

La transformación inversa está determinada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R_{z,\theta}^T & -R_{z,\theta}^T d_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Observe que, la matriz de rotación  $R_{z,\theta}$  aparece como transpuesta, esto es debido a que la inversa de una matriz ortogonal coincide con su transpuesta.

Las matrices de rotación permiten modelar la orientación de la herramienta de trabajo colocada en el extremo final del robot, y junto con las transformaciones homogéneas dentro de una sola matriz incluye la orientación y posición de la herramienta de trabajo, formando la estructura del modelo cinemático directo.



## 4.4 Cinemática

La cinemática es la parte de la física que aborda el problema de la descripción geométrica del movimiento de sistemas mecánicos sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen. Por consiguiente, la cinemática directa de robots manipuladores se refiere al estudio analítico del movimiento del robot (sin tomar en cuenta las fuerzas que originan dicho movimiento) con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo  $\Sigma(x, y, z)$  relacionando la dependencia que existe entre las coordenadas articulares o generalizadas  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , sus parámetros geométricos y las coordenadas cartesianas  $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$  y de orientación  $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  del extremo final del robot. Matemáticamente se tiene la siguiente definición.

**Cinemática directa** es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  con las coordenadas cartesianas  $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$  del robot  $f_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , así como la orientación  $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  de la herramienta colocada en el extremo final, tomando en cuenta las propiedades geométricas del sistema mecánico del robot.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = f_R(\mathbf{q}) \quad (4.4)$$

En esta definición  $f_R$  es una función continua en el vector de posiciones o desplazamiento articular  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$  representa el número de grados de libertad y la dimensión del vector de posiciones o desplazamiento articular,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  son las coordenadas cartesianas asociadas al extremo final del robot y  $\theta, \phi, \psi$  son los ángulos de Euler, que representan la orientación de la herramienta colocada en el extremo final con respecto al sistema de referencia fijo en la base del robot,  $m$  es la dimensión de la función vectorial  $f_R(\mathbf{q}) = [x, y, z, \theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^6$ , para el caso general  $m = 6$ . Cuando  $n > m$  se denomina robots redundantes.

El posicionamiento de un robot en el espacio tridimensional generalmente requiere de 6 coordenadas, 3 coordenadas representan la posición cartesiana del extremo final del robot  $(x, y, z)$  y 3 coordenadas la orientación de la herramienta de trabajo denotadas por los ángulos de Euler  $(\theta, \phi, \psi)$ . Dependiendo de la aplicación del robot se pueden requerir menos coordenadas de posición y orientación. Por ejemplo, un robot que pinta armaduras automotrices requiere las 6 coordenadas, en contraste con un robot que corta figuras de plástico que puede requerir 2 coordenadas cartesianas de posición y ninguna de orientación, en este caso el robot puede desarrollar su trabajo sobre un plano, sin requerir coordenadas de orientación.

Para el programador de robots en aplicaciones de automatización y procesos industriales, es mucho más fácil programar los movimientos del robot en coordenadas cartesianas que en coordenadas articulares. Las coorde-

### Cadena cinemática

Un robot manipulador se considera como una serie de eslabones interconectados a través de articulaciones (servomotores) rotacionales o prismáticas en forma de cadena cinemática abierta, es decir el extremo final donde se coloca la herramienta no se encuentra conectada mecánicamente a la primera articulación (base) del robot.

Desde el punto de vista de la topología, la cadena cinemática se considera abierta cuando los dos extremos de la cadena no se tocan. De otra manera la cadena cinemática formaría un lazo si sus dos extremos se encontrarán mecánicamente unidos.

La estructura mecánica del robot manipulador se caracteriza por tener un número de grados de libertad, los cuales determinan de manera única su configuración. Típicamente, cada grado de libertad está asociado a una articulación (variable articular  $q$ ).

El papel fundamental que juega la cinemática directa, es computar la posición y orientación del extremo final del robot manipulador como una función de las variables articulares.

nadas cartesianas resultan un medio natural para ser correctamente interpretadas para un mejor entendimiento del posicionamiento del robot, la cinemática directa realiza la función de convertir coordenadas articulares a coordenadas cartesianas.

Dada la posición del extremo final del robot en coordenadas cartesianas  $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ , su orientación en ángulos de Euler  $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  y sus parámetros geométricos con respecto a un sistema de referencia fijo  $\Sigma(x, y, z)$ , ¿puede el robot posicionarse en cualquier configuración?

La anterior interrogante representa el problema de la **cinemática inversa** y como área de la robótica representa mayor complejidad que la cinemática directa. Siempre es posible encontrar la cinemática directa, mientras que en la cinemática inversa pueden darse diversos escenarios, por ejemplo puede haber varias soluciones o no haber solución analítica, si este es el caso entonces pueden proponerse métodos numéricos, iterativos, geométricos, etc., como posibles formas de solución.

La **cinemática inversa** es un problema no lineal que relaciona las coordenadas articulares en función de las coordenadas cartesianas. Este problema representa la solución inversa de la ecuación (4.4); dada la posición cartesiana y la orientación de la herramienta colocada en el extremo final del robot, obtener los ángulos de las articulaciones.

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$  es función inversa de la ecuación 4.4.



#### 4.4.1 Convención Denavit-Hartenberg

Existen varios métodos para obtener el modelo de cinemática directa, por ejemplo por geometría aplicada al mecanismo del robot se pueden deducir fácilmente las ecuaciones cinemáticas del robot. Sin embargo, cuando el



número de grados de libertad crece, este método puede resultar tedioso. Otra alternativa es la metodología Denavit-Hartenberg, la cual es ampliamente conocida en el ambiente de ingeniería y ofrece un procedimiento sencillo para obtener el modelo cinemático directo cuya estructura queda en representación de transformaciones homogéneas.

Jaques Denavit y Richard S. Hartenberg en 1955 presentaron un procedimiento para obtener una mínima representación de la orientación y traslación de robots manipuladores. La convención Denavit-Hartenberg es una herramienta útil para deducir las ecuaciones de cinemática directa de robots manipuladores. Consiste en determinar una tabla de parámetros relacionados con los eslabones del robot. La convención Denavit-Hartenberg toma como referencia al diagrama de un robot manipulador en cadena cinemática abierta como se muestra en la figura 4.8. Las variables articulares en la representación Denavit Hartenberg son denotadas por  $\theta_i$  para el tipo rotacional, prismática o lineal por  $d_i$ , la longitud del eslabón está representada por  $l_i$  y el ángulo de separación entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  es denotado por  $\alpha_i$ .

#### Jaques Denavit (1930...)

Jaques Denavit nació el 1 de octubre de 1930 en la ciudad de París. En 1949 recibió el grado de ingeniero en la Universidad de París. Denavit obtuvo la ciudadanía estadounidense. En 1953 y 1956, respectivamente en la Universidad de Northwestern recibió los grados de maestría y doctorado en ingeniería mecánica. En 1958 fue profesor asistente del departamento de ingeniería mecánica de la Universidad de Northwestern, donde se retiró como profesor de tiempo completo en 1982. También trabajó como físico residente en el Naval Research Lab de 1969 a 1971. De 1982 a 1993 Denavit trabajó en el Lawrence Livermore National Laboratory.

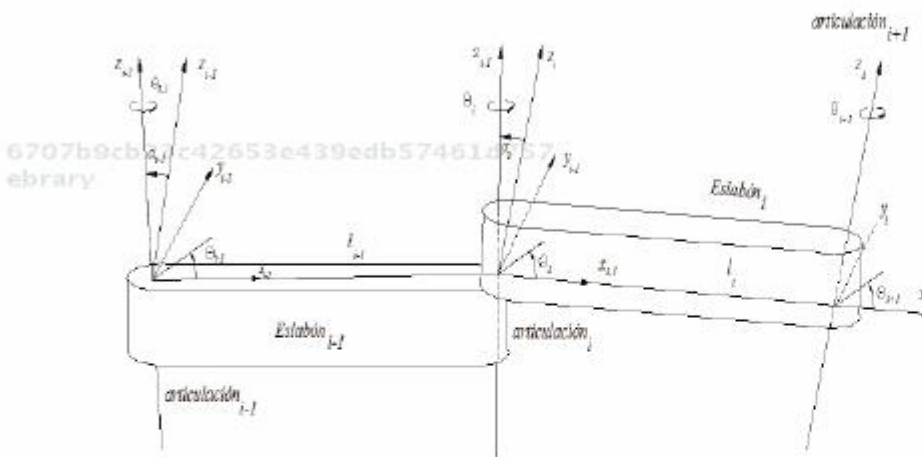


Figura 4.8 Convención Denavit-Hartenberg para un robot manipulador.

El ángulo  $\theta_i$  es el ángulo entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido alrededor del eje  $z_{i-1}$ .  $d_i$  es la distancia del origen del sistema de referencia  $i - 1$  a la intersección del eje  $x_i$  con el eje  $z_{i-1}$ . Su medición se realiza a lo largo



del eje  $z_{i-1}$ . En el caso de articulaciones rotacionales  $d_i$  es un parámetro constante y representa el *offset* o espesor del servomotor. Adicionalmente a las variables articulares  $\theta_i$  y  $d_i$ , hay 2 parámetros constantes que describen características específicas del eslabón  $i$ -ésimo. Esos parámetros son: el parámetro  $l_i$  se define como la distancia a lo largo del eje  $x_i$  desde el origen del sistema de referencia coordinado  $i - 1$  hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ . El ángulo entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  se denota por  $\alpha_i$ , su medición es respecto a un plano normal a  $x_i$ . Una medición de ángulo positivo para  $\alpha_i$  se toma en dirección del eje  $z_{i-1}$  hacia  $z_i$ . Por ejemplo, para un robot con 6 articulaciones rotacionales se requieren de 18 elementos para describir completamente su modelo cinemático.

En la representación Denavit-Hartenberg cada transformación homogénea  $H_i$  se representa por el producto de cuatro transformaciones básicas:






$$\begin{aligned}
 H_i &= R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,l_i} R_{x,\alpha_i} & (4.6) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\text{sen}(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\alpha_i) & l_i \cos(\theta_i) \\ \text{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \text{sen}(\alpha_i) & l_i \text{sen}(\theta_i) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$





#### 4.4.2 Selección de sistemas de referencia

Antes de presentar la metodología Denavit-Hartenberg, primero se describirá la convención para asignar los sistemas de referencias cartesianos asociados a los eslabones del robot. En este punto es necesario aclarar

que en la literatura de robótica, la convención Denavit-Hartenberg no es única, depende de la selección de los sistemas de referencia cartesianos en las articulaciones y eslabones, así como en sus eslabones adyacentes. La cinemática directa del robot proporciona las coordenadas cartesianas del extremo final del robot relativo a un sistema de referencia cartesiano fijo  $\Sigma_0$ ,  $x_0, y_0, z_0$ ; en la figura 4.8 se muestra la asignación de sistemas de referencia para las articulaciones  $i - 1$ -ésima,  $i$ -ésima e  $i + 1$  de un robot manipulador. En general se tiene el siguiente procedimiento:

-  El eje  $z_i$  se asigna rígidamente a la articulación  $i + 1$ . Es decir,  $z_0$  es el eje de la articulación 1,  $z_1$  es el eje de la articulación 2, y así sucesivamente.
-  Localizar el origen  $\mathbf{o}_i$  del sistema de referencia  $\Sigma_i (x_i, y_i, z_i)$  en la intersección del eje  $z_i$  con la normal común a los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
-  Seleccionar el eje  $x_{i-1}$  sobre la normal que une los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  en dirección de la articulación  $i - 1$  hacia la articulación  $i$ .
-  Definir el ángulo de torsión  $\alpha_i$ , este es el ángulo entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  y se mide con valor positivo en el sentido de las manecillas del reloj sobre el eje  $x_i$ .
-  Seleccionar el eje  $y_i$  por la regla de la mano derecha.

La convención Denavit-Hartenberg proporciona una representación no única para los siguientes casos:

-  Para el sistema de referencia  $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$  sólo la dirección del eje  $z_0$  es especificada, entonces su origen  $\mathbf{o}_0$  y el eje  $x_0$  pueden ser seleccionados de manera arbitraria.
-  Para el sistema de referencia  $\Sigma_n (x_n, y_n, z_n)$  no existe la articulación  $n + 1$ , entonces el eje  $z_n$  no está completamente definido, mientras

### Hartenberg (1907-1997)

Richard S. Hartenberg nació el 27 de febrero de 1907 en Chicago, Illinois. En 1928 obtuvo el grado en ingeniería en la Universidad de Wisconsin, también la maestría y doctorado en ingeniería mecánica en 1933 y 1941, respectivamente. Trabajó 34 años en la Universidad de Northwestern, donde se jubiló en 1975. Hartenberg fue miembro de la ASME (American Society of Mechanical Engineers) y de la Scientific Research Society. Fue galardonado por la ASME en 1974. Sus investigaciones abarcaban cinemática y diseño de máquinas y la historia de la tecnología. Hartenberg murió el 24 de diciembre de 1997.

que el eje  $x_n$  es normal al eje  $z_{n-1}$ . Típicamente la  $n$ -ésima articulación es rotatoria, por lo tanto  $z_n$  se alinea en la dirección de  $z_{n-1}$ .



Cuando dos ejes consecutivos  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos entre sí, la normal común entre ellos no es única.



Cuando dos ejes consecutivos  $z_i$  y  $z_{i-1}$  se interceptan, la dirección del eje  $x_i$  es arbitraria.



Cuando la articulación  $i$ -ésima es lineal o prismática, entonces la dirección de  $z_i$  es arbitraria.

De acuerdo con esta convención previamente descrita, a continuación se resumen los parámetros del  $i$ -ésimo eslabón:

1.  $l_i$  es la longitud del  $i$ -ésimo eslabón, es la distancia del eje  $z_{i-1}$  hacia el eje  $z_i$  medida sobre el eje  $x_{i-1}$ .
2.  $\alpha_i$  es el ángulo de torsión, el cual representa el ángulo entre los ejes  $z_{i-1}$  a  $z_i$  medido en el sentido de las manecillas del reloj sobre el eje  $x_i$ .
3.  $d_i$  es el *offset*, es la distancia de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  medido sobre el eje  $z_{i-1}$ .
4.  $\theta_i$  es el desplazamiento rotacional de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  medido alrededor del eje  $z_{i-1}$ . El signo positivo de  $\theta_i$  es el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Obsérvese que  $l_i$  siempre será positivo puesto que corresponde a una longitud, mientras que  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $\theta_i$  representan cantidades con signo.





### 4.4.3 Algoritmo Denavit-Hartenberg

A continuación se describe el procedimiento para encontrar la cinemática directa a través de la convención Denavit-Hartenberg.

1. Localizar la dirección de los ejes  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ .
2. Establecer el sistema de referencia cartesiano fijo  $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$  cuyo origen es colocado sobre el sistema de referencia en la base del robot. Los ejes  $x_0, y_0$  son determinados de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Una vez que el sistema de referencia  $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$  ha sido establecido, se inicia un proceso iterativo en el cual se define el sistema de referencia  $\Sigma_i (x_i, y_i, z_i)$  usando el sistema de referencia  $\Sigma_{i-1} (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ , iniciando con el sistema de referencia  $\Sigma_1 (x_1, y_1, z_1)$ . En la figura 4.8 se muestra el procedimiento.

Llevar a cabo los pasos 3 al 5 para la articulaciones  $i = 1, \dots, n - 1$

3. Localizar el origen  $\mathbf{o}_i$  en la intersección de la normal común que une al eje  $z_i$  con el eje  $z_{i-1}$ .

Si el eje  $z_i$  intercepta al eje  $z_{i-1}$  colocar  $\mathbf{o}_i$  en la intersección.

Para el caso en que los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos:

- Si la articulación  $i$ -ésima es rotacional, colocar el origen  $\mathbf{o}_i$  sobre la articulación  $i$ -ésima, tal que  $d_i = 0$ .
- Si la articulación  $i$ -ésima es prismática, colocar el origen  $\mathbf{o}_i$  en un punto límite físico de la articulación  $i$ -ésima, por ejemplo en un punto extremo.

4. Seleccionar el eje  $x_i$  a lo largo de la normal común que une a los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , en dirección de la articulación  $i - 1$  hacia la articulación  $i$ .

5. Determinar  $y_i$  por la regla de la mano derecha.

6. Establecer el sistema de referencia del extremo final  $\Sigma_n (x_n, y_n, z_n)$ .

- Si la articulación  $n$ -ésima es rotatoria, entonces alinear el eje  $z_n$  con el eje  $z_{n-1}$
  - Si la articulación  $n$ -ésima es prismática, entonces seleccionar el eje  $z_n$  de forma arbitraria. El eje  $x_n$  debe cumplir el paso 4.
7. Establecer la tabla 4.1 de parámetros de eslabones.
  8. Obtener las matrices de transformaciones homogéneas (4.6)  $H_i(q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Tabla 4.1 Parámetros Denavit-Hartenberg.

Características de eslabones	
$l_i$	longitud del eslabón $i$ -ésimo
$d_i$	articulaciones lineales o prismáticas
$\alpha_i$	ángulo entre los ejes $z_{i-1}$ y $z_i$ medido con respecto al eje $x_i$ .
$\theta_i$	articulaciones rotacionales; representa el ángulo entre los ejes $x_{i-1}$ y $x_i$ medido alrededor del eje $z_{i-1}$ .

La cinemática directa es la forma general de transformaciones homogéneas que concatena los sistemas de referencia cartesianos asociados a los eslabones del robot, todos relativos al sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



#### 4.4.4 Cinemática diferencial

La cinemática diferencial directa es la derivada con respecto al tiempo de la cinemática directa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como se ve, ésta relaciona la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  con la velocidad lineal  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} [x, y, z]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$  y la velocidad angular  $\dot{\mathbf{w}} =$

$\frac{d}{dt} [\theta, \phi, \psi]^T = [\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$ , además el mapeo es descrito en términos de una matriz  $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  denominada *jacobiano del robot* o *jacobiano analítico*:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  relaciona la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  con la velocidad lineal  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , mientras que  $J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  relaciona la velocidad angular  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  con la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ , es decir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

El jacobiano del robot representa una importante herramienta en robótica que sirve para caracterizar a un robot manipulador, encontrar configuraciones singulares, analizar redundancia, determinar la cinemática diferencial inversa, así como describir la relación entre la fuerza aplicada y los pares o torques resultantes del extremo final. Es indispensable para el análisis y diseño de algoritmos de control cartesiano.

Hay varias formas de seleccionar la orientación de la herramienta del robot manipulador: si de manera particular dicha orientación es representada por los ángulos de Euler (un sistema de referencia asociado al extremo final del robot o a la herramienta de trabajo), entonces la velocidad angular  $\mathbf{w} = [\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$  relaciona la matriz jacobiano analítico, como se encuentra descrita en la ecuación (4.7). Otra posible forma de modelar la orientación de la herramienta del robot es expresarla directamente en un sistema de referencia específico, por ejemplo al origen localizado en la base del robot, entonces a la matriz  $J(\mathbf{q})$  se le denomina *jacobiano geométrico* que depende de la configuración del robot manipulador. El jacobiano analítico difiere del jacobiano geométrico: básicamente la dife-



rencia se encuentra en cómo modelar la orientación de la herramienta de trabajo del robot.

La cinemática diferencial inversa representa la relación entre la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  con la velocidad lineal de movimiento  $\mathbf{v}$  y la velocidad angular  $\mathbf{w}$ , expresada en términos de la matriz inversa del jacobiano del robot:

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde  $J^{-1}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es la matriz inversa del jacobiano del robot, la cual existe si es una matriz cuadrada y su determinante es diferente a cero.

Si el determinante del jacobiano del robot  $J(\mathbf{q})$  es cero, entonces se dice que no es de rango completo y se presentan problemas de *singularidades*.



Singularidad significa que no es posible indicarle un movimiento arbitrario al extremo final del robot, es decir para una velocidad lineal  $\mathbf{v}$  y velocidad angular  $\mathbf{w}$  finitas puede corresponder una velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  infinita.



Puede existir un conjunto infinito de soluciones para la cinemática directa.



La cinemática inversa diferencial tiene un número infinito de soluciones.



En control cartesiano la fuerza aplicada al robot puede provocar un par infinito a las articulaciones del robot.



Puede generar un número infinito de puntos de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado, formada por la dinámica del robot y la estructura cartesiana de control.

## 4.5 Tipos de robots industriales

La estructura fundamental de los robots industriales es la cinemática abierta, la cual puede tener diferentes combinaciones de articulaciones rotacionales y prismáticas dando origen a diversos tipos de robots. A continuación se presenta la clasificación de robots industriales con base en las tres primeras articulaciones del robot, es decir sin incluir la muñeca o garra colocada en su extremo final. De acuerdo con lo anterior, los robots industriales se clasifican como se muestra en la tabla 4.2.

**Tabla 4.2 Clasificación de robots industriales.**

Robot	Características
Antropomórfico (RRR)	3 articulaciones rotacionales
SCARA (RRP)	2 articulaciones rotacionales y 1 prismática
Esférico (RRP)	2 articulaciones rotacionales y 1 prismática
Cilíndrico (RPP)	1 articulación rotacional y 2 prismáticas
Cartesiano (PPP)	3 articulaciones prismáticas

En relación con la nomenclatura presentada en la tabla 4.2 se tiene que la letra R significa que es un tipo de articulación rotacional, mientras que la letra P representa una articulación prismática. El orden como son presentadas corresponden a las articulaciones de la base, hombro y codo. Por ejemplo, la notación robot cilíndrico (RPP) significa que la base es una articulación rotacional, mientras que el hombro y codo corresponden a articulaciones prismáticas.

La gran mayoría de los robots industriales tienen la configuración antropomórfica (RRR) debido a que presentan mayor versatilidad en sus movimientos. El robot antropomórfico tiene todas sus articulaciones del

tipo rotacional. El robot SCARA (RRP) (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*) tiene la base y hombro del tipo rotacional y el codo de articulación prismática. El robot esférico (RRP) está formado por 2 articulaciones rotacionales para la base y el hombro, el codo es una articulación prismática. El robot cilíndrico (RPP) tiene 1 articulación rotacional y 2 prismáticas. El robot cartesiano (PPP), también conocido como robot lineal o pórtico, tiene sus tres articulaciones prismáticas.

En la figura 4.9 se muestra la clasificación de las 5 configuraciones de robots industriales.

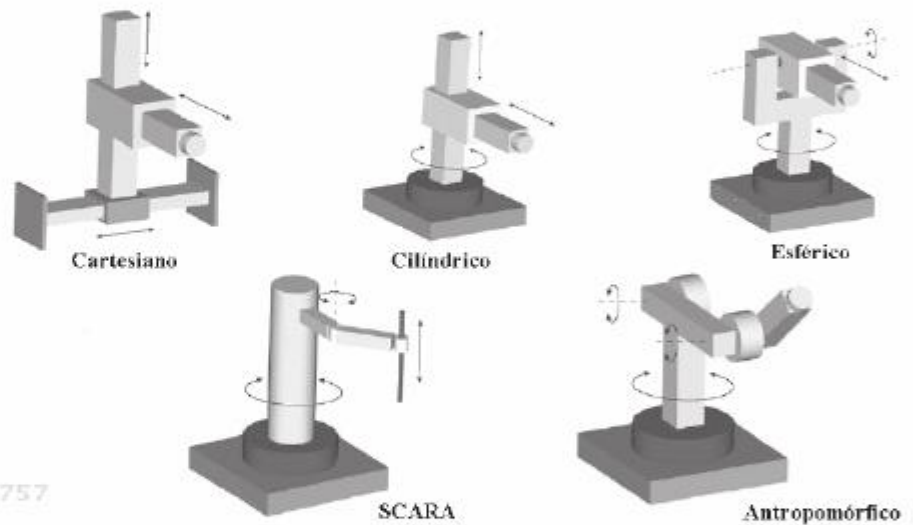


Figura 4.9 Clasificación de los robots industriales.

A continuación se deduce el modelo cinemático directo para cada uno de los robots industriales descritos en la tabla 4.2.

### Péndulo robot (R)

El robot más simple de la configuración antropomórfica es el péndulo-robot, formado por un servomotor el cual tiene acoplado mecánicamente una barra metálica de longitud  $l_1$  y se encuentra sometido al fenómeno de



## 4.5 Tipos de robots industriales

gravedad. El péndulo es un sistema robótico de un grado de libertad, cuya articulación corresponde al codo de un robot industrial. El movimiento del péndulo se encuentra en el plano  $x_0y_0$  como está indicado en la figura 4.10.

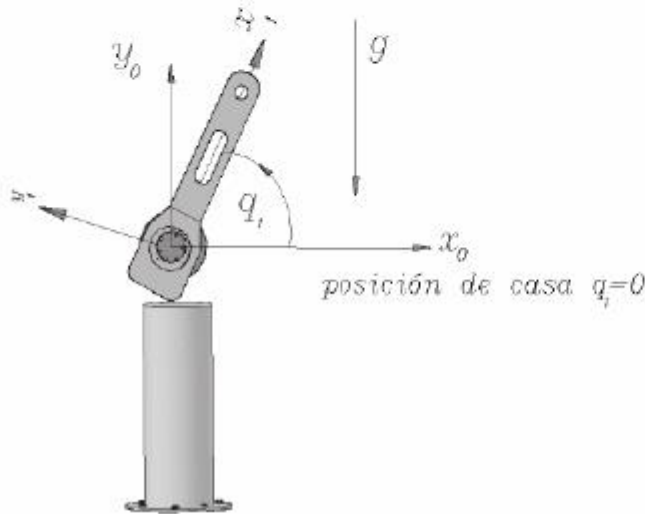
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Figura 4.10 Péndulo robot.

Los parámetros para la convención Denavit-Hartenberg correspondientes al péndulo-robot se encuentran especificados en la tabla 4.3.

Tabla 4.3 DH del péndulo.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$q_1$

El origen del sistema de referencia cartesiano  $\Sigma_0$  se coloca sobre la articulación del péndulo, el eje  $z_0$  coincide con el eje de giro del servomotor el cual es perpendicular al plano de la hoja. El sistema de referencia  $\Sigma_1$  se coloca sobre el péndulo y se mueve de manera conjunta al péndulo; coincide inicialmente con el sistema  $\Sigma_0$  cuando  $q_1 = 0$ , además el eje  $z_1$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

es paralelo al eje  $z_0$ . El plano  $x_1y_1$  tiene una rotación de  $q_1$  grados con respecto al plano  $x_0y_0$  del sistema fijo  $\Sigma_0$ , y la matriz  $R_{z_1, q_1}$  determina dicha rotación:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea para el péndulo-robot está determinada como:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La cinemática directa para un péndulo-robot de un grado de libertad es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

La cinemática inversa se obtiene despejando la variable  $q_1$  de la cinemática directa (4.12); para el péndulo se tiene que:

$$q_1 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.13)$$

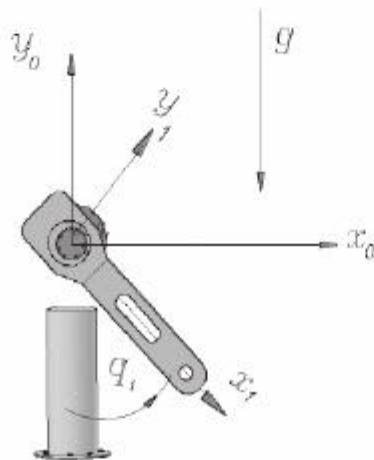
La cinemática diferencial del péndulo se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \\ l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) & 0 \\ 0 & l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}}_{J(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

El modelo de cinemática directa depende de la ubicación de la posición de casa (*home position*), la cual es el punto de reposo u origen del péndulo que corresponde a  $q_1 = 0$ . Como se puede apreciar en la figura 4.10 la

posición de casa está colocada sobre el eje  $x_{0+}$ . La matriz de rotación  $R_{z_1, q_1}$  que determina la orientación entre los sistemas de referencia fijo  $\Sigma_0$  y el que se mueve en forma conjunta con el robot  $\Sigma_1$  fue obtenida con respecto al cuadrante I, es decir sobre el plano  $x_{0+}, y_{0+}$ .

Otra posibilidad de ubicar la posición de casa del péndulo es colocar el origen par  $q_1 = 0$  sobre el lado negativo del eje  $y_0$ , es decir  $y_{0-}$  entre los cuadrantes III y IV, como se muestra en la figura 4.11.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

posición de casa  $q_1=0$ 

**Figura 4.11** Cambio de posición de casa del péndulo sobre el eje  $y_{0-}$ .

En este caso, para poder obtener la matriz rotacional resultante del péndulo, la matriz de rotación  $R_{z_1, q_1}$  debe ser precedida por una rotación de  $-\frac{\pi}{2}$  grados con respecto al eje  $z_0$ , es decir:

$$\begin{aligned} R_0^1 &= R_{z, -\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



$$= \begin{bmatrix} \text{sen}(q_1) & \text{cos}(q_1) & 0 \\ -\text{cos}(q_1) & \text{sen}(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea para el péndulo-robot está determinada como:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \text{sen}(q_1) & \text{cos}(q_1) & 0 & l_1 \text{sen}(q_1) \\ -\text{cos}(q_1) & \text{sen}(q_1) & 0 & -l_1 \text{cos}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

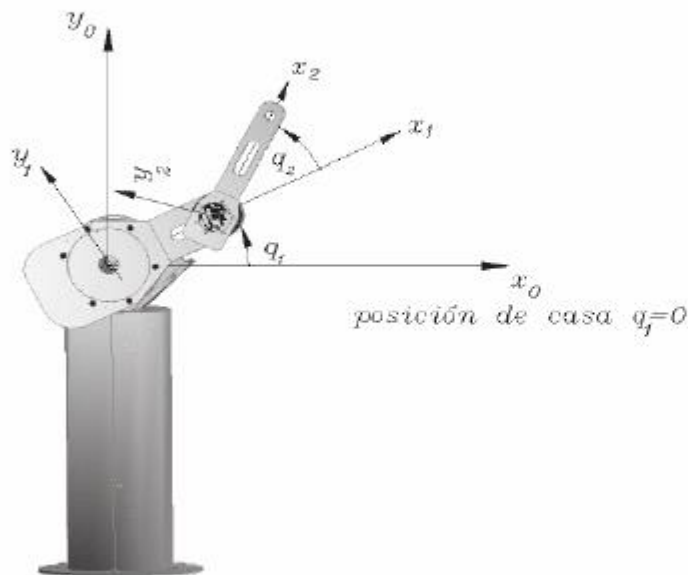
La cinemática directa para un péndulo-robot respecto a la posición de casa colocada sobre el eje  $y_0$  adquiere la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \text{sen}(q_1) \\ -l_1 \text{cos}(q_1) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

### Robot planar de dos grados de libertad (RR)

Considérese un robot de dos grados de libertad con articulaciones rotacionales que se mueve en el plano vertical  $x_0y_0$  como el que se muestra en la figura 4.12. El sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$ ,  $x_0y_0z_0$ , se coloca en la base del robot de tal forma que el eje  $z_0$  es perpendicular al plano de la hoja. Los ejes  $x_0y_0$  son seleccionados por la regla de la mano derecha. El eje  $z_1$  se coloca sobre el eje de rotación del hombro, paralelo al eje  $z_0$ , el sistema de referencia  $\Sigma_2$  se coloca en el extremo final del robot, de tal forma que el eje  $z_2$  es paralelo al eje  $z_1$ . Los orígenes de los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son colocados sobre las articulaciones del hombro y codo, respectivamente. Los demás ejes  $x_0y_0$ ,  $x_1y_1$  y  $x_2y_2$  son determinados por la regla de la mano derecha.

En la tabla 4.4 se muestran los parámetros de los eslabones para la convención Denavit-Hartenberg de un robot planar de dos grados de libertad.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Figura 4.12 Robot planar de dos gdl.

Tabla 4.4 DH del robot de 2 gdl.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$q_1$
2	$l_2$	0	0	$q_2$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Generalmente la posición de casa para un robot de dos grados de libertad se selecciona sobre el eje  $x_{0+}$ , midiendo el ángulo  $q_1$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir del eje  $x_{0+}$  hacia el eje  $y_{0+}$ , con esta consideración se obtiene la siguiente matriz de transformación homogénea:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \text{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA

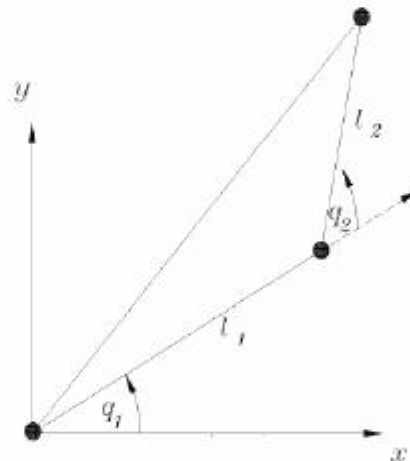
$$\begin{aligned}
 H_0^2 &= H_1 H_2 \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\operatorname{sen}(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Por tanto la cinemática directa para un robot planar de dos grados de libertad es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La cinemática inversa de un robot manipulador de dos grados de libertad se obtiene por un procedimiento geométrico como el que se muestra en la figura 4.13:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

**Figura 4.13** Método geométrico para obtener la cinemática inversa de un robot planar de dos grados de libertad.

$$q_2 = \operatorname{acos} \left( \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (4.21)$$

$$q_1 = \operatorname{atan} \left( \frac{y}{x} \right) - \operatorname{atan} \left( \frac{l_2 \operatorname{sen}(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)} \right) \quad (4.22)$$

La cinemática diferencial de un robot planar de dos grados de libertad se

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

obtiene de la ecuación (4.7):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\partial f_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

El jacobiano se deduce de:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}) &= \frac{\partial f_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} & (4.23) \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) - l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & -l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) - l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & -l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

El determinante de la matriz jacobiana es  $\det[J(\mathbf{q})] = l_1 l_2 \operatorname{sen}(q_2)$ , el cual es cero para  $q_2 = 0, \pm n\pi$  y  $q_1$  cualquier valor. Por lo tanto, cuando la articulación del codo tiene alguno de esos valores para  $q_2$  el robot entra en una singularidad.

La posición de casa de un robot manipulador planar de dos grados de libertad también puede ser ubicada sobre el eje  $y_{0-}$ , en otras palabras,  $q_1$  se mide del eje  $y_{0-}$  hacia el eje  $x_{0+}$  como se muestra en la figura 4.14.

Esto equivale a hacer una rotación alrededor del eje  $z_0$  por  $-90$  grados o  $-\frac{\pi}{2}$  radianes, es decir  $R_{z, -\frac{\pi}{2}} R_{z, q_1}$ , y  $R_{z, -\frac{\pi}{2}} R_{z, q_2}$ . Asimismo, también al vector de traslación  $R_{z, -\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^1$  y  $R_{z, -\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_1^2$ .

$$R_{z, -\frac{\pi}{2}} R_{z, q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ -\cos(q_1) & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{z, -\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{z, -\frac{\pi}{2}} R_{z, q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ -\cos(q_2) & \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{z, -\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) \\ l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ -l_2 \cos(q_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



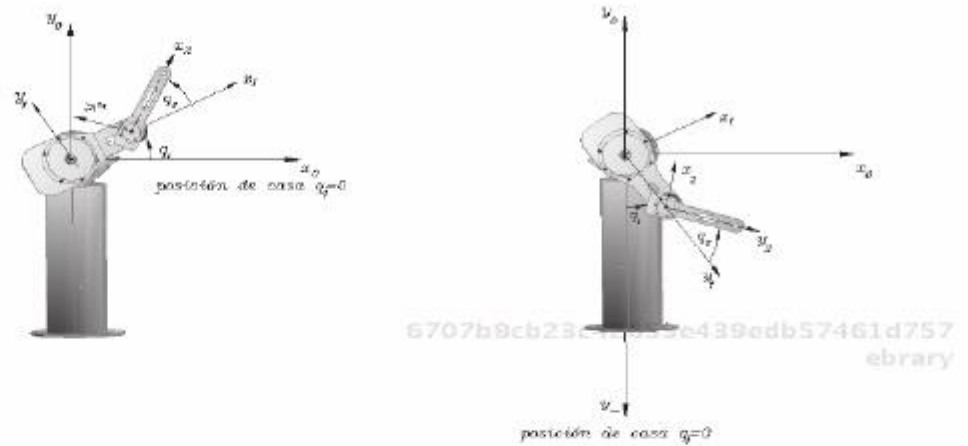


Figura 4.14 Cambio de la posición de casa para un robot de 2 gdl.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -l_1 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ -\cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & -l_2 \cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_0^2 &= H_1 H_2 \\
 &= \begin{bmatrix} \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -\cos(q_1 + q_2) & \sin(q_1 + q_2) & 0 & -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo que la cinemática directa para un robot planar de dos grados de libertad cuya posición inicial es sobre el eje  $y_0$  negativo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Observe que este resultado también se obtiene de manera directa por

aplicar la matriz de rotación  $R_{z,-\frac{\pi}{2}}$  directamente a la ecuación de la cinemática directa (4.20), es decir:  $R_{z,-\frac{\pi}{2}} [x, y]^T$ .

La cinemática inversa de la ecuación (4.25) está dada por:

$$q_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right)$$



#### 4.5.1 Robot antropomórfico (RRR)

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Los brazos mecánicos o robots manipuladores que tienen la configuración antropomórfica presentan mayor destreza en su espacio de trabajo, ya que sus eslabones están unidos por tres articulaciones rotacionales. El espacio de trabajo de la configuración antropomórfica corresponde a una esfera hueca, cuyo radio es igual a la suma de longitudes de sus eslabones (véase la figura 4.15). Por similitud con el brazo humano (*ergodicidad*), la segunda articulación se conoce como **hombro** (*shoulder*) y la tercera articulación se llama **codo** (*elbow*). El sistema de referencia cartesiano fijo  $\Sigma_0$  se encuentra sobre la base del robot, donde el eje  $z_0$  coincide con el eje de rotación de la articulación de la base  $z_1$ . El eje  $z_0$  es ortogonal a los ejes de rotación  $z_2$  y  $z_3$  del hombro y codo, respectivamente. Los ejes  $z_2$  y  $z_3$  son paralelos entre sí, tal y como se muestra en la figura 4.15.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La figura 4.16 muestra un ejemplo de robot industrial en la configuración antropomórfica de la compañía ABB que es utilizado en aplicaciones de traslado de objetos. Considérese un robot manipulador antropomórfico de tres grados de libertad como el que se presenta en la figura 4.15, donde el sistema de referencia  $\Sigma_0$  se encuentra en la base del robot, los sistemas de referencia  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  están seleccionados de tal forma que sus ejes  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  coincidan con sus respectivos ejes de rotación de cada articulación. De esta manera el eje  $z_1$  es perpendicular a los ejes  $z_2$  y  $z_3$ , y estos dos últimos ejes son paralelos entre sí. La tabla 4.5 contiene los parámetros Denavit-Hartenberg para el robot antropomórfico de tres grados de libertad. Es

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary  
ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

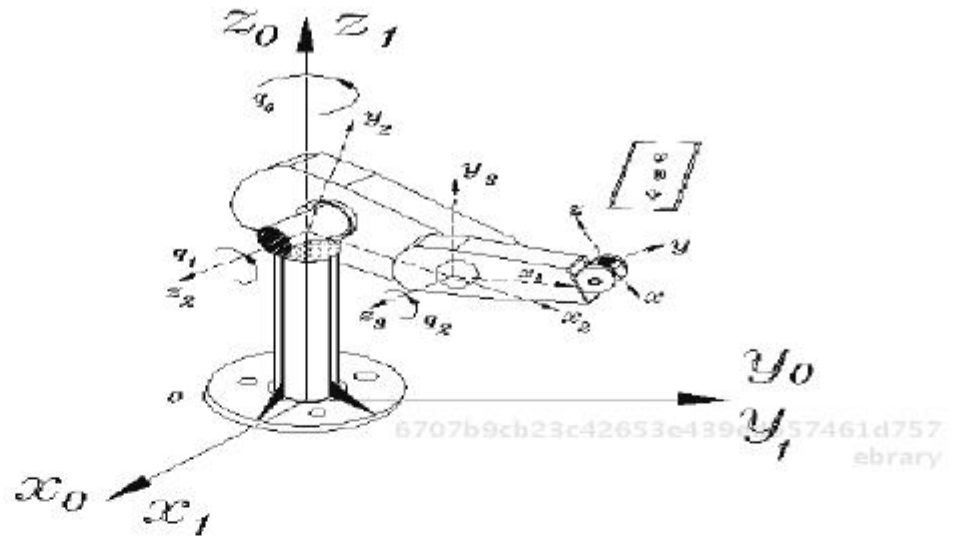


Figura 4.15 Robot antropomórfico.



Figura 4.16 Robot industrial.

Tabla 4.5 DH del robot de 3 gdl.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	$\frac{\pi}{2}$	0	$q_1$
2	$l_2$	0	0	$q_2$
3	$l_3$	0	0	$q_3$

común considerar en la articulación de la base la longitud  $l_1 = 0$ .

La configuración antropomórfica se caracteriza por tener todas sus articulaciones del tipo rotacional, lo que significa que las matrices de transformaciones homogéneas adquieren la siguiente forma:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\text{sen}(q_3) & 0 & l_3 \cos(q_3) \\ \text{sen}(q_3) & \cos(q_3) & 0 & l_3 \text{sen}(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Por lo tanto la matriz homogénea del robot antropomórfico es:

$$H_0^3 = H_0^1 H_1^2 H_2^3 \quad (4.29)$$

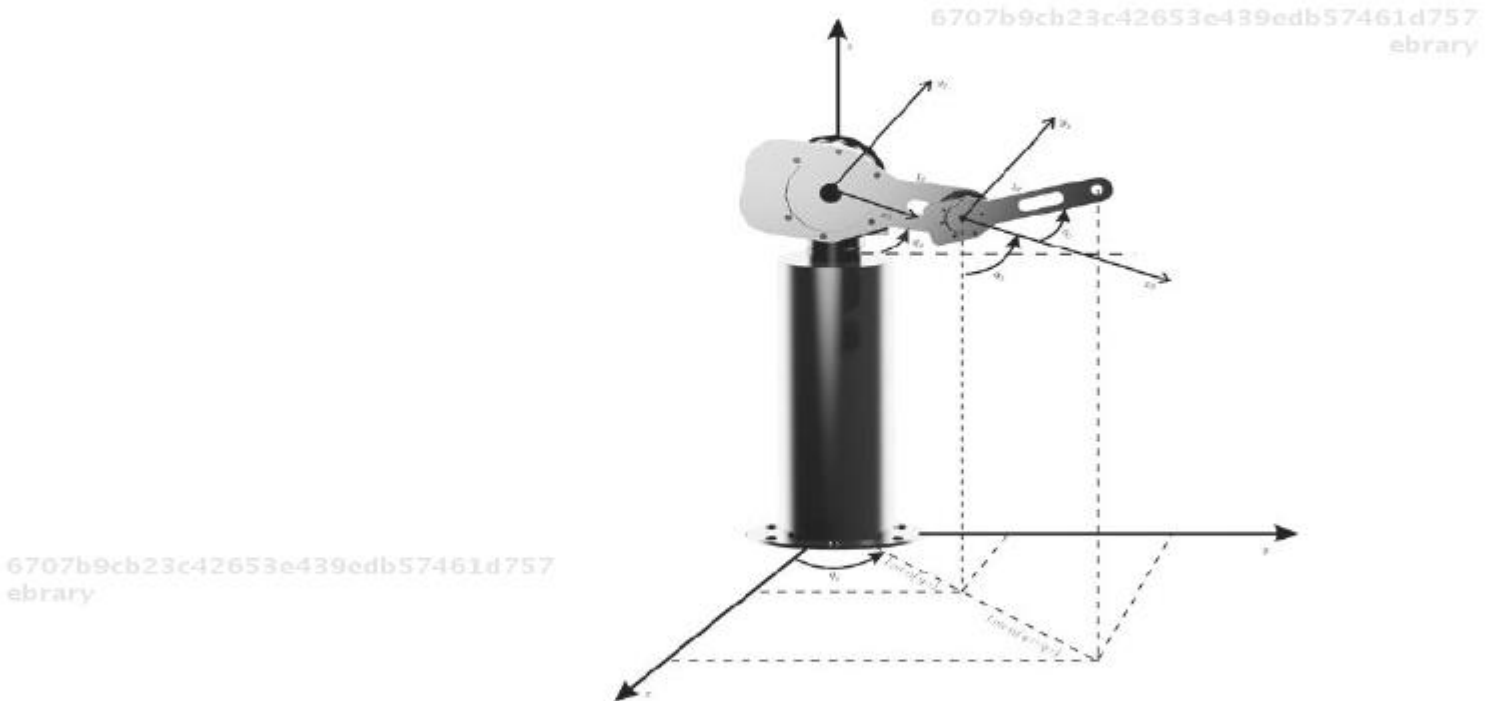
$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) \text{sen}(q_2 + q_3) & \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \text{sen}(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) & \text{sen}(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \text{sen}(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \text{sen}(q_2 + q_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



La cinemática directa de un robot antropomórfico de 3 gdl es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

La cinemática directa también es posible obtenerla por medios geométricos; a partir de la figura 4.17 se pueden deducir las mismas expresiones de la ecuación (4.30).



**Figura 4.17** Método geométrico para obtener la cinemática directa de un robot antropomórfico de 3 gdl.

La cinemática inversa consiste en obtener por medios analíticos la inversa de la función (4.30):

$$q_1 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.31)$$

$$q_2 = \text{atan}\left(\frac{\mu_{s2}}{\mu_{e2}}\right) \quad (4.32)$$

$$q_3 = \operatorname{atan}\left(\frac{\mu_{s3}}{\mu_{c3}}\right) \quad (4.33)$$

$$\mu_{s3} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)^2} \quad (4.34)$$

$$\mu_{c3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \quad (4.35)$$

$$\mu_{s2} = \frac{(l_2 + l_3\mu_{c3})z - l_3\mu_{s3}\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.36)$$

$$\mu_{c2} = \frac{(l_2 + l_3\mu_{c3})\sqrt{x^2 + y^2} + l_3\mu_{s3}z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.37)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El jacobiano de un robot antropomórfico de tres grados de libertad está dado por:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} & \dot{j}_{13} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\dot{j}_{11} = -\operatorname{sen}(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)]$$

$$\dot{j}_{12} = -\cos(q_1) [l_2 \operatorname{sen}(q_2) + l_3 \operatorname{sen}(q_2 + q_3)]$$

$$\dot{j}_{13} = -l_3 \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_2 + q_3)$$

$$\dot{j}_{21} = \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)]$$

$$\dot{j}_{22} = -\operatorname{sen}(q_1) [l_2 \operatorname{sen}(q_2) + l_3 \operatorname{sen}(q_2 + q_3)]$$

$$\dot{j}_{23} = -l_3 \operatorname{sen}(q_1) \operatorname{sen}(q_2 + q_3)$$

$$\dot{j}_{31} = 0$$

$$\dot{j}_{32} = l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

$$\dot{j}_{33} = l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

La cinemática diferencial se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} & \dot{j}_{13} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



#### 4.5.2 Configuración SCARA (RRP)

Una geometría especial de robots industriales es el tipo **SCARA** (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*). SCARA es un brazo planar antropomórfico de dos articulaciones rotacionales para la base y hombro, respectivamente, que se mueve en un plano horizontal; la tercera articulación es prismática. Para este tipo de configuración todos los ejes de movimiento  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  son paralelos entre sí. La estructura mecánica es de alta rigidez para soportar cargas en forma vertical y para control de fuerza en el plano horizontal, por lo que la configuración SCARA es adecuada para tareas de ensamble con pequeños objetos. El espacio de trabajo se describe en la figura 4.19.



Figura 4.18 Robot SCARA.

En la tabla 4.6 se presentan los parámetros del robot SCARA.

De acuerdo con la tabla 4.6 el robot SCARA tiene las siguientes matrices de transformación homogénea:

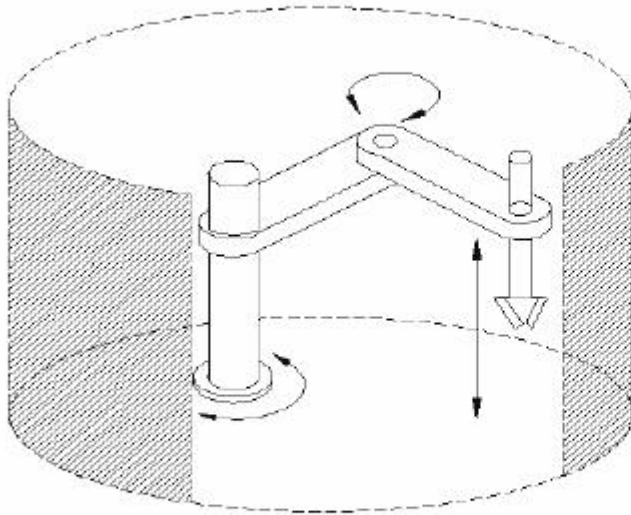


Figura 4.19 Espacio de trabajo del robot SCARA.

Tabla 4.6 DH del robot SCARA.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$q_1$
2	$l_2$	180	0	$q_2$
3	0	0	$d_3$	0

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \text{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & \text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



(4.43)

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) + \text{sen}(q_1 + q_2) & -\cos(q_1 + q_2) + \text{sen}(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \text{sen}(q_1 + q_2) - \cos(q_1 + q_2) & -\text{sen}(q_1 + q_2) - \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

El modelo de cinemática directa para el robot SCARA es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ -d_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

La matriz jacobiana de un robot SCARA se encuentra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.46) \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) - l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) & -l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) & 0 \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

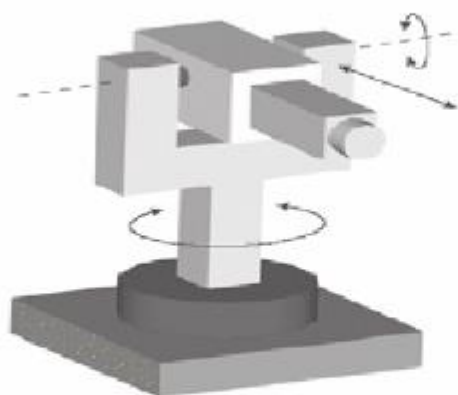


### 4.5.3 Configuración esférica (RRP)

La **configuración esférica** presenta una construcción más compleja que la antropomórfica, la articulación rotacional del codo es sustituida por una articulación prismática o lineal como se muestra en la figura 4.20. Los ejes de movimiento de las articulaciones son mutuamente perpendiculares. El nombre de esta configuración deriva del hecho que la posición del extremo final puede ser programada en coordenadas esféricas.

Ejemplo de esta configuración de robots manipuladores es el robot Stanford, cuya principal aplicación se encuentra en el mecanizado de piezas automotrices y la manipulación de objetos sobre el piso.

El origen del sistema de referencia esférico se encuentra localizado en la

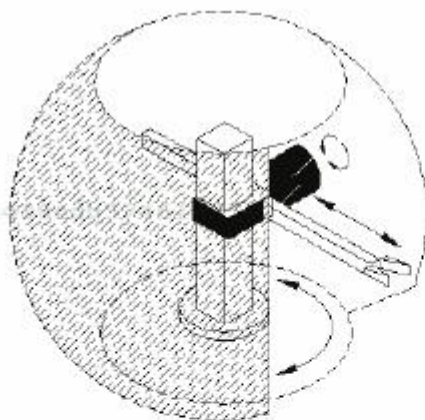


6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

**Figura 4.20** Configuración esférica tiene dos articulaciones rotacionales (base y hombro) y una prismática (codo).

intersección de los ejes  $z_1$  y  $z_2$ ; el espacio de trabajo de esta configuración es una esfera hueca.

6707b9cb23c42653e  
ebrary

**Figura 4.21** Espacio de trabajo de la configuración esférica.

La articulación del hombro del robot Stanford tiene una longitud (*offset*) que hace más compleja la cinemática directa.

La tabla 4.7 presenta los parámetros de la convención Denavit-Hartenberg

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

para el robot en la configuración esférica Stanford.

Tabla 4.7 DH del robot esférico.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$q_1$
2	0	90	$d_2$	$q_2$
3	0	0	$d_3$	0

Las matrices de transformación homogénea para el robot en la configuración esférica tienen la siguiente estructura:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \text{sen}(q_2) & 0 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\text{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\text{sen}(q_2) & \cos(q_1)\text{sen}(q_2)d_3 - \text{sen}(q_1)d_2 \\ \text{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\cos(q_2) & \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2) & \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2)d_3 + \cos(q_1)d_2 \\ -\text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & \cos(q_2)d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

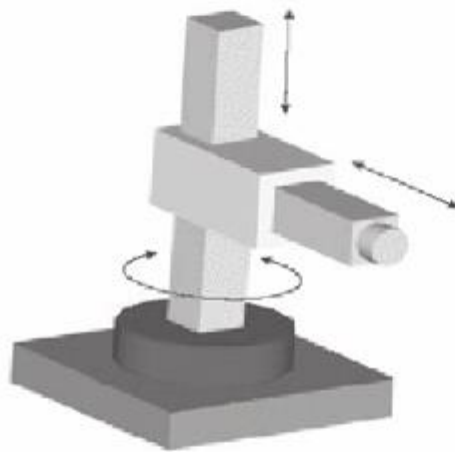
Por lo tanto la cinemática directa de un robot manipulador en la configuración esférica está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\text{sen}(q_2)d_3 - \text{sen}(q_1)d_2 \\ \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2)d_3 + \cos(q_1)d_2 \\ \cos(q_2)d_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$



#### 4.5.4 Configuración cilíndrica (RPP)

La **configuración cilíndrica** tiene la articulación de la base rotacional, mientras que la segunda y tercera articulación son prismáticas. Entre las aplicaciones de robots manipuladores en esta configuración se encuentran aquellas que procesan cavidades horizontales y transporte de objetos. En la figura 4.22 se muestra un robot manipulador en la configuración cilíndrica.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

**Figura 4.22** Robot cilíndrico.

Su estructura mecánica es compleja y su espacio de trabajo es la porción de un cilindro hueco, como se muestra en la figura 4.23. El origen del sistema de referencia cartesiano para el robot en la configuración cilíndrica se ubica en la articulación de la base. Los ejes  $z_1$  y  $z_2$  son paralelos. El eje  $z_3$  es perpendicular a los ejes  $z_1$  y  $z_2$ .

En la tabla 4.8 se muestran los parámetros del robot manipulador en la configuración cilíndrica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



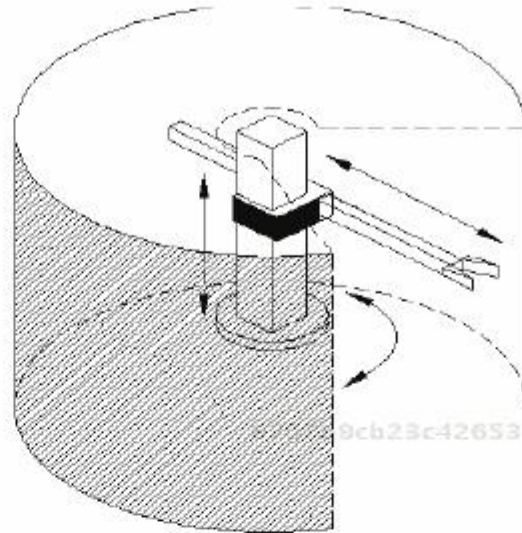


Figura 4.23 Espacio de trabajo del robot cilíndrico.

Tabla 4.8 DH del robot cilíndrico.

Eslabón	$l_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$d_1$	$q_1$
2	0	-90	$d_2$	0
3	0	0	$d_3$	0

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
 ebrary

Con la tabla 4.8 el robot en la configuración cilíndrica tiene las siguientes matrices de transformación homogénea:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\operatorname{sen}(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1)d_3 \\ \operatorname{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & d_3 \cos(q_1) \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

El modelo de cinemática directa para el robot manipulador cilíndrico está dado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(q_1)d_3 \\ d_3 \cos(q_1) \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

La matriz jacobiana de un robot cilíndrico está dada por:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\cos(q_1)d_3 & 0 & -\operatorname{sen}(q_1) \\ -d_3 \operatorname{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

### 4.5.5 Configuración cartesiana (RRR)

Los manipuladores cuyas primeras tres articulaciones son prismáticas se les denomina **robots cartesianos**, y este tipo de robots también son conocidos como *robots pórticos o lineales*. En la figura 4.24 se muestra una mesa de medición cartesiana. El modelo cinemático del robot cartesiano es más sencillo en contraste con otras configuraciones de robots, debido a que presenta características lineales. Este tipo de robot es útil en aplicaciones de corte de mascarillas, graficadores, taladros automáticos, plotters, mesa de coordenadas cartesianas, etc.

Los ejes asociados a cada articulación  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$  son mutuamente perpendiculares entre sí. En la figura 4.25 se muestra un prototipo de un



Figura 4.24 Robot cartesiano.

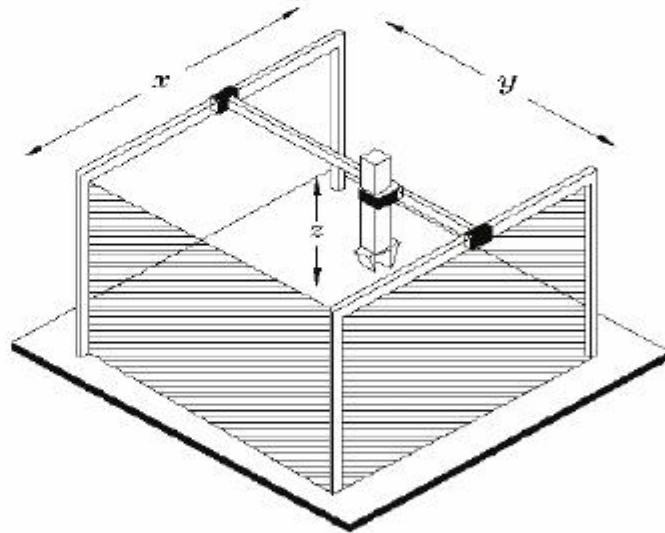


Figura 4.25 Espacio de trabajo del robot cartesiano.

robot cartesiano. El extremo final del robot se programa en coordenadas cartesianas, el espacio de trabajo de este manipulador es un paralelepípedo recto y su estructura mecánica presenta baja destreza debido a que todas sus articulaciones son prismáticas.

En el sitio web del libro se puede encontrar como material complementario

tario la tabla de parámetros del robot cartesiano de 3 gdl y su análisis cinemático.



## 4.6 Resumen

La cinemática directa proporciona un cambio de coordenadas articulares o generalizadas a coordenadas cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta de trabajo, colocada en el extremo final del robot.

La **cinemática directa** es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares con las posiciones cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta, colocada en el extremo final del robot. Un procedimiento simple que se ha generalizado para determinar la cinemática directa de robots manipuladores es la convención DenavitHartenberg, la cual consiste en determinar 2 variables articulares  $\theta_i$  para rotacionales y  $d_i$  para prismáticas. Además, 2 parámetros constantes de cada eslabón: longitud  $l_i$  y el ángulo  $\alpha_i$  entre los ejes consecutivos  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , entonces por medio de las transformaciones homogéneas queda determinado el modelo cinemático directo.

La cinemática inversa es un problema mucho más complejo que la cinemática directa. Puede haber varias soluciones o inclusive no siempre se puede obtener una solución analítica. La cinemática inversa relaciona las coordenadas articulares en función de las coordenadas cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta de trabajo del robot. La cinemática directa diferencial relaciona las velocidades lineales y rotacionales de la herramienta de trabajo en función de las coordenadas articulares de posición  $\mathbf{q}$  y velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$ .

El jacobiano del robot,  $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ , representa un operador importante en robótica, ya que permite establecer conclusiones de singularidades para las diversas configuraciones de robots industriales, interviene en el análisis de estabilidad de esquemas de control cartesiano, y es parte de la

cinemática directa.

Dependiendo de la combinación de articulaciones rotacionales o prismáticas los robots industriales se clasifican en 5 categorías: antropomórficos, esférico, SCARA, cilíndrico y cartesiano, siendo el más popular en el sector industrial el robot antropomórfico debido a su destreza en cuanto a la movilidad que le proporcionan las articulaciones rotacionales.



## 4.7 Referencias selectas

Se describe un conjunto de referencias selectas con la finalidad de que el lector encuentre información de respaldo a las secciones presentadas.



### 4.2 Morfología del robot



L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.



John J. Craig. “*Robótica*”. Pearson. 3a. Edición. 2006.



### 4.3 Transformación homogénea



K. S. Fu, R. C. Gonzalez, & C. S. G. Lee. “*Robotics: control, sensing, vision and intelligence*”. McGraw Hill International Editions. 1987.



L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.





John J. Craig. “*Robótica*”. Pearson. 3a. Edición. 2006.



#### 4.4 Cinemática



J. Denavit & R.S. Hartenberg. “*A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*”. Trans ASME J. Appl. Mech. 23:215-221,1955



R.S. Hartenberg & J. Denavit. “*Kinematic synthesis of linkages*”. McGraw-Hill, New York, NY, 1964.



Richard P. Paul. “*Robot manipulators: mathematics, programming and control*”. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts and London England. 1981.



J. M. McCarthy. “*An introduction to theoretical kinematics*”. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts and London England. 1990.




#### 4.5 Tipos de robots industriales



Tsuneeo Yoshikawa. “*Foundations of robotics: analysis and control*”. The MIT Press. Cambridge. 1990.



Yoshihiko Nakamura. “*Advanced robotics: redundancy and optimization*”. Addison Wesley. 1991.

-  Richard M. Murray, Zexiang Li, & S. Shankar Sastry. “*A mathematical introduction a robotic manipulation*”. CRC Press. 1993.
-  Wolfram Stadler. “*Analytical robotics and mechatronics*”. McGraw Hill International Editions. 1995.
-  Jorge Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer. 1997.
-  L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.
-  Mark W. Spong, Seth Hutchinson & M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley & Sons, Inc. 2006.



## 4.8 Problemas propuestos

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de cinemática de robots manipuladores.



### 4.2 Morfología del robot

- 4.2.1 Explicar claramente qué es una articulación.
- 4.2.2 ¿Qué es un eslabón y como está formado?
- 4.2.3 ¿Cómo se define el espacio de trabajo de un robot?



### 4.3 Transformación homogénea

4.3.1 Considérese que  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz ortogonal. Demuéstrese que la matriz transpuesta es idéntica a su matriz inversa:  $R^T = R^{-1}$ .

4.3.2 Supóngase que el sistema de referencia asociado a una matriz ortogonal  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  se selecciona por la regla de la mano derecha, entonces demuéstrese que el determinante de  $R$  es unitario, esto es,  $\det[R] = 1$ .

4.3.3 Demuéstrese que la inversa de una transformación homogénea está dada por la ecuación (4.3).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### 4.4 Cinemática

4.4.1 ¿Qué es la cinemática directa?

4.4.2 ¿Qué es la cinemática diferencial?

4.4.3 ¿Cuál es la importancia en robótica del jacobiano del robot?

4.4.4 ¿Qué es una singularidad?

4.4.5 Explíquese la diferencia entre el jacobiano analítico y el geométrico.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### 4.5 Tipos de robots industriales

4.5.1 Obtener el determinante de la matriz jacobiana de un robot antropomórfico de 3 gdl (véase la ecuación 4.38). Analizar las posiciones de singularidad.

4.5.2 Obtener la cinemática inversa de un robot SCARA. Sugerencia: manipule matemáticamente la ecuación (4.45) y despeje las variables articulares en función de las coordenadas cartesianas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

- 4.5.3 Obtener el determinante de la matriz jacobiana (4.46) y analizar las posiciones que producen singularidades.
- 4.5.4 Obtener la cinemática inversa de un robot en configuración esférica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.51).
- 4.5.5 Obtener la matriz jacobiana de un robot en configuración esférica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.51).
- 4.5.6 Obtener la cinemática inversa de un robot en configuración cilíndrica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.56).
- 4.5.7 Obtener el determinante de la matriz jacobiana de un robot en configuración cilíndrica. Analizar las posiciones que generan singularidades. Sugerencia: emplee la matriz jacobiana (4.57).
- 4.5.8 Analizar la cinemática directa e inversa de un robot cartesiano de 3 gdl.
- 4.5.9 Obtener el jacobiano de un robot cartesiano de 3 gdl.
- 4.5.10 ¿Tiene singularidades un robot cartesiano de 3gdl?

# 5

## CAPÍTULO

# Dinámica de robots manipuladores

*No existen ningún lenguaje universal para entender y apreciar la naturaleza, con excepción de las matemáticas.*



Gauss  
e439edb57461d757  
ebrary




- 5.1 Introducción
- 5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange
- 5.3 Modelo dinámico
- 5.4 Modelo dinámico cartesiano
- 5.5 Identificación paramétrica
- 5.6 Robot experimental de 3 gdl
- 5.7 Resumen
- 5.8 Referencias selectas
- 5.9 Problemas propuestos



## Objetivos




Presentar el modelado dinámico de robots manipuladores a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, así como explicar el proceso de identificación paramétrica a través de 5 esquemas de regresión utilizando la técnica de mínimos cuadrados.

### Objetivos particulares:

-  Exponer la dinámica en coordenadas articulares y cartesianas.
-  Describir y analizar las propiedades matemáticas del modelo dinámico.
-  Exponer los esquemas de regresión: modelo dinámico, energía y potencia.

## Competencias

Adquirir la habilidad en modelado dinámico de robots manipuladores y su proceso de identificación paramétrica:

-  Dinámica articular y cartesiana.
-  Esquemas de regresión.
-  Infraestructura científica de robótica.

## 5.1 Introducción

### 5.1 Introducción

Un robot manipulador es un sistema mecánico muy complejo cuya descripción analítica requiere de ecuaciones diferenciales. La naturaleza no lineal, multivariable y acoplada de su comportamiento dinámico ofrece un amplio espectro en la formulación de problemas de control teóricos y prácticos. El modelo dinámico del robot manipulador permite explicar todos los fenómenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, tales como efectos inerciales, fuerzas centrípetas y de Coriolis, por gravitacional y fricción los cuales son fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza dinámica del robot. Estos fenómenos aparecen en el rango de operación nominal o ancho de banda del robot. Bajo determinadas condiciones, algunas configuraciones mecánicas de robots manipuladores pueden exhibir dinámica caótica, lo cual es un fenómeno dinámico no lineal adicional a los ya citados. La mecánica analítica representa la herramienta sólida de las ciencias exactas para formular modelos matemáticos de sistemas mecánicos, en este contexto la dinámica es la parte de la física que estudia la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Por este motivo, el análisis y estudio de los fenómenos del robot se lleva a cabo por medio de ecuaciones diferenciales no lineales para formar el **modelo dinámico**. A diferencia de otros métodos de modelado de la física como el de Newton o el de Hamilton, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange representan la mejor alternativa de modelado para robots manipuladores debido a las propiedades matemáticas que se deducen de manera natural usando esa metodología. Este procedimiento facilita el análisis y diseño de algoritmos de control.

La utilidad del modelo dinámico de robots manipuladores es fundamental para propósitos de **simulación, diseño y construcción del sistema mecánico**, así como **análisis y diseño de algoritmos de control**. En el área de **simulación** el modelo dinámico es la parte clave debido a que puede reproducir todos los fenómenos físicos del robot sin la necesi-

dad de usar un robot real (realidad virtual), y esta característica resulta estratégica para evaluar algoritmos de control, técnicas de planeación de trayectorias, programación de aplicaciones industriales, etc. La simulación es el empleo del modelo dinámico para analizar y describir su comportamiento dinámico en un sistema electrónico y de ahí inferir aplicaciones. Es importante no confundir la simulación con animación, son procesos diferentes; la animación no requiere incorporar efectos dinámicos en el movimiento del robot, generalmente son ecuaciones estáticas como la cinemática directa.

Para diseñar algoritmos de control de robots manipuladores es fundamental conocer el modelo dinámico, sobre todo cuando la técnica de diseño se basa en la estructura del modelo dinámico como lo es la teoría de estabilidad de Lyapunov; en este caso las propiedades matemáticas del modelo dinámico son explotadas para facilitar el análisis y propuesta de nuevas estrategias de control.

Otra de las ventajas que representa el modelo dinámico es su empleo para diseñar y construir robots manipuladores. Los robots industriales no se diseñan de manera empírica, existe un procedimiento científico para poder diseñar y construir un robot industrial el cual se sustenta en la dinámica del robot. Los esquemas y planos de ingeniería de los eslabones son deducidos del modelo dinámico y trasladados a un programa CAD para su maquinado mecánico. De esta forma, un robot industrial puede ser estudiado y se pueden hacer las adecuaciones pertinentes antes de llegar a la etapa de construcción física. Dependiendo de la aplicación del robot, la selección de los servomotores es clave ya que ellos generan el par requerido por los eslabones.

Sin embargo, no es suficiente contar con la estructura completa del modelo dinámico, ya que subsisten problemas de naturaleza práctica como son la medición de los parámetros dinámicos del robot manipulador tales como momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción, lo que generalmente se convierte en una tarea difícil, sobre todo cuando

no es posible desarmar el robot manipulador. La utilidad de los parámetros dinámicos se presenta en la implementación de sistemas de control basados en el modelo dinámico, ya que el comportamiento, desempeño y robustez de esos esquemas depende de la exactitud de los parámetros del modelo dinámico. Para determinar el valor numérico de los parámetros del robot se emplean métodos de identificación paramétrica, en particular en este capítulo se incluye una sección del tema de regresión lineal, en que se presentan 6 regresores lineales que utilizan el algoritmo de mínimos cuadrados.

## 5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección se obtiene el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta. Un método estándar para obtener el modelo dinámico de un robot está basado en las *ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange*.

A continuación se describe el procedimiento para obtener el modelo dinámico de robots manipuladores.

La energía total  $\mathcal{E}$  (*hamiltoniano*) del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  más la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  representan los vectores de posición y velocidad articular, respectivamente. Obsérvese que la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  tiene una dependencia de la posición y velocidad articular, mientras que la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  está relacionada con el campo conservativo de la gravedad y por lo tanto únicamente depende de la posición.

El *lagrangiano*  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la energía

### Euler (1707-1783)



Leonhard Paul Euler, físico matemático suizo, nació el 15 de abril de 1707 en la ciudad de Basilea, Suiza, y es considerado uno de los matemáticos más grandes en la historia de la humanidad. Hizo importantes aportaciones en cálculo, teoría de grafos, análisis matemático, mecánica, óptica y astronomía. El número  $e$  fue definido por Euler. En robótica es ampliamente utilizado el método de diferenciación numérica de la posición para aproximar a la velocidad, y la orientación de la herramienta del robot es modelada a través de los ángulos de Euler, asimismo destacan sus contribuciones en mecánica ya que representan las bases del modelado de robots manipuladores. Como un homenaje a este matemático, su retrato ha sido publicado en billetes suizos y rusos. También el asteroide Euler (2002) recibió ese nombre en su honor. Murió el 28 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

## Lagrange (1736-1813)



Joseph Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia o Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange), físico matemático italiano, nació el 25 de enero de 1736 en la ciudad de Turín. Lagrange tuvo una importante contribución en astronomía, demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica lagrangiana que ha tenido grandes aportaciones en el área de robótica, que de manera conjunta a las aportaciones de Euler unificó las bases del modelado dinámico de robots manipuladores.

El lagrangiano es ampliamente utilizado para obtener la dinámica no lineal del robot, específicamente el lagrangiano del robot  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Luego de una brillante trayectoria, Lagrange murió el 10 de abril de 1813 en París.

potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.2)$$

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares aplicados, donde el  $i$ -ésimo par  $\tau_i$  se encuentra asociado con la  $i$ -ésima coordenada generalizada  $q_i$ , y  $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  y de la fricción estática  $\mathbf{f}_e$  que se encuentra presente en las articulaciones del mismo;  $t \in \mathbb{R}_+$  representa el tiempo,  $n \in \mathbb{N}$  es el número de grados de libertad.

La energía cinética tiene una estructura matemática cuadrática bien definida en función de la velocidad articular:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.4)$$

Aquí  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia del manipulador, y es una matriz definida positiva (por lo tanto simétrica). Por otro lado, la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  no tiene una forma específica. Sin embargo, tiene una dependencia exclusivamente del vector de posición  $\mathbf{q}$ , ya que se considera su presencia a campos conservativos como la fuerza de gravedad.

Con esta forma del lagrangiano, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange pueden escribirse en forma compacta como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.5)$$



$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.7)$$

El modelo dinámico de un robot manipulador proporciona una descripción completa entre los pares aplicados a los servomotores y el movimiento de la estructura mecánica. Con la formulación *Euler-Lagrange* las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática independientemente del sistema de referencia coordinado. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (5.3) para un robot de  $n$  grados de libertad adquieren la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$$


### 5.3 Modelo dinámico


El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad está dado por la ecuación (5.8), que en su forma compacta y con la notación más ampliamente utilizada en el área de robótica se encuentra descrito de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.8)$$

Aquí se tiene que:

  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares,

  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,

  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares,


#### Modelo dinámico


La ecuación que describe la dinámica no lineal de un robot manipulador (5.8) es válida cuando el robot tiene una estructura en cadena cinemática abierta, además se considera que los eslabones son rígidos, es decir no incluye el fenómeno de elasticidad.

La estructura matemática que tiene el modelo (5.8) se debe a la metodología de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Como una consecuencia de esto, se desprenden importantes propiedades matemáticas que facilitan el diseño y desarrollo de algoritmos de control, de manera particular una propiedad clave que reduce notablemente el álgebra y las operaciones involucradas en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov es la propiedad de antisimetría:  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [ \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) ] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \in \mathbb{R}$ .


Debido a que la matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva, genera las condiciones necesarias (no suficientes) para la unicidad y existencia del punto de equilibrio.

Este tipo de propiedades matemáticas del modelo dinámico no existen en otras metodologías como las de Newton o de Hamilton, y es por esto que se emplea la metodología de Euler-Lagrange en el modelado de robots manipuladores.

  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva,


  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis,

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (5.9)$$

  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, es decir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.10)$$

debida a la acción de la gravedad,

  $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática ( $\mathbf{f}_e$ ) de cada articulación del robot.

El modelo dinámico (5.8) representa la base matemática para llevar a cabo el análisis y estudio de los fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad en cadena cinemática abierta, con eslabones rígidos, en su rango de operación nominal o ancho de banda. Para el caso de que el robot tenga eslabones flexibles, es necesario incorporar dentro del modelo dinámico, el fenómeno físico de elasticidad y flexibilidad en los eslabones. Cuando el robot se encuentra operando fuera de su ancho de banda, por ejemplo excede los límites de velocidades articulares o el amplificador electrónico se encuentra funcionando en los límites de saturación, entonces puede aparecer otro tipo de dinámica no modelada y en este escenario es mucho más complicado explicar el comportamiento dinámico de este tipo de robots. Algunas configuraciones mecánicas de robots manipuladores con especiales condiciones pueden exhibir dinámica caótica. Sin embargo, la ecuación del modelo dinámico (5.8) no explica el régimen caótico.



### 5.3.1 Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad (5.8) es una ecuación diferencial compleja, de naturaleza continua, multivariable con dinámica fuertemente acoplada y no lineal en el vector de estados  $[\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ . No obstante, tiene varias propiedades fundamentales que pueden ser explotadas para facilitar el diseño y análisis de sistemas de control.

A continuación se describen las principales propiedades matemáticas que posee el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad, con eslabones rígidos y en configuración de cinemática abierta.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



### 5.3.2 Efecto inercial

El efecto inercial representado por  $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$  significa el cambio de estado de movimiento del robot manipulador.

El efecto inercial de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad tiene las siguientes propiedades:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

**Propiedad 5.1** La matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T$ , definida positiva  $M(\mathbf{q}) > 0$ . Por esto existe la matriz inversa  $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y también satisface que es una matriz simétrica  $M(\mathbf{q})^{-1} = M(\mathbf{q})^{-T}$  y definida positiva  $M(\mathbf{q})^{-1} > 0$ .

En robótica una propiedad clave es la característica distintiva de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ : es una matriz definida positiva. Esta propiedad se emplea mucho en el análisis y diseño de esquemas de control. Su importancia radica en que facilita la demostración de unicidad y existencia del punto de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado integrado por el modelo dinámico y el algoritmo de control.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary





**Propiedad 5.2** La matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  satisface que

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} I \leq M(\mathbf{q}) \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I \quad (5.11)$$

donde  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad,  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}$  y  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$  representan los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia, respectivamente.

Es necesario aclarar que la expresión (5.11) significa la existencia de una constante  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$  tal que la matriz resultante  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I - M(\mathbf{q}) \geq 0$  es una matriz semidefinida positiva. No se debe cometer el error común de interpretación de que el valor propio máximo de la matriz de inercia multiplicado por la matriz identidad ( $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I$ ) es mayor que la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$ ; este significado no tiene sentido. De manera análoga, existe una constante  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}$  tal que la matriz resultante de  $M(\mathbf{q}) - \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} I \geq 0$  es una matriz semidefinida positiva.



**Propiedad 5.7** El fenómeno inercial de un robot manipulador satisface que  $\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\ddot{\mathbf{q}}\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ; donde  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$  representa el valor propio máximo de la matriz de inercia.



**Propiedad 5.4**  $\beta$  del robot. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante  $\beta > 0$  tal que:

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (5.12)$$



**Propiedad 5.8** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante  $k_M$  tal que:

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (5.13)$$

para todo vector  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ .



### 5.3.3 Fuerzas centrípetas y de Coriolis

El vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis están representadas por  $C(\dot{q}, q)\dot{q}$ . Las fuerzas centrípetas son fuerzas radiales, teniendo un signo contrario a las fuerzas centrífugas. La fuerza de Coriolis representa una desviación del movimiento de traslación debido a su componente de rotación.

Las fuerzas centrípetas y de Coriolis tienen las siguientes propiedades:



**Propiedad 5.6** La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no es una matriz única, pero el vector  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  sí lo es.



**Propiedad 5.7** Cuando el vector de velocidades articulares es cero, la matriz de Coriolis satisface  $C(q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} = C(q, 0) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ .



**Propiedad 5.8** Para todo vector  $q, x, y \in \mathbb{R}^n$  se tiene que:

$$C(q, x)y = C(q, y)x.$$



**Propiedad 5.9** La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$  y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia  $\dot{M}(q)$  satisfacen

$$\frac{1}{2}\dot{q} \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} \equiv 0$$

Es decir, la matriz resultante  $\left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right]$  es una matriz antisimétrica. Recordar la propiedad  $x^T A_{sk} x = 0$ , entonces la matriz  $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es antisimétrica,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La propiedad de antisimetría facilita el diseño y análisis de estabilidad; la demostración de estabilidad para el caso de control de posición o regulación se reduce a tres sencillas fases de la demostración matemática.



#### Marco inercial

Un sistema de referencia es denominado marco inercial o sistema de referencia newtoniano si permanece fijo, sin rotar, o si se traslada en una dirección dada con velocidad constante (aceleración cero). Esta definición asegura que las mediciones realizadas en dos marcos de referencia inerciales diferentes siempre serán equivalentes.

En contraste, los sistemas de referencia anclados a las articulaciones del hombro, codo y en el extremo final no son inerciales debido a que se trasladan junto con la respectiva articulación, y por tanto existen movimientos de rotación y la velocidad de movimiento no es constante, por lo cual la aceleración es diferente a cero.

Por otro lado, el sistema de referencia  $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$  es fijo y se encuentra asociado a la base del robot; este sistema de referencia es un marco inercial, ya que no tiene desplazamiento lineal ni rotacional.





**Propiedad 5.10** De la propiedad 5.9 la derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$



**Propiedad 5.11** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva  $k_{C_1}$  tal que:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|.$$

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

**Propiedad 5.12** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes  $k_{C_1}$  y  $k_{C_2}$  tales que

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\|$$

para todo vector  $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ .



### 5.3.4 Par gravitacional

Las propiedades del par gravitacional son:



**Propiedad 5.13** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante  $k_g > 0$  tal que

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

La constante  $k_g$  se puede calcular como

$$k_g \geq n \left( \max_{i,j,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right)$$

donde  $g_i(\mathbf{q})$  es el  $i$ -ésimo elemento del vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

**Propiedad 5.14** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales existe una constante  $k'$  tal que:

$$\|g(q)\| \leq k' \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

El vector de pares gravitacionales  $g(q)$  y de velocidad articular  $\dot{q}$  satisfacen

$$\int_0^t g(q(\sigma))^T \dot{q}(\sigma) d\sigma = \mathcal{U}(q(t)) - \mathcal{U}(0).$$



### 5.3.5 Fenómeno de fricción

El fenómeno de fricción tiene el efecto físico de oponerse al movimiento del robot, su característica principal es un fenómeno disipativo en velocidades diferentes a cero y con entradas acotadas dentro del primer y tercer cuadrante, lo que permite considerar los modelos tradicionales de fricción viscosa y de Coulomb, para modelarlos como una combinación lineal de la fricción viscosa, Coulomb y estática. La característica disipativa de la fricción significa que convierte la energía mecánica en energía térmica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\mathbf{f}_f(\dot{q}, \mathbf{f}_e) = B\dot{q} + F_c \text{signo}(\dot{q}) + \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_n)|] \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (5.14)$$

donde  $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática  $\mathbf{f}_e$  está representada por  $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$  que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador. En velocidades cero únicamente está presente la fricción estática satisfaciendo:

$$f_i(0, \tau_i) = \tau_i - g_i(q) \quad (5.15)$$



### Tribología

La tribología es la rama de la física que se encarga de estudiar el fenómeno de fricción en sistemas mecánicos. Actualmente, se han realizado importantes aportaciones a los modelos básicos de fricción: fricción viscosa y fricción de Coulomb. Estos modelos fueron propuestos por Leonardo da Vinci y han sido los métodos tradicionales para explicar este fenómeno.

Hoy en día, se sabe que la transición de la fricción estática a la fricción en movimiento no es instantánea; este comportamiento se explica con el modelo Stribeck. En esta fase la pendiente de la curva Stribeck tiene valor negativo y posteriormente toma un valor positivo. De hecho, como parte de esa transición, antes de que la velocidad de movimiento sea diferente de cero, existe una etapa denominada histéresis que hace que el robot tenga juego mecánico o cascabeleo.

El fenómeno de fricción es disipativo, esto significa que la energía mecánica se transforma en energía térmica, es decir, satisface  $\dot{q}^T \mathbf{f}_f(\dot{q}) > 0$ . El aspecto disipativo se traduce como desgaste y envejecimiento en las partes mecánicas del robot. Sin embargo, el fenómeno de fricción ayuda a generar la región de atracción para puntos de equilibrio estables.

para  $-f_{ei} \leq \tau_i - g_i(\mathbf{q}) \leq f_{ei}$ , donde  $f_{ei}$  es el límite del par de fricción estática para la  $i$ -ésima articulación.

La función signo de la velocidad,  $\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})$ , está dada por:

$$\text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\text{signo}(\dot{q}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q}_i > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{q}_i = 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q}_i < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$



**Propiedad 5.15** La fricción viscosa satisface lo siguiente:

$$\|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\|\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max}\|\dot{\mathbf{q}}\|$$

donde  $\lambda_B^{max}$  es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .



**Propiedad 5.16** La fricción de Coulomb satisface lo siguiente:

$$\|F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}})\| \leq \|F_c\|\sqrt{n} \leq \lambda_{F_c}^{max} \sqrt{n}$$

donde  $\lambda_{F_c}^{max}$  es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción de Coulomb  $F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n$  es el número de gdl del robot.



### 5.3.6 Linealidad en los parámetros

Los robots manipuladores pertenecen a una clase de sistemas mecánicos no lineales con una estructura dinámica bien definida. El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad presenta la propiedad de linealidad con respecto a los parámetros del robot que dependen de masas, momentos de inercias, centros de masa y coeficientes de fricción.

Esta propiedad tiene una enorme repercusión en esquemas de identificación paramétrica y en controladores del tipo adaptable de robots manipuladores.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange conducen al modelo dinámico del robot manipulador el cual puede ser expresado como un regresor lineal con respecto al vector de parámetros:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right] \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (5.18)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Debido a que la fuerza de fricción presente en el robot es modelada como fricción de Coulomb y viscosa, entonces el modelo de fricción es lineal con respecto a los coeficientes de fricción, es decir:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}} \quad (5.19)$$

donde  $\phi_{\mathcal{F}}$  es una matriz de orden  $n \times 2n$  y  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}$  es un vector de  $2n \times 1$ , el cual contiene los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. Por lo que la ecuación (5.18) toma la forma:

$$\underbrace{\left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})} \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.20)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary donde

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{E}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T \quad (5.21)$$

denota el vector de parámetros dinámicos y de fricción del robot manipulador.

Finalmente, del modelo dinámico del robot (5.8) se obtiene la propiedad fundamental de linealidad en los parámetros del modelo dinámico del robot manipulador:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.22)$$

donde  $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  es una matriz  $n \times p$  de funciones conocidas,  $\boldsymbol{\theta}$  es el vector  $p \times 1$  que contiene los parámetros del robot y  $p = p_1 + p_2 + 2n$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary





## 5.3.7 Modelo de energía

La energía del robot es la integral de la potencia del robot  $\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}$  sobre el intervalo de tiempo  $[0, t]$ . La energía hamiltoniana  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  más la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ :

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.23)$$

El modelo de energía del robot se basa en el principio de la conservación de la energía, el cual establece que el trabajo efectuado por la fuerzas aplicadas a un sistema es igual al cambio de energía total del sistema:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{\text{energía aplicada (t)}} &= \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}_{\text{energía almacenada (t)}} + \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \mathbf{f}_f(\sigma) d\sigma}_{\text{energía disipada (t)}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t) M(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(0) M(\mathbf{q}(0)) \dot{\mathbf{q}}(0) \\ &\quad - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \mathbf{f}_f(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)$  son las condiciones iniciales de la posición y velocidad articular, respectivamente.

**Propiedad 5.17** La propiedad de pasividad significa que existe una constante  $\beta \geq 0$  tal que:

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma = \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \geq -\beta \quad \forall t > 0 \quad (5.25)$$

entonces la energía  $\mathcal{H}(t)$  no es negativa, por lo tanto  $\mathcal{H}(0) = \beta$ .

Pasividad es un concepto que se emplea en circuitos eléctricos, por ejemplo un circuito es pasivo si sus componentes son resistencias, capacitancias, bobinas, etc. Entonces, por analogía en robótica pasividad significa que



el robot puede ser analizado como si estuviera formado de elementos pasivos como masas, resortes, y amortiguadores. La interpretación física de pasividad es que la cantidad de energía disipada por el robot tiene una cota dada por  $-\beta$ .



### 5.3.8 Modelo de potencia

La potencia aplicada al robot manipulador es la variación temporal de la energía total y puede ser obtenida empleando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de la siguiente forma:

$$\dot{q}^T \tau = \dot{q}^T \left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + \dot{q}^T f(\dot{q}) \quad (5.26)$$

$$= \frac{d}{dt} \mathcal{H}(q, \dot{q}) + \dot{q}^T f_f(\dot{q}, f_e) \quad (5.27)$$

$$= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \{\nabla U(q)\}^T \dot{q} + \dot{q}^T f_f(\dot{q}, f_e) \quad (5.28)$$



### 5.3.9 Ejemplos de modelado dinámico

Esta sección presenta la metodología de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange aplicada a robots manipuladores. También se presenta el código fuente para MatLab que permite realizar la simulación de un péndulo y de un robot planar vertical de 2 gdl.



**Paso 1:** obtener la cinemática directa del centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el  $i$ -ésimo eslabón tomar en cuenta la longitudes anteriores  $l_{i-1}$  y ángulos  $q_i$  y  $q_{i-1}$ :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = f_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i)$$



**Paso 2:** obtener la cinemática diferencial del  $i$ -ésimo eslabón y de ahí deducir la rapidez lineal:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

La rapidez lineal del centro de masa de cada eslabón se calcula de la siguiente forma:  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$



**Paso 3:** obtener el modelo energía :

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q})$$

La energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  incluye el movimiento de traslación y rotación, por ejemplo:  $\mathcal{K}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} I_i [\Sigma_i^m \dot{\mathbf{q}}_i]^2$ , donde  $I_i$  es el momento de inercia del  $i$ -ésimo eslabón.

La energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  no tiene una forma específica como en el caso de la energía cinética, depende de la geometría del robot en general  $\mathcal{U}_i(\mathbf{q}) = m_i g l_{ci} h_i(\mathbf{q})$ , siendo  $h_i(\mathbf{q})$  una función que indica la altura del eslabón con respecto al origen del sistema de referencia del robot.

Obtener el lagrangiano:  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q})$ .



**Paso 4:** aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange e incluir el modelo de fricción.

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} + b_i \dot{q}_i + f_{ci} \text{signo}(\dot{q}_i) + f_{ei} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|]$$

## ♣ Ejemplo 5.1

Obtener el modelo dinámico de una centrífuga.

## Solución

Una centrífuga es un sistema mecatrónico compuesto por un servomotor con un ángulo de rotación  $q$  con respecto al eje  $z$  el cual está alineado con el eje de giro como se muestra en la figura 5.1. El plano  $xy$  está determinado por la regla de la mano derecha. La distancia del origen del sistema de referencia cartesiano al extremo final del rotor se representa por  $l_1$ . Una varilla de longitud  $l_2$  se encuentra soldada a la parte final de la flecha del rotor y mantiene un ángulo de inclinación constante  $\varphi$  con respecto a la horizontal (eje  $y$ ),  $l_{c2}$  representa el centro de masa de la varilla. El movimiento rotatorio de la centrífuga describe un círculo sobre el plano  $xy$ . La acción de la gravedad  $g$  se encuentra en dirección contraria al eje  $z$ .

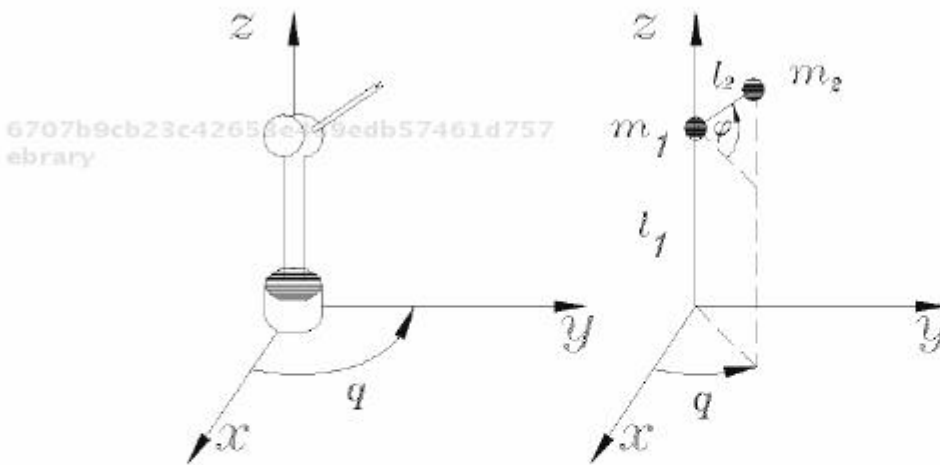


Figura 5.1 Centrífuga.



**Paso 1:** el modelo de cinemática directa está dado por la siguiente

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

te ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \cos(q) \\ l_2 \cos(\varphi) \operatorname{sen}(q) \\ l_1 + l_2 \operatorname{sen}(\varphi) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$



**Paso 2:** la cinemática diferencial se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}(q) \\ l_{c2} \cos(\varphi) \cos(q) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= (-l_{c2} \cos(\varphi) \operatorname{sen}(q) \dot{q})^2 + (l_{c2} \cos(\varphi) \cos(q) \dot{q})^2 = l_{c2}^2 \cos^2(\varphi) \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se toma el centro de masa  $l_{c2}$  como punto de referencia para finalidades del análisis dinámico. Por esto, ha sido substituida la longitud  $l$  por el centro de masa  $l_c$ .



**Paso 3:** el modelo de energía está determinado por la energía cinética y potencial

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} [m l_{c2}^2 \cos^2(\varphi) + I] \dot{q}^2$$

$$\mathcal{U}(q) = mgz = mg [l_1 + l_{c2} \operatorname{sen}(\varphi)] \quad (5.32)$$

El *lagrangiano* de la centrífuga está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \frac{1}{2} [m l_{c2}^2 \cos^2(\varphi) + I] \dot{q}^2 - mg [l_1 + l_{c2} \operatorname{sen}(\varphi)] \end{aligned} \quad (5.33)$$



**Paso 4:** las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el caso particular de la centrífuga, adquieren la forma de una ecuación escalar con la siguiente estructura:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(f_e, \dot{q}) \quad (5.34)$$

tomando en cuenta el lagrangiano de la centrífuga se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_{c2}^2 \cos(\varphi) + I] \dot{q} & (5.35) \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_{c2}^2 \operatorname{sen}(\varphi) + I] \ddot{q} \\ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que  $g(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = 0$ , debido a que la centrífuga describe un círculo sobre el plano horizontal  $xy$ , por lo que la energía potencial es una constante. El modelo dinámico de una centrífuga incluyendo el fenómeno de fricción está dado por:

$$\tau = [ml_{c2}^2 \operatorname{sen}(\varphi) + I] \ddot{q} + b\dot{q} + f_c \operatorname{signo}(\dot{q}) + f_e [1 - |\operatorname{signo}(\dot{q})|] \quad (5.36)$$



### ♣ ♣ Ejemplo 5.2

Obtener el modelo dinámico de un péndulo robot.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### Solución

A continuación se desarrollan los pasos necesarios para obtener el modelo dinámico de un péndulo-robot. La figura 5.2 describe un péndulo simple el cual está formado por un servomotor y una barra metálica de longitud  $l$ . El sistema de referencia se elige de tal forma que el eje  $z$  coincida con el eje de rotación del servo (es decir, en este caso perpendicular al plano de la hoja) y el plano  $xy$  queda determinado por la regla de la mano derecha. La acción de la gravedad  $g$  está dirigida en dirección del eje  $y$  negativo. El momento de inercia se denota por  $I$ , el centro de masa se representa como  $l_c$  y la masa del péndulo por  $m$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

ebrary



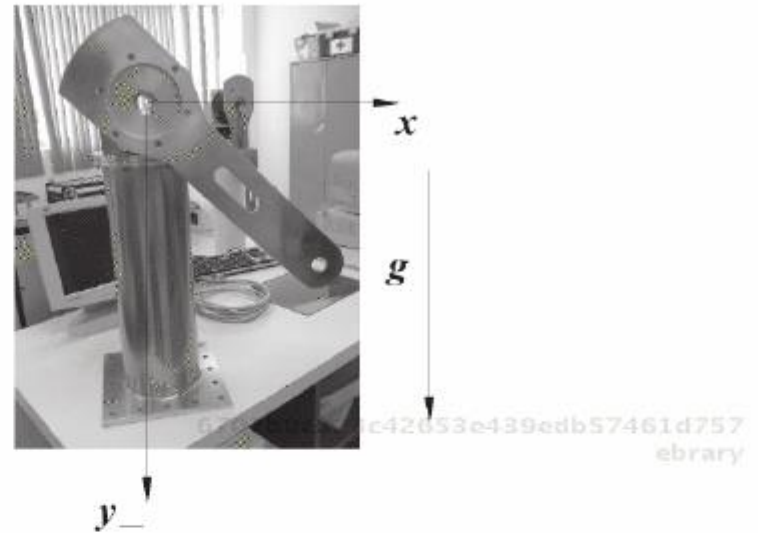


Figura 5.2 Péndulo-robot BUAP.



**Paso 1:** modelo de cinemática directa con respecto al centro de masa del péndulo-robot:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \sin(q) \\ -l_c \cos(q) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

La posición de casa fue tomada sobre el eje  $y$  negativo.



**Paso 2:** modelo de cinemática diferencial:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \cos(q) \dot{q} \\ l_c \sin(q) \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

La rapidez de traslación está dada como  $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$ . Obsérvese que  $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = l_c^2 \dot{q}^2$ .



**Paso 3:** modelo de energía: la energía del robot está compuesta de la energía cinética  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  y de la energía potencial  $\mathcal{U}(q)$ .

La energía cinética toma la siguiente forma:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$$

$$= \frac{1}{2} [m l_c^2 + I] \dot{q}^2$$

Por otro lado, la energía potencial  $U(q)$  tiene la siguiente forma:

$U(q) = mgh$ , (véase la figura 5.3) donde  $h = h_1 - h_2 = -l_c \cos(q) - (-l_c) = l_c(1 - \cos(q))$ :

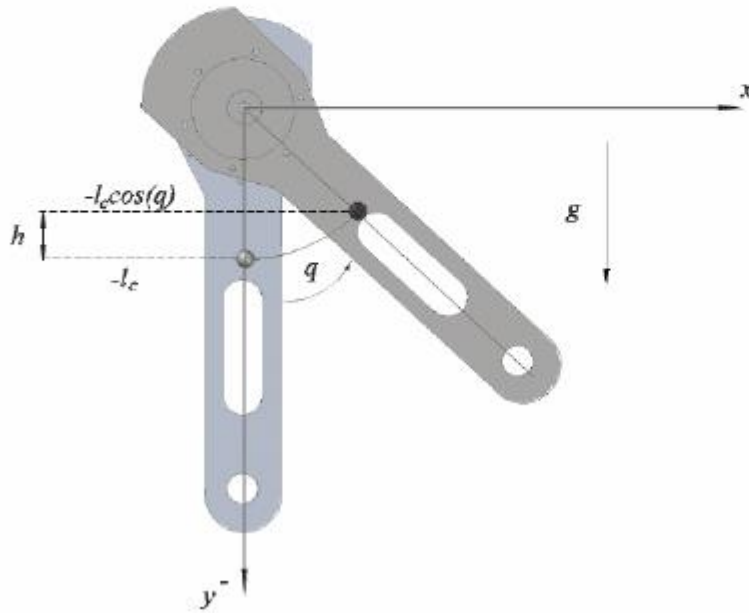
6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Figura 5.3 Desplazamiento del centro de masa  $l_c$  del péndulo.

$$U(q) = mgl_c h = mgl_c [1 - \cos(q)]$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El lagrangiano para el caso del péndulo está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - U(q) \\ &= \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 - mgl_c [1 - \cos(q)] \end{aligned} \quad (5.39)$$



**Paso 4:** las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange están dadas por la ecuación 5.5, para el caso particular del péndulo-robot adquieren la forma de una ecuación escalar con la siguiente estructura:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(f_e, \dot{q}) \quad (5.40)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary  
ALFAOMEGA

Tomando en cuenta el lagrangiano (5.39) se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 + I] \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 + I] \ddot{q} \\ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= mgl_c \sin(q) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Por lo tanto el modelo dinámico de un péndulo-robot incluyendo el fenómeno de fricción está dado por:

$$\tau = [ml_c^2 + I] \ddot{q} + mgl_c \sin(q) + b\dot{q} + f_c \text{signo}(\dot{q}) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q})|] \quad (5.42)$$

En la figura 5.4 se muestran los perfiles de posición  $q(t)$  y velocidad  $\dot{q}(t)$  del péndulo prototipo de transmisión directa de la figura 5.2 cuando se le aplica un par de la forma  $\tau = 1.5 \sin(t)$  Nm. Los resultados del péndulo pueden reproducirse usando el código fuente 5.1 y el código fuente 5.2 que se presentan aquí.

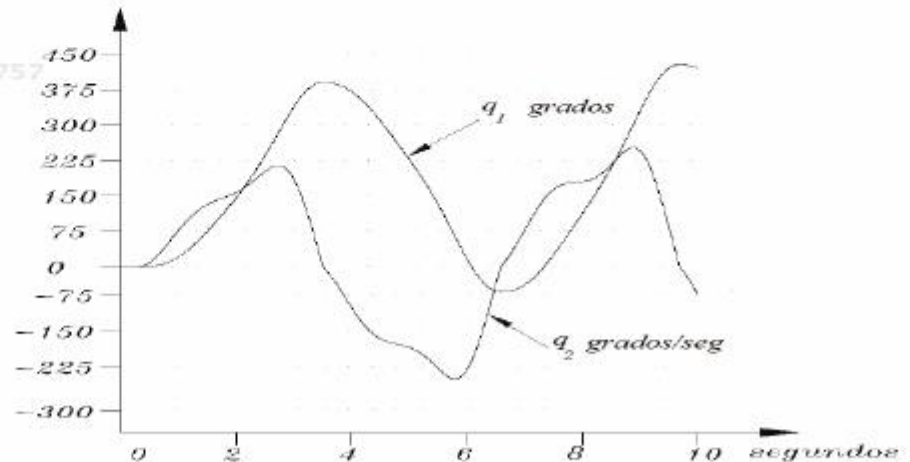


Figura 5.4 Respuesta del péndulo-robot.

if

## Código Fuente 5.1 Péndulo

```
%cap5_pendolo.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

## Péndulo

```
1 %
2 function xp =cap5_pendolo(t,x)
3 %vector de estados
4 q=x(1); %posición articular
5 qp=x(2); %velocidad articular
6 %parámetros del péndulo
7 m=5; %masa
8 lc=0.01; %centro de masa
9 g=9.81; %constante de aceleración gravitacional
10 b=0.17; %coeficiente de fricción viscosa
11 fc=0.45; %coeficiente de fricción de Coulomb
12 Ir=0.16; %momento de inercia del rotor
13 tau=1.5*sin(t); %par aplicado
14 %aceleración articular del péndulo
15 qpp=(tau-b*qp-fc*tanh(100000*qp)-m*g*lc*sin(q))/Ir;
16 %vector de salida
17 xp=[ qp ; %xp(1)=x(2) velocidad articular
18 qpp] ; %xp(2)=qpp aceleración articular
19 end
20 %
```



## Péndulo robot

El caso de estudio de un péndulo robot presentado en esta sección es uno de varios ejemplos que contiene el material complementario de la presente obra en el sitio web. Con la finalidad de facilitar el proceso de aprendizaje en dinámica de robots manipuladores, se ofrece al lector simular sistemas lineales y no lineales.

El proceso de simulación tiene la ventaja de poder predecir y explicar los fenómenos físicos de un sistema real. La simulación es diferente a la animación; en la primera se reproducen todos los fenómenos del sistema mecánico a través de su modelo dinámico. En cambio la animación es realizar el movimiento de un sistema mecánico a través de un medio electrónico donde no se reproduce la física del sistema. En el sitio web del libro se encuentran disponibles en código fuente para MatLab diversos sistemas mecatrónicos ampliamente documentados y modelados a través de su dinámica.

**if** Código Fuente 5.2 Simulación del péndulo

```

%cap5_simupendolo.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés

-----
Simulación del péndulo
-----
1 %
2   |   clc;
3   |   clear all;
4   |   close all;
5   |   %parámetros de simulación:
6   |   ti=0; %tiempo inicial
7   |   tf = 10; %tiempo final de simulación (segundos)
8   |   h=0.0025; %incremento de simulación
9   |   ts=ti:h:tf; %tiempo de simulación
10  |   opciones=odeset('RelTol',1e-3,'InitialStep',2.5e-3,'MaxStep',2.5e-3);
11  |   [t,x]=ode45('cap5_pendolo',ts,[0; 0],opciones);
12  |   x1=0.45*sin(x(:,1));
13  |   y1=-0.45*cos(x(:,1));
14  |   plot(t,(180/pi)*x(:,1),t,(180/pi)*x(:,2))
15 %

```

El fenómeno de fricción de Coulomb del péndulo contiene la función signo de la velocidad. Esta función es discontinua; para este caso la velocidad  $\dot{q} = 0$ . Este tipo de discontinuidades causa muchos problemas en aplicaciones de regulación o control de posición. Por lo tanto, no se recomienda utilizar la función signo que tiene implementada MatLab debido a que el proceso de integración numérica puede demorar hasta varios minutos.



**if** Código Fuente 5.3 Función signo

```
%signo.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

## Función signo

```
1 %
2 function y = signo(x)
3     if x>0
4         y=1;
5     elseif x<0
6         y=-1;
7     else
8         y=0;
9     end
10 %
```

Como una opción a esa problemática se recomienda la sustitución de la función signo por la función tangente hiperbólica con una pendiente de 90 grados, es decir  $\text{signo}(\dot{q}) \approx \tanh(100000\dot{q})$ . Otra opción es utilizar el código fuente 5.3 para implementar la función signo, ya que *suaviza* el efecto de la función signo en el proceso de integración numérica.


 Ejemplo 5.3

Obtener el modelo dinámico de un robot manipulador planar de 2 gdl.

**Solución**

Considérese el esquema del robot manipulador de 2 gdl que se muestra en la figura 5.5. Defínase un marco coordenado cartesiano cuyo origen se selecciona en el punto de intersección del eje de rotación de la articulación del hombro con el plano vertical  $xy$ .

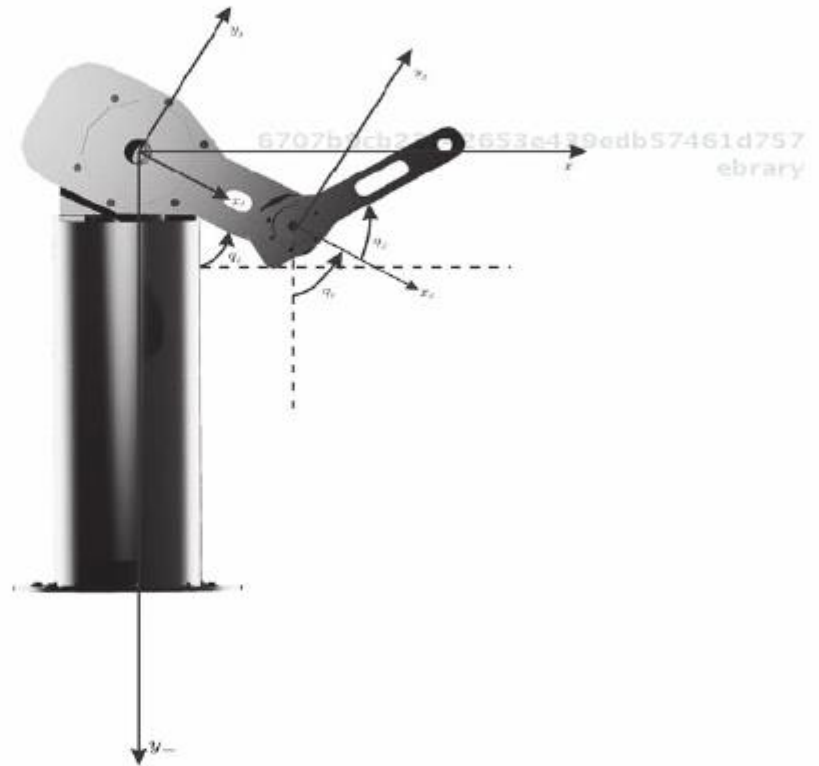


Figura 5.5 Robot manipulador de 2 gdl.

El significado de los símbolos que se presentan en la figura 5.5 se encuentra resumido en la tabla 5.1.



**Paso 1:** modelo de cinemática directa con respecto al centro de masa de cada eslabón:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

Tabla 5.1 Parámetros del robot de 2 gdl.

Eslabón	Significado	Notación
1 (Hombro)	Masa del eslabón 1	$m_1$
	Longitud del eslabón 1	$l_1$
	Inercia del eslabón 1	$I_1$
	Centro de masa del eslabón 1	$l_{c1}$
	Posición articular del eslabón 1	$q_1$
2 (Codo)	Masa del eslabón 2	$m_2$
	Longitud del eslabón 2	$l_2$
	Inercia del eslabón 2	$I_2$
	Centro de masa del eslabón 2	$l_{c2}$
	Posición articular del eslabón 2	$q_2$
	Aceleración debida a la gravedad	$g$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$



**Paso 2:** la cinemática diferencial permite obtener la velocidad lineal

con respecto al centro de masa de cada eslabón:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) & l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) & l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La rapidez al cuadrado de cada eslabón es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 &= [-l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1]^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \\
\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= [(l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 + \\
&\quad [(l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 \\
&= [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
&\quad 2 [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
&\quad (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2))^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
&\quad 2 (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&= [l_1^2 \cos^2(q_1) + l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
&\quad 2l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
&\quad [l_1^2 \sin^2(q_1) + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad 2l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&= [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2 [l_1 l_{c2} \cos(q_2) + l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned}$$

Aquí se han empleado las identidades trigonométricas  $\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) = 1$ ,  $\cos^2(q_1 + q_2) + \sin^2(q_1 + q_2) = 1$  y  $\cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$ .



**Paso 3:** la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del robot manipulador de dos grados de libertad está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \\
&\quad 2 [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \\
&= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2^2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned}$$

La energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  del centro de masa para ambos eslabones está dada como:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [(l_1 + l_{c2}) - (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2))]$$



**Paso 3:** el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}).$$



**Paso 4:** empleando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se obtienen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} &= -m_1 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Los pares aplicados del robot manipulador de 2 gdl incluyendo el fenómeno de fricción:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) + \\ &\quad b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{F}_1) \\ \tau_2 &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + \\ &\quad b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{F}_2). \end{aligned}$$

De los pares aplicados, agrupando términos de aceleración ( $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2$ ) y velocidades ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ ), la matriz de inercia está dada por:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 & m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$



Las componentes de la matriz de inercia son:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\ m_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_{21} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2. \end{aligned}$$

La matriz de fuerza centrípeta y de Coriolis toma la forma:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las componentes de la matriz de Coriolis son:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ c_{22} &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de fuerzas centrípeta y de Coriolis no es única, depende de la forma de agrupar los términos de las expresiones correspondientes a los pares  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Otras posibilidades para la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  son las siguientes dos:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sin embargo, el vector  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  sí es único para un robot específico.

El vector de pares gravitacionales está dado como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \sin(q_1) + m_2 l_1 \sin(q_1) + m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

La fricción presente en el robot manipulador es modelada como una combinación lineal de las fricciones viscosa, Coulomb y estática:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{F}_1) \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{F}_2) \end{bmatrix}$$

donde  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $f_{c1}$ ,  $f_{c2}$ ,  $\bar{f}_1$  y  $\bar{f}_2$  son los coeficientes de fricción viscosa, de Coulomb y fricción estática de la articulación del hombro y codo, respectivamente. Además  $\text{sat}(x; \mu)$  significa

$$\text{sat}(x; \mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } x > \mu \\ x & \text{si } -\mu \leq x \leq \mu \\ -\mu & \text{si } x < -\mu \end{cases}$$

La matriz de inercia (5.43) también puede ser obtenida directamente de la energía cinética (5.43) la cual satisface  $\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2^2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + & m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 \\ m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) & I_2 + m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix}}_{M(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El par gravitacional puede ser obtenido de la energía potencial:

$$\begin{aligned} g(q) &= \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} [m_1 g l_{c1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [(l_1 + l_{c2}) - (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2))]] \\ &= g \begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \text{sen}(q_1) + m_2 l_1 \text{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \\ l_{c2} m_2 \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La estructura del modelo dinámico es importante. Sin embargo, para propósitos prácticos es necesario contar con un modelo numérico. Para propósitos de simulación de un robot de 2 gdl, considérense las siguientes matrices de inercia y fuerzas centrípetas y de Coriolis, respectivamente:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} 3.117 + 0.2 \cos(q(2)) & 0.108 + 0.1 \cos(q(2)) \\ 0.108 + 0.1 \cos(q(2)) & 0 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -0.2 \text{sen}(q(2)) \dot{q}_2 & -0.1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ 0.1 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El par gravitacional y de fricción se encuentran dados por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 39.3 \operatorname{sen}(q_1) + 1.95 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ 1.95 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 1.86\dot{q}_1 + 1.93\operatorname{signo}(\dot{q}_1) \\ 0.16\dot{q}_2 + 0.3\operatorname{signo}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

En la simulación no será tomada en cuenta la fricción estática, es complicado incorporarla en un proceso de implementación práctica, por lo que sólo se incluye la fricción viscosa y de Coulomb.

Los pares aplicados a las articulaciones del robot tienen un perfil suave que hacen que se muevan los eslabones dentro de su rango de operación:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - e^{-0.8t})32 + 56 \operatorname{sen}(16t + 0.1) + 12 \operatorname{sen}(20t + 0.15) \\ (1 - e^{-1.8t})1.2 + 8 \operatorname{sen}(26t + 0.08) + 2 \operatorname{sen}(12t + 0.34) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

En la figura 5.6 se muestra la evolución en el tiempo de las posiciones  $q_1$  y  $q_2$  de los eslabones del robot como respuesta a los pares de la ecuación (5.44). El movimiento inicia del reposo, el régimen transitorio es suave, evitando movimientos abruptos.

El código fuente 5.4 y el código fuente 5.5 son programas para llevar a cabo la simulación del robot manipulador de 2 gdl.

El tiempo de simulación es de 10 segundos con pasos de integración de 0.0025 segundos. La fricción de Coulomb fue implementada con la función signo que se encuentra incluida en el código fuente 5.3 del ejemplo 5.2.

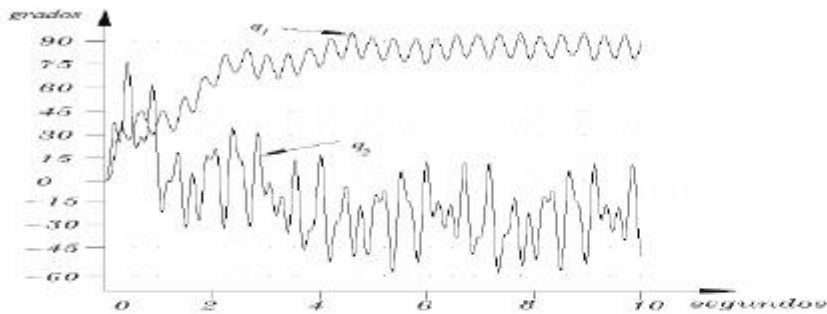


Figura 5.6 Respuesta de un robot planar de 2 gdl.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

if

### Código Fuente 5.4 Simulador del robot planar de 2 gdl

```
%cap5_simurobot2gdl.m   Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

#### Simulador del robot planar de 2 gdl

```
1  %
2  |   clc;
3  |   clear all;
4  |   close all;
5  |   %parámetros de simulación:
6  |   ti=0; %tiempo inicial
7  |   h=0.0025; %incremento del tiempo
8  |   tf = 10; %tiempo final de simulación
9  |   ts=ti:h:tf; %tiempo de simulación
10 |   opciones=odeset('RelTol',1e-3,'InitialStep',2.5e-3,'MaxStep',2.5e-3);
11 |   [t,x]=ode45('cap5_robot2gdl',ts,[0; 0; 0; 0],opciones);
12 |   plot(t,(180/pi)*x(:,1),t,(180/pi)*x(:,2))
13 |   %
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



### Robot de 2 gdl

El estudio de robots manipuladores a través de simuladores subsana la carencia de contar con un robot real. El modelo dinámico permite reproducir todos los fenómenos físicos del robot, por lo que facilita el estudio y análisis de su comportamiento

En el sitio web del libro se encuentran implementados varios robots manipuladores en lenguaje MatLab que le ofrecen al lector una herramienta potente y versátil para entender los aspectos cualitativos de un robot manipulador.

### if Código Fuente 5.5 Robot planar de 2 gdl

```
%cap5_robot2gdl.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

#### Robot planar de 2 gdl

```
1 %
2 %Robot de transmisión directa de 2GDL
3 function xp = cap5_robot2gdl(t,x)
4 q = [x(1); x(2)]; %vector de posición articular
5 %vector de velocidad articular
6 qp = [x(3); x(4)];
7 %Modelo dinámico del robot
8 %matriz de inercia
9 M = [3.117+0.2*cos(q(2)) 0.108+0.1*cos(q(2));
10      0.108+0.1*cos(q(2)) 0.108 ];
11 %Matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis
12 C = [-0.2*sin(q(2))*qp(2) -0.1*sin(q(2))*qp(2);
13      0.1*sin(q(2))*qp(1) 0.0 ];
14 %Vector de pares de gravitacionales
15 par_grav = [39.3*sin(q(1))+1.95*sin(q(1)+q(2));
16             1.95*sin(q(1)+q(2)) ];
17 %vector de pares de fricción viscosa
18 fr = [1.86*qp(1)+1.93*signo(qp(1));
19      0.16*qp(2)+0.3*signo(qp(2))];
20 tau=[(1-exp(-0.8*t))*32.0+ 56*sin(16*t+0.1) + 12*sin(20*t+0.15) ;
21      (1-exp(-1.8*t))*1.2+ 8*sin(26*t+0.08)+2*sin(12*t+0.34) ];
22 %vector de aceleración articular
23 q2p = inv(M)*(tau-C*qp- par_grav-fr);
24 %vector de salida
25 xp = [qp(1); qp(2); q2p(1); q2p(2)];
26 %
```





## 5.4 Modelo dinámico cartesiano

## 5.4 Modelo dinámico cartesiano

El modelo dinámico en variables de estado cartesiano define su comportamiento en su espacio operativo o espacio de tareas. Considérense las coordenadas cartesianas  $\chi = [x \ y \ z]^T$ , entonces la cinemática diferencial y la aceleración articular se encuentran relacionadas por:

$$\dot{\chi} = J(q)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad (5.45)$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{\chi} + \left[ \frac{d}{dt} J^{-1}(q) \right] \dot{\chi} \quad (5.46)$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{\chi} - J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad (5.47)$$

Sustituyendo las relaciones (5.45) y (5.47) en el modelo dinámico articular se tiene la transformación del modelo dinámico en variables articulares o generalizadas a variables cartesianas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau &= M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \\ &= M(q) [J^{-1}(q)\ddot{\chi} - J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)\dot{\chi}] + \\ &\quad C(q, \dot{q})J^{-1}(q)\dot{\chi} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \\ &= M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)] \dot{\chi} + \\ &\quad g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \end{aligned} \quad (5.48)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Empleando el modelo de potencia del robot manipulador y las ecuaciones (5.45) y (5.48) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}^T \tau &= \dot{q}^T [M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)] \dot{\chi}] + \\ &\quad \dot{q}^T [g(q) + f_f(\dot{q}, f_e)] \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^T J^{-T}(q) \tau &= \dot{\chi}^T J^{-T}(q) [M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)] \dot{\chi}] \\ &\quad + \dot{\chi}^T J^{-T}(q) [g(q) + f_f(\dot{q}, f_e)] \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} &= \dot{\chi}^T (J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [J^{-T}(q)C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)] \dot{\chi}) + \\ &\quad \dot{\chi}^T (J^{-T}(q)g(q) + J^{-T}(q)f_f(\dot{q}, f_e)) \end{aligned} \quad (5.51)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Relacionando el lado izquierdo y derecho del signo igual de la ecuación (5.51) se tiene la ecuación fundamental que desarrolló Arimoto en 1981 para sentar las bases del control cartesiano.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_\chi \quad (5.52)$$

Por tanto, el modelo dinámico cartesiano se encuentra dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\chi &= \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\boldsymbol{\chi}} + [\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})] \dot{\boldsymbol{\chi}} \\ &\quad + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$= \mathbf{M}_\chi \ddot{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{C}_\chi \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{g}_\chi + \mathbf{f}_{e\chi} \quad (5.54)$$

La ecuación (5.54) representa la dinámica no lineal de un robot manipulador en el espacio de variables cartesianas, donde la matriz de inercia cartesiana  $\mathbf{M}_\chi$  y la matriz de fuerzas centripetas y de Coriolis cartesiana  $\mathbf{C}_\chi$  tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_\chi = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (5.55)$$

$$\mathbf{C}_\chi = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\chi &= \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) - \mathbf{M}_\chi \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_\chi &= \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{f}_{e\chi} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.58)$$

La derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia cartesiana tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_\chi &= \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \right] \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) + \\ &\quad \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Por otro lado, se sabe que:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) &= I \Rightarrow \frac{d}{dt} [J(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})] = \dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) + J(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} J^{-1}(\mathbf{q}) \right] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \left[ \frac{d}{dt} J^{-1}(\mathbf{q}) \right] &= -J^{-1}(\mathbf{q})\dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

También se cumple que:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q})^T J^{-T}(\mathbf{q}) &= I \Rightarrow \frac{d}{dt} [J(\mathbf{q})^T J^{-T}(\mathbf{q})] = \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] J^{-T}(\mathbf{q}) + J(\mathbf{q})^T \left[ \frac{d}{dt} J^{-T}(\mathbf{q}) \right] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \left[ \frac{d}{dt} J^{-T}(\mathbf{q}) \right] &= -J^{-T}(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] J^{-T}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Por lo tanto, la ecuación (5.59) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= -J^{-T}(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] \underbrace{J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})}_{M_x} + J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \\ &\quad - \underbrace{J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})}_{M_x} \dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\dot{M}_x = -J^{-T} \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] M_x + J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x \dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \quad (5.61)$$

Por otro lado, realizando la siguiente suma de matrices de fuerzas centrípetas y de Coriolis cartesianas se tiene que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\begin{aligned} C_x + C_x^T &= J^{-T}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x \dot{J}(\mathbf{q})(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \\ &\quad + J^{-T}(\mathbf{q})C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})J^{-1}(\mathbf{q}) - J^{-T}(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] M_x \\ &= J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x \dot{J}(\mathbf{q})(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - J^{-T}(\mathbf{q}) \left[ \frac{d}{dt} J^T(\mathbf{q}) \right] M_x \end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la propiedad del modelo dinámico en coordenadas articulares  $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

Por lo tanto se cumple que la derivada temporal de la matriz cartesiana

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

de inercias es una matriz simétrica:

$$\dot{M}_X = C_X + C_X^T \quad (5.62)$$



#### 5.4.1 Propiedades del modelo dinámico cartesiano

El modelo dinámico cartesiano de un robot manipulador

$$f_X = M_X \ddot{X} + C_X \dot{X} + g_X + f_e X$$

tiene las siguientes propiedades matemáticas:



**Hipótesis:** supóngase que la matriz jacobiana del robot  $J(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es de rango completo, es decir, existe la inversa  $J^{-1}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces la matriz cartesiana  $M_X = J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q)$  es una matriz definida positiva, puesto que  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Por lo tanto,  $M_X > 0$ , y simétrica  $M_X = M_X^T$ .



La matriz de inercia  $M_X$  satisface:

$$\lambda_{M_X}^{\min} I \leq M_X \leq \lambda_{M_X}^{\max} I \quad (5.63)$$

donde  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad,  $\lambda_{M_X}^{\max}$  y  $\lambda_{M_X}^{\min}$  representan los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia, respectivamente.



La derivada temporal de la matriz cartesiana  $M_X$  satisface lo siguiente:  $\dot{M}_X = C_X + C_X^T$ , entonces se cumple la propiedad de antisimetría del modelo dinámico cartesiano.



#### Corolario 5.1 Propiedad de antisimetría



Si  $\dot{M}_X = C_X + C_X^T$ , entonces

$$\frac{1}{2} \dot{X}^T \left[ \dot{M}_X - 2C_X \right] \dot{X} \equiv 0.$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T [\dot{M}_x - 2C_x] \dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T [C_x + C_x^T - 2C_x] \dot{\mathbf{x}} \\
 &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T [C_x^T - C_x] \dot{\mathbf{x}} \\
 &= -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T [C_x^T - C_x]^T \dot{\mathbf{x}}
 \end{aligned}$$

puesto que  $[C_x^T - C_x] = -[C_x^T - C_x]^T$ , entonces la matriz  $[C_x^T - C_x]$  es una matriz antisimétrica, por lo tanto  $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T [C_x^T - C_x] \dot{\mathbf{x}} \equiv 0$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary**5.5 Identificación paramétrica**

El modelo dinámico de un robot manipulador contiene en su estructura matemática parámetros tales como centros de gravedad, masas, momentos de inercia y coeficientes de fricción. Estos parámetros generalmente son desconocidos; este es el caso de la mayoría de los robots comerciales donde el fabricante no proporciona sus valores nominales. Si bien existen herramientas de la teoría de control como esquemas adaptables y controladores robustos que permiten tolerar errores en los parámetros dinámicos, el conocimiento de éstos es crucial para la mayoría de los esquemas basados en el modelo dinámico del robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

El problema de identificación paramétrica ha conducido a derivar varios esquemas de identificación que se han convertido en una herramienta atractiva para determinar los parámetros dinámicos de robots manipuladores, sobre todo cuando existe dificultad para medirlos directamente. Sin embargo, la naturaleza no lineal del modelo dinámico de robots manipuladores hace que la tarea de identificación paramétrica no sea trivial.

Es de particular relevancia para los esquemas de identificación paramétrica y de control adaptable expresar el modelo dinámico no lineal del robot manipulador como el producto de una matriz de regresión compuesta de funciones no lineales (dependientes de la posición, velocidad y aceleración

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary



articular) y un vector de parámetros constantes dependiente de masas, momentos de inercias, distancias a centros de masa y coeficientes de fricción.

Los esquemas de identificación que se describirán en esta sección son sistemas de identificación que pertenecen a la filosofía de identificación híbrida, es decir el modelo de regresión es formulado en tiempo continuo mientras que la identificación se realiza a través de un estimador recursivo llamado mínimos cuadrados, el cual se utiliza ampliamente en la literatura debido a su sencillez y a su propiedad de recursividad, atributo que lo hace atractivo para su implementación.

Los primeros trabajos sobre identificación paramétrica de robots manipuladores explotando esa propiedad, requerían medir la aceleración articular dentro del modelo de regresión. Esto condujo al modelo de regresión dinámico, también conocido como modelo de regresión diferencial. El primer esquema de identificación que relaja la medición de la aceleración articular fue propuesto por [Hsu *et al.*, 1987] al introducir el modelo dinámico filtrado. Desde entonces se han sugerido diversos esquemas de identificación en la literatura.

Los esquemas de identificación basados en el modelo dinámico filtrado, energía y potencia filtrada no dependen de la aceleración articular. Sin embargo, el modelo de la energía involucra una integral que causa problemas en frecuencia cero. El modelo de potencia filtrada supera este inconveniente ya que contiene un filtro de primer orden estable estrictamente propio con ganancia unitaria en frecuencia cero, lo que evita problemas potenciales propios de la ganancia infinita del integrador en frecuencias cercanas a cero.

Otra característica en común entre estos esquemas, es que siempre es posible agrupar de manera conveniente los parámetros de los modelos dinámico filtrado, energía y potencia filtrada, de tal forma que se obtenga el mismo vector de parámetros para ambos esquemas. Sin embargo,

la principal ventaja que presentan los modelos de la energía y potencia filtrada sobre el modelo dinámico filtrado es que el primero contiene un error de predicción escalar, mientras que el dinámico filtrado conduce a un error de predicción vectorial.



### 5.5.1 Mínimos cuadrados

Como preámbulo a la descripción de los esquemas de regresión lineal para resolver el problema de identificación paramétrica en robótica, primero se discutirá el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo. Esta técnica es particularmente simple si el modelo tiene la propiedad de linealidad en los parámetros del modelo. El método de mínimos cuadrados es un esquema estándar que aproxima la solución de sistemas sobre determinados, por ejemplo cuando hay más variables incógnitas que ecuaciones. Mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados de los errores; un error es la diferencia entre un valor observado y el valor proporcionado por el modelo matemático (robot).

El método de mínimos cuadrados fue descrito por Carl Friedrich Gauss en 1794, y el objetivo del problema de mínimos cuadrados consiste en encontrar los parámetros del modelo que describe la planta física (por ejemplo un robot manipulador) a través de un simple conjunto de datos que contienen observaciones o mediciones. El método de mínimos cuadrados encuentra su óptimo cuando la suma de errores cuadrados alcanza el mínimo. Un error se define como la diferencia entre el valor de la variable dependiente (el vector de parámetros) y el valor del modelo. Este resultado se conoce como *teorema de Gauss-Markov*.

El algoritmo recursivo de mínimos cuadrados se describe a continuación. Considérese el siguiente modelo de regresión:

$$\mathbf{y}(k) = \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta} \quad (5.64)$$

donde  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^n$  representa un vector de salida o respuesta del modelo,  $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la matriz de regresión compuesta por mediciones de fun-

### Gauss (1777-1855)



Johann Friedrich Carl Gauss nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, hoy Alemania. Desde muy joven demostró ser una persona con un alto coeficiente intelectual aprendiendo diversas lenguas clásicas, literatura, filosofía y matemáticas superiores. Cuando Gauss tenía 17 años desarrolló las bases de análisis del método de mínimos cuadrados. A sus 18 años hizo un descubrimiento que sería clave en el futuro de las matemáticas encontró: la fórmula para construir el heptadecágono o polígono regular de 17 lados con regla y compás. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Helmstedt defendiendo su tesis en un examen oral que fue presidido por el mejor matemático germano de la época, Johann Friedrich Pfaff. Gauss demostró que toda función algebraica racional puede descomponerse en factores de primer o segundo grado con coeficientes reales (ni más ni menos que el sueño del gran Euler). Murió el 23 de febrero de 1855.

ciones conocidas y  $\theta \in \mathbb{R}^p$  es el vector de parámetros desconocidos. El modelo (5.64) es indexado por la variable  $k$ , la cual denota el tiempo discreto, se asume que el conjunto de índices  $\tau(k)$ ,  $\Psi(k)$  forman un conjunto discreto.

El vector de parámetros desconocidos  $\theta$  puede ser estimado por minimizar la siguiente función de costo:

$$J_k(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \theta]^2 + \frac{1}{2} [\theta - \hat{\theta}(0)]^T P^{-1}(0) [\theta - \hat{\theta}(0)] \quad (5.65)$$

donde  $P(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la condición inicial de la matriz de covarianza  $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la cual es una matriz definida positiva y  $\hat{\theta}(0)$  representa el valor inicial del vector estimado.

La ecuación (5.65) representa la suma de los cuadrados de los errores  $e(k) = \mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \theta$ , es decir, la diferencia entre la observación actual  $\mathbf{y}(k)$  y el valor estimado por el modelo con vector de parámetros  $\theta$ . El segundo término del lado derecho de la ecuación (5.65) ha sido incluido para tomar en cuenta las condiciones iniciales.

La función de costo (5.65) se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_k(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \hat{\theta}]^T [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \hat{\theta}] + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T P^{-1}(0) \hat{\theta} + \\ &\quad \frac{1}{2} [-\hat{\theta}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\theta} - \hat{\theta}^T P^{-1}(0) \hat{\theta}(0) + \hat{\theta}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\theta}(0)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - (\Psi(k)^T \hat{\theta})^T \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}(k)^T \Psi(k)^T \hat{\theta}] + \\ &\quad (\Psi^T(k) \hat{\theta})^T \Psi^T(k) \hat{\theta} + \frac{1}{2} [\hat{\theta}^T P^{-1}(0) \hat{\theta} - 2\hat{\theta}^T P^{-1}(0) \hat{\theta}(0)] + \\ &\quad \frac{1}{2} \hat{\theta}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\theta}(0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - 2\hat{\theta}^T \Psi(k) \mathbf{y}(k) + \hat{\theta}^T \Psi(k) \Psi^T(k) \hat{\theta}] + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[\hat{\theta}^T P^{-1}(0)\hat{\theta} - 2\hat{\theta}^T P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \hat{\theta}^T(0)P^{-1}(0)\hat{\theta}(0)] \quad (5.67)$$

Derivando la ecuación (5.67) con respecto a  $\hat{\theta}$  e igualando a cero se tiene que:

$$\frac{\partial J_k(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = \sum_{k=1}^n [-\Psi(k)\mathbf{y}(k) + \Psi^T(k)\Psi^T(k)\hat{\theta}] + P^{-1}(0)\hat{\theta} - P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) = 0$$

Por lo tanto el vector estimado de parámetros  $\hat{\theta}$  se obtiene:

$$\hat{\theta} = [P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\Psi^T(k)]^{-1} [P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\mathbf{y}(k)] \quad (5.68)$$

La ecuación (5.68) se conoce como algoritmo de mínimos cuadrados estándar.



### 5.5.2 Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

El proceso para obtener la ecuación de mínimos cuadrados estándar (5.68) se describe a continuación:

Sea:

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\Psi^T(k) \quad (5.69)$$

$$= \underbrace{[P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\Psi^T(k)]}_{P^{-1}(k-1)} + \Psi(n)\Psi^T(n)$$

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \Psi(n)\Psi^T(n) \quad (5.70)$$

Por tanto el vector de parámetros estimados obtiene la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(k) = P(k) [P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\mathbf{y}(k)] \quad (5.71)$$

### Mínimos cuadrados

El astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió el 1 de enero de 1801 el asteroide Ceres y fue capaz de seguir su trayectoria durante 40 días antes de que se perdiera en el firmamento. Las observaciones astronómicas de Giuseppe y el método de Gauss fueron utilizados en análisis de regresión por el astrónomo húngaro Franz Xaver Von Zach para determinar la localización del asteroide Ceres después de emerger más allá del sol. No fue necesario resolver las ecuaciones de movimiento planetario de Kepler. Los resultados de predicción de la relocalización de Ceres del astrónomo Franz Xaver fueron exitosos. Gauss publicó el método de mínimos cuadrados hasta 1809, en el volumen dos de su trabajo sobre mecánica celeste. En 1829, Gauss perfeccionó su método y establece el esquema de mínimos cuadrados para análisis de regresión en un sentido óptimo para un sistema lineal donde los errores tienen una media cero, descorrelacionados y de igual variancia. El método de mínimos cuadrados creció en los campos de la astronomía, debido a la descripción exacta con que este método explica el comportamiento de los cuerpos celestes. En forma independiente, mínimos cuadrados también fue abordado en 1805 por el matemático francés Adrien-Marie Legendre quien lo publicó antes que Gauss y en 1808 por el científico norteamericano Robert Adrain en 1808.



$$= P(k) \left[ \underbrace{P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\mathbf{y}(k)}_{\varpi} \right] + \Psi(n)\mathbf{y}(n) \quad (5.72)$$

$$\hat{\theta}(k-1) = P(k-1) \left[ \underbrace{P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\mathbf{y}(k)}_{\varpi} \right] \quad (5.73)$$

La ecuación para el vector de parámetros estimados (5.71) se divide en dos componentes: los términos en la sumatoria desde  $k = 1$  hasta  $n - 1$  más el último término  $\Psi(n)\mathbf{y}(n)$ , resulta la ecuación (5.72). Por esto el vector de parámetros estimados hasta  $n - 1$  muestras es la expresión (5.73). Ahora bien, relacionando los términos  $\varpi$  de las expresiones (5.72) y (5.73), se obtiene:

$$\hat{\theta}(k) = P(k) [P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \Psi(n)\mathbf{y}(n)] \quad (5.74)$$

$$= P(k) [(P^{-1}(k) - \Psi(n)\Psi(n)^T)] \hat{\theta}(k-1) + \Psi(n)\mathbf{y}(n) \quad (5.75)$$

donde se ha empleado la ecuación (5.70) en la ecuación (5.74) para resultar (5.75).

La expresión para el vector de parámetros estimados queda de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\Psi(k) [\mathbf{y}(k) - \Psi^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (5.76)$$

Considérese el siguiente lema de inversión de matrices:

$$[A + BC]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[I + CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} \quad (5.77)$$

$$\text{donde } A = P^{-1}(k) \quad B = \Psi(k) \quad C = \Psi^T(k)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (5.70), se tiene que:

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1} \Psi(k)^T P(k-1)$$

Además,



$$\begin{aligned}
 P(k)\Psi(k) &= P(k-1)\Psi(k) - P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1} \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k) \\
 &= P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1} [I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k) - \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k)] \\
 &= P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

Por lo tanto, las ecuaciones recursivas del algoritmo de mínimos cuadrados se encuentran expresadas como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + P(k-1) \Psi(k) [I + \Psi(k-1)^T P(k-1) \Psi(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) \tag{5.79}$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1) \Psi(k) [I + \Psi(k)^T P(k-1) \Psi(k)]^{-1} \Psi(k)^T P(k-1) \tag{5.80}$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \tag{5.81}$$

Aquí  $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  se conoce como la matriz de covarianza y  $\mathbf{e}(k) \in \mathbb{R}^n$  es el error de predicción.

Una propiedad importante para el algoritmo (5.79)-(5.80) es la siguiente:

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) - \boldsymbol{\theta}\| \leq \frac{\lambda_{\max}\{P(k)\}}{\lambda_{\min}\{P(0)\}} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) - \boldsymbol{\theta}\|; \quad k \geq 1 \tag{5.82}$$

donde  $\lambda_{\max}\{P(k)\}$  y  $\lambda_{\min}\{P(0)\}$  son los

El algoritmo de mínimos cuadrados puede identificar cualquier modelo matemático, no depende de la naturaleza del sistema, la única condición que debe satisfacer el sistema es que pueda ser expresado como un regresor lineal con respecto a sus parámetros. Es decir, puede identificar:



Sistemas continuos (dinámicos y pasivos).



Sistemas lineales.



Sistemas no lineales.



Sistemas discretos.



No depende del periodo de muestreo, inclusive puede ser aperiódico.

#### ♣ Ejemplo 5.4

Proponga modelos matemáticos de sistemas que cumplan con la condición de regresión lineal.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

#### Solución

Ejemplos de sistemas que sí cumplen con la condición de linealidad en los parámetros (regresión lineal) son los siguientes:

$$y = \alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t) = [\operatorname{sen}(t) \quad \cos(t)] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$y = \alpha t^2 + \beta \sqrt{t} = [t^2 \quad \sqrt{t}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \alpha \operatorname{sen}(x) + \beta x^2 = [\operatorname{sen}(x) \quad x^2] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

### ♣ Ejemplo 5.5

Proponga modelos matemáticos de sistemas que no cumplan con la condición de regresión lineal.

### Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Ejemplos de sistemas que no cumplen con la condición de regresión lineal en los parámetros:

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{sen}(\alpha t) + \beta \cos(t) \\y &= e^{-\alpha t} + \cos(\beta t) \\ \dot{x} &= -\operatorname{sen}(\cos(\beta x)) + \frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{1 + \operatorname{sen}(\alpha t)}\end{aligned}$$



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Cuando el sistema es escalar, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo adquiere la siguiente forma:

$$\mathbf{y}(k) = \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta} \quad (5.83)$$

donde  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}$  representa un vector de salida o respuesta del modelo,  $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la matriz de regresión compuesta por mediciones de funciones conocidas y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ .

Las ecuaciones del algoritmo de mínimos cuadrados recursivo para el caso escalar son:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k-1) \frac{\Psi(k) e(k)}{1 + \Psi(k-1)^T P(k-1) \Psi(k)} \quad (5.84)$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1) \frac{\Psi(k) \Psi(k)^T P(k-1)}{1 + \Psi(k-1)^T P(k-1) \Psi(k)} \quad (5.85)$$

$$e(k) = y(k) - \Psi(k)^T \hat{\theta}(k-1) \quad (5.86)$$

donde  $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es la matriz de covarianza y  $e(k) \in \mathbb{R}$  es el error de predicción.

### ♣ ♣ Ejemplo 5.6

Implementar y simular el proceso de identificación paramétrica de mínimos cuadrados para el siguiente sistema:

$$y = a \sin(t) + b \cos(t)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , la variable del tiempo se representa por  $t \in \mathbb{R}_+$ , la respuesta del sistema es  $y \in \mathbb{R}$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### Solución

El código fuente 5.6 contiene el programa del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (véanse las líneas 19 a 27). El sistema a identificar  $y = a \sin(t) + b \cos(t)$  está implementado en el mismo programa (línea 11). La matriz de covarianza del algoritmo de mínimos cuadrados está inicializada como  $P(0) = 10^{10}$ .

El tiempo de simulación fue de 10 segundos, con intervalos de integración de 2.5 mseg. La condición inicial del vector de estimación  $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$ . La condición inicial del parámetro de estimación puede ser diferente de cero, ya que no depende de la condición inicial.

if

## Código Fuente 5.6 Algoritmo de mínimos cuadrados

```
%cap5_mc.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

## Algoritmo de mínimos cuadrados

```
1 %
2   clc;
3   clear all;
4   close all;
5   %vector columna de tiempo
6   t=[0:0.0025:10]';
7   %Parámetro del sistema
8   a=10.34; b=4.85;
9   %Sistema a identificar
10  y=a*sin(t)+b*cos(t);
11  %Algoritmo de mínimos cuadrados recursivo
12  p=2; %Orden del sistema número de parámetros a identificar
13  theta_e=[1;p]'; %vector columna de parámetros
14  Fi=[1;p]'; %vector columna de observaciones
15  theta_e(1)=0; %Condición inicial del vector de parámetros.
16  P=eye(p,p)*10e10; %Matriz de covarianza P
17  n=size(t);
18  for k=1:n
19  %Se forma el vector de observaciones
20  Fi1(1)=sin(t(k));
21  Fi2(2)=cos(t(k));
22  Fi=[ Fi1(1), Fi2(2) ]'; %Vector de observaciones
23  e=y(k)-theta_e'*Fi; %error de regresión
24  theta_e= theta_e+ (P*Fi*e)/(1+Fi'*P*Fi); %vector estimado
25  P=P-(P*Fi*Fi'*P)/(1+Fi'*P*Fi); %Matriz de covarianza
26  end
27  theta_e %Resultado de la identificación
28 %
```



## Mínimos cuadrados

Mínimos cuadrados es una excelente técnica de identificación paramétrica. Su estudio y entendimiento se facilita a través de la presentación de ejemplos didácticos documentados en todos sus aspectos teóricos y prácticos.

En el sitio web del libro se encuentran disponibles varios ejemplos de identificación de sistemas; implementados en lenguaje MatLab.



El vector de parámetros estimado  $\hat{\theta}$  está expresado en la salida del programa como  $\hat{\theta} = [10,34, 4,85]^T$ .

Obsérvese que a pesar de la naturaleza del sistema continuo  $y = a \sin(t) + b \cos(t)$ , el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo identifica los parámetros exactos. De hecho, la identificación se alcanza en 25 msec, es decir con 10 pasos de iteración es suficiente para identificar completamente los parámetros.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### 5.5.3 Modelo de regresión dinámico filtrado

La propiedad (5.87) permite expresar al modelo dinámico no lineal (5.8) del robot manipulador como el producto de una matriz de regresión  $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  compuesta de funciones no lineales dependientes de la posición, velocidad y aceleración articular con el vector de parámetros desconocidos  $\theta$ . Esto conduce al modelo de regresión dinámico también conocido como modelo de regresión diferencial. El modelo de regresión dinámico (5.87) requiere la aceleración articular  $\ddot{\mathbf{q}}$  para calcular los elementos de la matriz  $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ . Para vencer este inconveniente fue propuesto el modelo de regresión dinámico filtrado [Hsu *et al.*, 1987; Slotine y Li, 1987].

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

$$\tau_f = Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\theta \quad (5.87)$$

La idea clave es filtrar de ambos lados del modelo de regresión dinámico (5.88) por un filtro estable estrictamente propio. Sin pérdida de generalidad, considérese un filtro de primer orden dado por la función de transferencia  $f(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$  donde  $\lambda$  es una constante positiva y  $s$  representa el operador diferencial:

$$\tau_f = f(s)\tau \quad (5.88)$$

$$Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = f(s)Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (5.89)$$

Debido a la introducción de los filtros, se evita el requerimiento de la aceleración articular  $\ddot{\mathbf{q}}$  dentro de la matriz de regresión  $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

Con la anterior notación y con referencia al algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (5.79)-(5.80), el error de predicción correspondiente al modelo de regresión dinámico filtrado del robot manipulador toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\tau_{f(k)}}_{\mathbf{y}(k)} - \underbrace{Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(k)}_{\Psi(k)^T} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1). \quad (5.90)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### ♣ Ejemplo 5.7

Obtener el esquema de regresión del modelo dinámico filtrado de un péndulo.

### Solución

El modelo dinámico del péndulo se encuentra dado por:

$$\tau = I\ddot{q} + b\dot{q} + f_c \operatorname{signo}(\dot{q}) + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

el esquema de regresión del modelo dinámico es:

ebrary

$$e = \tau - [\ddot{q} \quad \dot{q} \quad \operatorname{signo}(\dot{q}) \quad \operatorname{sen}(q)] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$

donde  $[\hat{I} \quad \hat{b} \quad \hat{f}_c \quad \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c]^T$  son los parámetros estimados de  $[I \quad b \quad f_c \quad mgl_c]^T$ , respectivamente.

El modelo dinámico filtrado se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\tau}{s+\lambda} &= I \frac{\lambda\ddot{q}}{s+\lambda} + b \frac{\lambda\dot{q}}{s+\lambda} + f_c \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda+s} + mgl_c \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s+\lambda} \\ &= I s \frac{\lambda\dot{q}}{s+\lambda} + b s \frac{\lambda q}{s+\lambda} + f_c \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda+s} + mgl_c \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s+\lambda} \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde  $s = \frac{d}{dt}$ .

Por lo tanto el esquema de regresión del modelo dinámico filtrado para un péndulo es:

$$e = \frac{\lambda\tau}{s + \lambda} - \left[ s \frac{\lambda\dot{q}}{s + \lambda} \quad s \frac{\lambda q}{s + \lambda} \quad \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda + s} \quad \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s + \lambda} \right] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

#### 5.5.4 Regresión lineal del modelo de energía

Un enfoque particularmente atractivo para el diseño de esquemas de identificación paramétrica de robots manipuladores se basa en el modelo de energía aplicada al robot manipulador, el cual puede ser descrito como un modelo de regresión lineal en términos de los parámetros dinámicos. Este esquema también se conoce en la literatura como modelo integral.

La energía total del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  más la energía disipativa  $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$ :

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

$$\mathcal{E}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.91)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.92)$$

donde  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se denomina el hamiltoniano.

La energía cinética y potencial puede ser escrita como una función lineal de los parámetros dinámicos:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \phi_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}} \quad (5.93)$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \phi_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}} \quad (5.94)$$

donde  $\phi_{\mathcal{K}}$  y  $\phi_{\mathcal{U}}$  son vectores de orden  $p_1 \times 1$  y  $p_2 \times 1$ , los cuales dependen de posiciones y velocidades articulares, respectivamente;  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}}$  y  $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}}$  son

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebruary

vectores de orden  $p_1 \times 1$  y  $p_2 \times 1$ , respectivamente, los cuales contienen los parámetros dinámicos del robot manipulador tales como masas, centros de masas y momentos de inercia.

La energía disipativa puede descomponerse como:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = \phi_{\mathbf{f}_f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)^T \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{f}_f} \quad (5.95)$$

Por lo tanto la energía total (5.91) del robot manipulador puede expresarse como un regresor lineal en términos de los parámetros dinámicos del hamiltoniano  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la fricción  $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$ :

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} \quad (5.96)$$

donde

$$\phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T = [\phi_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad \phi_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T] \quad (5.97)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}}^T]^T. \quad (5.98)$$

La parametrización lineal de la energía total conduce a la bien conocida propiedad de linealidad del modelo dinámico en términos de los parámetros dinámicos del robot manipulador, para demostrar esta afirmación usando las ecuaciones (5.93) y (5.94) y tomando en cuenta que el lagrangiano del robot manipulador  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} \\ \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T &= [\phi_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad -\phi_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T]. \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades se satisfacen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}.$$

El modelo de regresión de la energía se basa en el principio de la conservación de la energía, el cual establece que el trabajo efectuado por la fuerzas aplicadas a un sistema es igual al cambio de energía total del sistema:

$$\underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{\text{energía aplicada (t)}} = \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}_{\text{energía almacenada (t)}} + \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma}_{\text{energía disipada (t)}} . \quad (5.99)$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que la energía hamiltoniana en el instante cero es nula, es decir  $\mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) = 0$ . Empleando el principio de conservación de la energía y la propiedad de linealidad en los parámetros de la energía total del robot, el modelo de regresión de la energía está dado por:

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma = \left[ \phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))^T \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma \right] \boldsymbol{\theta} . \quad (5.100)$$

El modelo de regresión (5.100) es lineal en los parámetros dinámicos y en los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. El regresor depende de la posición  $\mathbf{q}$  y velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$ , por lo que no requiere la aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

El error de predicción del modelo de regresión de la energía de acuerdo con el algoritmo de mínimos cuadrados (5.84)-(5.85) se define como:

$$e(k) = \underbrace{\int_0^{kh} \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{y(k)} - \underbrace{\left[ \phi_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \int_0^{kh} \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma \right]}_{\Psi(k)^T} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (5.101)$$

donde  $h$  indica el periodo de muestreo.

Es importante resaltar que el error de predicción (5.101) es una función es-



calar mientras que el error de predicción del modelo de regresión dinámico filtrado (5.90) es una función vectorial.

### ♣ Ejemplo 5.8

Obtener el modelo de regresión de la energía para un péndulo.

### Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

La energía cinética y potencial de un péndulo se encuentra dada por:

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + mgl_c [1 - \cos(q)]$$

La energía total del péndulo está dada por la siguiente expresión:

$$\int_0^t q\tau dt = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + mgl_c [1 - \cos(q)] + b \int_0^t \dot{q}^2 dt + f_c \int_0^t |\dot{q}| dt.$$

Por tanto, el modelo de regresión lineal de la energía se encuentra por:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$e = \int_0^t q\tau dt - \left[ \frac{1}{2}\dot{q}^2 \quad [1 - \cos(q)] \quad \int_0^t \dot{q}^2 dt \quad \int_0^t |\dot{q}| dt \right] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$



### 5.5.5 Modelo de regresión de la potencia filtrada

La potencia aplicada (5.27) puede expresarse como un regresor lineal de un vector de parámetros y un vector de observaciones:

$$\dot{q}^T \tau = \left[ \frac{d}{dt} \phi_{\mathcal{H}}(q, \dot{q})^T \quad \dot{q}^T \phi_{\mathcal{F}}(\dot{q}) \right] \theta \quad (5.102)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

El modelo de la potencia aplicada (5.102) presenta la desventaja de requerir la aceleración articular en el vector de regresión. Este inconveniente puede ser resuelto al filtrar ambos lados del modelo de regresión aplicada mediante un filtro estable estrictamente propio. Sin pérdida de generalidad, considérese una vez más el filtro de primer orden cuya función de transferencia está dada por  $f(s) = \lambda/(s + \lambda)$  donde  $\lambda > 0$ .

Al aplicar el filtro a ambos lados de (5.102) se obtiene el siguiente modelo, el cual se ha denotado como el modelo de regresión de la potencia filtrada:

$$\frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q}^T(t) \tau(t) = \left[ \frac{\lambda s}{s + \lambda} \phi_H(q(t), \dot{q}(t))^T \quad \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q}^T \phi_F(\dot{q}) \right] \theta. \quad (5.103)$$

El modelo (5.103) conserva las mismas ventajas que el modelo de regresión de la energía (5.100), es decir, es lineal en los parámetros dinámicos y coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, depende de la posición  $q$  y velocidad  $\dot{q}$  y no requiere la medición de la aceleración articular  $\ddot{q}$ .

El lado izquierdo del modelo (5.103) es precisamente el filtrado de la potencia aplicada  $\dot{q}^T \tau$ .

El error de predicción del modelo de regresión de la potencia filtrada es una función escalar que se define en forma natural como:

$$e(k) = \underbrace{\frac{\lambda}{s + \lambda} (\dot{q}^T \tau)(k)}_{y(k)} - \underbrace{\left[ \frac{\lambda s}{s + \lambda} \phi_H(q, \dot{q})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{q}^T \phi_F(\dot{q})(k) \right]}_{\Psi(k)^T} \hat{\theta}(k-1). \quad (5.104)$$

La obtención del modelo dinámico para robots de 1 o 2 gdl no es compleja, pero a medida que aumentan los gdl el procedimiento se hace mucho más complicado.

El modelo dinámico de robots manipuladores es una de las actividades más complejas de la robótica, por lo que a continuación se presentan una serie de ejemplos resueltos con la finalidad de que el lector se familiarice con el procedimiento.

### ♣ Ejemplo 5.9

Obtener el esquema de regresión del modelo de la potencia filtrada para un péndulo robot.

### Solución

El modelo de la potencia de un péndulo es:

$$\tau q = I\dot{q}\ddot{q} + mgl_c \sin(q)\dot{q} + b\dot{q}^2 + f_c|\dot{q}|$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

El modelo de la potencia filtra se determina por:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\tau q}{s+\lambda} &= I\frac{\lambda\dot{q}\ddot{q}}{s+\lambda} + mgl_c\frac{\lambda\sin(q)\dot{q}}{s+\lambda} + b\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + f_c\frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda} \\ &= \frac{1}{2}Is\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + mgl_c\frac{\lambda\sin(q)\dot{q}}{s+\lambda} + b\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + f_c\frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda} \end{aligned}$$

El modelo de regresión de la potencia filtrada para un péndulo es:

$$e = \frac{\lambda\tau q}{s+\lambda} - \left[ \frac{1}{2}s\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda\sin(q)\dot{q}}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda} \right] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

### ♣♣♣ Ejemplo 5.10

Obtener el modelo de regresión dinámico filtrado de un robot planar de 2 gdl.

### Solución

El procedimiento consiste en seleccionar un adecuado conjunto de parámetros a identificar; para el caso particular del robot de 2 gdl se trata

6707b9cb23c42653e439edb57461d757  
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

de la matriz de inercia, la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, el vector de pares gravitacionales y el vector pares de fricción:

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \\
 C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -2\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ \theta_7 \dot{q}_2 + \theta_9 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$$\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2,$$

$$\theta_2 = l_1 m_2 l_{c2},$$

$$\theta_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$\theta_4 = g(l_{c1} m_1 + m_2 l_1),$$

$$\theta_5 = g m_2 l_{c2},$$

$$\theta_6 = b_1,$$

$$\theta_7 = b_2,$$

$$\theta_8 = f_{c1},$$

$$\theta_9 = f_{c2}.$$

El vector de parámetros del robot manipulador incluye los parámetros de la energía total está dado por:  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T$  donde:

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5]^T,$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}} = [\theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9]^T,$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T$$

## 5.5 Identificación paramétrica

Los componentes del vector de parámetros  $\theta = [\theta_1 \dots \theta_9]^T$  dependen de una combinación de los parámetros físicos de los eslabones como masas, centros de masas, momentos de inercia y coeficientes de fricción, los cuales se consideran invariantes en el tiempo. El orden de la matriz de regresión  $P$  es  $11 \times 11$ .

La segunda fase del procedimiento consiste en elegir una adecuada trayectoria de entrada al robot manipulador que permita obtener cierto grado de excitación en la matriz de regresión debido a que la calidad de estimación del vector de parámetros depende de los niveles de excitación del regresor, por ejemplo el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo usualmente requiere satisfacer ciertas condiciones de *excitación persistente*. Sin embargo, la selección de la trayectoria no es una tarea trivial, debido a que la matriz de regresión está compuesta por una combinación no lineal de las variables dinámicas del robot tal como  $\sin(q_2)\dot{q}_1^2$ ,  $\cos(q_2)\dot{q}_1$ . Para el diseño de la trayectoria de excitación persistente se recomienda funciones senoidales que incluyen superposición de cuatro diferentes frecuencias, como la ecuación (5.44).

El error de predicción para el modelo de regresión dinámico filtrado está dado por la ecuación (5.90); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivos definido por las ecuaciones (5.79)-(5.80) adquiere la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\tau_f(k)}_{\mathbf{y}(k)} - \underbrace{Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(k)}_{\Psi^T(k)} \hat{\theta}(k-1) \quad (5.105)$$

donde el vector de parámetros y la matriz de regresión están dados como:

$$\hat{\theta}(k-1) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(k-1) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_9(k-1) \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

$$Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) =$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_1 & \frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2)(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_2 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sen}(q_1) \\ 0 & \left[ \frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2) \dot{q}_1 + \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sen}(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1 \right] \frac{\lambda s}{s+\lambda} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sen}(q_1 + q_2) & \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_1 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sgn}(\dot{q}_1) & 0 \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sen}(q_1 + q_2) & \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_2 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \text{sgn}(\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

La matriz de regresión  $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  contiene una serie de filtros para evitar medir la aceleración articular del robot manipulador. La representación de estados de los filtros  $f(s) = \frac{\lambda s}{\lambda + s}$  que corresponden a los elementos del regresor  $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  donde interviene la aceleración articular está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.107)$$

$$y(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.108)$$

donde  $x$  es el estado del filtro,  $y$  es la salida del filtro,  $u$  es la entrada a filtrar y  $t$  representa la evolución en el tiempo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La representación de estados para los filtros  $f(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$  que corresponden a los elementos del regresor donde interviene la velocidad articular está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.109)$$

$$y(t) = x(t) \quad (5.110)$$

Debido a que la trayectoria de entrada, las posiciones y velocidades articulares adquieren valores constantes entre cada  $k$ ésimo instante de muestreo, los filtros continuos  $f(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$  y  $f(s) = \frac{\lambda s}{s+\lambda}$  pueden ser expresados en transformada  $Z$  (usando un retenedor de orden cero) como  $f(z^{-1}) = \frac{(1-e^{-h\lambda})z^{-1}}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$  y  $f(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})\lambda}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$  respectivamente.

La representación de estado en forma discreta de los filtros  $f(z^{-1}) = \frac{(1-e^{-h\lambda})z^{-1}}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$  está dada de la siguiente manera:

$$x(k) = e^{-h\lambda}x(k-1) + [1 - e^{-h\lambda}]u(k-1) \quad (5.111)$$

$$y(k) = x(k). \quad (5.112)$$

donde  $x$  representa el estado del filtro,  $y$  es la salida del filtro,  $u$  es la entrada a filtrar y  $k$  denota la evolución en el tiempo discreto.

Para el caso de los filtros  $f(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})\lambda}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$ , la representación de estados en forma discreta adquiere la siguiente forma:

$$x(k) = e^{-h\lambda}x(k-1) + [1 - e^{-h\lambda}]u(k-1) \quad (5.113)$$

$$y(k) = -\lambda x(k) + \lambda u(k). \quad (5.114)$$

La representación de estados de los filtros continuos en forma discreta permite realizar su implementación de manera directa.



### ♣ ♣ Ejemplo 5.11

Obtener el modelo de regresión de energía de un robot de 2 gdl.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

### Solución

El error de predicción para el modelo de regresión de la energía está dado por la ecuación (5.101); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivos definido por las ecuaciones (5.79)-(5.81) toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\int_0^{kh} \dot{q}(\sigma)^T \tau(\sigma) d\sigma}_{y(k)} - \underbrace{\left[ \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \int_0^{kh} \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))^T d\sigma \right]}_{\psi^T(k)} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\mathcal{H}}(k-1) \\ \hat{\theta}_{\mathcal{F}}(k-1) \end{bmatrix}$$

donde el vector de regresión está dado por:

$$\left[ \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \int_0^{kh} \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))^T d\sigma \right] =$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\left[ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \quad \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \quad 1 - \cos(q_1) \quad 1 - \cos(q_1 + q_2) \right. \\ \left. \int_0^t \dot{q}_1^2 dt \quad \int_0^t \dot{q}_2^2 dt \quad \int_0^t |\dot{q}_1| dt \quad \int_0^t |\dot{q}_2| dt \right].$$

El algoritmo de mínimos cuadrados necesita la información del vector de regresión y de la energía aplicada al robot manipulador para estimar en forma recursiva el vector de parámetros  $\hat{\theta}$ .

El modelo de regresión de la energía total del robot presenta la ventaja de no requerir la aceleración articular, además el regresor es un vector y no una matriz como es el caso del modelo de regresión dinámico filtrado.

### ♣ ♣ Ejemplo 5.12

Obtener el modelo de regresión de la potencia filtrada de un robot de 2 gdl.

### Solución

El error de predicción del modelo de regresión de la potencia filtrada está dado por la ecuación (5.104); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivo dado por las ecuaciones (5.84)-(5.85) toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\frac{\lambda}{s+\lambda} (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau})(k)}_{y(k)} - \underbrace{\left[ \frac{\lambda s}{s+\lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}})^T(k) \right]}_{\boldsymbol{\Psi}^T(k)} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{H}}(k-1) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{F}}(k-1) \end{bmatrix}$$

donde el regresor está dado como:

$$\left[ \frac{\lambda s}{s+\lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}})^T(k) \right] = \\ \left[ \frac{\lambda s}{s+\lambda} \frac{\dot{q}_1^2}{2} \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2}) \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} [1 - \cos(q_1)] \right.$$

$$\left. \frac{\lambda s}{s+\lambda} [1 - \cos(q_1 + q_2)] \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_1^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_2^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} |\dot{q}_1| \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} |\dot{q}_2| \right]$$

El algoritmo de mínimos cuadrados emplea la información del vector de regresión filtrado y de la potencia filtrada aplicada al robot manipulador para estimar en forma recursiva el vector de parámetros  $\hat{\theta}$ .

## 5.6 Robot experimental de 3 gdl

Como contribución práctica al área de la robótica, esta sección incorpora la descripción de una plataforma experimental científica diseñada de manera ex-profesa para realizar investigación y al mismo tiempo jugar el rol de una herramienta indispensable de docencia para robótica, mecatrónica y en general cualquier área de la ingeniería. La plataforma experimental denominada **Rotradi** consiste en un robot de transmisión directa de 3 gdl que se mueve en su espacio tridimensional equipado con tarjetas electrónicas y programas para realizar aplicaciones de automatización.

Esta plataforma científica con las características de Rotradi puede competir en desempeño y versatilidad con las mejores marcas mundiales de robótica. Sin embargo, principalmente se caracteriza por tener **arquitectura abierta**, esto significa que puede evaluar experimentalmente **cualquier** estrategia de control. En contraste, los robots industriales tienen **arquitectura cerrada**, no permiten programar nuevos esquemas de control y quedan confinados a lo que permita realizar su sistema operativo. Regularmente, un robot comercial no satisface todos los requerimientos de una institución de educación superior, por lo que en poco tiempo resulta una mala inversión y se convierte en una pieza decorativa.

La puesta en marcha de una plataforma experimental científica coadyuva al desarrollo de tecnología nacional, mejora la eficiencia terminal de los programas de ingeniería y posgrado, genera desarrollo de tesis a nivel licenciatura y posgrado, y consolida los conocimientos aplicados a problemas reales. Además, sin duda alguna, el principal valor agregado consiste en fortalecer la formación profesional de recursos humanos, ya que capacita para innovar, desarrollar, adecuar conocimientos y tecnología en

beneficio de la sociedad.

Los robots manipuladores como objetos de estudio en control automático ofrecen un amplio espectro para la formulación de problemas de carácter teórico y práctico; esto se debe a la naturaleza no lineal, acoplada y multivariable de su comportamiento dinámico. No obstante que la temática de su control ha atraído la atención de investigadores y tecnólogos, hoy en día subsisten problemas abiertos de control de naturaleza teórica, así como el mejoramiento potencial de problemas de origen práctico. Sin embargo, a pesar de esto en la actualidad la gran mayoría de universidades y centros de investigación carecen de infraestructura adecuada en materia de robótica; de ahí que los trabajos de tesis, reportes técnicos y publicaciones científicas presentan resultados sólo de simulación y muy pocos incluyen evaluación experimental.



Dentro de los objetivos principales de la presente obra se encuentra superar los inconvenientes de infraestructura de robótica mediante la propuesta a la comunidad hispana de un robot experimental 3 gdl diseñado en forma *ex profeso* para realizar investigación sobre algoritmos de control para robots manipuladores, así como constituir una poderosa herramienta pedagógica en docencia. De esta forma, se pretende contribuir con el desarrollo de tecnología nacional.

Las simulaciones son importantes durante las primeras etapas del diseño de algoritmos de control. Sin embargo, los estudios de simulación generalmente son incompletos debido a que desprecian aspectos prácticos. Tal es el caso en simulaciones de sistemas de control donde la dinámica del robot no contempla el fenómeno de fricción (viscosa, Coulomb, estática), ni las limitaciones en los actuadores del robot, y usualmente se desprecia el ruido en los sensores de ahí que los resultados de simulación sean de valor limitado. Por otro lado, la validación experimental de algoritmos de control asegura su éxito potencial en el mundo real de las aplicaciones.



De esta forma, el desarrollo de un sistema experimental es un paso esencial hacia la validación de algoritmos de control nuevos y existentes. En este contexto es útil distinguir entre resultados de simulación y resultados obtenidos por experimentación. Obviamente los primeros son mucho más fáciles de obtener que los segundos.

Desde un punto de vista práctico, la implementación en tiempo real de controladores para robots manipuladores puede ser una *aventura*, que generalmente se convierte en una actividad que consume tiempo si no se dispone de una plataforma experimental con un ambiente de programación que genere al usuario una interfase amigable y proporcione las herramientas necesarias para el desarrollo y estudio de algoritmos de control. De esta forma, la interfase usuario-robot es un ingrediente importante de todo sistema experimental, que permite tomar control sobre la configuración experimental, ejecución del algoritmo, despliegue y registro de datos.

Es importante resaltar que una plataforma experimental diseñada en forma *ad hoc* para realizar investigación científica, experimentación y evaluación de algoritmos de control de robots manipuladores, fortalece la infraestructura en materia de laboratorios de calidad de las carreras de ingeniería mecatrónica, robótica, sistemas, automatización, control, electrónica, eléctrica, mecánica, informática y computación. Asimismo, impacta de manera significativa en:



Productividad científica y tecnológica de cuerpos académicos o planta académica de carrera.



Coadyuva a incrementar las tesis de licenciatura y posgrado.



En el aspecto científico se puede decir que es una *minita de papers*, es decir de publicaciones científicas en revistas indexadas, arbitradas y congresos de calidad.



Constituye la infraestructura adecuada que soporta los planes de estudios de las carreras de ingeniería y programas de posgrado.



Facilidad para desarrollar aplicaciones con impacto y mejorar la vinculación con diferentes sectores de la sociedad: asistente de fisioterapia, personas con capacidad diferenciada, automatización de procesos industriales, prototipos científicos y educativos, etcétera.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

En la figura 5.7 se muestra el robot experimental de transmisión directa (*Rotradi*) con 3 grados de libertad moviéndose en el espacio tridimensional.



**Figura 5.7** Rotradi robot experimental de transmisión directa de 3 gdl.

El robot manipulador *Rotradi* consta de tres eslabones rígidos fabrica-

dos de aluminio 6061, unidos mediante articulaciones del tipo rotacional con servomotores de transmisión directa. Los motores utilizados para formar las articulaciones de la base, hombro y el codo respectivamente, son los modelos DM1050A, DM1200-A y DM1015-B de la compañía Parker Compumotor. El espacio de trabajo del robot manipulador es un círculo de 0.9 metros de radio, tiene un peso aproximado de 120 kg y el extremo final del robot puede alcanzar velocidades lineales de 3000 mm/seg.

Los servo amplificadores electrónicos de los motores operan en modo 'par', aceptando un voltaje analógico como referencia de la señal de par. De esta forma los motores actúan como una fuente ideal de par. En esta configuración, el servomotor de la base DM1050A proporciona 50 Nm, el servomotor DM1200-A que forma el hombro es capaz de proporcionar 200 Nm como par de salida alrededor de su eje de giro, mientras que el servomotor del codo DM1015-B entrega un máximo de 15 Nm. La capacidad del servomotor del codo debe tener una proporción del 10% con respecto a la articulación del hombro, lo cual se debe a consideraciones dinámicas, de anatomía y fisiología del brazo humano.

La electrónica se basa en arquitectura FPGA's para leer los pulsos de los encoders incrementales, 3 convertidores D/A de 12 bits, puertos I/O, 3 timers programables para programar el periodo de muestreo de 2.5 mseg. La información de la posición articular del robot manipulador se obtiene a través de encoders incrementales localizados dentro de los servomotores, los cuales tienen una resolución de 4096000 pulsos por cada 360 grados. La información de la velocidad articular es obtenida mediante un algoritmo estándar de diferenciación numérica de la posición articular (algoritmo de Euler). Los encoders del robot son sensores de posición para medir los desplazamientos articulares  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  de cada eslabón, y los servomotores para manejar cada articulación a través de los pares aplicados  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ .

Un gran obstáculo en la programación de manipuladores es la falta de comunicación eficaz y apropiada entre el usuario y el robot. Un planteamiento general para resolver este problema es la utilización de programación



### Rotradi

El robot manipulador *Rotradi* fue diseñado y construido el 25 de enero de 1998 y ha sido la infraestructura académica clave para lograr acreditaciones de CACEI, CIEES y CONACYT de los programas de ingeniería y posgrado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Una característica de *Rotradi* es que puede ser guiado con la mano, joystick o ratón, etc., es decir para personas que no tienen conocimientos de robótica pueden guiar al robot moviendo el extremo final con la mano, de esta forma instruyen al robot de todos los movimientos que tiene que realizar, el programa del robot graba en un archivo posiciones y velocidades, posteriormente en modo automático las reproduce.

Hasta la fecha se han construido 6 robots de transmisión directa de 3 gdl y constituyen el soporte de laboratorios e infraestructura académica en robótica de la región de Puebla.





sobre la implementación y validación experimental de algoritmos de control sobre el robot manipulador. Ha sido desarrollado como un ambiente de programación orientado a la implementación de una clase general de algoritmos de control, el cual genera una interfase amigable al usuario para la validación experimental de controladores de movimiento para el robot experimental.

El ambiente de programación controla todos los aspectos de la ejecución experimental. Esto incluye inicialización, graficación, despliegue y registro de datos, cambios de parámetros en línea, así como el *retorno a casa* del robot (*home position*), el cual conduce al robot manipulador a su posición de inicio a través de un controlador tangente hiperbólico con compensación de gravedad. El retorno a casa es realizado cuando el usuario quiere suspender su experimento, ya sea para finalizar la sesión experimental o para repetirlo una vez más.

La fase de compilación y transferencia del algoritmo del usuario es realizada a través de comandos internos del medio ambiente. En esta fase es enlazado en forma automática un programa monitor, que incluye las funciones necesarias para la ejecución correcta del algoritmo de control sobre la tarjeta FPGA.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

En la etapa de ejecución, el algoritmo de control en cada periodo de muestreo de 2.5 mseg emplea las posiciones y velocidades articulares, y con esa información genera las acciones de control aplicadas a cada articulación. Asimismo, exhibe, grafica y graba en tiempo real las variables de interés previamente seleccionadas por el usuario. La forma en que el medio ambiente obtiene la información de cada variable es mediante el acceso directo a la localidad de memoria de la variable en cuestión sin interrumpir la ejecución del algoritmo de control.

Cabe mencionar que el ambiente de programación incluye protección durante la realización del experimento. Los factores de seguridad que se han considerado son los límites en las velocidades y los pares de cada motor.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757



Adicionalmente incluye un paro de emergencia, para que en caso de fallo del algoritmo de control, entre la tarjeta FPGA en estado de espera, suspendiendo cualquier operación.



## 5.7 Resumen

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  gdl en coordenadas generalizadas o articulares representa los fenómenos propios de su naturaleza dinámica no lineal, multivariable y fuertemente acoplada. Contiene una serie de propiedades matemáticas que facilitan el análisis, diseño y desarrollo de estrategias de control. Asimismo, se ha presentado la conversión del modelo dinámico de coordenadas articulares al espacio cartesiano, teniendo un mapeo no lineal, y sus propiedades matemáticas adquieren características locales, debido a la exigencia en la matriz del jacobiano que debe tener rango completo. De manera natural, resulta la ecuación fundamental del control jacobiano transpuesto para espacio cartesiano, introducida por Suguru Arimoto en 1981:  $\tau = J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_x$ . Esta ecuación es la base del control cartesiano como: control de fuerza, impedancia, control de robots mediante información visual (*visual servoing*), teleoperación, etcétera.

A pesar de que la estructura matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  gdl está perfectamente estudiada, para finalidades prácticas en diversas aplicaciones resulta fundamental conocer varios aspectos del robot, entre ellos el valor numérico de cada uno de los parámetros de los eslabones del robot, tales como: masa, centros de masa, momentos de inercia y coeficientes de fricción. Para este propósito se ha presentado el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo, que hoy en día representa uno de los algoritmos de estimación más confiables, y por lo tanto más usado por sus características de convergencia y fácil implementación. Existe un total de 5 esquemas de regresión para identificar los parámetros del robot: modelo dinámico, dinámico filtrado, energía, potencia y potencia filtrada. Los dos primeros establecen un regresor vec-

## 5.8 Referencias selectas

torial, mientras que los 3 últimos resultan atractivos por su característica de regresión escalar.

Finalmente, se presenta una plataforma experimental científica diseñada en forma *ad doc* para realizar investigación, experimentación y fungir como una herramienta imprescindible para docencia, y al mismo tiempo convertirse en la infraestructura científica de calidad para soportar los programas de ingeniería y posgrado, así como formación de recursos humanos.

## 5.8 Referencias selectas

Con la finalidad de complementar la información presentada en las diferentes secciones de este capítulo, se recomiendan las siguientes referencias:



### 5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para la teoría y fundamentos de la mecánica de Euler-Lagrange ver:



Dare A. Wells. "*Lagrangian dynamics*". Schaum's outlines. 1967.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



Leonard Meirovitch. "*Methods of analytical dynamics*". McGrawHill. 1970.



A. P. French. "*Mecánica newtoniana*". Editorial Reverté. S. A. 1978.



Wolfram Stadler. "*Analytical robotics and mechatronics*". McGraw Hill International Editions. 1995.



Donald T. Greenwood. "*Classical dynamics*". Dover Publications Inc. 1997