior de la gráfica izquierda de la figura 6.7.

Cuando el error de posición  $\tilde{q}$  es cero, la velocidad  $\dot{q} = 614$  grados/segundo tiene un máximo, como consecuencia el péndulo no se puede detener en la posición deseada debido al efecto inercial que tiene en ese instante, entonces el péndulo invade el primer cuadrante del espacio de trabajo  $xy$  de la gráfica izquierda de la figura 6.7. El péndulo continua su movimiento hasta detenerse momentáneamente, es decir  $\dot{q}(t) = 0$  grados/segundo y  $\tilde{q}(t) = -67.8$  grados, lo que corresponde al primer pico del primer sobre impulso en la posición del péndulo  $q(t) = 157.6$  grados. El signo de la velocidad  $\dot{q}(t)$  es negativo, entonces el péndulo se mueve hacia la dirección de casa, es decir se mueve del primer cuadrante hacia el cuarto cuadrante. Hay un total de 6 cruces por cero de la velocidad articular  $\dot{q}(t)$ . Tres de esos cruces corresponden a picos de los sobre impulsos positivos y tres pico negativos. Debido a que la condición inicial se encuentra dentro de la región de atracción del punto de equilibrio, entonces el atractor va *atrapando* a las variables  $[\dot{q}(t), \tilde{q}(t)]^T$  conforme el tiempo evoluciona, hasta que quedan estacionarias en una vecindad cercana al punto de equilibrio.

Generalmente, los sobre impulsos se interpretan como un tipo de respuesta con pobre desempeño, son producto de un efecto de amortiguamiento nulo; se requiere de un término de acción de control derivativa que esté incluido en la ley de control para mejorar la respuesta. La acción derivativa se anticipa a los sobre impulsos, dosificando la energía del control proporcional entregada al péndulo, entonces la respuesta en la posición del robot es mucho más suave, se eliminan los sobre impulsos, reduciendo significativamente posibles oscilaciones.

Ahora se procede con la segunda fase del análisis cualitativo del control proporcional derivativo con compensación de gravedad. Para tal efecto, se mantiene el mismo valor en la ganancia proporcional  $k_p=10$  Nm/rad y se sintoniza la ganancia derivativa  $k_v=2$  Nm-rad/seg que corresponde al



20% del valor de la ganancia proporcional. La figura 6.8 muestra la simulación de la respuesta de posición articular péndulo robot con el control PD más compensación de gravedad. Con la inyección de amortiguamiento la respuesta del péndulo es mucho más suave en la etapa transitoria, eliminando sobretiros como se muestra en la figura 6.8.

### Sintonía de ganancias

La sintonía de las ganancias proporcional y derivativa del algoritmo de control es el procedimiento para encontrar los valores numéricos de cada ganancia que permitan obtener una respuesta adecuada en el robot. Generalmente la ecuación en lazo cerrado formado por la dinámica del robot y el algoritmo de control representan una ecuación diferencial de primer orden no lineal, por lo que procedimientos de sintonía empleados en sistemas lineales tales como Nyquist, Bode, lugar de raíces, etc., no se pueden aplicar a sistemas no lineales. Por lo tanto, hoy en día para el problema de regulación o control de posición no existe una metodología científica para sintonizar las ganancias del controlador. El procedimiento actual es empírico, es decir en base a prueba y error. Consiste en proponer valores iniciales a las ganancias y dependiendo de la forma de la respuesta del robot, se ajustan las ganancias hasta obtener una respuesta satisfactoria de acuerdo con la aplicación. En este tipo de procedimiento la experiencia del usuario es fundamental.

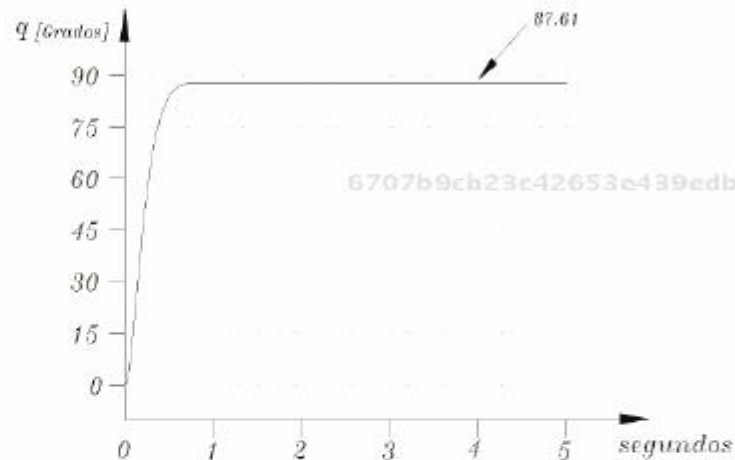


Figura 6.8 Posición del péndulo bajo el esquema de control pd.

Note el signo menos que precede al término de la acción derivativa del control PD  $\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + g(q)$ , significa que la acción derivativa dosifica la energía entregada al servomotor del péndulo-robot, cuya consecuencia es que los sobre impulsos se atenúen o desaparezcan; este efecto depende evidentemente del valor en la sintonía de las ganancias proporcional y derivativa. A medida que la ganancia derivativa aumenta, manteniendo constante la ganancia proporcional, los sobre impulsos se van atenuando hasta desaparecer. El estado transitorio es mucho más suave, por lo que el tiempo para alcanzar el estado estacionario es más grande. El efecto de amortiguamiento causado por la acción de control derivativa es principalmente en el estado transitorio; en estado estacionario la posición tiende a ser una constante, por lo que la velocidad es cero, desapareciendo el efecto de amortiguamiento.

La parte izquierda de la figura 6.9 muestra la gráfica del error de posi-

ción, se trata de una curva suave sin sobretiros alcanzando el estado estacionario en forma asintótica. En estado estacionario no presenta oscilaciones o rizo. El par aplicado de la ley de control se encuentra en la parte derecha de la figura 6.9, tiene una similitud con la forma del perfil del error de posición. En el intervalo de 0.3 a 0.6 segundos, existe un par negativo cuyo pico no rebasa  $-1$  Nm, en contraste con la figura 6.6 donde el par aplicado presenta varias fluctuaciones de magnitud considerable. Además, obsérvese que la influencia de ese pequeño pico negativo de la ley de control PD no se ve reflejado en la curva del error de posición. La figura 6.10 describe el desplazamiento del péndulo en su espacio de

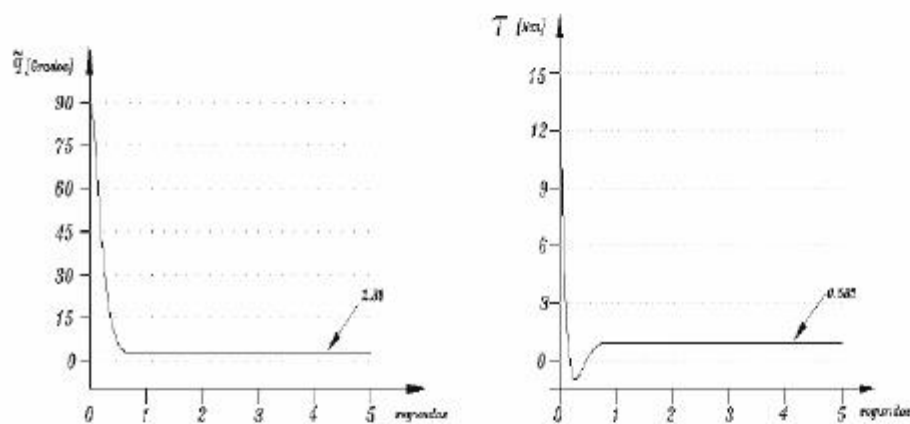


Figura 6.9 Control proporcional derivativo.

trabajo  $xy$ , así como la trayectoria que presenta su diagrama fase. Ambas gráficas son suaves y exhiben un comportamiento monótono. La velocidad de desplazamiento es mucho menor debido a la influencia del efecto de amortiguamiento, por lo tanto no se generan sobre impulsos.

Si la ganancia proporcional aumenta, los sobre impulsos serán de mayor amplitud, produciendo que el estado transitorio tome más tiempo. Sin embargo, el error en estado estacionario puede disminuir. Por otro lado, si la ganancia proporcional disminuye, entonces la amplitud de los sobretiros disminuirán, así como el tiempo de la etapa transitoria, pero el error en estado estacionario será más grande. No existe una regla de sintonía entre



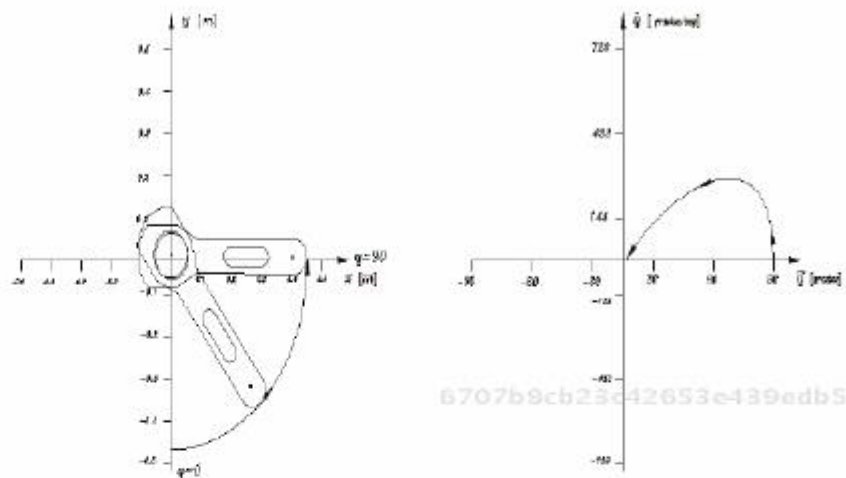


Figura 6.10 Trayectorias del espacio de trabajo y diagrama fase del péndulo robot con el control pd.



### Simulador péndulo

En la página web del libro se encuentra disponible un simulador de control de posición, el cual es un ambiente gráfico interactivo amigable orientado a la programación y control del péndulo robot (visto como sólido). Con este simulador basado en el modelo dinámico del péndulo, ya que *emula la dinámica real del péndulo*, se puede abordar el estudio y análisis del comportamiento cualitativo del control PD sobre este sistema.

la ganancia proporcional y la ganancia derivativa, más bien es empírica. Buenos resultados se obtienen cuando  $k_v = 20\%k_p$ .

Otra forma de explicar el funcionamiento cualitativo del control PD es a través de un sistema masa resorte amortiguador como el que se muestra en la figura 6.11. La masa  $m$  del sistema es sometida a una fuerza  $f$ . Cuando esta fuerza se deja de aplicar, entonces el desplazamiento de la variable  $\tilde{q}$  puede exhibir grandes sobre impulsos, dependiendo de la rigidez  $k_p$  del resorte y del factor de amortiguamiento  $k_v$ . Para una rigidez grande  $k_p$  el resorte presentará resistencia a desplazarse y si el factor de amortiguamiento  $k_v$  también es grande, los desplazamientos de  $\tilde{q}$  serán dosificados y los sobre impulsos de la etapa transitoria serán atenuados o amortiguados. Para una pequeña acción de amortiguamiento  $k_v \dot{q}$  el desplazamiento de la masa  $m$  puede ser abrupto, es decir el desplazamiento  $\tilde{q}$  puede exhibir grandes sobre impulsos, inclusive puede quedar en el régimen estacionario con vibraciones u oscilaciones. Para evitar este problema, la ganancia derivativa  $k_v$  o freno mecánico se incrementa.

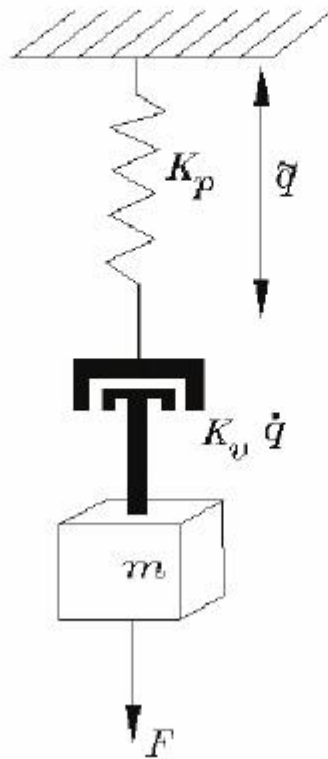
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

Figura 6.11 Analogía comparativa del control PD y un sistema masa resorte amortiguador.

### Acción de control derivativo

Frecuentemente se interpreta a la acción de control derivativa como un controlador. Esta interpretación es errónea y es importante aclararla; la acción de control derivativa introduce el efecto de amortiguamiento en la respuesta del robot, teniendo como finalidad disminuir los sobretiros y por lo tanto mejorar la respuesta. Debe quedar claro que en el control proporcional derivativo la única variable a controlar es el error de posición  $\tilde{q}$  y no la velocidad de movimiento  $\dot{q}$ . La velocidad se emplea como inyección de amortiguamiento cuyo principal acción es sobre el estado transitorio, puesto que en el estado estacionario la posición es una constante o la velocidad es cero. Si durante el estado estacionario se presentan oscilaciones, perturbación o cambio de referencia, entonces la acción de

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary  
ALFAOMEGA

control derivativa actúa de manera inmediata. La acción derivativa no reduce la magnitud del error de posición en estado estacionario. El término relacionado con la compensación de gravedad se emplea para mantener al robot en la posición deseada, ya que cuando el robot alcanza esa posición, el error de posición es cero y su velocidad también es cero, por lo que se requiere de energía aplicada al robot para compensar el fenómeno natural de par gravitacional. En tal caso el término de la compensación de gravedad converge a una constante para mantener al robot en la posición deseada, para el caso del péndulo es  $g(q_d) = mgl_d \text{sen}(q_d)$ . Cuando el robot se mueve en un plano horizontal, el par gravitacional es cero, debido a que se obtiene como el gradiente de la energía potencial.

### ♣ ♣ Ejemplo 6.1

Analizar el comportamiento cualitativo del algoritmo de control PD sobre un robot manipulador de dos grados de libertad planar para la configuración deseada:  $\mathbf{q}_d = [45, 90]^T$  grados. Las condiciones iniciales son para la posición  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  y la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ .

### Solución

Considérese un robot planar vertical de dos grados de libertad cuyo modelo dinámico se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} -0.168 \text{sen}(q_2)\dot{q}_2 & -0.084 \text{sen}(q_2)\dot{q}_2 \\ 0.084 \text{sen}(q_2)\dot{q}_1 & 0,0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 38.46 \sin(q_1) + 1.82 \sin(q_1 + q_2) \\ 1.82 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}}_{g(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2.88\dot{q}_1 \\ 0.175\dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{f_f(\dot{q})}$$



### Robot 2 gdl PD

La simulación del robot manipulador de 2 grados de libertad con el esquema de control PD del ejemplo 6.1 se encuentra disponible en la página web del libro.

Se proporciona el código y documentación necesaria para que el lector pueda estudiar y analizar en detalle los aspectos cualitativos del algoritmo.

El objetivo de control consiste en mover la articulación del hombro a  $q_{d1} = 45$  grados, la articulación del codo  $q_{d2} = 90$  grados, usando un algoritmo de control PD con compensación de gravedad. El proceso de simulación consiste en posicionar al robot en la configuración deseada.

Se proponen los siguientes valores para las ganancias proporcional y derivativa:

$$K_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ Nm/grado}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Nm grado/seg.}$$

La sintonía de la ganancia derivativa es del 20% del valor de la ganancia proporcional. La figura 6.12 muestra la evolución en el tiempo de los errores de posición; el efecto de amortiguamiento atenúa notablemente los sobretiros en la respuesta del robot. El error en la articulación del hombro  $\tilde{q}_1$  no exhibe sobre impulsos, mientras que en el codo  $\tilde{q}_2$  presenta un pequeño sobretiro. El régimen transitorio tiene una duración de 1.5 segundos. Ambos errores muestran una convergencia asintótica hacia cero, es decir la región de atracción del punto de equilibrio hace que tengan una convergencia hacia el origen del vector de estados.

Los pares aplicados a las articulaciones del hombro y codo, respectivamente, se muestran en la parte derecha de la figura 6.12. Durante el régimen transitorio  $\tau_1$  presenta una curva en forma de valle, lo cual se debe principalmente al efecto de la acción de control derivativa que inyecta amortiguamiento para frenar al codo. En el régimen estacionario la posición toma un valor constante por lo que la acción derivativa ya no tiene efecto, puesto que la velocidad es cero. Si llegará a existir una perturbación, entonces la acción derivativa actúa instantáneamente.



### Videos experimentales. Control PD de un péndulo

En la página web del libro se encuentran disponibles una serie de videos experimentales que ilustran los aspectos cualitativos del algoritmo de control proporcional derivativo, con robots manipuladores de transmisión directa de dos y tres grados de libertad. Particularmente se ejemplifica el comportamiento transitorio de la respuesta del robot con el control proporcional, y cómo se mejora usando el efecto de amortiguamiento de la acción de control derivativo.

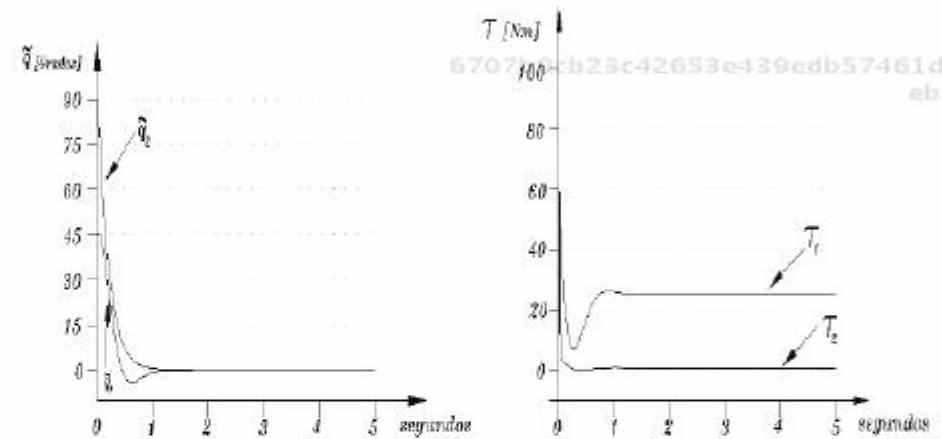


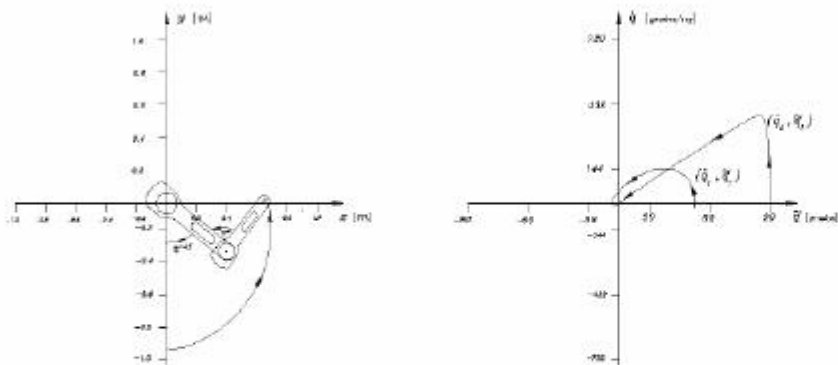
Figura 6.12 Errores de posición y pares aplicados del PD.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La trayectoria que sigue el extremo final del robot dentro de su espacio de trabajo, es una curva suave dentro del IV cuadrante se posiciona sin reflejar sobre impulsos como se muestra en la figura 6.13. El diagrama de fase se encuentra en la parte derecha de esta misma figura.

La articulación del hombro presenta una trayectoria menor a la que exhibe la articulación del codo. Esto se debe a que el eslabón del codo se encuentra montado sobre el extremo final del eslabón del hombro, entonces exhibe una mayor velocidad de movimiento compuesta por la velocidad del hombro  $\dot{q}_1$  más la propia velocidad del codo  $\dot{q}_2$ . Ambas trayectorias son atrapadas por la región de atracción del punto de equilibrio.





6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

**Figura 6.13** Trayectorias del espacio de trabajo y diagrama fase de un robot de 2 gdl con control PD.



### 6.2.3 Control proporcional integral derivativo

El algoritmo de control PD tiene la desventaja de que en régimen estacionario presenta un error permanente de posición denominado *offset*; en otras palabras, el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  converge a una constante diferente de cero. Para disminuir este error se incorpora en la estructura matemática del PD un término más denominado acción de control integral. El proceso de integración es la suma del área bajo la curva del error de posición, por lo tanto acumula energía la cual canalizada adecuadamente puede disminuir la magnitud del error en el régimen estacionario. Esto da origen al control proporcional integral derivativo (PID), el cual no representa un nuevo esquema de control, más bien es la versión modificada del control proporcional derivativo que pretende subsanar la deficiencia del error en régimen estacionario. Con esta finalidad se incorpora en el algoritmo de control PD la acción de control integral, resultando el siguiente esquema proporcional integral derivativo (PID):

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\mu) d\mu + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.19)$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas y se les denomina ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### PID

El algoritmo de control PID se encuentra disponible en la página web del libro para realizar simulación con un robot de 2 gdl. La implementación del modelo dinámico y el esquema de control resultan importantes en el estudio de control de robots manipuladores.

es una matriz definida positiva denominada ganancia integral. Todas las ganancias  $K_p$ ,  $K_v$  y  $K_i$  son matrices definidas positivas.

En la figura 6.14 se muestra el diagrama a bloques del algoritmo de control PID.

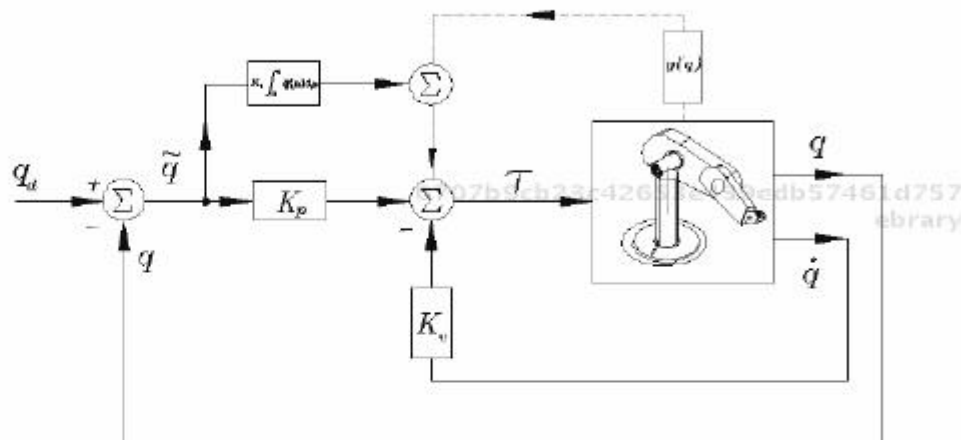


Figura 6.14 Diagrama a bloques del control PID.

El algoritmo de control PD produce en la ecuación en lazo cerrado (dinámica del robot y esquema PD) un punto de equilibrio único y globalmente estable en forma asintótica para una elección trivial en las ganancias proporcional y derivativa ( $K_p > 0$ ,  $K_v > 0$ ). En contraste:

El algoritmo de control PID no genera un punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado con características de estabilidad asintótica global, únicamente tiene *estabilidad asintótica local* siempre y cuando las ganancias del control puedan satisfacer ciertas condiciones de sintonía muy complicadas.

La acción de control PID introduce una nueva variable de estado, que aquí denotaremos por  $v$ , la cual se encuentra relacionada con la derivada temporal del error de posición  $\dot{v} = \tilde{q}$ . Por lo tanto,  $v = \int_0^t \tilde{q} dt + v(0)$ , con  $v(0) \in \mathbb{R}^n$  es un vector constante. La ecuación en lazo cerrado en

términos de las variables de estado  $[\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T$  adquiere la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + K_i \mathbf{v} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Esta es una ecuación diferencial autónoma cuyo único punto de equilibrio es el origen  $[\mathbf{v}^T, \tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0R}^{3n}$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### 6.3 Moldeo de energía



La demostración de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador de  $n$  grados de libertad (5.8) y el algoritmo de control PD (6.2) realizada por Takegaki y Arimoto en 1981, definió las bases para generalizar y ampliar un número importante de algoritmos de control. Hoy en día, a esa técnica de diseño se le conoce como **moldeo de energía**, la cual representa una herramienta moderna del control automático para diseñar una familia extensa de estrategias de control que resuelven el problema de control de posición o regulación de robots manipuladores.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La técnica de **moldeo de energía** genera una familia muy grande de algoritmos de control de posición con estructura matemática del gradiente de la energía potencial artificial (propuesta como energía de diseño), que *moldea la energía* aplicada al robot, más la incorporación de una función disipativa (acción de control derivativa) como elemento de inyección de amortiguamiento o freno mecánico a través de la velocidad articular del robot y mediante un término de compensación de gravedad para los casos de robots cuyo movimiento sea diferente a un plano horizontal.

La ley de control por moldeo de energía está dada por la siguiente ecuación:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.21)$$

donde

✦  $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}$  es el gradiente de la energía potencial, la función resultante de dicho gradiente  $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  debe ser una función continua en  $\tilde{\mathbf{q}}$  y tener un mínimo y único global en el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  definido como la diferencia entre la posición deseada  $\mathbf{q}_d$  y el vector de posición articular  $\mathbf{q}$ , es decir:  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ .

✦ La función  $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  se conoce como energía potencial artificial debido a que no es la energía potencial del robot obtenida de mecánica clásica, más bien es la energía de diseño, la cual es una función diferenciable y definida positiva con un mínimo y único global en el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ; la ganancia proporcional  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal.

✦ La función de inyección de amortiguamiento o freno mecánico está representada por  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$  satisfaciendo la propiedad disipativa, es decir  $\mathbf{q}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ , la ganancia derivativa  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.

✦  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  representa la compensación del par gravitacional, únicamente para el caso de robots manipuladores cuyo movimiento esté restringido a un plano horizontal; el par gravitacional es cero.

La figura 6.15 muestra el diagrama a bloques de la estructura de control por moldeo de energía.

La ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot (5.8) y la estructura de control de moldeo de energía (6.21) genera un punto de equilibrio estable global en el sentido de Lyapunov, la estabilidad asintótica

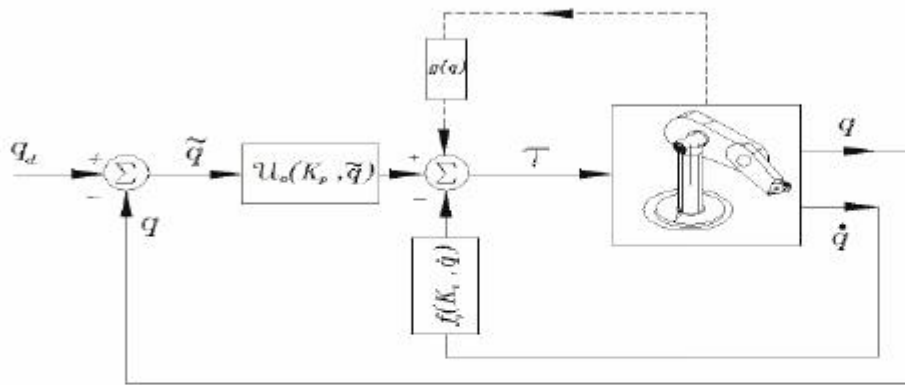


Figura 6.15 Control de robots manipuladores mediante moldeo de energía.

del punto de equilibrio se demuestra con el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

En términos de las variables de estado para el problema de control de posición  $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  la ecuación en lazo cerrado queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} [\nabla U_\alpha(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q})] - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

una ecuación diferencial autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T = [0^T \quad 0^T]^T$  se toman en cuenta las siguientes consideraciones:




La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.22)  $-\dot{\tilde{q}} = -I\dot{\tilde{q}} = 0 \iff \dot{\tilde{q}} = 0$ , ya que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.





Por otro lado, en la segunda componente de la ecuación (6.22) se tiene lo siguiente: empleando la propiedad 5.1 del modelo dinámico




del robot manipulador, la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, y también la matriz inversa existe  $M(\mathbf{q})^{-1}$  y es definida positiva.

 Por diseño la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva.

 Debido a que la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.22)  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de acuerdo con la propiedad 5.7 del modelo dinámico.

 Puesto que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

 Por otro lado, la función de energía potencial artificial es una función definida positiva  $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , por diseño la ganancia proporcional es una matriz diagonal definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.22) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.22) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \quad (6.23)$$

El primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética, la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. El segundo término  $\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  es la energía potencial artificial la cual es una función cuadrática del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y por diseño la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz definida positiva. Por lo tanto, la función  $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$  es definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.23) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \bar{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \quad (6.24)$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \bar{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \quad (6.25)$$

La derivada del error es  $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$  debido a que la posición deseada  $\mathbf{q}_d$  es una constante. Sustituyendo la aceleración contenida en la segunda componente de la ecuación (6.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) &= \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \bar{\mathbf{q}})}_{\text{Propiedad de antisimetría}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \bar{\mathbf{q}})}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Hay que observar que se cancelan el primero y último término de la ecuación (6.26). Además, empleando la propiedad 5.9 del modelo dinámico y agrupando el tercer y cuarto término de la ecuación (6.26) se obtiene:

$$-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = 0$$

La derivada temporal de la función de energía (6.21) obtiene la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (6.27)$$

es decir, cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, por lo que queda demostrada la estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.4).

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.21) es una ecuación diferencial autónoma, es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (6.28)$$

Nótese que  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = 0$ , si  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$  y  $\tilde{\mathbf{q}}$  puede ser cualquier vector. Para que la solución  $[\tilde{\mathbf{q}}^T(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  de la ecuación en lazo cerrado (6.21) pertenezca a  $\Omega$  es necesario que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Además, puesto que  $\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$  solo si  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , entonces el máximo conjunto invariante en  $\Omega$  es  $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = 0 \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \right\} \quad (6.29)$$

Puesto que  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  es una función positiva definida con un único y mínimo global en  $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ , entonces el máximo conjunto invariante que está en  $\Omega$  es el origen. Por lo tanto, usando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Considérese un estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones de la ecuación en lazo cerrado (6.22) sobre las cotas de las trayectorias. Debido a que la ecuación (6.23) es una función definida positiva y su derivada con respecto al tiempo (6.27) es una función semidefinida negativa, entonces la función de energía es decreciente, es decir:

$$0 < V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

por lo que se deduce que:

$$\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad \forall t \geq 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad \forall t \geq 0, \quad (6.31)$$

utilizando el teorema 3.1 de Rayleigh-Ritz se obtienen las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| &\leq \mathcal{U}^{-1} \left( \frac{V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))}{\lambda_{\min}(K_p)} \right) \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\| &\leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

(6.33)

### 6.3 Moldeo de energía

La técnica de moldeo de energía permite diseñar una familia extensa de algoritmos de control que de manera general se pueden dividir en aquellos esquemas que solicitan par o torque sin tomar en cuenta los límites físicos del servo amplificador, es decir pertenecen a la clase de esquemas de control con acciones no acotadas y los que se encuentran dentro del rango normal de operación del servo amplificador se les denomina esquemas de control acciones acotadas.



#### 6.3.1 Control con acciones no acotadas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Como ejemplo de aplicación de la técnica de moldeo de energía a continuación se presenta el diseño de nuevas estrategias de control cuya estructura matemática demanda par o torque al sistema electrónico del servoactuador más allá de sus límites de saturación.

#### ♣ Ejemplo 6.2

Realizar el análisis de estabilidad del control proporcional derivativo para un péndulo robot.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

#### Solución

El control PD está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \ddot{q} - k_v \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (6.34)$$

donde las ganancias proporcional y derivativa se encuentran representadas por  $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$ , respectivamente.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del péndulo (5.42) y el control proporcional derivativo (6.34) expresado en términos






6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

de variables de estado  $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T$  es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q} - (k_v + b)\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

donde el momento de inercia del péndulo  $I_p$  está dado por  $I_p = ml_c^2 + I$ . La ecuación (6.34) resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T = [0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^2$  de la ecuación en lazo cerrado (6.34) se toman en cuentas las siguientes consideraciones:

-  La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.34)  $-\dot{q} = -1\dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0$ .
-  Para la segunda componente de la ecuación (6.34), el momento de inercia  $I_b \in \mathbb{R}_+$ .
-  Las ganancias proporcional  $k_p$  y derivativa  $k_v$  son números positivos.
-  Puesto que  $\dot{q} = 0$ , entonces la función disipativa  $f_v(k_v, \dot{q}) = k_v \dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0$ .
-  Por otro lado,  $k_p \tilde{q} = 0 \iff \tilde{q} = 0$ .

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.34) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.34) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \tilde{q}^2$$



La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\dot{q}, \bar{q}) &= I_b \dot{q} \bar{q} - k_p \bar{q} \dot{q} \\ &= \dot{q} [k_p \bar{q} - (k_v + b) \dot{q}] - k_p \bar{q} \dot{q} \\ &= -[b + k_v] \dot{q}^2 \leq 0\end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad en forma global del punto de equilibrio.

Obsérvese que  $[b + k_v] \dot{q}^2 > 0$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.34) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \bar{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \bar{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Nótese que  $\dot{V}(\bar{q}, \dot{q}) = 0$ , si  $\dot{q} = 0$  y  $\bar{q}$  puede ser cualquier escalar. Para que la solución  $[\bar{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  de la ecuación en lazo cerrado (6.34) pertenezca a  $\Omega$  es necesario que  $\dot{q}(t) = 0, \forall t \geq 0$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Además, puesto que  $k_p \bar{q} = 0$  solo si  $\bar{q} = 0$ , entonces el máximo conjunto invariante en  $\Omega$  es  $[\bar{q}, \dot{q}]^T = [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \bar{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \bar{q} = 0 \right\} \quad (6.36)$$

puesto que  $V(\dot{q}, \bar{q})$  es una función positiva definida con un único y global mínimo en  $[\bar{q}, \dot{q}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ , entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en  $\Omega$ . Por lo tanto, usando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### ♣♣♣ Ejemplo 6.3

Realizar el análisis de estabilidad asintótica del siguiente algoritmo. Considérese el siguiente algoritmo de control:

$$\tau = K_p \sinh(\tilde{q}) - K_v \sinh(\dot{q}) + g(q) \quad (6.37)$$

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, es la función de control seno hiperbólico y la función  $\sinh(\dot{q})$  es la inyección de amortiguamiento.

### Solución

Las funciones se encuentran definidas respectivamente como:

$$\sinh(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \sinh(\tilde{q}_1) \\ \sinh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \sinh(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \sinh(\dot{q}_1) \\ \sinh(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control (6.37) expresada en término de las variables de estado queda  $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T$  de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p \sinh(\tilde{q}) - K_v \sinh(\dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$  se toman en cuentas las siguientes consideraciones:

### 6.3 Moldeo de energía

⚡ La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.38)  $-\dot{\mathbf{q}} = -I\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , ya que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.

⚡ Para la segunda componente de la ecuación (6.38) la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe  $M(\mathbf{q})^{-1}$  y también es definida positiva (propiedad 5.1).

⚡ Por diseño las ganancias proporcional  $K_p$  es matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva.

⚡ La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , de acuerdo con la propiedad 5.7 del modelo dinámico.

⚡ Puesto que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

⚡ Por otro lado,  $K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , debido a que la ganancia proporcional es una matriz diagonal definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38) existe y es único.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. El segundo

término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ . Para propósitos de ajuste, observe que se ha incorporado el escalar -1 en cada una de las componentes  $\sqrt{\cosh(\tilde{q}_i) - 1}$ , para  $i = 1, 2 \dots n$ . Esto se debe a que la función coseno hiperbólico evaluado en:  $\cosh(\tilde{q}_i) = 1$  si  $\tilde{q}_i = 0$ . De esta forma la función de la energía potencial artificial evaluada en cero resulta cero.

La derivada temporal de la función de energía (6.39) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \tag{6.40}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

$$\dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tilde{q}_1)\dot{q}_1}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} \\ \frac{\sinh(\tilde{q}_2)\dot{q}_2}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} \\ \vdots \\ \frac{\sinh(\tilde{q}_n)\dot{q}_n}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{bmatrix}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}}$$

$$- \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\tilde{q}_2)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sinh(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

El producto de matrices diagonales es conmutativo

$$\begin{aligned}
&= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\tilde{q}_2)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sinh(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \sinh(\tilde{q}_1) \\ \sinh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}^T}_{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})} K_p \dot{\mathbf{q}} \\
&= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \sinh(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \cancel{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \dot{\mathbf{q}}} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0
\end{aligned}$$

Obsérvese que la componente  $\dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\dot{\mathbf{q}}) > 0$  cumple con las propiedades de función disipativa. Puesto que la función  $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$  es semidefinida negativa se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38), además también se cumple que el error de posición y la velocidad articular se encuentran acotados  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_2$  y la velocidad articular satisface  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_2^2$ .

La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, de manera similar a los ejemplos previos.

Por la estructura matemática de la función seno hiperbólico el algoritmo de control (6.37) crece de manera exponencial, por lo que pueda demandar un par excesivo más allá del par máximo del amplificador electrónico de los servoactuadores. Esto haría que los servoactuadores del robot tra-



bajen en la zona de saturación produciendo cascabeleo o juego mecánico, ruido y dinámica no modelada, degradando el desempeño del algoritmo de control.

### ♣ Ejemplo 6.4

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico de un péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p \ddot{q}^{203} - k_v \dot{q}^{203} + mgl_c \sin(q)$$



donde las ganancias proporcional y derivativa  $k_p$ ,  $k_v$  son escalares positivos.

### Solución

La ecuación en lazo cerrado se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q}^{203} - k_v \dot{\tilde{q}}^{203} - b\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix}$$

es una ecuación diferencial autónoma.

-  En la primera componente de la ecuación en lazo cerrado  $-\dot{\tilde{q}} = -1\dot{\tilde{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0$ ,
-  Puesto que  $\dot{\tilde{q}} = 0$ , entonces en la segunda componente de la ecuación en lazo cerrado  $k_p \tilde{q}^{203} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0$ .

Por lo tanto, el punto de equilibrio existe y es único si los escalares  $I_b$ ,  $k_p$ ,  $k_v$ ,  $b$  son positivos.

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} I_b \dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{204} k_p \tilde{q}^{204}$$

la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= I_b \dot{\tilde{q}} \ddot{\tilde{q}} - k_p \tilde{q}^{203} \dot{\tilde{q}} \\ &= I_b \dot{\tilde{q}} \left[ \underbrace{\frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q}^{203} - k_p \dot{\tilde{q}}^{203}] - b \dot{\tilde{q}}}_{\tilde{q}} \right] - k_p \tilde{q}^{203} \dot{\tilde{q}} \\ &= -k_v \dot{\tilde{q}}^{204} - b \dot{\tilde{q}}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

resulta una función semidefinida negativa, por lo que está demostrada la estabilidad del punto de equilibrio. Debido a que la ecuación en lazo cerrado es un sistema dinámico autónomo, entonces es posible emplear el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar estabilidad asintótica global.

### ♣♣♣ Ejemplo 6.5

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico de un

robot de  $n$  grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control exponencial tipo  $P^{2m-1}D$

$$\tau = K_p \tilde{q}^{2m-1} - K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} + g(q) \quad (6.41)$$

### Solución

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva,  $m$  es un entero positivo  $m = 1, 2, \dots$ ,  $g(q)$  es la compensación de gravedad del robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ALFAOMEGA ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

Por notación se define







$$\tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{2m-1} \\ \tilde{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{2m-1} \\ \dot{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control (6.41) expresada en término de las variables de estado  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$  queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} - K_v \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma.

El análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$  es el siguiente:

-  De la ecuación en lazo cerrado (6.42)  $-\dot{\mathbf{q}} = -I \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.
-  La matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe  $M(\mathbf{q})^{-1}$  y también es definida positiva.
-  La ganancia proporcional  $K_p$  es matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa  $K_v > 0$ .
-  La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .
-  Puesto que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .
-  Por otro lado,  $K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.42) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.42) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2m} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, resulta una función definida positiva con respecto al vector de error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ , puesto que  $K_p$  es diagonal definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.43) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} \quad (6.44) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \mu \tilde{q}_1^{m-1} \dot{q}_1 \\ \mu \tilde{q}_2^{m-1} \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \mu \tilde{q}_n^{m-1} \dot{q}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{q}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} - \dot{q}^T B \dot{q} \\
&\quad - \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2^{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{q}_n^{m-1} \end{bmatrix} \dot{q} \\
&= \dot{q}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} - \dot{q}^T B \dot{q} \\
&\quad - \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2^{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{q}_n^{m-1} \end{bmatrix} K_p \dot{q} \\
&= \dot{q}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} - \dot{q}^T B \dot{q} - \{\tilde{q}^{2m-1}\}^T K_p \dot{q} \\
&= \cancel{\dot{q}^T K_p \tilde{q}^{2m-1}} - \dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} - \dot{q}^T B \dot{q} - \cancel{\{\tilde{q}^{2m-1}\}^T K_p \dot{q}} \\
&= -\dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0
\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Note que  $\dot{q}^T K_v \dot{q}^{2m-1} > 0$  es una función disipativa. Por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.



### 6.3.2 Control con acciones acotadas

Como una motivación por el problema teórico-práctico de mantener la acción de control acotada dentro de ciertos límites predeterminados de acuerdo con los pares máximos disponibles por los servoactuadores, se ha considerado el **control con acciones acotadas** tal que el error de posición  $\tilde{q}$  tienda asintóticamente a cero, independientemente de las condiciones iniciales del robot manipulador.



El control con acciones acotadas se encuentra sujeto a la siguiente restricción

$$|\tau_i| \leq \tau_i^{\text{max}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.45)$$

donde  $\tau_i^{\text{max}}$  es el par máximo capaz de suministrar el  $i$ -ésimo actuador.







Los actuadores del robot manipulador son capaces de aplicar un par de tal forma que el robot se encuentra en reposo para cualquier posición deseada  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ , es decir:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$ . Entonces el par máximo  $\tau_i^{\text{max}} > k$ , donde  $k$  fue definida en la propiedad 5.14 del modelo dinámico del robot manipulador.

El control con acciones acotadas es un tipo particular de algoritmos que se relaciona directamente con el problema de **saturación** de robots manipuladores. La saturación es un fenómeno no lineal que es muy frecuente en control de robots manipuladores; causa que los servomotores operen en sus límites físicos, conocido como región de saturación. Este problema se presenta cuando los algoritmos de control demandan señales grandes de control, como son los casos del control PD y PID; el resultado de esta no linealidad cuando la amplitud de la salida del algoritmo de control  $\boldsymbol{\tau}$  conduce salirse de la región lineal del servomotor, el torque suministrado por el servomotor hacia las articulaciones del robot será diferente del solicitado por el controlador y por lo tanto surgen fenómenos no lineales adicionales a los fenómenos naturales que incluye el modelo dinámico (dinámica no modelada).

El servo amplificador electrónico tiene restricciones físicas impuestas por sus límites de saturación  $\tau_{\text{max}}$ . Si el algoritmo de control  $\boldsymbol{\tau}$  solicita una demanda de par mayor a los límites físicos del servo amplificador, es decir si  $\tau > \tau_{\text{max}}$ , entonces el servo amplificador proporcionará el máximo par  $\tau_{\text{max}}$  a las articulaciones del robot. Por lo tanto, se puede caer en algunos de los siguientes problemas:



Degrada el desempeño del sistema de control.

-  Efectos térmicos.
-  Fallas mecánicas y cascabeleo (juego mecánico).
-  Pérdida de la estabilidad.
-  Problemas electromagnéticos y electromecánicos.
-  El fenómeno de fricción puede aumentar.
-  Oscilaciones y errores de posicionamiento muy grandes.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

La gráfica 6.16 muestra el perfil típico del par aplicado por un servo amplificador contra el par solicitado por el algoritmo de control. Tiene una parte lineal y la zona de saturación (no lineal). Bajo este escenario, la motivación para diseñar algoritmos de control con acciones acotadas se ubica en el interés teórico-práctico que conduzca a la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio y con alto desempeño.

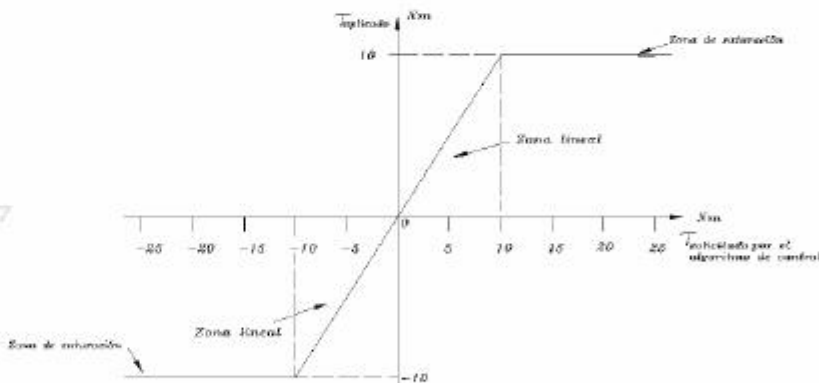
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

Figura 6.16 Perfil típico de un servo amplificador electrónico.

El servo amplificador es incapaz de aplicar energía ilimitada, sólo puede suministrar *par* dentro de sus límites normales de diseño; en consecuencia está acotado por los límites de saturación  $\pm\tau_{max}$  (ver figura 6.16). Cuando la ley de control demanda más par de lo que puede proporcionar el servo amplificador electrónico causa el efecto de saturación; en otras

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

### 6.3 Moldeo de energía

palabras, debido a que el servo amplificador no puede dar más allá de sus límites físicos, entonces proporciona el máximo par  $\tau_{max}$ . Por ejemplo, considere el caso del péndulo robot, supóngase que el servo amplificador del péndulo tiene límite de saturación de  $\pm 15\text{Nm}$ . Se requiere posicionar al péndulo en  $q_d = 90$  grados a través de un control PD. Suponiendo que las condiciones iniciales son:  $[q(0) \quad \dot{q}(0)]^T = [0 \text{ grados} \quad 0 \text{ grados/seg}]^T$  se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\tau(0) &= k_p \bar{q}(0) - k_v \dot{q}(0) + mgl_c \text{sen}(q(0)) \\ \tau(0) &= k_p q_d\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

si la ganancia proporcional  $k_p$  tiene el valor de  $10 \text{ Nm/grado}$ . Con estos valores el par aplicado en el tiempo  $t = 0$  será de  $\tau(0) = 900\text{Nm}$ , sobrepasando el máximo par  $\tau_{max} = 15\text{Nm}$ , por lo que el servo amplificador sólo podrá aplicar dentro de sus límites, en este caso es de  $15 \text{ Nm}$ .

$$\tau_{aplicado}(\tau) = \begin{cases} \tau_{max} & \text{si } \tau \geq \tau_{max} \\ \tau & \text{si } -\tau_{max} < \tau < \tau_{max} \\ -\tau_{max} & \text{si } \tau \leq -\tau_{max} \end{cases}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Para no saturar el servo amplificador y trabajar en la parte lineal, la sintonía de la ganancia proporcional debe cumplir con la siguiente condición:

$$k_p < \frac{\tau_{max}}{q_d}$$

por lo tanto la sintonía de la ganancia proporcional  $k_p$  depende de la posición deseada  $q_d$  y del par máximo del servo amplificador.

La figura del servo amplificador 6.16 puede realizarse a través de una función tangente hiperbólica como se muestra en la figura 6.17; esta idea sirve para motivar el diseño de esquemas de control con pares acotados.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

Con esta finalidad considérese el vector  $\tanh(\Lambda\tilde{\mathbf{q}})$  donde

$$\tanh(\Lambda\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1\tilde{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n\tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

donde  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es una matriz diagonal definida positiva que representa la pendiente de la función  $\tanh(\Lambda\tilde{\mathbf{q}})$ . La gráfi-

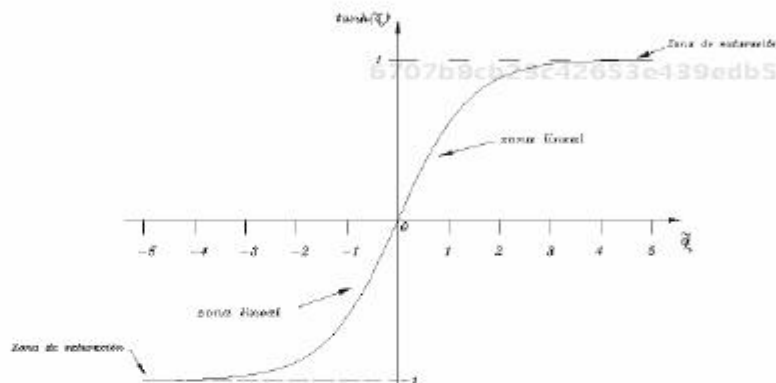
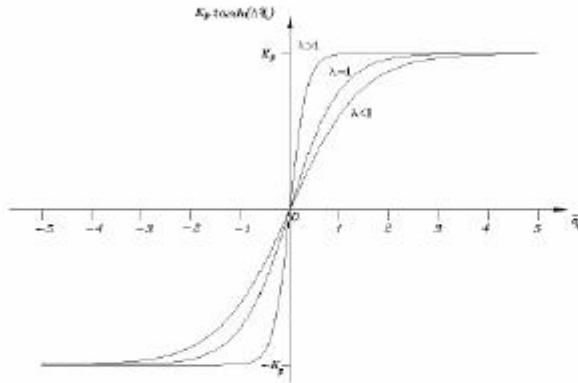


Figura 6.17 Gráfica de la función  $\tanh(\cdot)$ .

ca correspondiente de la  $i$ -ésima componente  $\tanh(\lambda_i\tilde{q}_i)$  se muestra en la figura 6.18. Dicha gráfica se encuentra acotada entre los valores 1 y -1 que corresponden al primer cuadrante para  $\tilde{q}_i > 0$  y tercer cuadrante para  $\tilde{q}_i < 0$ . Existen dos zona de operación para esta gráfica; la primera corresponde a la parte lineal que se mantiene para los casos que satisfagan  $|\tilde{q}_i| < 1$ . La zona de saturación está asignada a los valores 1 y -1, que corresponde a los casos  $|\tilde{q}_i| > 1$ . Observe que la función  $\tanh(\lambda_i\tilde{q}_i) = 0$  cuando  $\tilde{q} = 0$ . La función tangente hiperbólica se define como:  $\tanh(\lambda_i\tilde{q}_i) = \frac{\exp^{\lambda_i\tilde{q}_i} - \exp^{-\lambda_i\tilde{q}_i}}{\exp^{\lambda_i\tilde{q}_i} + \exp^{-\lambda_i\tilde{q}_i}}$ .

Para obtener mayor o menor tiempo de respuesta, es posible variar el valor numérico de la pendiente  $\lambda_i$  para subir o bajar la pendiente de la función  $\tanh(\lambda_i\tilde{q}_i)$ , respectivamente. La figura 6.18 muestra los diferentes casos para  $\lambda_i > 1$ ,  $\lambda_i = 1$ , y  $\lambda_i < 1$ . También, la zona de saturación puede ser ampliada al valor de la ganancia proporcional  $K_p$ , por lo que los márgenes



**Figura 6.18** Pendiente de la función  $\tanh(\cdot)$  para los casos  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 1$ , y  $\lambda < 1$ .

de saturación de  $K_p \tanh(\Lambda \bar{q})$  pueden ser ubicados a conveniencia del usuario.

Propiedades de la función  $\tanh(\Lambda \bar{q})$ . Considere  $\dot{q}, \bar{q} \in \mathbb{R}^n$ , con  $\Lambda, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas, entonces se cumple:

$$\|\tanh(\Lambda \bar{q})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tanh^2(\lambda_i \bar{q}_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1_1^2 + 1_2^2 + \dots + 1_n^2} = \sqrt{n}$$

$$\|\tanh(\Lambda \bar{q})\| \leq \|\Lambda\| \|\bar{q}\| \leq \lambda_{\Lambda}^{\max} \|\bar{q}\|, \text{ donde } \lambda_{\Lambda}^{\max} \text{ es el valor propio máximo de la matriz } \Lambda.$$

$$\dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \bar{q}) \leq \|\dot{q}\| \lambda_{K_p}^{\max} \lambda_{\Lambda}^{\max} \|\bar{q}\|, \text{ donde } \lambda_{K_p}^{\max} \text{ es el valor propio máximo de la ganancia proporcional } K_p.$$

$$\dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \bar{q}) \leq \|\dot{q}\| \lambda_{K_p}^{\max} \sqrt{n}.$$

$$\|\tanh(\Lambda \bar{q})\|^2 \leq \tanh(\Lambda \bar{q})^T \tanh(\Lambda \bar{q}) \leq \lambda_{\Lambda}^{\max 2} \|\bar{q}\|^2$$

$$\|\tanh(\Lambda \bar{q})\|^2 \leq n$$

$$\frac{\partial \ln(\cosh(\Lambda \bar{q}))}{\partial \bar{q}} = \text{diag}\{\tanh(\lambda_1 \bar{q}_1), \tanh(\lambda_2 \bar{q}_2), \dots, \tanh(\lambda_n \bar{q}_n)\} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

donde  $\cosh(\bar{q}) \in \mathbb{R}^n$ , es decir

$$\cosh(\Lambda \bar{q}) = [\cosh(\lambda_1 \bar{q}_1), \cosh(\lambda_2 \bar{q}_2), \dots, \cosh(\lambda_n \bar{q}_n)]^T$$



**Observación:** con respecto a las dos primeras propiedades no debe confundirse y mal interpretarse que si  $\|\tanh(\Lambda\tilde{\mathbf{q}})\| \leq n$  esto de ninguna manera implica que  $\lambda_{\Lambda}^{\max}\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq n$  ni viceversa se cumple. Esto no es verdadero. Las dos primeras propiedades representan dos cotas superiores distintas de la función  $\tanh(\Lambda\tilde{\mathbf{q}})$ , y se pueden seleccionar a conveniencia dependiendo de la finalidad matemática.

### ♣ Ejemplo 6.6

Realizar el análisis de estabilidad del control tangente hiperbólico para un péndulo robot dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma\dot{\tilde{q}}) + mgl_c \operatorname{sen}(q) \quad (6.46)$$

donde las ganancias proporcional y derivativa se encuentran representadas por  $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$ , respectivamente;  $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}_+$  son las pendientes del control tangente hiperbólico  $\tanh(\lambda\tilde{q})$  y de la acción derivativa  $\tanh(\gamma\dot{\tilde{q}})$ , respectivamente.

### Solución

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del péndulo (5.42) y el control tangente hiperbólico (6.47) expresado en términos de variables de estado  $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T$  es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_p} [k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma\dot{\tilde{q}}) - b\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

donde el momento de inercia del péndulo  $I_p$  está dado por  $I_p = ml_c^2 + I$ . La ecuación (6.47) resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de

equilibrio  $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T = [0 \ 0]^T$  de la ecuación en lazo cerrado (6.47) se toman en cuentas las siguientes consideraciones:



La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.47)  $-\dot{q} = -1\dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0$ .



Para la segunda componente de la ecuación (6.47), el momento de inercia  $I_b \in \mathbb{R}_+$ .



Las ganancias proporcional  $k_p$  y derivativa  $k_v$  son números positivos.



Puesto que  $\dot{q} = 0$ , entonces la función disipativa  $f_v(k_v, \dot{q}) = k_v \tanh(\gamma, \dot{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0$ .



Por otro lado,  $k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) = 0 \iff \tilde{q} = 0$ .

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.47) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.47) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{k_p}{\lambda} \ln(\cosh(\lambda\tilde{q}))$$

la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= I_b \dot{q} \ddot{q} - \frac{k_p}{\lambda} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \ln(\cosh(\lambda\tilde{q})) \right] \dot{q} \\ &= \dot{q} [k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma\dot{q}) - b\dot{q}] - k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) \dot{q} \\ &= -b\dot{q}^2 - k_v \dot{q} \tanh(\gamma\dot{q}) \leq 0 \end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad en forma global del punto de equilibrio.

Obsérvese que  $k_v \dot{q} \tanh(\gamma\dot{q}) > 0$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.47) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \tilde{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Nótese que  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ , si  $\dot{q} = 0$  y  $\tilde{q}$  puede ser cualquier escalar. Para que la solución  $[\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  de la ecuación en lazo cerrado (6.47) pertenezca a  $\Omega$  es necesario que  $\dot{q}(t) = 0, \forall t \geq 0$ .

Además, puesto que  $k_p \tanh(\lambda \tilde{q}) = 0$  sólo si  $\tilde{q} = 0$ , entonces el máximo conjunto invariante en  $\Omega$  es  $[\tilde{q}, \dot{q}]^T = [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \tilde{q} = 0 \right\} \quad (6.48)$$

puesto que  $V(\dot{q}, \tilde{q})$  es una función positiva definida con un único y global mínimo en  $[\tilde{q}, \dot{q}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ , entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en  $\Omega$ . Por lo tanto, usando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### ♣♣♣ Ejemplo 6.7

Realizar el análisis de estabilidad del control tangente hiperbólica dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) + \mathbf{g}(q) \quad (6.49)$$

**Solución**

donde

$$\tanh(\Lambda \bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1 \bar{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2 \bar{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n \bar{q}_n) \end{bmatrix}$$

$$\tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tanh(\gamma_1 \dot{q}_1) \\ \tanh(\gamma_2 \dot{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\gamma_n \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

la ganancia proporcional es  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la cual es una matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva; la matrices  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son ganancias diagonales definidas positivas y representan la pendiente de la función  $\tanh(\Lambda \bar{\mathbf{q}})$  del error proporcional e inyección de amortiguamiento  $\tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}})$ , respectivamente.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control tangente hiperbólica (6.49) puede ser expresada en términos de variables de estado  $[\bar{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$  de la siguiente forma:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tanh(\Lambda \bar{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\bar{\mathbf{q}}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$  se toman en cuentas las siguientes consideraciones:



La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.55)  $-\dot{\mathbf{q}} = -I\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , ya que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

✦ Para la segunda componente de la ecuación (6.55) la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe  $M(\mathbf{q})^{-1}$  y es definida positiva.

✦ La ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva.

✦ La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

✦ Puesto que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , entonces la función disipativa  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

✦ Por otro lado,  $K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.55) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.55) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ , puesto que  $K_p > 0$ . Note que el  $\cosh(0) = 1$  y el  $\ln(1) = 0$ . Por lo que la función (6.51) evaluada en  $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = V(0, 0) = 0$  y  $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$  si  $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$  y/o  $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ .



La derivada temporal de la función de energía (6.51) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

$$= \dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - \tanh(\Gamma \dot{q})^T K_v \underbrace{-\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \dot{q}^T M(q) \ddot{q}}_{\text{Propiedad de antisimetría}}$$

$$\dot{q}^T B \dot{q} - \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \lambda_1 \dot{q}_1}{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} \\ \frac{\sinh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \lambda_2 \dot{q}_2}{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} \\ \vdots \\ \frac{\sinh(\lambda_n \tilde{q}_n) \lambda_n \dot{q}_n}{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix}$$

$$= \dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - \dot{q}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q}$$

$$- \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \underbrace{\Lambda^{-1} \Lambda}_{\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sinh(\lambda_n \tilde{q}_n)}{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \dot{q}$$

El producto de matrices diagonales es conmutativo

$$= \dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - \dot{q}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} \quad (6.53)$$

$$- \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\tanh(\lambda_n \tilde{q}_n)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} K_p \dot{q}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - \dot{q}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix}}_{\tanh(\Lambda \tilde{q})} K_p \dot{q} \\
 &= \cancel{\dot{q}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q})} - \dot{q}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} - \cancel{\tanh(\Lambda \tilde{q})^T K_p \dot{q}} \\
 &= -\dot{q}^T T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0
 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Observe que  $\dot{q}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) > 0$  es una función disipativa, por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin Krasovskii LaSalle.

### ♣♣♣ Ejemplo 6.8

Realizar el análisis de estabilidad del control arco tangente dado por la siguiente ecuación:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\tau = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{q}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) + g(q) \quad (6.54)$$

### Solución

donde

$$\operatorname{atan}(\Lambda \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\gamma_1 \dot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\gamma_2 \dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\gamma_n \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

la ganancia proporcional es  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la cual es una matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva; la matrices  $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son ganancias diagonales definidas positivas y representan la pendiente de la función  $\text{atan}(\Lambda \bar{q})$  del error proporcional e inyección de amortiguamiento  $\text{atan}(\Gamma \dot{q})$ , respectivamente.

la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control arco tangente (6.54) puede ser expresada en términos de variables de estado  $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T$  de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [K_p \text{atan}(\Lambda \tilde{q}) - K_v \text{atan}(\Gamma \dot{q}) - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

El análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = [0^T \quad 0^T]^T$  se realiza en forma similar al ejemplo 6.7.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.54) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \text{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \text{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \text{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \text{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \text{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \text{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(q)$  es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición  $\tilde{q}$ , puesto que  $K_p > 0$ .

Nótese que el  $\sqrt{\tilde{q}_i} \operatorname{atan}(\lambda_i \tilde{q}_i) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_i^2] = 0$  si  $\tilde{q}_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

La derivada temporal de la función de energía (6.56), tomando en cuenta la propiedad de antisimetría del modelo dinámico 5.9 queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{q})^T K_p \dot{q} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\dot{q}^T K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{q})} - \dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} - \cancel{\operatorname{atan}(\Lambda \tilde{q})^T K_p \dot{q}} \\ &= -\dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} \leq 0 \end{aligned} \quad (6.57)$$

Obsérvese que  $\dot{q}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) > 0$  es una función disipativa, por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.



### 6.3.3 Ejemplos de algoritmos de control de posición

A continuación se presenta en forma de resumen un conjunto de ejemplos de algoritmos de control de posición con acciones no acotadas.

#### Control con acciones no acotadas



Control proporcional derivativo PD

$$\begin{aligned} \tau &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \\ \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \end{aligned}$$



Familia de controladores exponencial tipo PD

$$\begin{aligned} \tau &= K_p \tilde{q}^{2m-1} - K_v \dot{q}^{2m-1} + g(q) \\ \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) &= \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## Control seno hiperbólico

$$\tau = K_p \operatorname{senh}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{senh}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}$$



## Control tipo capacitivo

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

$$\tau = K_p [I - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^2}] \tilde{\mathbf{q}} - K_v [I - \beta \exp^{-\beta \dot{\mathbf{q}}^2}] \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2})} \tilde{q}_1 \\ \sqrt{(1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2})} \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \sqrt{(1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2})} \tilde{q}_n \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2})} \tilde{q}_1 \\ \sqrt{(1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2})} \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ \sqrt{(1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2})} \tilde{q}_n \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

$$[I - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^2}] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix}$$

$$[I - \beta \exp^{-\beta \dot{\mathbf{q}}^2}] = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 \exp^{-\beta_1 \dot{q}_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \beta_2 \exp^{-\beta_2 \dot{q}_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 - \beta_n \exp^{-\beta_n \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}$$



## Control exponencial coseno hiperbólico

$$\tau = K_p \exp^{-\cosh(K_p \tilde{\mathbf{q}})} \operatorname{senh}(K_p \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \exp^{-\cosh(K_v \dot{\mathbf{q}})} \operatorname{senh}(K_v \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary



$$\mathcal{U}_a(K_p, \bar{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{p1}\bar{q}_1)} - \exp^{-1}} \\ \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{p2}\bar{q}_2)} - \exp^{-1}} \\ \vdots \\ \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{pn}\bar{q}_n)} - \exp^{-1}} \end{bmatrix}$$

### Control con acciones acotadas

A continuación se presentan algunos ejemplos de algoritmos de control con acciones acotadas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



#### Control tangente hiperbólico

$$\tau = K_p \tanh(\Lambda \bar{q}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) + g(q)$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \bar{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\bar{q}_n))} \end{bmatrix}$$

donde  $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas.

6707b9cb23c42653e439edb57461  
ebrary



#### Control arco tangente

$$\tau = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \bar{q}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{q}) + g(q)$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \bar{q}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\bar{q}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \bar{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_1^2]} \\ \sqrt{\bar{q}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \bar{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\bar{q}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \bar{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\bar{q}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \bar{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_1^2]} \\ \sqrt{\bar{q}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \bar{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\bar{q}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \bar{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \bar{q}_n^2]} \end{bmatrix}$$

donde  $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas.



#### Familia de controladores hiperbólicos

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\Lambda \tilde{q}) \sinh(\Lambda \tilde{q})}{1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\Gamma \dot{q}) \sinh(\Gamma \dot{q})}{1 + \cosh^m(\Gamma \dot{q})} + g(q)$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}$$

donde  $m \in N$ ,  $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices diagonales definidas positivas.

$$\frac{\cosh^{m-1}(\Lambda \tilde{q}) \sinh(\Lambda \tilde{q})}{1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_1 \tilde{q}_1) \sinh(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{1 + \cosh^m(\lambda_1 \tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_2 \tilde{q}_2) \sinh(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{1 + \cosh^m(\lambda_2 \tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_n \tilde{q}_n) \sinh(\lambda_n \tilde{q}_n)}{1 + \cosh^m(\lambda_n \tilde{q}_n)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\cosh^{m-1}(\Gamma \dot{q}) \sinh(\Gamma \dot{q})}{1 + \cosh^m(\Gamma \dot{q})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_1 \dot{q}_1) \sinh(\gamma_1 \dot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\gamma_1 \dot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_2 \dot{q}_2) \sinh(\gamma_2 \dot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\gamma_2 \dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_n \dot{q}_n) \sinh(\gamma_n \dot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\gamma_n \dot{q}_n)} \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary



Control fraccional

$$\tau = K_p \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} - K_v \frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} + g(q)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) = [\sqrt{\ln(1 + \tilde{q}^2)}]^T K_p [\sqrt{\ln(1 + \tilde{q}^2)}]$$

donde

$$\frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1^2}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2^2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n^2}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \quad \frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1^2}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\dot{q}_2^2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n^2}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}$$



Control signo (todo/nada, *On/Off*)

$$\tau = K_p \text{signo}(\tilde{q}) - K_v \text{signo}(\dot{q}) + g(q)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary

$$U_a(K_p, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} |\tilde{q}_1| \\ |\tilde{q}_2| \\ \vdots \\ |\tilde{q}_n| \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} |\tilde{q}_1| \\ |\tilde{q}_2| \\ \vdots \\ |\tilde{q}_n| \end{bmatrix}$$

donde

$$\text{signo}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\tilde{q}_1) \\ \text{signo}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \text{signo}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad, la derivada de la función absoluto  $|\tilde{q}|$  no existe alrededor del origen, por lo que se considera continua por trozos:

$$\nabla \tilde{q} = \frac{\partial |\tilde{q}|}{\partial \tilde{q}} = \text{signo}(\tilde{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{q} > 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{q} = 0 \\ -1 & \text{si } \tilde{q} < 0 \end{cases}$$

## 6.4 Índice de desempeño

En el área de robótica no hay un criterio estándar para medir el desempeño (*performance*) de un algoritmo de control. Nyquist, root-locus, Bode, etc., son criterios específicos de sistemas lineales los cuales no aplican a robots manipuladores debido a su naturaleza no lineal.

Algunos investigadores miden el desempeño del algoritmo de control por inspección visual de las gráficas del error de posición y a su juicio determinan si el desempeño es adecuado. Sin embargo, dicha medición es muy subjetiva y queda a interpretación del mismo.

Un criterio académico ampliamente aceptado en la comunidad científica de robótica para medir el desempeño de un algoritmo de control es por medio de la obtención del índice de desempeño determinado por la norma  $\mathcal{L}_2$ .

El índice de desempeño de un algoritmo de control de posición de robots manipuladores se define como:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt}, \quad (6.58)$$

donde  $T$  representa el tiempo de simulación o de experimentación.

El mejor comportamiento de desempeño del controlador corresponde a la norma  $\mathcal{L}_2$  más pequeña. Un valor alto en el índice de desempeño, representa un pobre desempeño.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

El análisis comparativo del índice de desempeño se realiza con respecto a un esquema de control de referencia, generalmente es el control PD debido a que se conoce ampliamente. El índice de desempeño de un esquema de control se refiere a la exactitud que debe tener la respuesta del robot manipulador. Los aspectos cualitativos de la estrategia de control son factores importantes que determinan el desempeño: de particular interés son las propiedades matemáticas del gradiente de la energía potencial artificial  $\nabla U(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  que permitan exhibir un corto transitorio, sobre impulsos y vibraciones mecánicas atenuados por la función de amortiguamiento, facilidad en la sintonía de las ganancias proporcional y derivativa, robustez frente a incertidumbre paramétrica son algunas de las cualidades del esquema de control se ven reflejadas en el desempeño del algoritmo de control y por lo tanto repercuten en la medición de su indicador. Cuando el desempeño de un algoritmo de control no es el adecuado, es necesario mejorar las propiedades matemáticas de la función de energía potencial artificial y en el efecto de amortiguamiento.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Un alto desempeño del esquema de control significa que la exactitud en el error de posicionamiento debe ser idealmente cero, entonces la respuesta del robot es de calidad: es decir, presenta una curva con perfil suave, picos o sobre impulsos atenuados, rápido estado transitorio, no hay vibración mecánica, ni oscilaciones. Además, en el estado estacionario no debe presentar juego mecánico. Sin embargo, en la práctica el error de

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

posicionamiento no tiene un valor cero debido al ruido que presenta la señal digital de la velocidad articular, más aún si se obtiene por diferenciación numérica de la posición. Hay que tomar en cuenta que el diseño del algoritmo de control es en tiempo continuo, pero la implementación es en tiempo discreto. Por lo tanto, una adecuada cota superior del error de posición puede ser establecida como una diezmilésima de grado para cada articulación.

La evaluación comparativa de desempeño no se realiza para una referencia deseada específica  $q_d$ , esto no tendría sentido debido a que los resultados pueden cambiar para otra selección de referencia y no hay certeza para otros posibles escenarios. Por lo tanto, es necesario realizar el análisis comparativo donde los niveles de exigencia sean muy superiores al problema de control de posición, por ejemplo sobre aplicaciones de control punto a punto. La idea principal se centra en evaluar a los algoritmos de control en el seguimiento de trayectoria con las ganancias sintonizadas para trabajar al servo amplificador en la región lineal y lejos de la zona de saturación.

La metodología para obtener la medición del índice de desempeño consiste en realizar una comparación experimental o simulación en una aplicación donde las exigencias al algoritmo de control sean grandes.

El análisis comparativo consiste en seleccionar la mejor sintonía de las ganancias, para una aplicación de control punto a punto. Presentar los resultados por medio de una gráfica como la que se muestra en la figura 6.19 donde en el eje horizontal (eje de las ordenadas) representa los controladores comparados, por ejemplo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  y  $\tau_4$  y el eje vertical (eje de las abscisas) es el índice de desempeño de la norma  $\mathcal{L}_2$ , el cual se representa en porcentaje. El índice más pobre (el valor más alto) representa el 100 %, mientras que el índice con mayor desempeño (el valor más pequeño de la norma  $\mathcal{L}_2$ ) se representa con el menor porcentaje.

En la figura 6.19 el control  $\tau_1$  tiene pobre desempeño, mientras que el



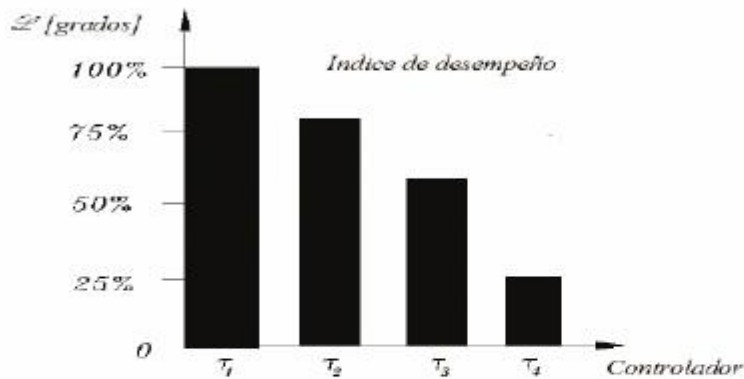


Figura 6.19 Índice de desempeño comparativo entre los controles  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  y  $\tau_4$ .

mejor desempeño corresponde al control  $\tau_4$  mejorando hasta en un 75% el desempeño del control  $\tau_1$ .

### ♣ ♣ Ejemplo 6.9

Obtener el índice de desempeño para los algoritmos de control PD, arco tangente y tangente hiperbólico sobre un brazo robot de 2 gdl realizando el seguimiento de una trayectoria circular de radio 15 cm y con periodo de 12.56 segundos. Se desea que el centro del círculo quede en el IV cuadrante del espacio de trabajo del robot en las coordenadas (0.3 cm, -0.3 cm). El tiempo de simulación de cada algoritmo de control es de 100 segundos.

### Solución

Considere el robot planar vertical de 2 gdl presentado en el ejemplo 6.1. La trayectoria del círculo se parametriza en coordenadas cartesianas y en función del tiempo de la siguiente forma:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_c + r \operatorname{sen}(wt) \\ y_c + r \operatorname{cos}(wt) \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

donde  $x_c, y_c$  representan las coordenadas del centro del círculo,  $r$  es el radio del círculo,  $w = 2\pi f$  es la frecuencia en radianes/seg y  $f$  es la frecuencia en hertz de la trayectoria circular,  $t$  es la evolución del tiempo.

Se requiere que la trayectoria circular tenga un periodo de 12.56 seg, entonces  $f = 0.0795$  herts, es decir  $2\pi f = 0.5$  rad/segundos.

Supóngase que el robot manipulador de 2 gdl tiene su posición de casa (*home position*) sobre el eje  $y_-$ , entonces la cinemática inversa está dada por

$$q_{d2} = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)$$

$$q_{d1} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{l_2 \sin(q_{d2})}{l_1 + l_2 \cos(q_{d2})}\right)$$

donde  $x, y$  son las coordenadas cartesianas de la trayectoria circular (6.59),  $l_1, l_2$  son las longitudes de los eslabones del robot de las articulaciones del hombro y codo, respectivamente. Para el robot prototipo tienen una longitud de  $l_1 = l_2 = 0.45$  m.

Por notación considere el control PD denotado por  $\tau_{PD}$ , control arco tangente por  $\tau_{atan}$  y el algoritmo tangente hiperbólico como  $\tau_{tanh}$ . Para el robot prototipo de 2 gdl los algoritmos de control adquieren la siguiente forma:

$$\tau_{PD} = \begin{bmatrix} \tau_{1PD} \\ \tau_{2PD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1}\tilde{q}_1 - k_{v1}\dot{q}_1 + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2}\tilde{q}_2 - k_{v2}\dot{q}_2 + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix}$$

$$\tau_{atan} = \begin{bmatrix} \tau_{1atan} \\ \tau_{2atan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1} \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - k_{v1} \operatorname{atan}(\gamma_1 \dot{q}_1) + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2} \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - k_{v2} \operatorname{atan}(\gamma_2 \dot{q}_2) + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix}$$

$$\tau_{tanh} = \begin{bmatrix} \tau_{1tanh} \\ \tau_{2tanh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - k_{v1} \tanh(\gamma_1 \dot{q}_1) + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2} \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - k_{v2} \tanh(\gamma_2 \dot{q}_2) + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix}$$

Es necesario recalcar que los esquemas de control  $\tau_{PD}$ ,  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$  resuelven el problema de control de posición donde la referencia deseada

$q_d$  es una constante, ya que su diseño fue dentro del ámbito de regulación. La evaluación del seguimiento de una trayectoria resulta una aplicación compleja con respecto al control de posición cuyos niveles de exigencia son mayores.

La sintonía de las ganancias para cada esquema de control se debe realizar tomando en cuenta que el servo amplificador trabaje en la región lineal, lejos de la zona de saturación. Para esta finalidad es recomendable que el par aplicado a las articulaciones adquiera un valor máximo del 80% del límite físico. Para el robot prototipo los límites físicos de los servo amplificadores del hombro y codo son 200 Nm y 15 Nm, respectivamente.

Las reglas de sintonía para cada algoritmo de control se presentan a continuación:



Para sintonizar adecuadamente las ganancias del algoritmo de control PD es necesario saber cuál es el valor máximo del error de posición, el cual sucede en el tiempo  $t = 0$ , es decir en el caso de la trayectoria circular (6.59)  $\tilde{q}^T(0) = [\tilde{q}_1(0) \quad \tilde{q}_2(0)]^T = [2.2 \quad 140]^T$  grados. Por lo tanto, las ganancias del control  $\tau_{PD}$  pueden ser sintonizadas como:  $k_{p1} \leq 0.8 \frac{\tau_1^{max}}{\tilde{q}_1^{max}(0)} = 0.8 \frac{200 \text{ Nm}}{2.2 \text{ grados}} = 72 \text{ Nm/grados}$ ; para la articulación del codo  $k_{p2} \leq 0.8 \frac{\tau_2^{max}}{\tilde{q}_2^{max}(0)} = 0.8 \frac{15 \text{ Nm}}{140 \text{ grados}} = 0.085 \text{ Nm/grados}$ .



Las ganancias del control  $\tau_{atan}$  no dependen del valor del error de posición  $\tilde{q}$ , únicamente deben satisfacer  $k_{p1} \leq \frac{0.8}{1.5} \tau_1^{max} = \frac{0.8}{1.5} 200 \text{ Nm} = 106.66 \text{ Nm}$ ; y  $k_{p2} \leq \frac{0.8}{1.5} \tau_2^{max} = \frac{0.8}{1.5} 15 \text{ Nm} = 6.4 \text{ Nm}$ . La constante 1.5 se refiere al valor de saturación de la función arco tangente. Las ganancias derivativas deben satisfacer  $k_{v1} \leq k_{p1}$  y  $k_{v2} \leq k_{p2}$ . Los valores en las pendientes de las funciones arco tangente para el error y velocidad son  $\Lambda = \text{diag}(\frac{180}{\pi}, \frac{180}{\pi})$  y  $\Gamma = \text{diag}(1, 1)$ , respectivamente.



Para el control  $\tau_{tanh}$ , la sintonía de las ganancias no dependen del error de posición  $\tilde{q}$  como en el caso  $\tau_{PD}$ . Por lo que,  $k_{p1} \leq 0.8 \tau_1^{max} =$

$0.8 \cdot 200 = 160 \text{ Nm}$ ; y  $k_{p2} \leq 0.8\tau_2^{max} = 0.8 \cdot 15 \text{ Nm} = 12 \text{ Nm}$ . Las ganancias derivativas deben satisfacer  $k_{v1} \leq k_{p1}$  y  $k_{v2} \leq k_{p2}$ . Los valores en las pendientes de las funciones tangente hiperbólica para el error y velocidad son  $\Lambda = \text{diag}(\frac{180}{\pi}, \frac{180}{\pi})$  y  $\Gamma = \text{diag}(1, 1)$ , respectivamente.

La tabla 6.1 contiene el resumen de las principales condiciones de evaluación del índice de desempeño.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary  
**Tabla 6.1 Condiciones de desempeño.**

Articulación	$\tau_{PD}$	$\tau_{atan}$	$\tau_{tanh}$
Hombro $\tau_1^{max} = 200 \text{ Nm}$ $q_{d1} = 45 \text{ grados}$	$k_{p1} = 72 \frac{\text{Nm}}{\text{grados}}$ $k_{v1} = 0.25 k_{p1} \frac{\text{Nm-seg}}{\text{grados}}$	$k_{p1} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v1} = k_{p1} \text{ Nm}$ $\lambda_1 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_1 = 1$	$k_{p1} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v1} = k_{p1} \text{ Nm}$ $\lambda_2 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_2 = 1$
Codo $\tau_1^{max} = 15 \text{ Nm}$ $q_{d2} = 90 \text{ grados}$	$k_{p2} = 0.085 \frac{\text{Nm}}{\text{grados}}$ $k_{v2} = 0.25 k_{p2} \frac{\text{Nm-seg}}{\text{grados}}$	$k_{p2} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v2} = k_{p2} \text{ Nm}$ $\lambda_1 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_1 = 1$	$k_{p2} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v2} = k_{p2} \text{ Nm}$ $\lambda_2 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_2 = 1$

El índice de desempeño de cada algoritmo de control se obtiene como:

$$\mathcal{L}_2[\vec{q}] = \sqrt{\frac{1}{100} \int_0^{100} (\vec{q}_1^2 + \vec{q}_2^2) dt}$$

Los resultados del índice de desempeño para el control  $\tau_{PD}$  en el seguimiento de la trayectoria circular arrojan una magnitud de 2.4274 grados, para el control  $\tau_{atan}$  0.4611 grados y para el tangente hiperbólico  $\tau_{tanh}$  0.497 grados, respectivamente. La figura 6.19 muestra la evaluación comparativa del índice de desempeño de los algoritmos de control  $\tau_{pd}$ ,  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$ , el control  $\tau_{PD}$  fue el que obtuvo la mayor magnitud de la norma  $\mathcal{L}_2$ , lo

que representa el valor de 100%, los algoritmos de control  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$  representan el 18.99% y 20.47%, respectivamente. El control  $\tau_{PD}$  tiene

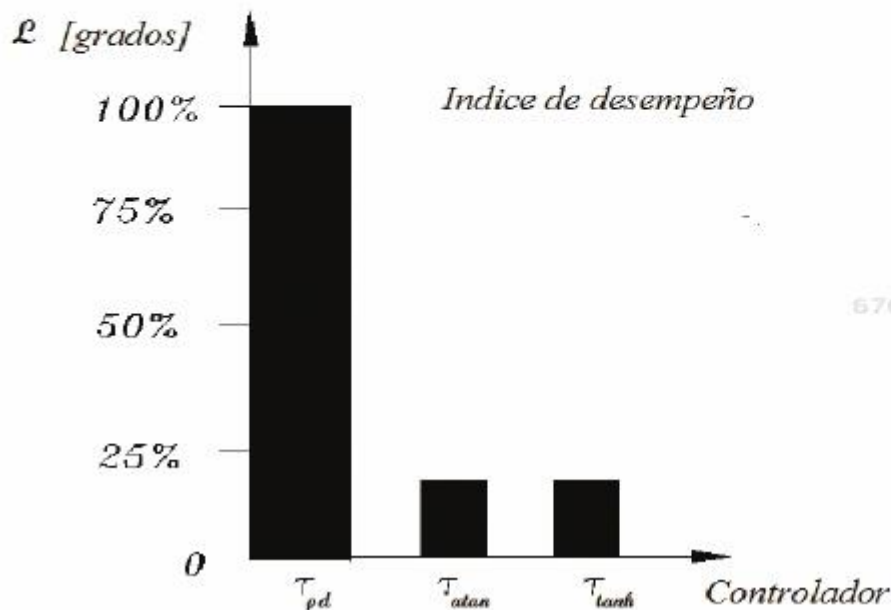


Figura 6.20 Desempeño de los algoritmos de control  $\tau_{pd}$ ,  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$ .

el desempeño más bajo y por lo tanto los mejores desempeños son los controladores  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$ . Esto significa que el control  $\tau_{atan}$  mejoró el desempeño del control  $\tau_{PD}$  en un 81%, mientras que el algoritmo de control  $\tau_{atan}$  en un 79.53%. Evidentemente, el desempeño de los algoritmos saturados resultó muy superior al esquema proporcional derivativo  $\tau_{PD}$ . Del análisis comparativo los algoritmos de control  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$  muestran un desempeño muy similar, por lo tanto sus resultados sobre la traza del círculo y perfil de errores de posición son similares.

La figura 6.21 muestra el seguimiento del robot de 2 gdl para la trayectoria circular con el control  $\tau_{PD}$ , así como los errores de posición. La sintonía de las ganancias proporcional derivativo permite operar al servo amplificador en la región lineal. El estado transitorio es breve, con sobretiros atenuados, lo que indica que la ganancia derivativa está bien sintonizada como el 25% de la ganancia proporcional y el efecto de amortiguamien-



to es adecuado. Sin embargo, en estado estacionario la magnitud de los errores de posición es grande, llegando a magnitudes de 6.25 grados, lo que deforma la figura del círculo debido a que la sintonía de las ganancias tienen una dependencia del error de posición  $k_p = k_p(\tilde{q})$ , deteriorando el desempeño de control.

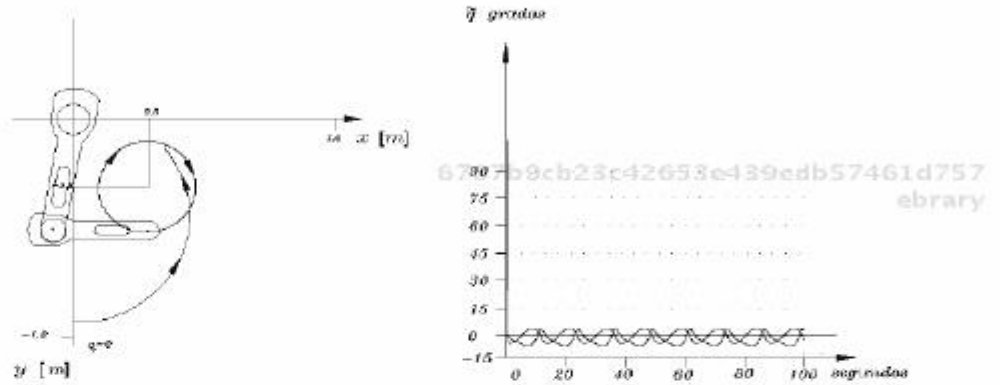


Figura 6.21 Desempeño del algoritmo de control  $\tau_{PD}$ .

El desempeño del algoritmo de control  $\tau_{atan}$  se presenta en la figura 6.22. Las ganancias proporcional del hombro y codo garantizan trabajar al servo amplificador en la región lineal, ya que el máximo par aplicado a las articulaciones es el 80% de sus límites físicos. La sintonía de las ganancias no dependen del error de posición  $\tilde{q}$  como en el caso  $\tau_{PD}$ . La característica

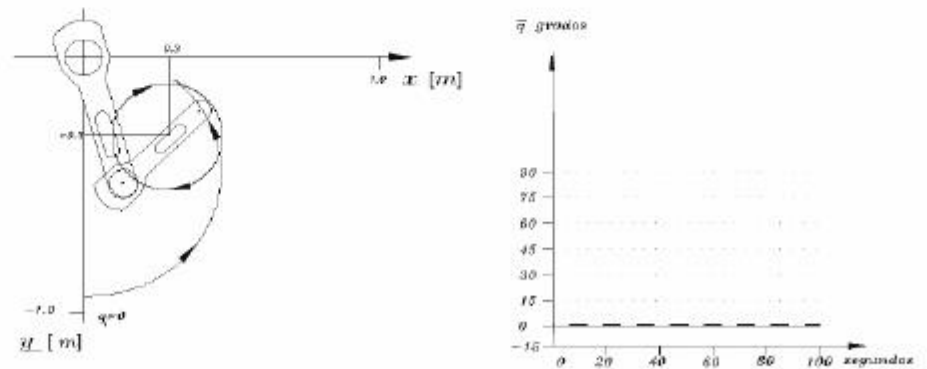
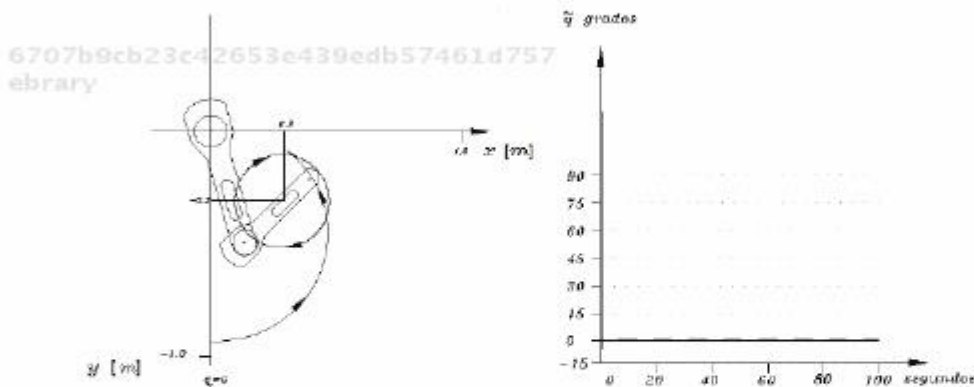


Figura 6.22 Desempeño del algoritmo de control arco tangente  $\tau_{atan}$ .

de estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado mantiene a los errores de posición acotados  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n$  dentro del radio de atracción. La sintonía de las ganancias del algoritmo de control son adecuadas ya que producen un estado transitorio corto con sobre impulsos atenuados y en estado estacionario la magnitud del error de posición de cada articulación alcanza valores de 0.4 grados, lo que permite realizar un seguimiento mucho más exacto de la trayectoria circular, mejorando el desempeño mostrado por el control  $\tau_{PD}$  cuya exactitud en el seguimiento es pobre. La convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de las variables de estado  $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$  no se alcanza debido a que la aplicación es sobre el seguimiento de una trayectoria variante en el tiempo  $\mathbf{q}_d(t)$  lo que representa un problema mucho más complicado que el problema de regulación.

La figura 6.23 presenta el seguimiento de la trayectoria circular por el robot manipulador de 2 gdl cuando se encuentra controlado por el esquema tangente hiperbólico. La sintonía de las ganancias permite operar al servo amplificador en la región lineal lejos de los límites de saturación. De hecho el máximo par aplicado a las articulaciones del robot es el 80% de los límites físicos.



**Figura 6.23** Desempeño del algoritmo de control tangente hiperbólico.

Cuando la ganancia derivativa adquiere el mismo valor de la ganancia proporcional, la inyección de amortiguamiento genera un estado transito-

rio rápido con pequeños sobretiros, y en estado estacionario la magnitud del error de posición de ambas articulaciones es menor a 0.45 grados, realizando la traza circular con mayor exactitud que referencia al control  $\tau_{PD}$ . Para los algoritmos de control  $\tau_{atan}$  y  $\tau_{tanh}$  las ganancias que determinan la pendiente  $\Lambda$  y  $\Gamma$  representan una herramienta adicional para mejorar el desempeño de esos esquemas, debido que pueden modificar la velocidad de respuesta.



## 6.5 Aplicaciones de control de posición

El control de posición de robots manipuladores tiene varias aplicaciones científicas, comerciales, industriales, domésticas y en medicina. Algunos ejemplos son el traslado de objetos, envío y recolección de herramientas, teleoperación, asistencia robotizada a personas minusválidas como ayuda para comer o escribir, etc.

Adicionalmente en el ámbito científico control de posición también puede aplicarse a control cartesiano, control punto a punto y programación de instrucciones para robots industriales.



### 6.5.1 Control cartesiano

El control cartesiano de robots manipuladores es la programación de tareas directamente en coordenadas cartesianas o en espacio de tareas.

Las coordenadas cartesianas facilitan la interpretación del planteamiento de problemas y su implementación. En contraste, las coordenadas articulares pueden resultar mucho más complicadas para el ingeniero programador de robots (ver figura 6.24). En este contexto, las coordenadas cartesianas plantean un escenario favorable para programar robots manipuladores.

La metodología del jacobiano transpuesto sugerida por Arimoto permite

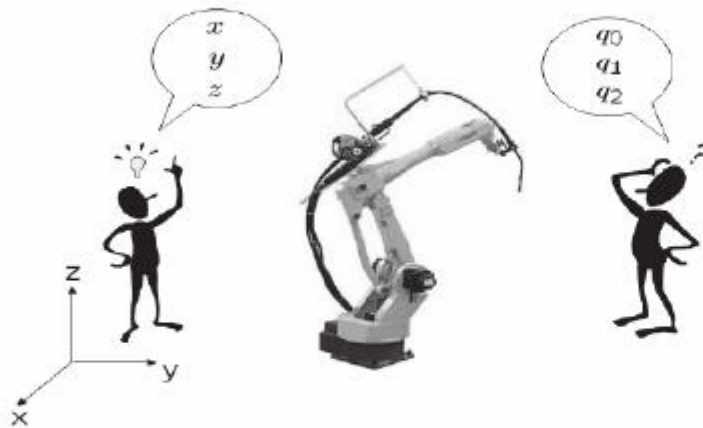


Figura 6.24 Control cartesiano.

convertir una estructura de control cartesiana en par aplicado a las articulaciones del robot, por ejemplo:

$$\tau = J^T(q) f_{\mathcal{X}} \quad (6.60)$$

donde  $f_{\mathcal{X}}$  representa la fuerza en coordenadas cartesianas,  $J(q)$  es el jacobiano del robot,  $\tau$  es el par aplicado a las articulaciones del robot.

De esta forma, la técnica de moldeo de energía permite ampliar sus resultados de diseño de algoritmos de control en coordenadas articulares hacia el espacio de tareas, generando una familia extensa de esquemas de control en coordenadas cartesianas.

El problema de control de posición en coordenadas cartesianas consiste en determinar la ley de control  $\tau = J^T(q) f_{\mathcal{X}}$  tal que suministre los pares aplicados a las articulaciones del robot con el objetivo de mover el extremo final del robot hacia la posición deseada  $\mathcal{X}_d$ . El error de posición cartesiano se define como  $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_d - \mathcal{X}$ , entonces el objetivo de control es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{X}} \\ \dot{\tilde{\mathcal{X}}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$$

sujeito a que las condiciones iniciales del vector de error de posición cartesiano  $\tilde{\mathcal{X}}(0)$  y la velocidad cartesiana  $\dot{\tilde{\mathcal{X}}}(0)$  sean suficientemente pequeños.



El problema de control cartesiano de robots manipuladores considera las siguientes hipótesis:

✦ Existe un vector de posición constante  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  en el espacio de configuración cartesiana para el cual el vector de error cartesiano se anula,  $\chi(\mathbf{q}) = \chi(\mathbf{q}_d)$ . Es importante mencionar que no es necesario conocer a  $\mathbf{q}_d$ . Esta hipótesis asegura la solución del problema.

✦ El jacobiano del robot es una matriz continua y diferenciable con respecto a cada entrada  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ; además satisface que es de rango completo, es decir

$$\text{rango}\{J(\mathbf{q})\} = n$$

Esta hipótesis es un requerimiento técnico en la existencia del punto de equilibrio y del análisis de estabilidad local.

Considérese la siguiente estructura de control cartesiano definida por molde de energía:

$$\mathbf{f}_\chi = \nabla U_p(K_p, \tilde{\chi}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) + \mathbf{g}(\chi) \quad (6.61)$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas. La energía potencial artificial en coordenadas cartesianas está representada por  $U_a(K_p, \tilde{\chi})$  y la función disipativa cartesiana por  $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi})$ , la compensación de fuerza gravitacional es  $\mathbf{g}(\chi)$ .

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad en coordenadas cartesianas se encuentra determinado por la ecuación (5.54), la cual la reescribimos a continuación:

$$\mathbf{f}_\chi = M(\chi)\ddot{\chi} + C(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} + \mathbf{g}(\chi) + B\dot{\chi}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico cartesiano del robot manipulador (5.54) y la estructura de control cartesiano (6.61) se encuentra dado en variables de estado cartesianas  $[\tilde{\chi}^T, \dot{\chi}^T]^T$  por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\chi} \\ M^{-1}(\chi) [\nabla U_p(K_p, \tilde{\chi}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) - C(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} - B\dot{\chi}] \end{bmatrix}$$



(6.62)

resulta una ecuación diferencial autónoma no lineal.

Considérese la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \dot{\chi}^T M(\chi) \dot{\chi} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) \quad (6.63)$$

La derivada temporal de la función (6.63) está dada como:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) &= \dot{\chi}^T M(\chi) \ddot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi} - \nabla^T \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) \dot{\chi} \quad (6.64) \\ &= \dot{\chi}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) - \underbrace{\dot{\chi}^T C(\chi, \dot{\chi}) \dot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &\quad - \dot{\chi}^T B \dot{\chi} - \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi}) \dot{\chi} \\ &= -\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) - \dot{\chi}^T B \dot{\chi} \leq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra estabilidad local del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.62). La estabilidad asintótica se obtiene empleando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La conversión de la fuerza cartesiana  $\mathbf{f}_\chi$  a par aplicado es por medio de la expresión del jacobiano transpuesto de Arimoto:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{f}_\chi$ .

El control en espacio cartesiano de robots manipuladores presenta diferencias significativas con el control en espacio articular como las que a continuación se enlistan:



La estabilidad asintótica en espacio cartesiano es local (jacobiano de rango completo), esto significa que la posición del robot debe estar suficientemente cercana al punto deseado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



La estabilidad asintótica en espacio articular es global, no depende de las condiciones iniciales.



Facilidad natural de programación de robots manipuladores en coordenadas cartesianas.



La programación en coordenadas articulares expresadas en grados o radianes puede resultar complicada su interpretación.



Las ganancias de los algoritmos de control en espacio articular permanecen constantes, por lo que resulta más fácil el método de sintonía.



La incorporación del jacobiano transpuesto en la conversión de fuerza cartesiana a par aplicado modifica las ganancias de los algoritmos de control cartesianos, resultando ganancias dependientes de la posición.

Por ejemplo,  $J^T(\mathbf{q})K_p$ , entonces la matriz resultante del producto de la matriz jacobiana y la ganancia proporcional es una matriz dependiente de la posición articular  $\mathbf{q}$ , en consecuencia la sintonía de las ganancias puede ser complicada y producir pobre desempeño.



A pesar de que la conversión de fuerza cartesiana a par aplicado vía jacobiano transpuesto es un mapeo no lineal, la dinámica del robot en coordenadas cartesianas mantiene las propiedades matemáticas claves en el análisis y diseño de algoritmos de control en espacio cartesiano tales como matriz de inercia cartesiana es simétrica y definida positiva, así como la propiedad de antisimetría cartesiana.



El control en espacio articular presenta ventajas en desempeño, sintonía de ganancias y estabilidad asintótica global cuando se aplica a espacio cartesiano convirtiendo las coordenadas cartesianas a coordenadas articulares por medio de la cinemática inversa.

### ♣ Ejemplo 6.10

Convertir en variables de estado cartesiano el algoritmo de control proporcional derivativo PD (6.2) y llevar a cabo el análisis de estabilidad local en su espacio de tareas.

**Solución:** el control cartesiano PD está dado por la siguiente estructura:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{X}} = K_p \bar{\mathbf{X}} - K_v \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{g}(\mathbf{X}) \quad (6.65)$$

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico cartesiano

de un robot manipulador de  $n$  gdl (5.54) y el control (6.65) está dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \dot{\tilde{\chi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\chi}} \\ M^{-1}(\chi) [K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\tilde{\chi}} - C(\chi, \dot{\tilde{\chi}}) \dot{\tilde{\chi}} - B \dot{\tilde{\chi}}] \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\tilde{\chi}}, \tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\chi}}^T M(\chi) \dot{\tilde{\chi}} + \frac{1}{2} \tilde{\chi}^T K_p \tilde{\chi} \quad (6.67)$$

La derivada temporal de la función (6.67) está dada como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\tilde{\chi}}, \tilde{\chi}) &= \dot{\tilde{\chi}}^T M(\chi) \ddot{\tilde{\chi}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\chi}}^T \dot{M}(\chi) \dot{\tilde{\chi}} - \tilde{\chi}^T K_p \dot{\tilde{\chi}} \quad (6.68) \\ &= \dot{\tilde{\chi}}^T K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\tilde{\chi}} - \underbrace{\dot{\tilde{\chi}}^T C(\chi, \dot{\tilde{\chi}}) \dot{\tilde{\chi}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\chi}}^T \dot{M}(\chi) \dot{\tilde{\chi}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &\quad - \dot{\tilde{\chi}}^T B \dot{\tilde{\chi}} - \tilde{\chi}^T K_p \dot{\tilde{\chi}} \\ &= -K_v \dot{\tilde{\chi}} - \dot{\tilde{\chi}}^T B \dot{\tilde{\chi}} \leq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra estabilidad local del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.62). La estabilidad asintótica se obtiene empleando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

El par aplicado a las articulaciones del robot se encuentra determinado por  $\tau = J^T(\mathbf{q}) [K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\tilde{\chi}} + \mathbf{g}(\chi)]$ .

### Control cartesiano con acciones acotadas

Como ejemplos de esquemas de control cartesiano con acciones acotadas se encuentran los siguientes algoritmos:



#### Control tangente hiperbólico cartesiano

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\tilde{\chi}} &= K_p \tanh(\Lambda \tilde{\chi}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{\tilde{\chi}}) + \mathbf{g}(\chi) \\ \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_n))} \end{bmatrix} \end{aligned}$$





## Control arco tangente cartesiano

$$f_{\chi} = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\chi}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\tilde{\chi}}) + g(\chi)$$

$$U_a(K_p, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{\chi}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{\chi}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{\chi}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{\chi}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{\chi}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{\chi}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{\chi}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{\chi}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{\chi}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{\chi}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{\chi}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_n^2]} \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



## 6.5.2 Visual servoing



Hoy en día, el empleo de cámaras de video acopladas al robot manipulador se utiliza en la industria para seleccionar por ejemplo materiales o piezas automotrices; en medicina es la forma de automatizar quirófanos, ya que a través de visual servoing es posible realizar cirugías complicadas. En actividades de investigación del espacio la incorporación de cámaras de video amplía el horizonte de búsqueda y análisis de objetos desconocidos. En particular en el caso del robot manipulador mejora sus medios de percepción y su autonomía en el ambiente de trabajo.

Un sistema de visión artificial imita al sentido humano; está compuesto por una cámara de video, electrónica y programación para poder desplegar la información visual en una computadora o monitor. Permite medir sin contacto la posición y orientación del extremo final del robot, así como de cualquier otro objeto visible dentro de su espacio de trabajo. La incorporación de una cámara de video en el robot incrementa su potencial para responder de manera versátil a un espectro de aplicaciones cada vez más amplio. Algunas aplicaciones para robots guiados por visión incluyen manipulación y transportación de objetos, seguimiento de trayectorias, regulación, evasión de obstáculos, etc.

Al control de robots manipuladores mediante el empleo de información

## Visual servoing

En el sitio web del libro se presentan las bases fundamentales del control de robots usando información visual, así como el modelo matemático de un sistema de visión. Asimismo, se analizan las principales configuraciones entre la cámara de video y el robot manipulador: configuración cámara en mano y configuración cámara fija. También se ve el diseño de esquemas de control con la estructura del jacobiano transpuesto, los cuales se ilustran usando la metodología de moldeo de energía.



visual proporcionada por una cámara de video CCD en el lazo de retroalimentación se le conoce como *visual servoing*; se trata de una clase particular de control cartesiano y agrupa varias áreas del conocimiento, entre ellas la computación, el procesamiento de imágenes, la física, las matemáticas, el control automático, la electrónica, etc.

Actualmente, la mayoría de los robots industriales que están equipados con sistemas de visión no se explotan al máximo de su potencial debido a que la información visual sólo se utiliza con el propósito de localizar ciertos objetos en el espacio de trabajo del robot. La información visual resulta de mayor valor en el momento que se incorpora en el lazo de control.

Visual servoing es un método de control para robots manipuladores que emplea información visual en el lazo de control. La información visual es proporcionada por un sistema de visión y retroalimentada a un algoritmo de control para que éste guíe la posición del robot y su efector final relativo a un objeto llamado objetivo. Visual servoing es un concepto que no sólo incluye controlar a un robot para manipular dentro de su ambiente de trabajo, sino también realizar una tarea programada. Es decir, el robot no está limitado a observar el ambiente, lo manipula e interacciona con objetos.

Visual servoing es la fusión de resultados de varias disciplinas tales como visión artificial, teoría de control, robótica y computación, y consiste en incorporar en el lazo de control la información visual obtenida a través del sistema de visión para generar una variable de error definida directamente en términos de un conjunto de características distintivas de imágenes (control basado en imágenes). Esta variable de error se utiliza con la retroalimentación visual directa, la posición y velocidad articular por un controlador para cumplir con ciertos objetivos de control. La formulación más sencilla es cuando el objeto se encuentra estático y la trayectoria deseada es un punto en el plano de la imagen.

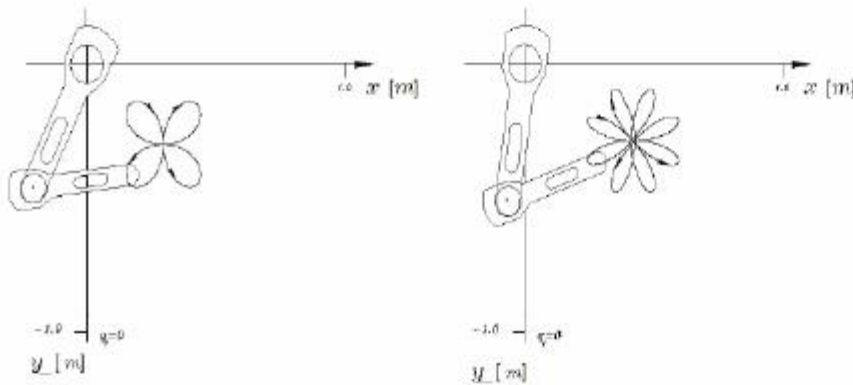
### Control por visión

El área del conocimiento que aborda el control de posición de robots manipuladores empleando información visual directamente en el lazo de control se le denomina *visual servoing*. Hoy en día, se ha vuelto una atractiva área científica de naturaleza multidisciplinaria; es la fusión de resultados de varias áreas del conocimiento que incluyen procesamiento de imágenes a alta velocidad, cinemática, dinámica, teoría de control, robótica, mecatrónica y cómputo en tiempo real. Visual servoing puede aplicarse ampliamente en control de objetos estáticos, seguimiento de objetos en movimiento, en el campo de las exploraciones de rangos amplios, reconocimiento y vigilancia por robots aéreos, así como en robots de aplicaciones médicas como en operaciones o cirugías a corazón abierto o hidrocefalia (retirar agua del cerebro). El molde de energía se ha convertido en una herramienta de diseño de familias grandes de esquemas de control para visual servoing.



### 6.5.3 Control punto a punto

Una de las aplicaciones más populares de control de posición es el denominado control punto a punto, consiste en mover el extremo final del robot en cada una de las posiciones deseadas  $q_{di}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . La curva de seguimiento puede estar parametrizada vía ecuaciones o a través del registro de puntos que le indiquen la forma de movimiento. Por ejemplo, la figura 6.25 muestra el trazo de figuras con 4 y 8 pétalos realizadas por un robot planar de 2 gdl usando el algoritmo de control tangente hiperbólica.



**Figura 6.25** Aplicación de reguladores para trazo de figuras.

Para que un regulador diseñado por medio de moldeo de energía pueda ser empleado en control punto a punto, es necesario que dicho regulador genere un atractor con características de estabilidad asintótica global y además tenga alto desempeño.

La estabilidad asintótica global garantiza la inmunidad a la condición inicial, esto significa que una vez que el robot se encuentra posicionado en un punto deseado  $q_{di}$ , el siguiente periodo de muestreo se moverá al punto  $q_{d(i+1)}$ , por lo que  $q_{di}$  hace el papel de la condición inicial, esto se hará así sucesivamente durante el seguimiento de la trayectoria  $q_d(t)$ .

Otra forma de programar a un robot manipulador es por medio de coor-

denadas almacenadas en un archivo tipo texto o ASCII. Los datos pueden estar grabados en forma tabular con dos columnas, la primera columna contiene el tiempo real y la segunda columna el valor de la posición que tiene que seguir el robot.

La velocidad de movimiento del robot no es necesaria debido a que se puede obtener por diferenciación numérica de la posición (método de Euler). Si los datos se encuentran directamente en coordenadas articulares, éstas representan la variable articular  $q$ . En otro caso se deben convertir las coordenadas cartesianas a articulares, lo cual se realiza a través de la cinemática inversa del robot.

La ejecución de la aplicación consiste en abrir el archivo o disponer del medio electrónico donde se encuentre la curva o conjunto de coordenadas. Cada renglón del archivo representa el desplazamiento del robot y su instante de tiempo para realizarlo: entre más puntos tenga el archivo más suave será la curva de seguimiento del robot.

Cada uno de estos puntos representa la posición deseada  $i$ -ésima  $q_{di}$  para  $i = 1, 2, \dots$ , número de renglones del archivo de trabajo. La implementación consiste en generar la señal de error de posición  $\bar{q}(t_i) = q_{di} - q(t)$  este error es procesado por el algoritmo de control  $\tau = \tau(K_p, K_v, \bar{q}_i, \dot{q}_i)$  quien envía la energía al amplificador electrónico de los servomotores del robot, lo cual realiza en cada tiempo  $t_i$  especificado en la primera columna del archivo de trabajo. La aplicación se puede realizar en forma cíclica o repetitiva, de esta manera el robot queda programado las 24 horas del día y los 365 días del año.

La figura 6.26 muestra el seguimiento de trayectoria de un robot manipulador de 3 gdl para escribir la palabra *Robot* y realizar el trazo del mapa de la república mexicana. En este caso el algoritmo de control que guía al robot en el seguimiento de la trayectoria fue el tangente hiperbólico.



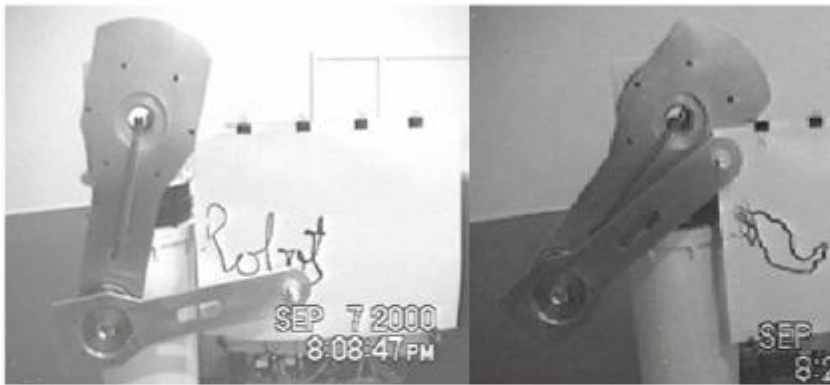


Figura 6.26 Control punto a punto.



### Inteligencia artificial

Aplicaciones de inteligencia artificial a la robótica son presentadas en el sitio web del libro. Empleo de redes neuronales para diseño de trayectorias como las que se muestran en la figura 6.26 o para autosintonía de las ganancias proporcional y derivativa del algoritmos de control. Ejemplos y aplicaciones en MatLab se documentan.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary



### 6.5.4 Programación de instrucciones robot

En la programación estándar de robots industriales se encuentran instrucciones genéricas  $\text{move}(x, y, z)$ ,  $\text{line}(x_i, y_i, z_i, x_f, y_f, z_f)$ ,  $\text{circle}(r, x, y)$ , etc. Estas instrucciones moverán al robot desde su posición inicial hacia la referencia indicada  $[x, y, z]^T$ .

El fabricante de robots industriales no proporciona información sobre los detalles técnicos de control de la instrucción genérica, ya que se considera secreto tecnológico. Por ejemplo, evidentemente la instrucción  $\text{move}(x, y, z)$  incorpora algún tipo de algoritmo de control para guiar al robot a la posición solicitada.

Una aplicación de la metodología de moldeo de energía se encuentra en la programación de instrucciones robot, a través de algoritmos de control que generan un punto de equilibrio con atractor asintóticamente estable y de alto desempeño como los esquemas de control saturados.

En la práctica se traduce que el robot desarrollará la aplicación con alto desempeño, confiabilidad y exactitud.

## ♣ Ejemplo 6.11

Implementar la instrucción `move(x,y,z)` usando moldeo de energía.

## Solución

Para la implementación de la instrucción `move(x,y,z)` se hará uso de la cinemática inversa del robot, ya que convierte las coordenadas cartesianas  $[x, y, z]^T$  en coordenadas articulares  $q$ .

Para tal efecto se empleará el algoritmo de control tangente hiperbólico (6.49) ya que es un esquema de control con altas prestaciones y desempeño. La sintonía de las ganancias proporcional y derivativa es trivial. Una buena elección es la siguiente  $kv_i = kp_i$ , y  $\lambda_i = \gamma_i = 1$  para  $i = 1, 2, 3$  y satisfacer la condición para no saturar los servo amplificadores, por ejemplo trabajar a los servo amplificadores al 80% de su capacidad,  $kp_i < 0.8\tau_i^{max}$  para  $i = 1, 2, 3$ . De esta forma se sintoniza una sola ganancia y al mismo tiempo el servo amplificador funciona en la región lineal lejos de los límites de saturación.

La implementación de la instrucción `move(x,y,z)` se hará en lenguaje C, cuyo código fuente para el robot rotradi de 3 gdl se presenta a continuación:

```
/* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla */
/* Facultad de Ciencias de la Electrónica */
/* Grupo de Robótica, junio 2001 */
/* Función move(x,y,z) robot rotradi de 3 gdl */

int move( float x, float y, float z){

/* Detecta si existe alguna singularidad de posicionamiento*/
```



```

    if(cinematica_inversa(x,y,z)==0){
        return(0); //Activa bandera de error
    }

/* Sintonía de las ganancias proporcional y derivativa */
/* Regla de sintonía  $k_{pi} < 0.8 \tau_{ui}(\max)$ ;  $k_{vi} = k_{pi}$  */
/* Pares máximos del Rotradi: */
/* articulación de la base: 50Nm,*/
/* articulación del hombro: 150 Nm, */
/* articulación del codo: 7 Nm. */
    kp1=30; kp2=60; kp3=7; // Ganancias proporcional
    kv1=kp1; kv2=kp2; kv3=kp3; // Ganancias derivativas

/* Lectura del FPGA posiciones en grados del robot */
    q1=encoder1();
    q2=encoder2();
    q3=encoder3();

/* Velocidades articulares grados/seg por el método de Euler */
/* Para cada articulación realizar  $(q_i(k) - q_i(k-1))/h$  */
/* donde h es el periodo de muestreo (0.0025 seg) */
    qp1=velocidad_euler(q1);
    qp2=velocidad_euler(q2);
    qp3=velocidad_euler(q3);

/* Generación de las señales de error de posición */
    qtilde1=cinematica_inversa(x,y,z).qd1-q1;
    qtilde2=cinematica_inversa(x,y,z).qd2-q2;
    qtilde3=cinematica_inversa(x,y,z).qd3-q3;

// Cálculo de la ley de control para cada articulación
// La base no lleva compensación de gravedad, se mueve en
// un plano horizontal

```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

```

tau1=k_p1*tanh(qtilde1)-k_v1*tanh(qp1);
tau2=k_p2*tanh(qtilde2)-k_v2*tanh(qp2)+ comp_gravedad2(q2,q3);
tau3=k_p3*tanh(qtilde3)-k_v3*tanh(qp3)+ comp_gravedad3(q2,q3);

// Envío de los pares aplicados a los servomotores del robot
par_aplicado1(tau1); // Par aplicado de la base
par_aplicado2(tau2); // Par aplicado al hombro
par_aplicado3(tau3); // Par aplicado al codo

return(1);
}

```

La puesta a punto de la función  $\text{move}(x,y,z)$  consiste en sintonizar de manera adecuada las ganancias proporcional  $K_p$  y derivativa  $K_v$ . Esto es un proceso empírico a base de prueba y error, se seleccionan los valores adecuados de las ganancias de tal forma que el robot responda con un transitorio suave, sin sobre impulsos y con errores en estado estacionario menores a 0.0001 grados, por cada articulación.

Actualmente en diversas industrias existen robots cuya electrónica es obsoleta. Sin embargo el sistema mecánico del robot aún tiene enorme potencial. Una forma de reutilizar al robot es diseñar el servo amplificador y con la incorporación de nuevas tarjetas de instrumentación el robot puede volver a ser operativo, siempre y cuando se tengan todas las instrucciones de programación. En este escenario la técnica de moldeo de energía se convierte en desarrollo tecnológico ya que permite *reconstruir* todas las instrucciones del lenguaje de programación del robot, y de esta forma ser operativo para nuevas aplicaciones industriales o académicas.

Los esquemas de diseño por la técnica moldeo de energía permiten guiar al robot de manera activa. Esto puede realizarse moviendo al robot con la mano por ejemplo, y el sistema operativo del robot grabará todos los puntos de desplazamiento. Posteriormente se reproduce punto a punto el

seguimiento de la trayectoria previamente grabada. La curva que debe seguir el robot puede ser registrada en un archivo o almacenada en disco duro. El formato del archivo que tenga registrada la curva de trabajo del robot puede tener un formato simple como tipo texto o ASCII. Los datos pueden estar grabados en el archivo en forma tabular.

La ejecución de la aplicación consiste en abrir el archivo o disponer del medio electrónico donde se encuentre la curva de trabajo. Cada renglón del archivo representa el desplazamiento del robot y su instante de tiempo para realizarlo: entre más puntos tenga el archivo más suave será la curva de seguimiento del robot. Cada uno de estos puntos representa la posición deseada  $i$ -ésima  $q_{di}$  para  $i = 1, 2, \dots$ , número de renglones del archivo de trabajo. La implementación consiste en generar la señal de error de posición  $\bar{q}(t_i) = q_{di} - q(t)$ , este error es procesado por el algoritmo de control  $\tau = \tau(K_p, K_v, \bar{q}_i, \dot{q}_i)$  quien envía la energía al amplificador electrónico de los servomotores del robot, lo cual se realiza en cada tiempo  $t_i$  especificado en la primera columna del archivo de trabajo. La aplicación se puede realizar cíclica o repetitiva, de esta forma el robot queda programado las 24 horas del día y los 365 días del año.



### 6.5.5 Robótica industrial

En la actualidad, los robots industriales se han convertido en poderosas herramientas de productividad, debido a la versatilidad de funciones, exactitud y repetitibilidad que pueden realizar en un amplia gama de aplicaciones como por ejemplo, traslado y pintado de objetos, soldadura por arco y de punto, ensambles, estibado, corte de piezas automotrices, etc. Actualmente, los robots industriales son mecanismos autónomos diseñados para mover partes o objetos a través de una trayectoria deseada, es decir puede procesar ciclos de trabajo de manera secuencial.

La figura 6.27 muestra un ejemplo de celda robotizada de la compañía FANUC, los robots realizan de manera automática todo el proceso de pro-

ducción. Para llevar a cabo este tipo de actividades, es necesario abordar temas sobre lenguajes de programación, estudiar los tipo de instrucciones o comandos para indicarle al robot la manera de realizar la tarea.

Una característica indispensable de la programación de robots es que debe ser capaz de implementar una variedad de aplicaciones y al mismo tiempo ser flexible para una tarea dada, de tal forma que permita una secuencia dinámica de operaciones.

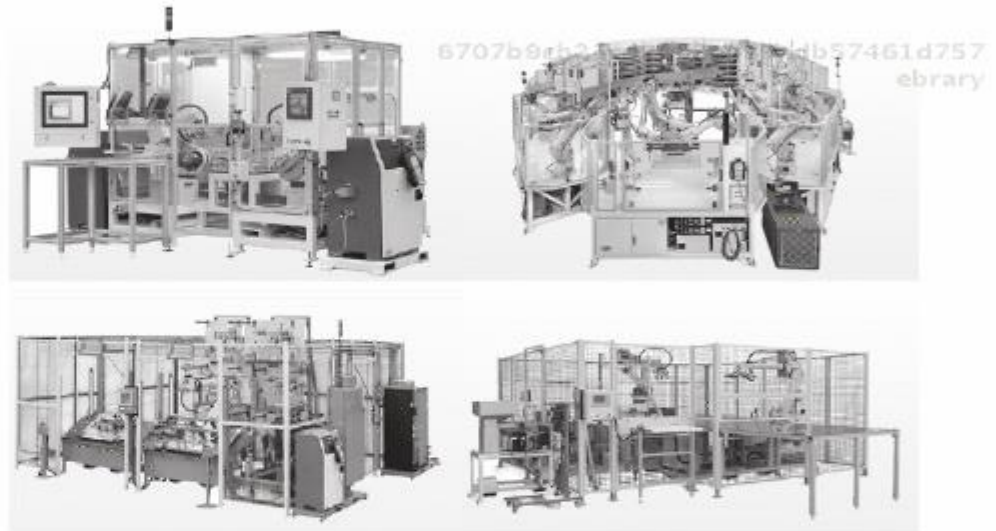






Figura 6.27 Celda FANUC.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary

### ¿Porqué usar un robot?

-  Disminuye el costo de producción.
-  Garantiza la calidad del producto.
-  Baja el costo de la mano de obra.
-  Incrementa la productividad.

La figura 6.28 muestra un robot industrial modelo 2000iA/165F de la compañía FANUC, a través de este robot en el sitio web del libro se pre-



senta el procedimiento desde como encender el robot, operar los interruptores *deadman* para habilitar al robot, paro de emergencia, calibración, descripción de la arquitectura, consola de control, sistema mecánico, ejemplos de programación, *teach pendant* y aplicaciones.



Figura 6.28 Robot Industrial Fanuc-2000iA/165F.

La forma más simple de programar a un robot industrial es por medio de un dispositivo portátil denominado *teach pendant* como el que se presenta en la figura 6.29, el cual corresponde al modelo 2000iA/165F de la compañía FANUC.

El *teach pendant* representa la interface entre el programador y el robot; a través de este dispositivo es posible editar, grabar puntos, datos e instrucciones, corregir, operar al robot en modo manual, activar y desactivar alarmas, puertos, interfaces y programar diversas aplicaciones para un robot industrial.

Características y detalles de los aspectos de programación son abordados en el sitio web del libro a través de ejemplos y aplicaciones con el robot 2000iA/165F de la compañía FANUC.



### Programación FANUC

En el sitio web del libro se encuentra disponible una serie de material que le permite al lector aprender desde los pasos secuenciales para encender un robot industrial, nomenclatura y conceptos del área industrial, arquitectura del robot, tipos de sistemas cartesianos, clases de coordenadas, instrucciones de movimiento y trayectoria, procedimientos de programación usando *teach pendant*, programas ejemplos y aplicaciones.





Figura 6.29 Teach pendant del robot 2000iA/165F FANUC.

if

### Código Fuente 6.1 TRACK

Sub Program: cap11\_TRACK    Editorial Alfaomega  
 %Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores  
 %Capítulo 6 Robótica industrial

---

#### TRACK

---

```

1  %
2  | /PROG TRACK
3  | ! MOVE TO APPROACH POS
4  | L P[2] 500mm/sec FINE ;
5  | ! MOVE TO PART
6  | L P[3] 500mm/sec FINE ;
7  | ! WAIT FOR 5 SECONDS
8  | WAIT 5.00(sec) ;
9  | ! MOVE TO APPROACH POS
10 | L P[2] 500mm/sec FINE ;
11 | /END
12 %
  
```

---




El cuadro 6.1 muestra un ejemplo de programación del robot FANUC modelo 2000iA/165F, el cual fue editado por medio del *teach pendant*.

## 6.6 Resumen

Control de posición o regulación de robots manipuladores es uno de los temas más importantes en el control de robots manipuladores. Actualmente es un tema vigente que ofrece retos teóricos y prácticos. El potencial del control de posición de robots manipuladores se ubica en el sector industrial como traslado, estibado, pintado de objetos, soldadura, transporte de material, etc. Estas aplicaciones pueden realizarse por reguladores de alto desempeño diseñados por la técnica de moldeo de energía.

El moldeo de energía representa una técnica de control moderna que permite diseñar una familia extensa de algoritmos de control. La ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica no lineal del robot manipulador y el algoritmo de control genera un punto de equilibrio único y asintóticamente estable en forma global.

Tomando en cuenta que varios algoritmos de control tienen alto desempeño, el moldeo de energía se convierte en una herramienta de desarrollo tecnológico con las siguientes ventajas:

-  Permite implementar instrucciones de programación de robótica industrial.
-  Facilita el guiado del robot a través de una base de datos o curva de registro.
-  Aplicaciones de control punto a punto.

Otra ventaja que presenta el moldeo de energía es que puede guiar al robot

en forma automática si se cuenta con los datos o curva de seguimiento. Esta aplicación se le denomina control punto a punto, debido a que los esquemas de control de moldeo de energía generan un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces no dependen de la condición inicial. Los esquemas de control con acciones de control acotada son recomendables para este tipo de aplicación ya que la sintonía de las ganancias no depende de las posiciones deseadas, como en el caso del control proporcional derivativo.



## 6.7 Referencias selectas

Con la finalidad de complementar la información presentada en las diferentes secciones de este capítulo se recomiendan las siguientes referencias:



## 6.2 Regulación


La contribución de Arimoto de 1981 sobre la demostración de estabilidad asintótica del control PD, así como la demostración de estabilidad asintótica local del control PID y condiciones de sintonía de sus ganancias realizada por Kelly pueden ser consultadas en:




Takegaki M. & S. Arimoto. "A new feedback method for dynamic control of manipulators". ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. 1981, 103, pp. 119-125.





Arimoto S. & Miyazaki F. "Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability". In Robotics research: first international symposium. Edited by M. Brady and P. Paul. MIT Press, 1984, pp. 783-799.


 Arimoto S. & Miyazaki F. “*Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulators*”. In Robotics: theory and applications. DSC Vol 3. Edited by F. Paul and D. Youcef-Toumi. 1986.

 T. C. Hsia, “*Robustness analysis of a PD controller with approximate gravity compensation for robot manipulator control*”. Journal of Robotic System, 1994, 11(6), pp. 517–521.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

 Kelly R. “*A tuning procedure for stable PID control for robot manipulators*”. Robotica. March-April, 1995. Vol. 13. Part 2. pp. 141-148.


 H. Seraji “*A new class of nonlinear PID controllers with robotic applications*”. Journal of Robotic Systems. 1998. 15(3). 61–81.

 J. Alvarez, R. Kelly, & I. Cervantes “*Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators*”. Automatica, Vol. 39, No. 6, June, 2003. pp. 989-995.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary


### 6.3 Moldeo de energía

La técnica de moldeo de energía ha sido utilizada por los siguientes autores:


 Kelly R., V. Santibáñez y F. Reyes. “*On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators*”. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. John Wiley & Sons, Ltd. 10(4): 1996. pp. 465-479.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

 R. Kelly, & R. Carelli, “A class of nonlinear PD-Type controllers for robot manipulators”. Journal of Robotic Systems. 1996. 13(12). 793-802.


 Kelly R., V. Santibáñez and F. Reyes. “On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators”. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 1996. 10(4): pp. 465-479.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary


 Reyes F. and R. Kelly. “A direct drive robot for control research”. In Proc. IASTED International Conference, Applications of Control and Robotics. Orlando. FL. 1996. pp. 181-184.

 Kelly R., V. Santibáñez y F. Reyes. “Adaptive regulation of robot manipulators”. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 1997.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary


 Santibáñez Victor & Rafael Kelly “Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators”. Automatica. Vol. 33. No. 4, pp. 675-682. 1997.


 Kelly R., V. Santibáñez & F. Reyes 1998, “A Class of adaptive regulators for robot manipulators”. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing (John Wiley and Sons, Ltd). 1998. Vol. 12. pp. 42-62.


 Kelly R., V. Santibáñez “Global regulation of elastic joint robots based on energy shaping”. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 43. No. 10. October 1998, pp. 1451-1456.


9edb57461d757  
ebrary





 Santibáñez V., R. Kelly and F. Reyes. 1998. "A new set-point controller with bounded torque for robot manipulators". IEEE Transactions on Industrial Electronics. 1998. Vol. 45, No. 1. February. pp. 126–133.


 Reyes F. and R. Kelly. "A Class of  $P(2m-1)D$  type controllers with gravity compensation for robot manipulators". Vol. VII, pp. 67-71, Control Automático. Noviembre 1998. Viña del Mar, Chile.


 R. Kelly. "Regulation of manipulators in generic task space: An energy shaping plus damping injection approach". IEEE Transactions on Robotics and Automation. 15(2). April, 1999. pp. 381–386.


 Reyes F., E. Espinosa & J. Barahona. "Family of saturated controllers for robot manipulators", IASTED International Conference on Control and Applications. Cancun, Mexico. May 20-22, 2002. pp. 250-255.


 Reyes F., J. Barahona and E. Espinosa. "Trigonometric saturated Controller for robot manipulators". Advances in Systems Theory, Mathematical Methods and Applications. 2002. WSEAS, Electrical and Computer Engineering Series pp. 278-283.


 Reyes F. and J. Cid. "Bounded controller for robot manipulators", IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling. Crete, Greece. June 25-28, 2002. pp. 271-276.


 Reyes F. & E. Guevara. “*Design of a new control algorithm for robot manipulators*”. Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems. May. 19-23, 2003. Cancun, Mexico, pp. 118-123.


 R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003. Capítulos 6, 7 y 8.

 R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005. Chapters 6, 7, 8 and 9.

 Reyes F. & A. Rosado. “*Polynomial family of PD-Type controllers for robot manipulators*”. IFAC Journal on Control Engineering Practice. Edit Elsevier. 2005. Vol 13. pp. 441-450.

 Jose Luis Oviedo, Fernando Reyes & Pablo Sanchez “*Stability proof of a new motion controller using strong Lyapunov function*”. Proceedings of the 12th IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 14-16, 2006. Honolulu, Hawaii, USA. pp. 157-162.

 Pablo Sanchez & Fernando Reyes, “*A polynomial family of PD type cartesian controller*”. IASTED International Journal of Robotics and Automation. Vol. 23, No. 2, 2008. pp. 79-87. Acta Press.

 Emeterio Aguiñaga, Arturo Zavala, Víctor Santibáñez & Fernando Reyes. “*Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs*”. IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 17. No. 4. July 2009. pp. 934-944.



Pablo Sánchez & Fernando Reyes “*Cartesian control for robot manipulators*”. Edit Intech Croatia. Robot manipulators, trends and development. pp. 165- 212. 2010.



## 6.4 Índice de desempeño

La medición del desempeño de un algoritmo de control definido por la norma  $\mathcal{L}_2$  fue introducido por Whitcomb en 1993 y subsecuentemente ha sido empleado por:



Whitcomb L. L. A. Rizzi, and D.E. Koditschek. 1993. “*Comparative experiments with a new adaptive controller for robot arms.*” IEEE Transactions on Robotics and Automation. Febraury, 1993. Vol. 9. No. 1. pp. 59-70




B. De Jager, & J. Banens. “*Experimental evaluations of robot controllers.*” Proceedings of the 33rd. Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Fl. U.S.A., December, 1994. pp. 363–368.



B. De Jager, & J. Banens, “*Experimental evaluations of robot controllers.*” Proceedings of the 33rd. Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Fl. U.S.A., December, 1994. 363–368.





H. Berghuis, H. Roebbers & H. Nijmeijer. “*Experimental comparison of parameter estimation methods in adaptive robot control.*” Automatica. 1995. 31(9), pp. 1275–1285.


 A. Jaritz & M. Spong.(1996). “*An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator.*” IEEE Transactions on Control Systems Technology. 1996. 4(6), 363–368.





## 6.5 Aplicaciones del control de posición

 Reyes F., C. Muñiz and J. Cid. “*Experimental evaluation of saturated control for robot manipulators.*” IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, Marbella, Spain. September 4-7, 2001. pp. 297-301.

 Reyes F. “*Experimental controller for robot manipulators.*” WSEAS Int.Conf. on Signal Processing, Robotics and Automation (ISPRA '02) , Cadiz, Spain, June 12-16, 2002. pp. 1541-1545.

 Febe B. & F. Reyes. “*Optimal position control for robot manipulators.*” The 46th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems. December 27-30, 2003. Cairo, Egypt. pp.45-49.

 Reyes F. J. Cid, M. Mendoza & I. Bonilla. “*A new family of controllers for position control of robots manipulators.*” ICINCO. September 14-17, 2005. Barcelona, Spain. Organized by: INSTICC, Universitat Politecnica de Catalunya, IFAC, EST SETUBAL and AAI. pp. 361-366.

 Pablo Sánchez, Fernando Reyes & Jaime Cid. “*A new position controller:Pascal’s Cartesian Controllers.*” WSEAS International Conference on Dynamical Systems and Control, Venice Italy, November 2-4, 2005. pp. 185-191.

## 6.8 Problemas propuestos



Pablo Sanchez & Fernando Reyes "A position controller's evaluation using a cartesian robot and a joint robot arm." Proceedings of the 12th IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 14-16, 2006. Honolulu, Hawaii, USA. pp. 150-156.

## 6.8 Problemas propuestos

A continuación se plantean un conjunto de problemas con la finalidad de mejorar la habilidad y grado de conocimiento del lector en control de posición de robots manipuladores.



## 6.2 Regulación

- 6.2.1 Explique el problema de regulación o control de posición de robots manipuladores.
- 6.2.2 Si el error de posicionamiento de cada articulación  $\bar{q}_i$ , para  $i = 1, 2, 3$  de un robot antropomórfico de 3 gdl en estado estacionario tiene un valor de 0.0001 grados, ¿cuál es su correspondiente valor en coordenadas cartesianas?
- 6.2.3 Explique el funcionamiento cualitativo del control proporcional derivativo PD.
- 6.2.4 Explique el funcionamiento cualitativo del control proporcional integral derivativo PID.
- 6.2.5 ¿Por qué no son esquemas de control los términos derivativo e integral que incluye el control proporcional?
- 6.2.6 Demostrar que el error de posición y velocidad articular de la ecuación en lazo cerrado (6.3) satisfacen:



- a)  $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty^n, \dot{q} \in \mathcal{L}_\infty^n$ .  
 b)  $\dot{q} \in \mathcal{L}_2^n$ .

6.2.7 Considere el control proporcional derivativo de un péndulo desarrollado en el ejemplo 6.2; demostrar que:

- a)  $\bar{q} \in \mathcal{L}_\infty, \dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$ .  
 b)  $\dot{q} \in \mathcal{L}_2$ .  
 c) Llevar a cabo el análisis de estabilidad usando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{1}{8} k_p \tilde{q}^8$$

¿Qué puede concluir? Argumente su respuesta.



### 6.3 Moldeo de energía

6.3.1 Explique cualitativamente la técnica de moldeo de energía.

6.3.2 Considere el modelo del péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p \operatorname{sen}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{sen}(\dot{q}) + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

donde  $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$  son las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

- a) ¿Qué tipo de estabilidad es local o global?  
 b) ¿Qué regla de sintonía propone para las ganancias de tal forma que no saturan el servo amplificador cuyos límites son  $\pm 15 \text{ Nm}$ ?

6.3.3 Considere el modelo del péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p [1 - \alpha e^{-\alpha \tilde{q}^2}] \tilde{q} - k_v [1 - \beta e^{-\beta \dot{q}^2}] \dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ ,  $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$  son las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

- ¿Es local o global el tipo de estabilidad?
- ¿Qué regla de sintonía propone para las ganancias de tal forma que no saturen el servo amplificador cuyos límites son  $\pm 15\text{Nm}$ ?
- Implemente en MatLab el algoritmo de control y reporte las gráficas del error de posición y par aplicado. Explique cualitativamente el funcionamiento de este esquema.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

6.3.4 ¿Por qué en el esquema de control exponencial tipo PD del ejemplo 6.5 el exponente es impar? ¿Qué sucede si el exponente es par?

6.3.5 Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \sinh^m(\tilde{q})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \sinh^m(\dot{q})} + g(q)$$

donde

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

$$\frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}) \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^m(\tilde{q})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \sinh(\tilde{q}_1)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \sinh(\tilde{q}_2)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \sinh(\tilde{q}_n)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}) \sinh(\dot{q})}{1 + \cosh^m(\dot{q})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_1) \sinh(\dot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_2) \sinh(\dot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_n) \sinh(\dot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_n)} \end{bmatrix}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva,  $m$  es un número entero positivo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

- 6.3.6 Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control

$$\tau = K_p \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} - K_v \frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} + g(q)$$

donde

$$\frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\dot{q}_2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

- 6.3.7 Considere el control tangente hiperbólico (6.49), realizar la conversión de ese controlador al espacio cartesiano con la estructura del jacobiano transpuesto  $\tau = J^T(q) \tanh(\tilde{x})$  y realizar el correspondiente análisis de estabilidad asintótica local.

- 6.3.8 El siguiente esquema de control se conoce como control Todo/Nada, On/Off o Si/No

$$\tau = K_p \text{signo}(\tilde{q}) - K_v \text{signo}(\dot{q}) + g(q)$$

donde

$$\text{signo}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\tilde{q}_1) \\ \text{signo}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

$$\text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva,  $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad (5.8) y el control Todo/Nada.

- Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.
- ¿El punto de equilibrio es único?
- La teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov establece que la solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación en lazo cerrado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es continua y diferenciable  $\forall t \geq 0$ , entonces sin pérdida de generalidad, qué argumento puede aportar para justificar en el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado la incorporación de una función discontinua como es el caso de la función  $\text{signo}(\cdot)$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6.3.9 Proponga una rutina en lenguaje C para que un robot de 3 gdl realice un círculo a través de la función `circle(r, x, y)`. Aquí  $r$  representa el radio del círculo, cuyo centro se ubica en las coordenadas  $x, y$ .

6.3.10 Proponga una rutina en lenguaje C para que un robot de 3 gdl realice una línea a través de la función `line(x1, y1, z1, x2, y2, z2)`. La idea es que un robot de 3 gdl realice una línea recta desde las coordenadas iniciales  $x1, y1, z1$  hasta las coordenadas finales  $x2, y2, z2$ .

6.3.11 ¿Qué es control de posición en espacio articular?

6.3.12 ¿Qué es control de posición en espacio cartesiano?

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA

- 6.3.13 Explique la transformación de fuerza cartesiana a par aplicado por medio del jacobiano transpuesto.
- 6.3.14 ¿Cuáles son las características distintivas entre control articular y control cartesiano? Mencione ventajas y desventajas.



## 6.4 Índice de desempeño

- 6.4.1 Explique el concepto de desempeño de un algoritmo de control.
- 6.4.2 ¿Cómo se mide el índice de desempeño?
- 6.4.3 ¿Cuáles son los principales criterios para medir el índice de desempeño?



## 6.5 Aplicaciones del control de posición

- 6.5.1 Seleccione un algoritmo de control para que un robot planar de 2 gdl realice una trayectoria elíptica y realice su implementación en MatLab.
- 6.5.2 Seleccione un algoritmo de control para que un robot planar de 2 gdl realice el trazo de una línea recta e implemente el procedimiento en MatLab.
- 6.5.3 Diseñe un procedimiento para que un robot de 2 gdl dibuje la palabra *Robot*.
- 6.5.4 Cómo podría diseñar una instrucción robot de retorno a casa.



# 7

## CAPÍTULO

# Control de trayectoria de robots manipuladores

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
*La dinámica y el control de robots sólo es posible entenderlos usando matemáticas*

*Pirol Silvegado*






- 7.1 Introducción
- 7.2 Control PD+
- 7.3 Moldeo de energía PD+
- 7.4 Control por calculado
- 7.5 Aspectos prácticos
- 7.6 Resumen
- 7.7 Referencias selectas
- 7.8 Problemas propuestos

## Objetivos



Presentar los algoritmos de control de trayectoria, análisis y diseño de nuevas estrategias de control.

### Objetivos particulares:

-  Análisis del control PD+ y par calculado.
-  Generalización de la técnica de moldeo de energía para el caso de control de trayectoria.
-  Aspectos prácticos.

## Competencias

Adquirir las habilidades y grado de conocimientos en

-  Análisis matemático de funciones estrictas de Lyapunov.
-  Diseño de nuevas estrategias de control de trayectoria.

## 7.1 Introducción

### 7.1 Introducción

El problema del control de movimiento es uno de los temas más importantes en robótica. Recientemente ha recibido la atención en la comunidad científica y como resultado se han reportado en la literatura diversos controladores; entre los que han mostrado tener mejor desempeño se encuentran: control por calculado, control PD+, PD con precompensación calculada y PD con compensación.

Hoy en día, el interés en los robots manipuladores radica en su facultad de realizar movimientos de alta velocidad y con alto grado de exactitud. El control de movimiento mueve al robot libremente en su espacio de trabajo siguiendo una trayectoria deseada en posición y velocidad sin interactuar con su medio ambiente.

Los algoritmos del control de trayectoria incluyen la dinámica completa del robot manipulador en la estructura matemática del controlador, es decir se basan en el modelo dinámico del robot. La exactitud, desempeño y robustez de esos controladores dependen del grado de precisión con que se conozcan los parámetros dinámicos que describen el modelo.

El control de movimiento de robots manipuladores ha sido ampliamente estudiado en simulaciones. Sin embargo, la evaluación experimental de controladores basados en el modelo del robot manipulador es un problema de origen práctico, el cual ha quedado evidenciado en la literatura científica.

Lo anterior se debe a la falta de robots experimentales adecuados, así como a la dificultad que presenta conocer el valor nominal de los parámetros dinámicos del robot manipulador.

El problema del control de trayectoria o control de movimiento puede plantearse formalmente en los siguientes términos.

Considérese el modelo dinámico del robot manipulador de  $n$  gdl (5.8)

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} + g(q)$$

además sean  $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d \in \mathbb{R}^n$  un conjunto de funciones vectoriales acotadas que representan la posición, velocidad y aceleración deseadas, respectivamente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

El problema de control de trayectoria o control de movimiento consiste en determinar una función vectorial  $\tau$  de tal forma que las posiciones y velocidades asociadas a las articulaciones del robot sigan con exactitud a las posiciones y velocidades deseadas, respectivamente.

En otras palabras, el *objetivo de control de movimiento* consiste en encontrar  $\tau$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (7.1)$$

donde  $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n$  representan el error de posición definido como la diferencia entre la posición o trayectoria deseada  $q_d(t)$  y la posición actual del robot  $q(t)$ , es decir  $\tilde{q} = q_d(t) - q(t)$  y error de velocidad definido como  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}(t)$ , es decir la diferencia entre la velocidad deseada de movimiento  $\dot{q}_d$  y la velocidad articular  $\dot{q}(t)$ .

En la figura (7.1) se muestra el diagrama a bloques del control de trayectoria de robots manipuladores. Obsérvese que las variables que definen el problema de control tales como el error de posición y error de velocidad son procesadas por la estructura matemática del esquema de control, la

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### Control de trayectoria

Los algoritmos de control de trayectoria o movimiento se caracterizan por retroalimentar la dinámica completa del robot manipulador. Con referencia a los esquemas de posición o regulación, los controladores de movimiento son mucho más complejos ya que en éstos no sólo se requiere conocer perfectamente la estructura matemática de la dinámica del robot, sino también el valor numérico de los parámetros del robot, por lo que resulta en la práctica muy complicado realizar experimentación con esta clase de esquemas de control.

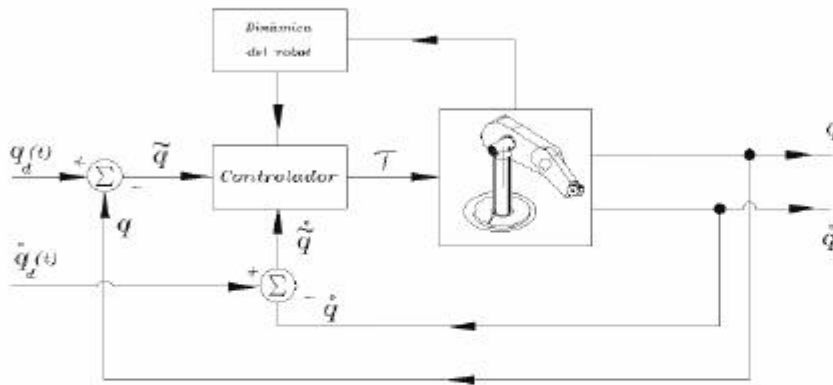


Figura 7.1 Control de movimiento de robots manipuladores

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

cual requiere del conocimiento completo de la dinámica del robot.

Nótese la diferencia sustancial que existe entre el control de posición y control de trayectoria.



El control de posición se define en términos del error de posición  $\tilde{q}$  y la velocidad articular  $\dot{q}$  para propósitos de inyección de amortiguamiento. Únicamente se requiere conocimiento parcial de la dinámica del robot, como es el par gravitacional  $g(q)$ .

$$\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{q}, \dot{q}, g(q))$$



En contraste, en control de trayectoria se controla el error de posición  $\tilde{q}$  y el error de velocidad  $\dot{\tilde{q}}$ . Además, se requiere del conocimiento completo de la dinámica del robot manipulador (efecto inercial, vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y pares de fricción).

$$\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, M(q), C(q, \dot{q}), B, g(q))$$

La ecuación en lazo cerrado que determina el problema del control de movimiento queda expresada en variables de estado articulares  $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T$



de la siguiente forma:





$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(K_p, K_v, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), B, \mathbf{g}(\mathbf{q})) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} - B\dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

la ecuación resultante en lazo cerrado (7.2) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal y no autónoma. La incorporación de la trayectoria  $\mathbf{q}_d(t)$  es lo que determina que la naturaleza de la ecuación diferencial en lazo cerrado sea no autónoma.

### Notación

La notación requerida para la descripción de los esquemas de control se determina de la siguiente manera: sea  $\mathbf{q}_d(t)$  denota la trayectoria de seguimiento, es una función continua, suave y acotada, además de doblemente diferenciable. En otras palabras,  $\mathbf{q}_d(t)$  debe ser una función de clase  $C^2$ . La velocidad de seguimiento y la aceleración deseada deben ser funciones continuas y diferenciables suaves y acotadas en sus magnitudes de acuerdo con las características propias del robot. Sea  $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M$  y  $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M$  representan las cotas superiores sobre las normas  $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|$  y  $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|$ , respectivamente.

El diseño de la trayectoria de seguimiento, velocidad y aceleración deseada deben incorporar aspectos de planificación de trayectoria para una adecuada operatividad de la tarea que va a desempeñar el robot.

-  Las funciones de seguimiento  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t) \in \mathbb{R}^n$  representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente.
-  El error de seguimiento  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  se define  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$ .
-  El error de velocidad  $\dot{\bar{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$  se define como  $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$ .
-  Las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente, son  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ambas matrices definidas positivas.

## 7.2 Control PD +

El control PD+ con compensación de gravedad, denotado por  $\tau_{pd+}$ , es un algoritmo de control que incluye control proporcional del error de posición, control proporcional del error de velocidad más la dinámica completa del robot. En la estructura de este esquema de control también se involucra la trayectoria de seguimiento, velocidad y aceleración deseada.

El control PD+ está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau_{pd} = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}) \dot{q}_d + B \dot{q}_d + g(q). \quad (7.3)$$

La figura 7.2 muestra el diagrama a bloques del control PD+

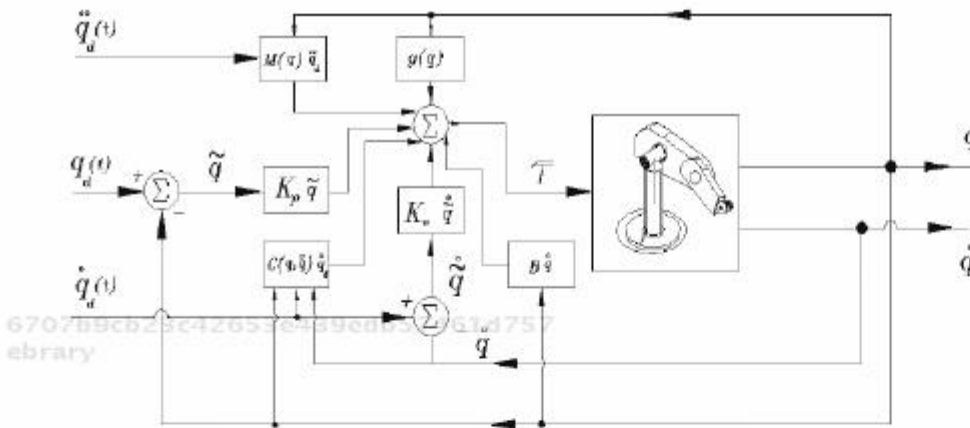


Figura 7.2 Diagrama a bloques del control PD+

La implementación del esquema de control PD+ (7.3) requiere del conocimiento exacto del modelo dinámico del robot, lo cual significa que los valores numéricos de sus parámetros dinámicos se conocen.

La ecuación de lazo cerrado que involucra el modelo dinámico del robot (5.8) y el esquema de control PD+ (7.3) expresado directamente en varia-

### Regulador PD

El esquema de control PD+ (7.3) es el algoritmo más general de control de movimiento. Obsérvese que cuando la posición deseada  $q_d$  es una constante, entonces la velocidad deseada  $\dot{q}_d$  y la aceleración deseada  $\ddot{q}_d$  son vectores cero. Es decir, el error de velocidad cumple:  $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ . En este caso el regulador simple proporcional derivativo con compensación de gravedad se obtiene como caso particular:

$$\tau = K_p \dot{q} - K_v q + g(q)$$

En este contexto es necesario aclarar que el control proporcional derivativo PD+ contiene dos esquemas de control: control proporcional del error de posición y control proporcional del error de velocidad, no contiene ninguna acción de control como el caso particular del regulador PD, el cual incluye un solo esquema de control proporcional al error de posición y una acción de control derivativa mediante la inyección de amortiguamiento a través de la velocidad articular.