



2.4.6 Glosario para encoders

A continuación se explican los términos y conceptos importantes directamente relacionados con el uso de encoders. Los nombres técnicos de los conceptos se dan en castellano y entre paréntesis su equivalente en inglés. Es pertinente destacar que no todos los nombres técnicos tienen traducción, como es el caso de la palabra encoder.



Resolución (*Resolution*): es la capacidad de un encoder para dividir una rotación (360 grados) entre n . Para los encoders incrementales la resolución está en función del número de pulsos producidos por una rotación, por ejemplo para los encoders de los motores de transmisión directa (*direct drive*) el número de pulsos por revolución completa es de 4,096,000. Por lo tanto, la resolución es $\frac{360^\circ}{4,096,000} = 0.0000878906$ grados. En los encoders absolutos, la resolución está determinada por el número de dígitos binarios junto con el número de división; por ejemplo, para 8 dígitos binarios es dividido entre 256. La resolución es la mínima medida que un encoder puede detectar o discernir.







Máxima frecuencia de respuesta (*Maximum response frequency*): es la máxima frecuencia en la cual los encoders pueden responder eléctricamente. En el caso de encoders incrementales está expresado por el número de pulsos de salida por segundo.



Máxima frecuencia rotacional permisible (*Maximum allowable rotational frequency*): es la máxima frecuencia rotacional que mecánicamente es permitida por el encoder.



Salida de la fase A (*Phase A output*): en los encoders incrementales, la diferencia de fase ideal entre la fase de salida para el canal A y la fase de salida para el canal B es de 90 grados + 0 grados. Sin embargo, un estándar práctico es con una diferencia de fase de 90 grados + 45 grados.

-  **Salida de la fase Z (*Phase Z output*):** la fase Z también se conoce como **índice** y su respuesta es un pulso por revolución o por cada 360° para indicar el origen. Se usa en los encoders incrementales.
-  **Par de inicio (*Starting torque*):** es el torque generado en el inicio de la rotación.
-  **LED (light-emitting diode):** diodo emisor de luz.
-  **Exactitud:** es la diferencia entre la medición realizada con respecto a la medición real o ideal.
-  **Precisión:** el número de bits para representar una medición.
-  **Repetitividad:** se refiere a la pequeña variación de lectura que tendrá un tipo específico de encoder que se ha fabricado de manera repetitiva (mismo número de serie y modelo), es decir, es un rango estadístico para lecturas repetidas (típicamente, la repetitividad tienen una desviación estándar de $3\pm$). Por ejemplo, si un encoder tiene una repetitividad de 0.00001 grados, entonces para una lectura actual de 90 grados podría ser 89.9999.
-  **Linealidad** de un encoder: si la señal de salida tiene una relación lineal (proporcional) con el fenómeno de entrada (medición de posición). La linealidad es una característica deseable en todo sensor.
-  **Rango:** representa los límites naturales del encoder. Por ejemplo un encoder absoluto puede rotar 200 grados, y un encoder incremental puede rotar miles de vueltas.



2.5 Resumen

Un servomotor es la unión de un motor eléctrico, un sensor de posición y un amplificador electrónico. El sensor de posición más empleado es el encoder incremental por sus características de bajo peso, volumen pequeño y

alta resolución (4,096,000 pulsos/revolución). El amplificador electrónico también es conocido como servoamplificador y es el encargado de controlar el flujo magnético entre el embobinado del rotor y los materiales ferromagnéticos del estator, de tal forma que obedezca a la ecuación fundamental: $\tau = kv$, siendo τ el par o torque aplicado, k una constante que representa la ganancia del amplificador y v el voltaje, siendo la señal o comando que proviene de una computadora o sistema mínimo.

El motor eléctrico es una máquina que convierte energía eléctrica en energía mecánica. El rotor puede alcanzar una velocidad de desplazamiento articular muy grande, por ejemplo 1000 revoluciones por minuto. Esta velocidad de movimiento es muy alta para propósitos de diseño, construcción y movimiento de robots manipuladores, los cuales se mueven a una velocidad parecida al brazo humano, por ejemplo de una a dos vueltas por segundo. En movimiento lineal, el desplazamiento puede llegar a 3000 mm/segundo.

Por otro lado, los motores eléctricos pueden proporcionar poco par o torque para realizar alguna aplicación donde se requiere desplazar cargas de un peso considerable. El dispositivo que permite reducir la velocidad rotacional y amplificar el par limitado es el sistema de engranes. Sin embargo, los engranes introducen otro tipo de fenómenos físicos y mecánicos: vibración, elasticidad, fricción y *cascabeleo* o juego mecánico. La fricción presenta la desventaja de que un alto porcentaje de la energía que se suministra al robot se pierde en problemas de efectos disipativos. Es decir, se da conversión de energía mecánica en energía térmica, lo que degrada y deteriora las piezas del robot.

Como alternativa tecnológica los servomotores de transmisión directa (*direct drive*) corrigen los inconvenientes de los servomecanismos convencionales. No requieren de un sistema de engranaje para amplificar el par, y funcionan como fuente de par en velocidades de 360 a 720 grados/segundo. El fenómeno de fricción representa un bajo porcentaje del par máximo, típicamente del orden del 5 %.

Los robots de transmisión directa por sus ventajas, características y prestaciones representa los robots de un futuro cercano que paulatinamente irán desplazando a los robots convencionales con sistema de engranaje. Debido a la alta resolución que tienen los encoders incorporados en los servomotores, pueden alcanzar excelente grado de exactitud en el posicionamiento del robot. Por lo que este tipo de robots son ideales para realizar una gama amplia de aplicaciones industriales, seguimiento de trayectorias, control de posición, control punto a punto, etc.



2.6 Referencias selectas

A continuación se presentan una serie de referencias específicas para cada una de las secciones presentadas en este capítulo.



2.1 Introducción



www.robotics.org



<http://sensing.honeywell.com>



R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loria. “*Control of robot manipulators in Joint Space*”. Springer-Verlag London 2005.



Mark W. Spong and Seth Hutchinson, M. Vidyasagar. “*Robot Modeling and Control*”. John Wiley and Sons, Inc. 2006.



2.2 Servomotores

La tecnología de transmisión directa es realizada por las compañías ParkerCompumotor y NSK. En las referencias indicadas puede encontrar mayor información y cotizaciones de servomotores.



Haruhiko Asada & Kamal Youcef Toumi. “*Direct-Drive Robots: Theory and Practice*”, MIT Press Classics, 1987.



www.galilmc.com



www.mitsubishi-automation.com/products/servomotion_motor.html



www.parkercompumotor.com



www.nsk.com.com



www.yokogawa.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



2.3 Sensores



www.omega.com



Ernest O. Deobelin. “*Measurement Systems: Application and Design*” McGrawHill, Fifth Edition, 2003.



D. M Considine & S. D. Ross “*Manual de Instrumentación Aplicada.*” Vols. I y II, CECSA, 1971.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



Shimon Y. Nof. “*Handbook of Industrial Robotics*” John Wiley & Sons, Inc. Second Edition. 1999.



Francis C. Moon “*Superconducting Levitation: Applications to Bearings and Magnetic Transportation*” Wiley-VCH. 2004.



www.keyence.com



www.sensotec.com



www.bannerengineering.com



www.edmundoptics.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



2.4 Encoders

En las siguientes referencias puede encontrar una amplia variedad de encoders incrementales y absolutos.

-  www.robotics.org
-  www.mexico.newark.com
-  <http://sensing.honeywell.com>
-  www.newport.com



2.7 Problemas propuestos

A continuación se presenta una serie de problemas propuestos con la finalidad de mejorar la habilidad y grado de conocimiento de servomotores y sensores.



2.2 Servomotores

- 2.2.1 ¿Por qué se utilizan los servomotores en robótica?
- 2.2.2 ¿Cuáles son las características principales de un sensor?
- 2.2.3 ¿Qué es un sensor de posición?
- 2.2.4 ¿Cuál es la diferencia entre un sensor digital y analógico?
- 2.2.5 Describa aplicaciones donde se emplean sensores analógicos y digitales.
- 2.2.6 Explique el concepto de transductor.
- 2.2.7 ¿Son los sensores transductores?

2.2 .8 ¿Es un servomotor un tipo de transductor?



2.2 Servomotores

2.2 .1 ¿Qué es un servomotor?

2.2 .2 ¿Qué es un servo amplificador?

2.2 .3 Explique el funcionamiento básico de un motor eléctrico.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

2.2 .4 ¿Qué funciones importantes realiza el sistema de engranes?

2.2 .5 ¿Cuáles son las desventaja que presentan los engranes?

2.2 .6 ¿Qué es un servomotor de transmisión directa?

2.2 .7 Realizar una comparación tecnológica entre los servomotores que emplean engranes y los de transmisión directa.



2.3 Sensores

670 ebrary 2.3 .1 ¿Qué tipo de sensores analógicos de posición puede citar?

2.3 .2 Realizar una comparación cualitativa entre ventajas y desventajas de los sensores analógicos de posición.

2.3 .3 ¿Cuál es la resolución en milivolts de un convertidor analógico digital de 8 bits? Tome en cuenta que el voltaje de referencia es de 5 volts.

2.3 .4 Deducir la expresión de integración numérica para la posición $q(t_k)$ en función de la velocidad $\dot{q}(t_k)$, es decir:

$$q(t_k) = q(t_{k-1}) + h\dot{q}(t_k)$$

donde h es el periodo de muestreo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

Sugerencia: La velocidad articular $\dot{q}(t)$ es la derivada con respecto al tiempo de la posición $q(t)$, es decir: $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t) - q(t-1)}{\Delta t}$, donde t es el tiempo. Ahora discretice la velocidad continua $\dot{q}(t)$, es decir: $\dot{q}(t_k) = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{\Delta t_k} = \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{h}$, donde t_k representa el tiempo discreto, siendo $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Además $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = h$, donde h es el periodo de muestreo.



2.4 Encoders

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

- 2.4.1 ¿Qué entiende por un encoder óptico?
- 2.4.2 ¿Cuántos tipos de encoder conoce?
- 2.4.3 Describa cualitativamente los diferentes tipos de encoder.
- 2.4.4 ¿Qué ventajas ofrece un encoder respecto a otros tipos de sensores de posición?
- 2.4.5 ¿Cuál es la resolución en grados de un encoder incremental, si tiene 4,096,000 pulsos por cada revolución (360 grados)?
- 2.4.6 ¿Qué características debe tener un encoder absoluto si tuviera una resolución de 4,096,000 bits?
- 2.4.7 Considere el caso de un motor que es capaz de girar desde 0 a 45 revoluciones por minuto (*RPM*). Usando un encoder incremental con una resolución de 32 franjas reflectivas y un periodo de muestreo de 1 segundo: ¿cuántos pulsos por revolución puede detectar?
- 2.4.8 ¿Cómo sería el padrón de franjas reflectivas para un encoder absoluto, si se requiere que tenga una resolución de una milésima de grado?
- 2.4.9 Describa cualitativamente el funcionamiento de un encoder magnético.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

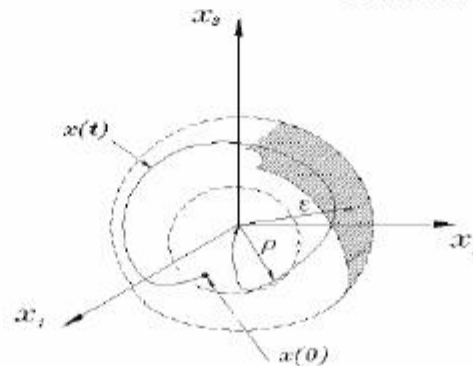
3

CAPÍTULO

Preliminares matemáticos

La energía acumulada dentro del dominio de atracción por un sistema dinámico, cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar su valor mínimo en el punto de equilibrio, el cual es asintóticamente estable.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
Aleksandr Mikhailovich Lyapunov ebrary



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary






- 3.1 Introducción
- 3.2 Vectores
- 3.3 Matrices
- 3.4 Funciones definidas positivas
- 3.5 Sistemas dinámicos
- 3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov
- 3.7 Norma \mathcal{L}
- 3.8 Resumen
- 3.9 Referencias selectas
- 3.10 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos




Presentar las herramientas matemáticas que se requieren en el análisis, diseño y control de robots manipuladores.

Objetivos particulares. Exponer los conceptos esenciales de:

-  Vectores y matrices.
-  Funciones de energía.
-  Sistemas dinámicos.
-  Teoría de estabilidad de Lyapunov.
-  Norma \mathcal{L} .

Competencias

Adquirir la habilidad en el manejo de:

-  Operaciones matemáticas para control de robots manipuladores.
-  Exponer los conceptos fundamentales de análisis y diseño de esquemas de control en robótica.
-  Análisis de sistemas dinámicos vía Lyapunov.

3.1 Introducción

3.1 Introducción

Las matemáticas son un lenguaje elegante y universal, necesario para describir y comprender cualquier fenómeno de la naturaleza. En particular, en el área de la robótica representan la herramienta fundamental para análisis, diseño y la construcción de robots; específicamente son esenciales en la elaboración del modelo dinámico que permite estudiar todos los fenómenos físicos presentes en el sistema mecánico del robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Por otro lado, en control automático las matemáticas permiten diseñar diversos algoritmos de control, planeación de trayectorias, programación de tareas, etc. Si bien es cierto que la robótica es de naturaleza práctica experimental, su esencia es el rigor científico por lo que todas las contribuciones, aportaciones y aplicaciones requieren de una sustentación estricta y formal que sólo puede lograrse a través de las matemáticas.

De acuerdo con los objetivos planteados, en este capítulo se exponen los conceptos y operaciones relacionadas con vectores y matrices, normas euclidianas, gradiente, jacobiano, valores propios, fundamentos de sistemas dinámicos, teoría de estabilidad de Lyapunov y su interconexión con estabilidad \mathcal{L}_2 , principio de invariancia de LaSalle, etc. Para facilitar la asimilación de los conceptos, a lo largo de la exposición se presenta una amplia variedad de ejercicios y programas de simulación en MatLab.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

En capítulos posteriores se aplicarán los conceptos expuestos aquí. Por ejemplo, en el modelo de la dinámica de robots manipuladores se utilizan las operaciones entre vectores y matrices, los conceptos de matrices definidas positivas, de gradiente y de jacobiano.

En los capítulos relacionados con el control de robots se emplea la teoría de estabilidad de Lyapunov, así como los conceptos de sistemas dinámicos, de normas (euclidianas, espectrales y \mathcal{L}) y de funciones definidas positivas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Los preliminares matemáticos aplicados de manera adecuada en la robótica, generan un espectro muy amplio de aplicaciones potenciales de robots manipuladores en los ámbitos científico, industrial, comercial y doméstico.

William Rowan Hamilton (1805-1865)



El 4 de agosto de 1805 en la ciudad de Dublín, Irlanda, nació William Rowan Hamilton quien se destacó por formular en 1833 la llamada mecánica hamiltoniana. En su honor, el hamiltoniano ampliamente usado en robótica, es la suma de la energía cinética y potencial de un sistema mecánico. Además de su trabajo en mecánica analítica Hamilton desarrolló la teoría de los cuaterniones, que tiene importantes aplicaciones para modelar la orientación de la herramienta final del robot. Por otro lado, en el área del álgebra lineal su contribución fundamental es el conocido teorema de Cayley-Hamilton el cual es la base para calcular las constantes que forman el polinomio de la matriz exponencial de sistemas lineales continuos, e^{-At} , y discretos, e^{-Ah} . Luego de una brillante carrera Hamilton murió el 2 de septiembre de 1865 en su ciudad natal.

3.2 Vectores

Es común describir un vector como un elemento que tiene magnitud y dirección, no obstante es necesario establecer una definición formal de este concepto. Históricamente, los términos de vector y escalar fueron definidos por el científico irlandés William Rowan Hamilton en su teoría de los cuaterniones, sin embargo en la robótica un vector no es una simple abstracción matemática, en esta área un vector representa la agrupación de varias señales físicas del robot para ser analizadas, procesadas o controladas; por ejemplo, las variables más representativas del área de robótica son posiciones, errores de posición, velocidades, pares y fuerzas.

En general un espacio vectorial sobre un campo F consta de un conjunto V en el que está definida una operación de suma (la cual satisface las propiedades de un grupo abeliano conmutativo), junto con una operación de multiplicación definida entre elementos de V y elementos de F tal que esta operación asocia escalares, distribuye escalares, distribuye vectores y posee elemento identidad y también el elemento neutro.

Un ejemplo de campo es el que está definido en el conjunto de los números reales \mathbb{R} , y a un espacio vectorial construido sobre \mathbb{R} se le llama *espacio vectorial real*.

En robótica éste es el tipo de espacio vectorial que interesa, en particular el que se utiliza es el definido en el conjunto V de las n -adas de números reales. Las propiedades matemáticas asociados a los vectores resultan particularmente útil en el diseño y análisis de algoritmos de control. Los aspectos prácticos y desempeño de diversas estrategias de control se interpretan en función de los vectores.

El conjunto V del espacio vectorial n -dimensional \mathbb{R}^n es el conjunto de todas las n -adas de números reales, y los vectores de este espacio se denotan de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \cdots x_n]^T, \quad (3.1)$$

En la expresión (3.1) las $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, representan las componentes o coordenadas del vector. A partir de esta definición se tiene que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son iguales, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, si y sólo si sus correspondientes componentes son iguales, es decir $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Por otro lado, el espacio vectorial \mathbb{R}^n también se conoce como espacio euclidiano n -dimensional.

En la siguiente sección se plantea la definición de suma y multiplicación en el espacio vectorial \mathbb{R}^n , y se establecen sus propiedades correspondientes.

Notación

Los vectores serán representados con letras minúsculas del castellano y del griego en **negritas itálicas**, por ejemplo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$; las componentes de los vectores son números reales $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, siendo $n \in N$ la dimensión del espacio vectorial.

Es muy importante que el lector adquiera los conocimientos adecuados de vectores, la implementación práctica de esquemas de control de robots manipuladores requiere realizar correctamente los diferentes tipos de operaciones con vectores. Las variables que intervienen el modelo dinámico del robot manipulador como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares se encuentran directamente relacionadas con vectores. De la misma manera variables de control de robots manipuladores como errores de posición, trayectorias de seguimientos, y pares aplicados son representa-

Números reales

El conjunto de los números reales se denota con el símbolo \mathbb{R} , y a sus elementos se les conoce como escalares. En esta obra los números reales se expresan con letras minúsculas del castellano o del griego en *itálicas*, por ejemplo, $a, b, c, x, y, z, \alpha, \omega, \lambda$.

El conjunto de números reales positivos y negativos se representan por \mathbb{R}_+ y \mathbb{R}_- , respectivamente:

$$\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in [0, \infty)\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in (-\infty, 0]\}$$

Por otro lado, el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números reales, lo cual se representa como $Z \subseteq \mathbb{R}$, y para los números naturales o enteros positivos se tiene que $N \subseteq Z \subseteq \mathbb{R}_+$.

dos y procesados matemáticamente de acuerdo a las reglas de vectores.



3.2.1 Operaciones entre vectores

La definición de suma entre vectores de \mathbb{R}^n es la siguiente.

Considérese los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La adición o suma entre éstos se realiza sumando componente a componente:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_i + y_i \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición de espacio vectorial, la suma entre vectores satisface las siguientes propiedades:



Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$



El **vector nulo** es aquel vector cuyas componentes son todas ceros y es denotado por

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$



Para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector denotado como $-\mathbf{x}$ tal que:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

La definición del producto de un escalar por un vector es la siguiente.

Sean el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces el producto entre ambos se define como:

$$\alpha \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \alpha \\ x_2 \alpha \\ \vdots \\ x_n \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \alpha = \mathbf{x} \alpha$$

De acuerdo con la definición de espacio vectorial, el producto de un escalar por un vector satisface las siguientes propiedades:



Sean el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \alpha = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \alpha \end{aligned}$$



Sean los escalares $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\mathbf{x}(\alpha + \omega) = \mathbf{x}\alpha + \mathbf{x}\omega$$



Sean los escalares $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad asociativa y conmutativa:

$$\alpha(\omega \mathbf{x}) = (\alpha \omega) \mathbf{x} = \omega(\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\alpha \omega) = \mathbf{x}(\omega \alpha) = \omega \mathbf{x} \alpha = \alpha \mathbf{x} \omega$$



Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$1 \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Además de esta estructura algebraica, en el espacio \mathbb{R}^n se define el siguiente producto vectorial interno que satisface las propiedades listadas a continuación.

El producto interno de dos vectores $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ se define como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}.$$

A partir de esta definición se tiene que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:



El producto interno entre vectores se realiza como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{y} &= \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^n \{x_i y_i\} = \sum_{i=1}^n \{y_i x_i\} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Propiedad de asociación del producto interno de vectores:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} + \mathbf{z}^T \mathbf{x}$$



El producto de un vector columna por un vector transpuesto genera una matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{y}^T &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \quad y_2, \cdots, y_n] \\ &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$



3.2.2 Norma euclidiana

La norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, que es conocida como norma euclidiana, es un escalar positivo que representa la magnitud del vector y que se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

Hay que observar que sólo se considera la parte positiva de la raíz cuadrada. En la figura 3.1 se muestra la interpretación geométrica de la norma euclidiana, la cual representa la distancia (diagonal) desde el punto \mathbf{x} ubicado en las coordenadas $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ al origen $\mathbf{0}$.

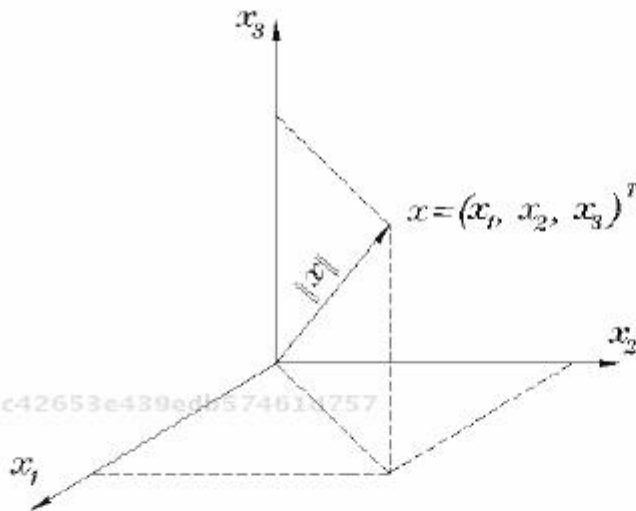


Figura 3.1 Interpretación geométrica de la norma euclidiana.

La norma euclidiana de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes propiedades:



$\|\mathbf{x}\| > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.



$\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



Desigualdad del triángulo:

$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$



$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$



Desigualdad de Schwarz:

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$



3.3 Matrices

Una matriz A es un arreglo rectangular de números, tiene n renglones horizontales (también llamados filas o hileras) y p columnas verticales. Las entradas de la matriz se conocen como *elementos* y pueden ser números reales, números complejos, funciones, operadores, etc. Es importante destacar que una matriz es un objeto matemático por sí misma, esto es, no representa un número o un escalar, además de que tiene operaciones y propiedades bien definidas. Las operaciones entre matrices producen una matriz, en contraste operaciones entre vectores pueden producir un escalar, vector o matriz.

Notación

Las matrices serán designadas por letras mayúsculas del castellano o del griego en *itálicas*. Hay varias notaciones para representar una matriz A , por ejemplo la más compacta es $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, cuyos elementos son números reales (debe leerse matriz A n por p), donde n, p son números naturales. La terminología $n \times p$ también significa la dimensión de la matriz A . En esta notación es necesario recalcar que n significa el número de renglones y p denota el número de columnas.

En la figura 3.2 se muestra la representación clásica de una matriz rectangular de n renglones por p columnas (matriz n por p). Las columnas son arreglos verticales. Por ejemplo, la segunda columna está formada por los elementos $a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}$, mientras que los renglones son filas horizontales dentro del arreglo rectangular; el segundo renglón está compuesto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

← Columna

← Renglón

Figura 3.2 Componentes de una matriz.

por $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Los elementos de una matriz se denotan por a_{ij} donde $i = 1 \dots n$ representa el i -ésimo renglón y $j = 1 \dots p$ denota la j -ésima columna.

Para los propósitos de identificar los elementos de una matriz, éstos pueden ser vistos como un sistema de referencia cartesiano en el que el origen está en la esquina superior izquierda y el índice del renglón está dado antes del índice de la columna (i, j); los renglones de una matriz son numerados de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Por ejemplo, en la matriz $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ el elemento a_{25} significa la componente del segundo renglón y quinta columna, el cual se muestra en la

siguiente expresión: 39edb57461d757

ebruary

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Una notación alternativa para representar una matriz es la siguiente nomenclatura: $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ puede ser considerado como un tipo particular de matriz perteneciente a $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Matrices especiales

La matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ampliamente usada en robótica, en especial se utiliza en la dinámica de robots manipuladores así como en el diseño y desarrollo de algoritmos de control. La matriz identidad es una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal tienen valor 1, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen valor cero:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de la matriz identidad es que, cualquier matriz o vector multiplicado por ella queda igual. Otra matriz especial es la matriz neutra o cero $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en la que todos sus elementos son ceros:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos que se encuentran sobre la diagonal tienen valor diferente a cero, y fuera de la diagonal valen cero, es decir, $a_{ii} \neq 0$ y $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



3.3.1 Matrices especiales

Existen algunos tipos especiales de matrices que facilitan el análisis e interpretación de los resultados en control y robótica. Por ejemplo, la matriz identidad, la matriz simétrica, la matriz antisimétrica, la matriz diagonal, la matriz definida positiva, etc.

Si la matriz A tiene el mismo número de renglones y columnas ($n = p$), se le denomina **matriz cuadrada**, en este caso $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hay varios tipos especiales de matrices cuadradas, por ejemplo la matriz diagonal que tiene todos sus elementos en la diagonal diferentes a cero, $a_{ii} \neq 0$, mientras que $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$.

Una representación especial para las matrices diagonales es $A = \text{diag}\{a_{ii}\}$ con $i = 1 \cdots n$.

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Dependiendo del tema de control de robots manipuladores que se esté abordando, se elige la notación más conveniente de una matriz.

♣ Ejemplo 3.1

Considérense las matrices $\Delta = \text{diag}\{2, 7\}$, $\Delta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Upsilon = \text{diag}\{4, 9, -1\}$, $\Upsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y $\Phi = \text{diag}\{9, 100, 3, 123\}$, Φ es de orden 4×4 . Obtener la representación estándar de cada una de estas matrices.

Solución

Obsérvese que, los números dentro de las llaves representan los elementos

sobre la diagonal.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 123 \end{bmatrix}$$



3.3.2 Operaciones de matrices

En esta sección se presentan las principales operaciones con matrices que se requieren en robótica.

Suma de matrices

Considérense las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. La suma de matrices existe sólo entre matrices de la misma dimensión, $C = (A+B) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y está definida de la siguiente forma:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Si, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ son matrices del mismo orden, entonces la suma de matrices satisface las siguientes propiedades:



Propiedad conmutativa:

$$A+B+C = B+A+C = A+C+B = C+A+B = C+B+A =$$



Operaciones con matrices

En el sitio web del libro podrá encontrar diversos programas en código fuente MatLab para realizar en forma algorítmica operaciones entre matrices, entre ellas: suma, sustracción, multiplicación, así como normas euclidianas de vectores, valores propios, etc.

$$B + C + A$$



Propiedad asociativa:

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C = A + (B + C)$$



Sea la matriz nula $0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en la que todos sus elementos a_{ij} tienen el valor de cero, entonces se satisface que $0 + A = A + 0 = A$

Matriz transpuesta

La matriz transpuesta de $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se representa por $A^T = \{a_{ji}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la cual se obtiene por intercambiar los renglones por las columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Hay que observar que los elementos de la diagonal quedan sin modificación.

La matriz transpuesta satisface las siguientes propiedades:



$$(A^T)^T = A$$



$$((A^T)^T)^T = A^T$$



Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda A)^T = \lambda A^T = A^T \lambda$



Si $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, $I^T = I$.



Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es cualquier matriz diagonal $A = \text{diag}\{a_{ii}\}$, $A^T = A$.

$$\star (A + B + C)^T = A^T + B^T + C^T$$

$$\star (A^T + B^T + C^T)^T = A + B + C$$

$$\star (A^T + B^T + C)^T = A + B + C^T$$

Resta de matrices

Considérese las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, entonces la sustracción de matrices $C = A - B$ existe, con $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, de forma que:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1p} - b_{1p} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2p} - b_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{np} - b_{np} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El algoritmo para realizar resta de matrices consiste en restar elemento a elemento, y tiene la forma siguiente: $A - B = \{a_{ij}\} - \{b_{ij}\} = (a_{ij} - b_{ij})$.

Obsérvese que la resta de matrices no es conmutativa, esto es, no se cumple que $A - B \neq B - A$. Sin embargo, es cierto que $A - B = -B + A$.

Sean las matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, entonces la sustracción de matrices satisface las siguientes propiedades:

$$\star A - B - C = -B + A - C = A - C - B = -C + A - B = -C - B + A = -B - C + A$$

$$\star A - B - C = A - (B + C) = (A - B) - C = A - (C + B)$$

$$\star (A - B - C)^T = A^T - B^T - C^T$$

$$\star (A^T - B^T - C^T)^T = A - B - C$$

$$\star (A^T - B^T - C)^T = A - B - C^T$$

$$\star (A^T - B^{TT})^T = A - B$$

$$\star (A - B) = -(B - A)$$



Producto de matrices

Se encuentran disponibles en el sitio web del libro varios programas relacionados con operaciones entre matrices, así como procedimientos para encontrar matrices simétricas, diagonalización de matrices, rango de una matriz, determinantes, etc.

Producto de matrices

Considérese las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$. El producto de matrices existe sólo en el caso en que el número de las columnas de A es igual al número de los renglones de B . En términos de componentes, el producto $C = AB \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se define como

$$C = \{c_{ij}\} = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Aquí se tiene que $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$ con $i = 1 \cdots n$, $j = 1 \cdots m$.

De esta definición se desprenden directamente dos propiedades básicas: 1) en general el producto de matrices no es conmutativo; 2) cuando se multiplican matrices cuadradas, ambas deben de tener el mismo orden.


En general el producto de matrices no es conmutativo, esto es, $AB \neq BA$, ya que al intercambiar el orden en que se multiplican las matrices en


general no coinciden el número de renglones de una con el número de columnas de la otra. Para el caso de matrices diagonales, entonces el producto de matrices es conmutativo.


Además de no ser conmutativo el producto de matrices diferentes a las diagonales, satisface las siguientes propiedades:


Considérense las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ y $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, así como el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que:


6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Ley distributiva izquierda: $C = A(B + D) = (AB + AD) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.


 Ley distributiva derecha: $C = (B^T + D^T)A^T = (B^T A^T + D^T A^T) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.


 Ley asociativa: $C = A(BE) = (AB)E$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.


 $C = (AB)^T = B^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.


 $C = (ABE)^T = E^T B^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757

 $C = (A(B + D))^T = (B + D)^T A^T = B^T A^T + D^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

 Si $O \in \mathbb{R}^{p \times m}$ es la matriz cero, entonces $A O = O \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

 $C = \lambda A = A \lambda$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

 Si $\lambda = 0$ entonces $\lambda A = O \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

 Si $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\Gamma I = I \Gamma = \Gamma$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

♣ Ejemplo 3.2

Realizar la multiplicación de un escalar λ por una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \lambda.$$

■■■

Hay que observar que el orden de la matriz resultante se deduce del número de renglones de la matriz A y del número de columnas de la matriz B , ya que las p columnas de A y los p renglones de B son absorbidos en los detalles internos de la multiplicación, es decir, $([n \times p] \underbrace{[p \times n]}_{\text{mismo número}}) = [n \times n]$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

mismo número

Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. De acuerdo con la definición de producto de matrices, la expresión $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ es un número real que está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Matriz cuadrada

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es cuadrada si y sólo si $n = m$.

Las propiedades de las matrices cuadradas, que se utilizan en el análisis y diseño de algoritmos de control de robótica, son las siguientes:

★ Potencia de una matriz cuadrada: $A^k = \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ veces}}$

★ La traza de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está definida por

$$\text{traza}\{A\} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (3.6)$$

★ El determinante $|A|$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dado por la siguiente expresión:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij} \quad (3.7)$$

para $i \leq n, j \leq n$.

Aquí se emplea la notación $|A|_{ij}$ para representar a un determinante de $n-1$ filas obtenido por borrar la i -ésima fila y la j -ésima columna de un determinante de n filas.

★ Determinante de la matriz transpuesta: $|A^T| = |A|$.

★ El determinante menor de m filas es obtenido por borrar $n-m$ filas y $n-m$ columnas de un determinante de n filas.

★ Un determinante principal menor de un determinante es llamado así, si sus elementos de la diagonal son también elementos de la diagonal del determinante.

★ El cofactor Δ_{ij} es el coeficiente del término a_{ij} en la expansión del determinante $|A|$ por sus determinantes menores,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A|_{ij} \quad (3.8)$$



La matriz de cofactores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dada por $\text{Cof}\{A\}$:

$$\text{Cof}\{A\} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

El determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = |A|. \quad (3.10)$$

♣ Ejemplo 3.3

Obtener los cofactores de la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary

Solución

Aplicando las ecuaciones (3.8) y (3.10) para $i = 1, 2$ se tiene que

$$A_{11} = 4$$

$$A_{12} = 3$$

$$A_{21} = 9$$

$$A_{22} = 1$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}A_{11} = 4$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}A_{12} = -3$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}A_{21} = -9$$

$$\begin{aligned}\Delta_{22} &= (-1^{2+2})A_{22} = 1 \\ |A| &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} \\ &= 1 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = -23\end{aligned}$$



Matriz adjunta

La matriz adjunta de la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denotada por $\text{adj}\{A\}$, es la transpuesta de la matriz obtenida de A por reemplazar cada elemento de A por su cofactor:

$$\text{adj}\{A\} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

aquí Δ_{ij} es el cofactor de a_{ij} de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Matriz inversa

La inversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular existe y es denotada por $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por definición la inversa de una matriz se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} \quad (3.12)$$

la $\text{adj}\{A\}$ representa la matriz adjunta de A y $|A|$ es el determinante de la matriz A . Los términos de la i -ésima columna de A^{-1} son $\frac{1}{|A|}$ veces los cofactores de la i -ésima fila de la matriz original A .

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{|A|} & \frac{\Delta_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{|A|} \\ \frac{\Delta_{12}}{|A|} & \frac{\Delta_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{|A|} & \frac{\Delta_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde Δ_{ij} es el cofactor de a_{ij} de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es $|A| = 0$, entonces la matriz inversa no existe. Por lo tanto a esta matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se le llama matriz singular.

A continuación se presentan las propiedades de la matriz inversa:

✦ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama no singular si existe su matriz inversa; en otras palabras, una condición necesaria y suficiente para la existencia de la matriz inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es que el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea diferente de cero, $|A| \neq 0$.

✦ Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices no singulares, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

✦ $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

✦ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

♣ Ejemplo 3.4

Considérese la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Obtener el determinante.

Solución

De acuerdo con las definiciones, el determinante $|A|$ y la matriz $\text{adj}\{A\}$

están dados respectivamente por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc) \neq 0$$

$$\text{adj}\{A\} = \text{cofactores}\{A\}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Como un caso práctico considérese la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Por tanto, el determinante $|A|$ y la matriz $\text{adj}\{A\}$ son:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 27) = -23$$

$$\text{adj}\{A\} = \text{cofactores}\{A\}^T = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix} \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare$$

Matriz simétrica

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Una matriz simétrica, que se representa por $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$, coincide con su matriz transpuesta, es decir, la condición $A_s = A_s^T$ debe ser verdadera por lo que sus elementos deben satisfacer $a_{ij} = a_{ji}$.

En robótica es común el empleo de las matrices simétricas, y se encuentran presentes tanto en la dinámica del robot como en los esquemas de control.

Por ejemplo la siguiente matriz es simétrica.

$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}^T$$

donde $a_{12} = a_{21} = 4$, $a_{13} = a_{31} = 9$, $a_{23} = a_{32} = 6$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



Cualquier matriz diagonal es una matriz simétrica.

Matriz antisimétrica

Una matriz antisimétrica será representada por $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la cual satisface la condición $A_{sk} = -A_{sk}^T$, o sus elementos $a_{ij} = -a_{ji}$. Este tipo de matriz se caracteriza porque todos sus elementos sobre la diagonal tienen valor cero.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Entre las propiedades del modelo dinámico del robot manipulador se encuentra la propiedad de antisimetría, la cual resulta particularmente clave en el diseño de algoritmos de control debido a que facilita notablemente el análisis de estabilidad.

Un ejemplo numérico de una matriz antisimétrica es el siguiente:

$$A_{sk} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -4 & 0 & 6 \\ -8 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -4 & 0 & 6 \\ -8 & -6 & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ y $a_{12} = 4$, $a_{21} = -4$, $a_{13} = 8$, $a_{31} = -8$, $a_{23} = 6$, $a_{32} = -6$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Cualquier matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ puede ser expresada como la suma de una matriz simétrica $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz antisimétrica $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i. e.:

$$A = A_s + A_{sk} \quad (3.14)$$

Además dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus correspondientes matriz simétrica A_s y matriz antisimétrica A_{sk} se obtienen respectivamente como:

$$A_s = \frac{A + A^T}{2} \quad (3.15)$$

$$A_{sk} = \frac{A - A^T}{2} \quad (3.16)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ ♣ Ejemplo 3.5

Obtener las partes simétrica y antisimétrica de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Solución

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ A_{sk} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= A_s + A_{sk} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Funciones cuadráticas

Generalmente el tipo de energía aplicada al robot es de la forma cuadrática, es decir, de la forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tomando en cuenta que la matriz A se puede descomponer en su parte simétrica y antisimétrica, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T [A_s + A_{sk}] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Como se ve, el resultado de esta función sólo dependerá de la parte

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary
ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

simétrica ya que la parte antisimétrica se anula $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \equiv 0$.

Se denomina **propiedad de antisimetría** a la multiplicación de un vector transpuesto seguido de una matriz antisimétrica y el mismo vector columna, lo cual produce un escalar idéntico a cero:

$$\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \equiv 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

La propiedad de antisimetría se usa ampliamente en robótica, es una propiedad clave e importante del modelo dinámico y es particularmente útil en el análisis y diseño de algoritmos de control, además de que facilita el álgebra involucrada en el análisis de estabilidad vía Lyapunov.

Para verificar que la propiedad de antisimetría se cumple, sin pérdida de generalidad supóngase que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{sk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces realizando las operaciones correspondientes para la parte antisimétrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_{12}-a_{21}}{2} x_2 & -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{12} - a_{21}}{2} x_1 x_2 - \frac{a_{12} - a_{21}}{2} x_1 x_2 = 0.$$

Esta propiedad de la matriz antisimétrica es muy importante en el diseño de funciones de energía para robots manipuladores. Debe cuidarse que la función cuadrática de la energía que se le inyecta al robot no incluya una matriz antisimétrica, debido a que no contribuye. En otras palabras el robot no se moverá.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ ♣ Ejemplo 3.6

Convertir el siguiente polinomio a su forma como producto de un vector transpuesto, una matriz cuadrada y un vector columna ($\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$).

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

670 Solución

ebrary

El formato pedido de $V(\mathbf{x})$ está dado por:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la función cuadrática $V(\mathbf{x})$ en términos de polinomio tiene la forma

$$V(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + [a_{12} + a_{21}]x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por sustitución directa a_{11} está relacionado con el cuadrado de la primera componente del vector \mathbf{x} , que en este caso es $a_{11} = 3$, mientras que $a_{22} = 4$. Hay que observar que $a_{12} + a_{21} = 3$, y para generar este resultado

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

se tiene un número muy grande de posibilidades, lo cual implica que para este caso la matriz resultante A no es única. Considérese que $a_{12} = 2$ y $a_{21} = 1$, por tanto se tiene que

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad de elegir convenientemente a la matriz A es que sea simétrica, en este caso $a_{12} = a_{21} = \frac{3}{2}$. Obsérvese que la matriz A puede descomponerse en su parte simétrica y antisimétrica.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La parte antisimétrica cumple que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 = 0$$

En ocasiones es muy importante tener un procedimiento para convertir una matriz no simétrica a una simétrica (no confundir con la parte simétrica de la matriz), por ejemplo es útil en la obtención de la norma de una matriz. Una forma de hacer esto es mediante la siguiente expresión:

$$A_{\text{simétrica}} = \{A^T A\} \quad (3.17)$$



No debe confundirse el procedimiento de la ecuación (3.17) con la obtención de la parte simétrica de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ecuación (3.15). Son procedimientos completamente diferentes y no conducen al mismo resultado.

♣ ♣ Ejemplo 3.7

Convertir la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a una matriz simétrica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Solución

Para obtener la matriz simétrica convertida, se emplea la ecuación (3.17):

$$A_{\text{simétrica}} = \{A^T A\} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 22 & 41 \end{bmatrix}$$



Valores propios

Los valores propios son una característica muy importante de las matrices cuadradas. Para cada matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existen n valores propios, en general números complejos, denotados por $\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\}$. El procedimiento para obtener los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} \det|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & \lambda - a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-2} \lambda^2 + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

El polinomio al que da lugar el determinante $|\lambda I - A|$ se llama polinomio característico, y es un polinomio de orden n en la variable λ . Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de dimensión n , entonces tendrá n valores propios λ .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

♣ ♣ Ejemplo 3.8

Obtener los valores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

El polinomio característico es:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -3 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 11\lambda + 24 = (\lambda - 8)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

y los valores propios son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 3$. ■■■

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Para el caso de una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus valores propios son números reales:



$$\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\} \in \mathbb{R}.$$










3.3.3 Norma espectral

Hay varios tipos de normas para matrices; en esta obra se emplea la norma espectral. La norma espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota con el símbolo $\|A\|$ y se define como:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{A^T A}^{\max}}$$

donde $\lambda_{A^T A}^{max}$ representa el valor propio máximo del producto resultante de las matrices $A^T A$; aquí se ha empleado la ecuación (3.17) para obtener el valor propio máximo $\lambda_{A^T A}^{max}$ de la matriz simétrica convertida $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La norma espectral de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface las siguientes propiedades:

-  $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A\| > 0$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A\| - \|B\| \leq \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A - B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A^T B\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Considérese la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En este caso se tiene que:


6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary


-  La norma euclidiana del vector $A\mathbf{x}$ satisface:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|,$$

donde $\|A\|$ denota la norma espectral de la matriz A , mientras que $\|\mathbf{x}\|$ representa la norma euclidiana del vector \mathbf{x} .

-  Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el valor absoluto de $\mathbf{y}^T A\mathbf{x}$ satisface:

$$|\mathbf{y}^T A\mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

-  Si la matriz A es simétrica y definida positiva, entonces su norma espectral satisface: $\|A\| = \lambda_A^{max}$ y $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_A^{min}}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Definiciones de funciones

Definición 3.1. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces f es una función acotada sobre \mathcal{D} si existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|f(x)\| \leq \alpha, \forall x \in \mathcal{D}$.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \in \mathcal{D}$, entonces f es una función continua en $x \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, tal que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon, \forall y \in \mathcal{D}$, satisface $\|x - y\| < \delta$. Una función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \in \mathcal{D}$ es una función discontinua en $x \in \mathcal{D}$ si f no es continua en x .

Definición 3.3. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es estrictamente creciente sobre \mathcal{I} , si para cada $(x, y) \in \mathcal{I} x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. La función es creciente (no decreciente) sobre el conjunto \mathcal{I} si para cada $(x, y) \in \mathcal{I} x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. f es una función estrictamente decreciente sobre \mathcal{I} si para cada $x, y \in \mathcal{I} x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. f es decreciente (no creciente) sobre \mathcal{I} si para cada $x, y \in \mathcal{I} x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Definición 3.4. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es monótona sobre \mathcal{I} si es creciente o decreciente. Nótese que si la función f es creciente, entonces $-f$ es decreciente.

Definición 3.5. Convergencia monótona de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para una función decreciente (creciente) sobre \mathbb{R} . Asímbase que existe un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \gamma$ ($f(x) \leq \gamma$), entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe.






3.4 Funciones definidas positivas

Las funciones definidas positivas son ampliamente utilizadas en el diseño y desarrollo de algoritmos de control de robots, y se interpretan como la inyección de energía aplicada al robot para poderlo mover desde su posición inicial al punto deseado (punto final).

A continuación se presentan los conceptos y definiciones de esta clase de funciones.

Una función definida positiva es una función continua en su argumento $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface lo siguiente:

-  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$
-  $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
-  $V(x) \rightarrow \infty$, cuando $\|x\| \rightarrow \infty_+$, es decir $V(x)$ es *radialmente no acotada*.

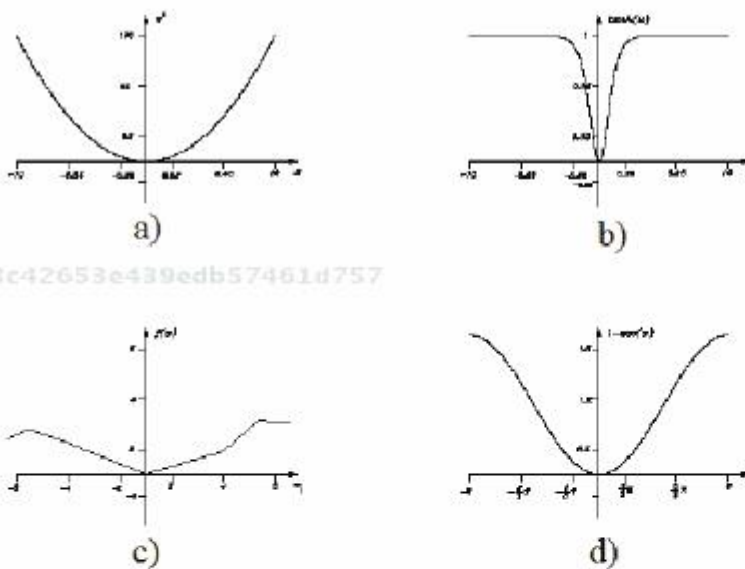
La función definida positiva sólo puede ser cero cuando su argumento es cero, para cualquier otro valor de su argumento la función $V(x)$ siempre será positiva. Cuando la función cumple con todos esos requisitos en el espacio de su argumento ($x \in \mathbb{R}^n$), entonces se le denomina **función definida positiva global**.

Si la función $V(x)$ es definida positiva sólo para una parte acotada de su argumento, es decir ($x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho, \rho \in \mathbb{R}_+$), se le denomina **función definida positiva local** y en este caso satisface lo siguiente:

-  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$
-  $\exists \rho > 0, \gamma > 0 : 0 < V(x) < \gamma, \forall x \neq 0, y \|x\| < \rho$.

Con respecto a la notación $V(\mathbf{x}) > 0$ debe leerse con cuidado su interpretación de función definida positiva. Deberá entenderse que la única posibilidad de hacerse cero es exclusivamente cuando el argumento es cero, $V(\mathbf{0}) = 0$, y por lo tanto la notación $V(\mathbf{x}) \geq 0$ no deberá usarse. En tal caso se estaría hablando de otro tipo de función $V(\mathbf{x}) = 0$ para argumentos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; a este tipo de funciones se les denomina *funciones semidefinidas positivas*.

En la figura 3.3 se presentan varios casos de funciones definidas positivas. Por ejemplo, para el caso de la figura 3.3a la función x^2 es global puesto que cumple todos los requisitos para ser una función definida global. En la figura 3.3b, $\tanh^2(x)$ es una función definida positiva en forma local, converge a una constante de valor unitario, y no cumple $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty_+$. En la figura 3.3c la función f es definida positiva en



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Figura 3.3 Comparación entre funciones definidas locales y globales

forma local, debido a que a partir de $x = 5$ la función decrece, es decir $f(5) > f(6)$. Finalmente, para el caso de la figura 3.3d, $1 - \cos(x)$ sólo es definida positiva en forma local para el intervalo $x \in (-\pi, \pi)$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

♣ Ejemplo 3.9

Analizar si la función $V(x) = x^2$ es definida positiva.

Solución

Considérese la función escalar $V(x) = x^2$. Evaluando en cero se tiene que $V(0) = 0$; sin importar el signo de la variable x se tiene que la función $V(x) > 0$. Obsérvese que si $x \rightarrow \infty_-$ o $x \rightarrow -\infty_+$, se tiene que $V(x) \rightarrow \infty_+$. Además, es global debido a que todos los requisitos de la función definida positiva se cumplen en todo el espacio de x , en este caso en todo el conjunto de los números reales, es decir, no está limitada a una región específica.

**♣ Ejemplo 3.10**

Analizar si la siguiente función escalar

$$V(x) = 1 - \cos(x)$$

es definida positiva.

Solución

Esta función es cero cuando $x = 0$, y cumple con todos los requisitos de una función definida positiva local en la región $x \in (-\pi, \pi)$, es decir, si $|x| < \pi$ entonces $0 < V(x) < 2$.



Obsérvese que la definición de función definida positiva local no está limitada a satisfacer que existan números positivos γ, ρ tales que $0 < V(\mathbf{x}) < \gamma$, para una región acotada de $\|\mathbf{x}\| < \rho$, también incluye la siguiente posibilidad:

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es definida positiva si existe una función definida positiva $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$0 < V(\mathbf{x}) \leq \Psi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

En este caso la cota superior es la función $\Psi(\mathbf{x})$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Sin embargo, debe notarse que el argumento \mathbf{x} cubre todo su espacio, es decir no permanece acotado.

Considérense las siguientes funciones escalares:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \cosh(x) - 1 \\ V(x) &= \tanh^2(x) \\ 0 &< \tanh^2(x) < \Psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

donde \tanh y \cosh representan la función coseno hiperbólico y tangente hiperbólica, respectivamente. La función Ψ es definida positiva, puesto que $\Psi(0) = 0$, y para $x \neq 0$, $\Psi(x)$ cumple con todos los requisitos de una función definida positiva global. Al mismo tiempo sirve para mostrar que si la función $V(x)$ es definida positiva en forma local, no es necesario que el argumento x se encuentre acotado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Las funciones cuadráticas son el caso más común para funciones definidas positivas. En general, para que este tipo de funciones sea del tipo función definida positiva deberá cumplir que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea definida positiva.

Matriz definida positiva

La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota con el símbolo $A > 0$ para representar un tipo especial de matriz cuadrada de relevancia en robótica y control.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA




Debe tenerse cuidado en la interpretación de esta simbología, **no debe leerse matriz A mayor que cero**, ya que esto no tiene sentido en el análisis y teoría de matrices.

A continuación se establece un criterio para determinar si una función cuadrática de la forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ es definida positiva.

Teorema de Sylvester


Establece que la función $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ es definida positiva si y sólo si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($A > 0$) para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Una matriz $A > 0$ es definida positiva si cumple con los siguientes requisitos:

-  La matriz A de la función cuadrática, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, debe ser una matriz simétrica $A = A^T$.
-  El primer elemento de la matriz a_{11} de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ debe ser positivo, es decir $a_{11} > 0$.
-  Todos los determinantes menores deben ser positivos, consecuentemente el determinante de la matriz es $|A| > 0$.

Observación: en el caso de las funciones cuadráticas definidas positivas $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ se requiere que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea simétrica, debido a la propiedad de antisimetría $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} = 0$ por lo que $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x} > 0$.

A continuación se listan las propiedades de la matriz definida positiva:

-  La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ es una matriz no singular, es decir existe la matriz inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y también resulta ser definida positiva $A^{-1} > 0$.



Todos sus valores propios son números reales positivos: $\lambda_i\{A\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

♣ ♣ Ejemplo 3.11

Determinéese si la siguiente función

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

es definida positiva.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Para resolver este problema primero hay que comprobar si la función en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vale $V(\mathbf{0}) = 0$. Como se comprueba directamente, esta condición es verdadera. Como segundo paso en el análisis de la función, hay que obtener la matriz A . La matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Empleando el teorema de Sylvester, la matriz A es la matriz identidad y para ésta se tiene que:



A es simétrica



$a_{11} = 1$



$|A| = 1$

Por lo tanto, la matriz es definida positiva de forma que $A > 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ Ejemplo 3.12

Determinese si la siguiente función

$$V(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

es definida positiva.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Solución**

Antes que nada se tiene que la matriz A se puede obtener de la siguiente expresión:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El análisis de la matriz A se puede llevar a cabo a partir del teorema de Sylvester:

- A es simétrica
- $a_{11} = 1$
- $|A| = 0$

Por lo tanto la matriz no es definida positiva. En este caso la matriz es semidefinida positiva y de aquí se sigue que $A \geq 0 \Rightarrow$ la función es semidefinida positiva $V(x) \geq 0$.




Función semidefinida positiva

Una función $V(x)$ es semidefinida positiva cuando $V(x) = 0$ si $x \neq 0$. La función $V(x) = x^T A x \geq 0$ es semidefinida positiva si y sólo si la matriz

3.4 Funciones definidas positivas

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semidefinida positiva, esto es, si y sólo si $A \geq 0$ (obsérvese la inclusión del símbolo ≥ 0).

Una matriz es semidefinida positiva si satisface las siguientes condiciones:

-  La matriz A debe ser una matriz simétrica, esto es, $A = A^T$.
-  El primer elemento de la matriz debe ser positivo, es decir, se debe cumplir que $a_{11} > 0$.
-  Alguno de los determinantes menores o el determinante $|A|$ es menor o igual a cero.

La notación de una matriz semidefinida positiva, $A \geq 0$, no se debe de interpretar como que la matriz A es mayor o igual a cero, ya que esta interpretación de la notación no tiene ningún significado en el tema de matrices.

Función definida negativa

Una función $V(\mathbf{x})$ es definida negativa, lo cual se denota como $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$, si la matriz $-A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($-A > 0$).

Función semidefinida negativa

Una función $V(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa, lo que se denota como $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$, si la matriz $-A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva ($-A \geq 0$).

Función indefinidas

Existen funciones que se denominan **indefinidas** y son aquellas en las que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz indefinida, es decir, una matriz en la que algunos de sus determinantes menores son negativos y otros son positivos. Por lo tanto, no son clasificadas ni como funciones definidas positivas, ni como semidefinidas positivas, ni como definidas negativas, ni como semidefinidas negativas.

Las matrices definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas e indefinidas tienen las siguientes propiedades matemáticas que resultan de utilidad en el diseño de esquemas de control:



Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida negativa $A < 0$ tiene todos sus valores propios negativos: $\lambda_i\{A\} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.



Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva $A \geq 0$ tiene todos sus valores propios no negativos: $\lambda_i\{A\} \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.



Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida negativa $A \leq 0$ tiene todos sus valores propios no positivos: $\lambda_i\{A\} \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.



Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indefinida tiene algunos valores propios positivos y otros más son negativos.



Teorema 3.1 Rayleigh–Ritz

El teorema de Rayleigh–Ritz establece que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

$$\lambda_A^{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_A^{\max} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

donde los valores propios máximo y mínimo de A están denotados por λ_A^{\max} y λ_A^{\min} , respectivamente.

El teorema de Rayleigh–Ritz es ampliamente utilizado en el diseño de algoritmos de control de robots manipuladores, particularmente se emplea en el problema de control de posición para acotar la norma del error.

Una generalización del teorema de Rayleigh–Ritz es para el siguiente caso:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_{\max} \{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20)$$



3.4.1 Derivadas parciales de funciones de energía

A continuación se presentan algunas operaciones básicas que son ampliamente usadas en robótica y que están relacionadas con el cálculo de derivadas de vectores y matrices. Se describe la forma de derivar un escalar con respecto a un vector, o la derivada de un vector con respecto a un vector, lo cual se aplica cuando la estructura a derivar está compuesta de vectores y matrices como es el caso de las funciones cuadráticas que inyectan energía a los robots manipuladores: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.

Matriz jacobiana

Sea f una función diferenciable de un campo vectorial n -dimensional a otro campo vectorial m -dimensional $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Las derivadas parciales de las m funciones pueden ser representadas por un arreglo matricial denominado matriz jacobiana, en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

La *matriz jacobiana*, representada por $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es una matriz formada por derivadas parciales de primer orden, la cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$J = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La utilidad de la matriz jacobiana se ubica en varias áreas de la robótica, en el análisis de singularidad de robots manipuladores, planeación de trayectorias, cinemática diferencial, así como en control cartesiano con la estructura de jacobiano transpuesto, en este tema se encuentran control de impedancia, control de fuerza, control híbrido fuerza/posición y visual servoing.

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)



Carl Gustav Jakob Jacobi, matemático alemán, nació el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia, actual Alemania. Estudió en la Universidad de Berlín, obtuvo su doctorado en 1825 sobre análisis de la teoría de fracciones. Realizó numerosas aportaciones en la teoría de números y en el área de las ecuaciones diferenciales, en particular desarrolló la teoría de las funciones elípticas y propuso un método para resolver integrales elípticas usando series exponenciales.

En robótica, en el área de cinemática diferencial se emplea el concepto de jacobiano del robot, el cual permite extraer información acerca de las singularidades del robot, es decir posiciones específicas del robot tal que el determinante de la matriz jacobiana se anula. La matriz jacobiana también es fundamental en el control cartesiano.

Luego de una brillante carrera, Jacobi murió el 18 de febrero de 1854 en la ciudad de Berlín.

♣ Ejemplo 3.13

Obtener la matriz jacobiana de la siguiente función vectorial:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_1 x_3 \\ \text{sen}(x_3)x_2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Solución**

De acuerdo con la definición, la matriz jacobiana de esta función vectorial es:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2 + x_1 x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2 + x_1 x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(x_1^2 + x_1 x_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\text{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\text{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\text{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(x_1^2 x_2^2 x_3^2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2 x_2^2 x_3^2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(x_1^2 x_2^2 x_3^2)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & \text{sen}(x_3) & \cos(x_3)x_2 \\ 2x_1 x_2^2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2^2 x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Gradiente**

El gradiente es un campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de primer orden de una función escalar:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

El gradiente está representado por el operador $\nabla V(\mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Hay que observar que la matriz jacobiana puede ser representada en términos de gradiente de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x})^T \\ \nabla f_2(\mathbf{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Geoméricamente el gradiente representa un vector normal a la superficie de la función de energía que se le inyecta al robot, indica la dirección en la cual la energía se decrementa más rápido. El gradiente apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima, y la norma del gradiente representa la magnitud de decremento en una determinada dirección.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ Ejemplo 3.14

Obtener el gradiente de la siguiente función:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Solución

$$\begin{aligned} \nabla V(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{\partial x_1} \\ \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

♣ ♣ Ejemplo 3.15

Considérense los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y defínase la función $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$, con $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$.
Obtener el gradiente.

Solución

El gradiente de esta función es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\mathbf{x}^T A \mathbf{y}\}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} A^T \mathbf{x} \\ &= A \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} A^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz jacobiana que para este caso resulta ser la matriz identidad.

Al derivar también se ha utilizado la propiedad $\mathbf{x}^T \underbrace{A \mathbf{y}}_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} = \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{y})^T \mathbf{x}}_{\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x}$.



Obsérvese que el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ carece de movilidad al interior de la estructura matemática de la función $V(\mathbf{x})$. Es muy importante tener claro la función que realiza este operador, ya que es común cometer errores al darle propiedades de un operador escalar. En este caso, de acuerdo con la función cuadrática se emplea álgebra de vectores y matrices para conmutar al extremo derecho el vector \mathbf{y} de la función $V(\mathbf{x})$ y el vector \mathbf{x} moverlo al extremo izquierdo, es decir intercambiar el vector \mathbf{y} por el vector \mathbf{x} .

♣ ♣ Ejemplo 3.16

Obtener el gradiente de la siguiente función de energía: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

Solución

Empleando el resultado del ejemplo 3.15 el gradiente $\nabla V(\mathbf{x})$ adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla V(\mathbf{x}) &= \nabla \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} \quad (3.24) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La expresión obtenida en (3.24) es válida si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, en otro caso:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \nabla \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \} = [A + A^T] \mathbf{x} \quad (3.25)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El resultado de la expresión (3.24) reproduce el obtenido en el ejemplo 3.14

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \nabla V(\mathbf{x}) &= 2A\mathbf{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Derivada temporal de una función de energía

La derivada con respecto al tiempo de una función de energía con la estructura de función cuadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ se obtiene de la siguiente

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T A \mathbf{x}] & (3.26) \\
 &= \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \frac{d}{dt} A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\
 &= \dot{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} \\
 &= 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la notación $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\dot{A} = \frac{d}{dt} A$. La expresión (3.26) es válida si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, en otro caso se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [A + A^T] \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \quad (3.27)$$

Es importante resaltar que el operador escalar $\frac{d}{dt}$ tiene movilidad al interior de la estructura matemática de la función $V(\mathbf{x})$, en contraste con el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, el cual permanece inmóvil.

Es una práctica común que en las funciones de energía $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea simétrica y definida positiva, junto con elementos constantes por lo que su derivada adquiere la siguiente forma:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} \quad (3.28)$$

♣ ♣ Ejemplo 3.17

Obtener la derivada temporal de la siguiente función de energía:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

Solución

Empleando el operador escalar $\frac{d}{dt}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d(x_1^2)}{dt} + \frac{d(8x_1x_2)}{dt} + \frac{d(3x_2^2)}{dt} \\ &= 2x_1\dot{x}_1 + 8\dot{x}_1x_2 + 8x_1\dot{x}_2 + 6x_2\dot{x}_2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por otro lado, empleando el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ se obtiene que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned}V(x_1, x_2) &= x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Empleando cálculo diferencial, y suponiendo la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, la derivada temporal de la función de energía $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ adquiere la siguiente forma:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \\ &= \nabla V(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \\ &= 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x}\end{aligned} \quad (3.29)$$

Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es constante, entonces $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}}$.

En general, si la función de energía se forma bajo las condiciones de que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, $w(t) \in RE_+$, $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, entonces la derivada temporal está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \\ &\quad \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial t}\end{aligned} \quad (3.30)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Definiciones

Definición 3.6. Considérese el sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \forall t \geq 0$, entonces el sistema se llama *sistema dinámico autónomo invariante en el tiempo*.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, entonces \mathbf{f} es *uniformemente continua* en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$, satisface $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Si $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en \mathcal{D} , entonces \mathbf{f} es una función continua para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Lo contrario de esta afirmación, no necesariamente es verdadero.

Definición 3.8. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces \mathbf{f} es una *función continua Lipschitz* en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, si existe una constante Lipschitz $l = l(\mathbf{x}_0) > 0$ y una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 tal que:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq l \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}$.

\mathbf{f} es una *función continua Lipschitz globalmente* si \mathbf{f} es una función *uniformemente Lipschitz* sobre $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

Definición 3.9. Se tiene un *conjunto atractor* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si existe una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{N} \forall t \geq 0$ y $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{M}$ conforme el tiempo tiende a infinito $t \rightarrow \infty$. El *dominio de atracción* $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ está dado por $\mathcal{M}_0 = \{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D} : \text{si } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}\}$.




3.5 Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos que se encuentran presentes en el robot. Para propósitos de análisis y diseño, en robótica se emplea como modelo dinámico una estructura matemática que incluye una ecuación diferencial de primer orden expresada de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.31)$$

donde \mathbf{x} representa la variable de estado, la cual proporciona información interna de los estados de la dinámica del sistema físico o mecánico en el caso del robot. La variable de estado \mathbf{x} es una función continua del tiempo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y es la solución de la ecuación diferencial, en particular $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se conoce como la condición inicial o estado inicial.

La función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un mapeo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo en la variable de estado que satisface lo siguiente:

-  La ecuación (3.31) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial $\mathbf{x}(0)$.
-  La variable de estado \mathbf{x} es una función continua del tiempo t , y esta dependencia es una característica propia o intrínseca. Por tanto, la derivada $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ existe y tiene sentido.
-  Si $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (3.31) correspondiente a la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}(t)$ depende de manera continua del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Continuidad Lipschitz: la función \mathbf{f} es localmente continua Lipschitz en \mathbf{x} si para algún $h > 0$, existe $l \geq 0$ tal que,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq l \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_h, \quad t \geq 0 \quad (3.32)$$

Aquí B_h significa una región esférica $B(0, h)$ de radio h y centrada en cero, la constante l se llama constante Lipschitz. Una definición para una función f continua Lipschitz en forma global es que la relación (3.32) sea válida $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

En el sistema (3.31) la variable tiempo t no aparece de manera explícita, por esto se le denomina **sistema dinámico autónomo** y sirve para representar a los sistemas dinámicos lineales y no lineales. Cuando el tiempo aparece explícitamente como parte de la estructura matemática, entonces se le denomina **sistema dinámico no autónomo**: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Las siguientes estructuras matemáticas son ejemplos de sistemas dinámicos no lineales autónomos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \text{sen}(x_2) \\ \vdots \\ x_n^3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \tanh(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \cos(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{sen}(\mathbf{x})$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Hay que observar que la denominación de sistemas dinámicos no lineales es respecto a la variable de estado \mathbf{x} , es decir la variable de estado es argumento de una función no lineal.

Un sistema lineal autónomo, invariante en el tiempo, está dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

Aquí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz con coeficientes constantes.

Ejemplos de sistemas dinámicos no autónomos lineales y no lineales son

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Lipschitz (1832-1903)



Rudolph Otto Sigmund Lipschitz, matemático alemán, nació el 14 de mayo de 1832. En 1864 fue profesor de la universidad de Bonn. En su honor, la condición de continuidad de Lipschitz lleva su nombre; ésta garantiza la solución única para sistemas dinámicos de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; dicha contribución representa una fortaleza para el desarrollo de sistemas dinámicos aplicados a la robótica.

También realizó una gran cantidad de aportaciones en diversas áreas de las matemáticas, entre las que sobresalen: teoría de números, álgebras con involución, análisis matemático, etc. Lipschitz trabajó sobre el método de Hamilton Jacobi de integración de ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos. Murió el 7 de octubre de 1903.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ALFAOMEGA

los siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^2 \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(x_2)e^t \\ \vdots \\ x_n^3 \frac{t}{1+t^4} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \tanh(\mathbf{x}) \operatorname{cosh}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \cos(\mathbf{x})t^3$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}t^9$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}(\mathbf{x}t^{100})$$

Normalmente los modelos dinámicos tienen una estructura diferente a la de la ecuación 3.31, siempre es posible mediante un adecuado cambio de variables de estado transformar un sistema dinámico a la forma 3.31.

♣ ♣ Ejemplo 3.18

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, y la respuesta del sistema está determinada por $y \in \mathbb{R}$. Obtener la representación en variables de estado de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Solución

La representación en variables de estado de la forma 3.31 se obtiene mediante el siguiente procedimiento.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Teniendo en cuenta que $y = x_1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1\end{aligned}$$

La ecuación anterior puede adquirir la forma vectorial de un sistema lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ ♣ Ejemplo 3.19

Considérese el siguiente sistema dinámico no lineal

$$\tau = \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta \operatorname{sen}(y)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, $\tau \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada y la respuesta del sistema es $y \in \mathbb{R}$.

Obtener la representación en variables de estado.

Solución

La representación en variables de estado de la forma 3.31 se obtiene como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta \operatorname{sen}(x_1) + \tau\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Puntos fijos

Considérese el sistema dinámico autónomo (3.31). El vector $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (3.33)$$

La interpretación geométrica de los puntos fijos de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ son los puntos de intersección de la gráfica de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con la recta de \mathbf{x} .

Algunas funciones tienen uno o más puntos fijos:

- $f(x) = x^3$ tiene tres puntos fijos: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(0) = 0$.
- $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos: $f(0) = 0$, y $f(1) = 1$.
- La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene como único punto fijo $x^* = 0$.
- La función $f(x) = e^x$ no tiene ningún punto fijo.
- La función $f(x) = x$ tiene un número infinito de puntos fijos.







3.5.1 Puntos de equilibrio

Un **punto de equilibrio** o estado de equilibrio es un vector constante $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ del sistema (3.31) si cumple con la siguiente condición:



$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.34)$$

Obsérvese que si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se encuentra justo en el punto de equilibrio, entonces se satisface que $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0$. El punto de equilibrio es un ente dinámico donde todas las fuerzas del sistema encuentran su equilibrio. El punto de equilibrio del sistema dinámico tiene propiedades particularmente importantes para control de robots, por ejemplo el punto de equilibrio puede ser estable o inestable.

Los sistemas dinámicos no lineales son diversos en lo que se refiere a la existencia del punto de equilibrio, siendo las siguientes algunas de las posibilidades:

-  Un solo y único punto de equilibrio: $\dot{x} = x^2$.
-  Un número finito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = x^3 [x - 1]$; puntos de equilibrio $x = 0$ y $x = 1$.
-  Un número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = \text{sen}(x)$; puntos de equilibrio $x = 0, \pm n\pi$.
-  No tiene puntos de equilibrio: $\dot{x} = e^x$.

En los sistemas dinámicos lineales se pueden dar sólo dos posibilidades:

-  Puede tener un solo y único punto de equilibrio: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diferente de cero, *i. e.* $\det[A] \neq 0$.
-  Tiene un número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es cero, *i. e.*, $\det[A] = 0$.

Como se expone en la siguiente sección, la teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales o no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

El estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos se caracteriza por analizar la respuesta del sistema para pequeñas perturbaciones en los estados del sistema. Un punto de equilibrio se dice ser estable si para valores pequeños de perturbaciones iniciales, el movimiento perturbado permanece en el espacio de estados. La metodología de Lyapunov no re-

quiere resolver la ecuación diferencial, la cual puede ser muy complicada. La estabilidad del punto de equilibrio se demuestra por proponer funciones de energía definida positiva al sistema, tal que su potencia sea semidefinida negativa. Si la derivada de la energía o potencia resulta una función definida negativa se habrá demostrado estabilidad asintótica del punto de equilibrio. Los algoritmos de control que se emplean en robótica están directamente relacionados con la estabilidad asintótica y no con la propiedad de estabilidad.



3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov es una herramienta indispensable para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos. Históricamente, en el siglo XV el problema que llamó la atención fue la estabilidad del sistema solar generalizado en el título *Problema de estabilidad de N cuerpos rígidos*. Torricelli (1608–1647) fue de los primeros en formalizar lo que se conoce como *mínima energía total*, postuló que un sistema de cuerpos tiene un punto de equilibrio (local) estable, si dicho punto tiene mínima energía total.

A mediados del siglo XVIII, Lagrange y Laplace generalizaron las ideas de Torricelli con el siguiente principio: *si el sistema es conservativo, es decir el sistema conserva la energía total (energía cinética más potencial), entonces un estado del sistema correspondiente a cero energía cinética y un mínimo de energía potencial es un punto de equilibrio estable*. Otros científicos mostraron que el principio de Torricelli también se cumple cuando el sistema es disipativo, es decir, cuando la energía total se decrementa a lo largo de las trayectorias del sistema.

En esencia los teoremas de estabilidad de Lyapunov son la generalización del principio de Torricelli. La teoría de Lyapunov es muy importante en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos lineales y no lineales,

sin importar el orden del sistema: permite obtener información sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema sin resolver la ecuación diferencial que caracteriza a dicho sistema dinámico; ofrece una precisa caracterización de aquellas funciones que califican como *funciones de energía* en la vecindad del punto de equilibrio y la noción de que aquellas *funciones de energía* se decrementan a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico en cuestión, lo que significa que la derivada temporal de la energía (potencia del sistema) debe ser negativa definida, hasta alcanzar un estado de equilibrio.

La definición abstracta de estabilidad para un sistema dinámico no necesariamente se derivó de un sistema conservativo o disipativo. Fue hasta 1892 cuando Alexander Mikhailovich Lyapunov estableció contribuciones sobre el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos no lineales en su trabajo *The General Problem of the Stability of Motion*. Los resultados de Lyapunov incluyen los métodos directos e indirectos, junto con el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, los cuales proporcionan una fuerte metodología para el diseño de esquemas de control que garantice la estabilidad del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

El método directo establece que si se construye una función de energía en los estados del sistema como función definida positiva continua diferenciable, la variación temporal debida a pequeñas perturbaciones en una vecindad del punto de equilibrio es siempre negativa o cero, entonces el punto de equilibrio es estable en forma global, es decir, para toda condición inicial que se encuentre dentro de la región de atracción. Sin embargo, si la razón de cambio de la función definida positiva es estrictamente negativa, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable en forma global. Nótese que la razón de cambio de la función definida positiva corresponde a la potencia del sistema. En contraste, el método indirecto aborda únicamente la estabilidad local del punto de equilibrio de sistemas dinámicos linealizados. La estabilidad local se caracteriza sólo para algunas condiciones iniciales.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918)



Matemático y físico ruso, Lyapunov nació el 6 de junio de 1857 en Yaroslavl, Rusia Imperial. Estudió en la Universidad de San Petersburgo, formalizó el concepto de estabilidad en respuesta al problema abierto de determinar configuraciones estables de cuerpos en rotación en fluidos, propuesto por Poincaré y fue profesor de la Universidad de Kharkov, contemporáneo de Routh y Hurwitz (control clásico). Lyapunov obtuvo su doctorado con honores en 1892 en tópicos de estabilidad para sistemas dinámicos que detonó el desarrollo de control en robótica. En 1918 su esposa Natalia enfermó de tuberculosis y por la mala situación económica que pasaban murió el 31 de octubre de 1918; tres días después, el 3 de noviembre Lyapunov se suicidó con un disparo en la cabeza. No dejó descendencia. A partir de 1950, se reconoció el valor de su legado científico y las bases del control moderno.

Existen herramientas para determinar la estabilidad de sistemas lineales, tales como Bode, Nyquist, Routh, lugar de las raíces (*root locus*), etc. Sin embargo, dichas herramientas no se aplican a sistemas no lineales o lineales variables en el tiempo. La técnica del plano fase es aplicable a sistemas de primer y segundo orden. Bajo el enfoque de Nyquist, es posible emplear la técnica de la función descriptiva a un tipo de sistemas no lineales; dicha técnica es sólo aproximada.

Esta sección está destinada a presentar los conceptos básicos de estabilidad para el punto de equilibrio del modelo dinámico (3.35), particularmente el denominado **segundo método** o **método directo** de Lyapunov. Sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante se supondrá que el punto de equilibrio es el vector constante cero: $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Si este no fuera el caso, siempre es posible trasladar el punto de equilibrio con un adecuado cambio de coordenadas al origen de estados.

Es importante resaltar que los atributos de estabilidad son sobre el punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ y no sobre el sistema en sí, ni de sus soluciones.



3.6.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

El concepto de estabilidad tiene varias interpretaciones dependiendo del campo del conocimiento donde se aplica; por ejemplo, en ciencias naturales o en economía un sistema es estable si una determinada variable del sistema se incrementa monótonamente, de acuerdo con una ecuación exponencial. Similarmente en astronomía, el movimiento de un cuerpo celestial es considerado como estable si alguna de sus órbitas no difiere de la previa. En ingeniería, la estabilidad de un sistema significa que después de un intervalo de tiempo el error permanece dentro de un rango específico o bien se decrementa a cero. No obstante, dentro del área de ingeniería es donde el concepto de estabilidad tiene varias facetas, por ejemplo estabilidad exponencial, clásica, absoluta Popov, entrada-salida,

\mathcal{L} , y en el sentido de Lyapunov.

Sin embargo, de todos los conceptos de estabilidad del área de ingeniería, la que mayor ventaja ofrece es la teoría de estabilidad de Lyapunov debido a que proporciona varias propiedades matemáticas que facilitan el análisis y diseño de esquemas de control.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.35)$$

Esta teoría establece que para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ que se encuentra dentro del atractor, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio.

El concepto de *atractor* o *región de atracción* significa que para cada solución de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que empieza suficientemente cercana a cero, a partir de t_0 se aproxima al origen $\mathbf{0}$ como el tiempo evoluciona, es decir $t_0 + t \rightarrow \infty$.

Hipótesis sobre el sistema dinámico (3.35): consideraremos que el sistema es dinámico autónomo, es decir

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.36)$$



El punto de equilibrio existe: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.



La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua Lipschitz sobre \mathbb{R}^n .



Existe la solución $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y es única, continua en t y diferenciable con respecto al tiempo.



La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua en \mathbf{x} , continua para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciable en t .

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes:

Estabilidad

El origen de la ecuación (3.36) es un *punto de equilibrio estable* (en el sentido de Lyapunov) si para cada $t_0 \geq 0$, y $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\gamma(t_0, \epsilon) > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \gamma(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (3.37)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (3.36), la cual empieza desde $\mathbf{x}(0)$ en t_0 .

En la definición anterior la constante $\gamma(t_0, \epsilon) \leq \epsilon$ no es única. Debe interpretarse que en la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ para cada $\epsilon > 0$ y no para algún $\epsilon > 0$.

En la figura 3.4 se muestra el concepto de estabilidad para el caso $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ donde el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese que existe un ϵ y un γ que satisface la condición de estabilidad, es decir, $\|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$.

El punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es **atractivo** si $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists \eta(t_0) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t_0 + t, t_0, \mathbf{x}(0)) \rightarrow \mathbf{0} \text{ como } t \rightarrow \infty.$$

Estabilidad uniforme

El punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es llamado un *punto de equilibrio estable*

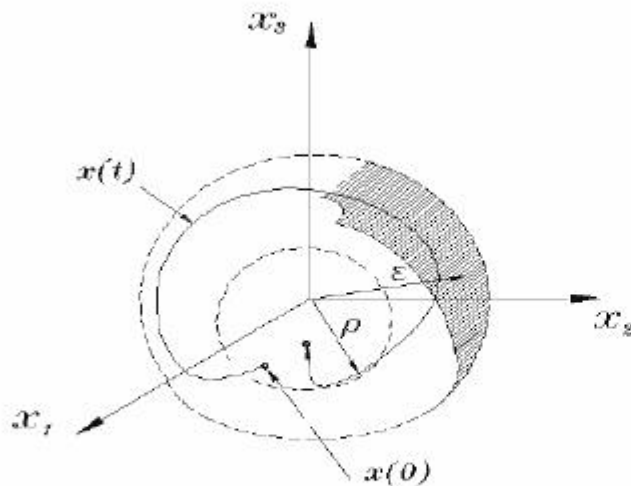


Figura 3.4 Concepto de estabilidad.

uniformemente de (3.36) si $\gamma = \gamma(\epsilon)$ no depende de t_0 .

Equilibrio asintóticamente estable

El origen es un *equilibrio asintóticamente estable* de (3.35) si

✦ El origen es estable.

✦ El origen es atractivo, es decir, existe un número $\gamma' > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \gamma' \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

En la figura 3.5 se ilustra el concepto de estabilidad asintótica para el caso de $x(0) \in \mathbb{R}^2$.

El origen es un *punto de equilibrio asintóticamente global* de la ecuación (3.35) si:

✦ El origen es estable

✦ El origen es atractivo para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

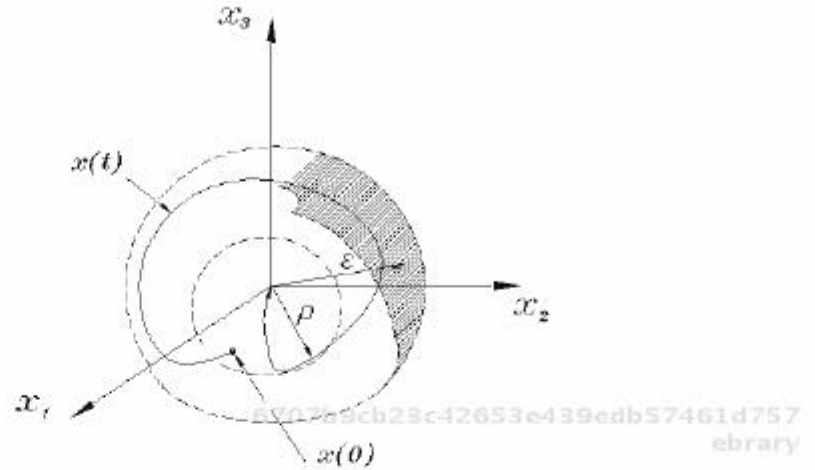


Figura 3.5 Estabilidad asintótica.

En la figura 3.6 se muestra la evolución temporal de la trayectoria $x(t) \in \mathbb{R}^2$ hacia el punto de equilibrio. La condición inicial se encuentra dentro de la región de atracción, entonces $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

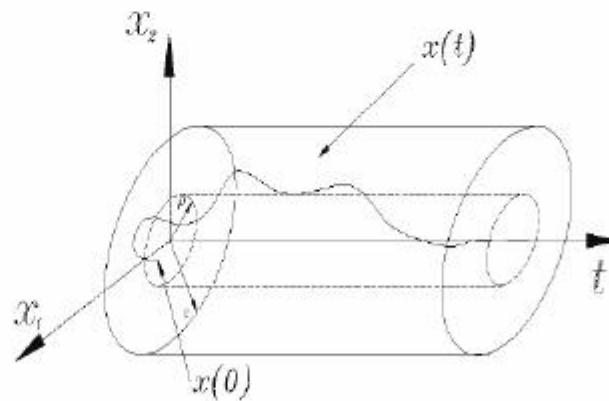


Figura 3.6 Convergencia asintótica al punto de equilibrio.

Los conceptos de estabilidad global y estabilidad asintótica global significan que el punto de equilibrio es único.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El origen es un *punto de equilibrio exponencialmente estable global* de (3.35) si existen constantes positivas α, β y γ tales que:

$$\text{sí } \|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \alpha\|\mathbf{x}(0)\|e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad (3.38)$$

De acuerdo con los conceptos anteriores, un equilibrio exponencialmente estable global es también un equilibrio asintóticamente estable. Sin embargo, lo contrario no necesariamente es verdad.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El origen es un *punto de equilibrio inestable* de la ecuación (3.35) si éste no es estable. Afirmar que el origen de estados es inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\epsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\gamma > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0,$$

en otras palabras, si existe al menos un $\epsilon > 0$, el cual se desea que acote a la norma de la solución $\|\mathbf{x}(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y cuya solución $\mathbf{x}(t)$ lo satisfaga ($\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable. Es importante subrayar que en ningún momento se afirma que la solución $\mathbf{x}(t)$ debe “crecer” indefinidamente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



3.6.2 Función candidata de Lyapunov

La propuesta de la función de Lyapunov es importante debido a que su estructura matemática permite demostrar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio del modelo dinámico (3.36).




Una función $V(\mathbf{x})$ es una *función candidata de Lyapunov* para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple con lo siguiente:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

-  $V(\mathbf{x})$ es una función definida positiva.
-  $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a \mathbf{x} .
-  La derivada con respecto al tiempo $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ existe y es una función continua con respecto a \mathbf{x} .

La derivada con respecto al tiempo de una función candidata de Lyapunov $\dot{V}(\mathbf{x})$ para la ecuación (3.35) a lo largo de sus trayectorias del sistema, está denotada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.39)$$

La derivada temporal de la *función de Lyapunov* $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ para el sistema dinámico (3.35) debe ser una función definida negativa:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$



3.6.3 Método directo de Lyapunov

Con los preliminares anteriores, ahora se pueden presentar los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Es importante mencionar que se presentan los teoremas comúnmente más utilizados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.



Teorema 3.2 Estabilidad

El origen es un *punto de equilibrio estable* de la ecuación (3.35) si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ con derivadas parciales continuas con respecto a \mathbf{x} tal que su derivada temporal satisfaga

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.40)$$

Si se cumple la relación (3.40) significa que la función de Lyapunov es una función decreciente y por lo tanto las soluciones $\mathbf{x}(t)$ del modelo dinámico (3.36) se encuentran acotadas para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

Una *función decreciente* es una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, existe un número real $k < \infty$ tal que

$$V(\mathbf{x}) \leq k \quad \forall \|\mathbf{x}\| \leq r.$$

Para el caso de estabilidad la función de Lyapunov (función definida positiva y su derivada temporal semidefinida negativa) cumple con lo siguiente:

$$V(\mathbf{x}(0)) > V(\mathbf{x}(t)) > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.41)$$



Teorema 3.3 Estabilidad asintótica global

El origen es un estado de equilibrio *global asintóticamente estable* de (3.36), si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$, tal que su derivada satisfaga



$$\dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \quad \forall t \geq 0$$



$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

lo que significa que la variable de estado $\mathbf{x}(t)$ cumple con:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Teorema de estabilidad exponencial global

Estabilidad exponencial global: el origen es un punto de equilibrio *global exponencialmente estable* del sistema dinámico (3.35), si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ y constantes positivas α, γ tales que:

- $\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$

La estabilidad asintótica global en sistema dinámicos autónomos significa que el punto de equilibrio $x_e = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es único y no depende de la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$. Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado equilibrio es una condición necesaria para establecer sobre éste:



Estabilidad asintótica global.



Estabilidad exponencial global.

La propuesta de la función candidata de Lyapunov tal que su derivada satisfaga las condiciones de una función definida negativa no es trivial, depende de la intuición y experiencia del diseñador.

En control de robots la estabilidad no es importante, la parte clave y relevante que debe ser atribuible al algoritmo de control involucrado en el punto de equilibrio del modelo dinámico es la estabilidad asintótica global.

♣ ♣ Ejemplo 3.20

Considérese el siguiente sistema lineal escalar:

$$\dot{x} = -ax \quad x(0) \in \mathbb{R}$$

donde $a \in \mathbb{R}_+$.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica.

Solución

El origen es el único punto de equilibrio. Considérese la siguiente función candidata:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

la cual es una función definida positiva. La derivada temporal está dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial x^2}{\partial x} \dot{x} = x \dot{x} = x \underbrace{(-ax)}_{\dot{x}} = -ax^2 < 0$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

lo que demuestra estabilidad asintótica global, es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

Debe tomarse en cuenta que la propuesta de la función candidata de Lyapunov no es única, es decir puede haber varias funciones o inclusive una familia extensa de funciones miembros, como en el caso de la función

$$V(x) = \frac{1}{2m} x^{2m}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

donde m es un entero positivo. La derivada de la función $V(x)$ con respecto al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^{2m-1} \dot{x} \\ &= x^{2m-1} (-ax) \\ &= -ax^{2m} < 0 \end{aligned}$$

El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo tanto las trayectorias del sistema convergen hacia cero en forma de asintótica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

Plano fase

Henri Poincaré introdujo el plano fase como una herramienta para realizar el estudio de sistemas dinámicos de segundo orden. El plano fase representa un método gráfico que permite deducir información de la estabilidad del sistema. El método consiste en generar un conjunto de trayectorias o curvas de contorno para varias condiciones iniciales $\dot{x}(0), x(0)$ en el espacio de estados \dot{x} vs x , entonces dependiendo del patrón o comportamiento cualitativos de esas trayectorias se deduce características de la dinámica del sistema. Una ventaja que representa es que no requiere resolver analíticamente la ecuación del sistema dinámico. El método se aplica a sistemas lineales y no lineales. En los ejes coordenados no figura el tiempo, únicamente la velocidad \dot{x} y la posición $x(t)$. El tiempo ya se encuentra implícito en las variables de estado.

En el plano fase un *ciclo límite* es una curva cerrada aislada, indicando la naturaleza periódica del movimiento. Por analogía a un punto de equilibrio, hay ciclos límites estables e inestables. Para el caso de ciclos límites estables, trayectorias $[x(t), \dot{x}(t)]^T$ que se encuentren fuera del ciclo límite, tenderán asintóticamente a esa curva cerrada, mientras que si la trayectoria inicia dentro del ciclo límite, permanecerá indefinidamente girando alrededor del punto de equilibrio.

♣ ♣ Ejemplo 3.21

Llevar a cabo el análisis de estabilidad de un sistema mecánico oscilador, el cual se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución

El punto de equilibrio existe y es único.

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1x_2 - x_1x_2 = 0 \end{aligned}$$

por lo que se demuestra la estabilidad del punto de equilibrio.

En la figura 3.7 se muestra el diagrama fase del sistema mecánico oscilador. Nótese las diferentes trayectorias circulares del sistema para las siguientes condiciones iniciales: $[x_1(0), x_2(0)]^T$, con $\{x_1(0) = -3, -2, \dots, 5\}$ y $\{x_2(0) = -4, -3, \dots, 4\}$.

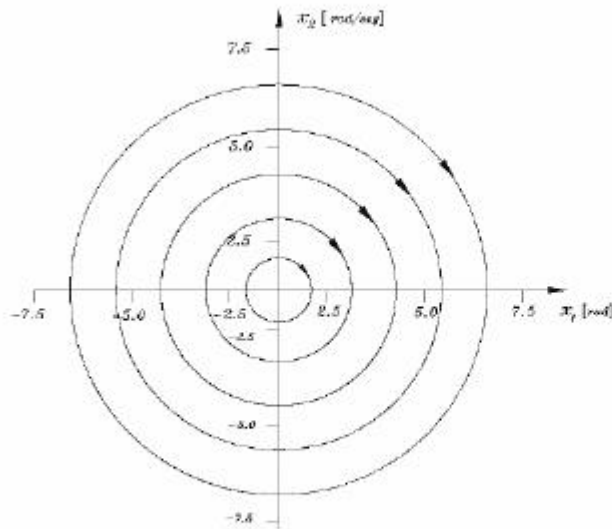
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 3.7 Ciclos límite de un sistema oscilador mecánico.

Si la condición inicial del sistema $[x_1(0), x_2(0)]^T \in \mathbb{R}^2$ es el origen de estados (punto de equilibrio), entonces las soluciones del sistema $[x_1(t), x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ permanecen en el punto de equilibrio, es decir, $[x_1(t), x_2(t)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$. Si la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T \in \mathbb{R}^2$ es diferente a cero, es decir se encuentra fuera del punto de equilibrio, entonces genera una trayectoria circular alrededor del origen de estados.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La figura 3.8 muestra el comportamiento oscilatorio de la posición $x_1(t)$ y velocidad $x_2(t)$, correspondiente a la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [5\text{rad}, 4\text{rad/seg}]^T \in \mathbb{R}^2$.

A continuación se presenta el código MatLab para realizar la simulación de un sistema oscilador mecánico.

El sistema oscilador corresponde a la forma general de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, cuya implementación se encuentra contenida en el código fuente 3.1. Por otro lado, el programa listado en el código fuente 3.2 emplea al programa 3.1 para obtener los resultados de simulación del plano fase del oscilador mecánico y la evolución en el

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

ebrary

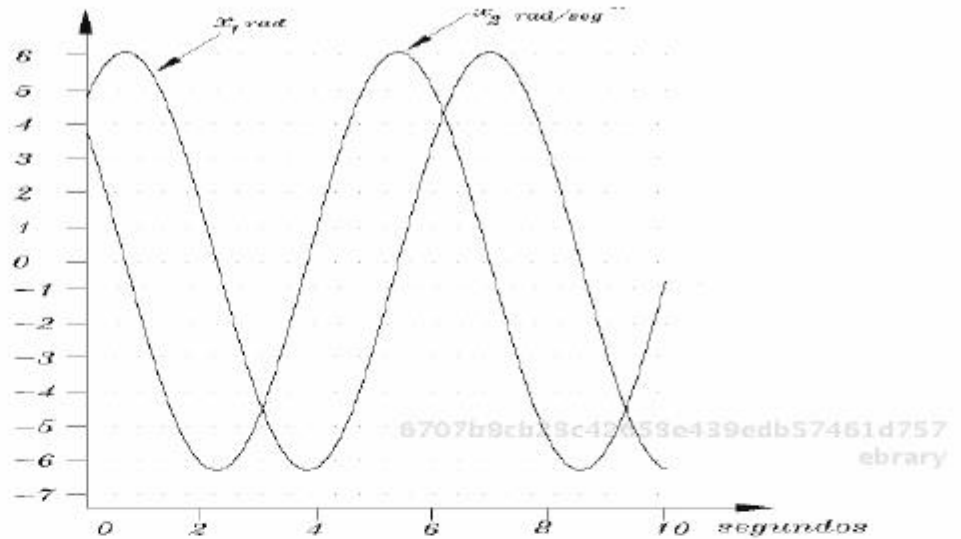


Figura 3.8 Posición y velocidad del oscilador mecánico.

tiempo de las variables de estado que se presentan en las figuras 3.7 y 3.8.

En el proceso de simulación, la función de integración numérica utilizada fue `ode45(·)`. El tiempo de simulación es de 10 segundos con incrementos de tiempo de 2.5 mseg, de esta forma se tienen 400 puntos por cada segundo, siendo un total de 4000 puntos de información dentro del tiempo total de simulación.

Las líneas 11 a 18 del código fuente 3.2 permiten variar las condiciones iniciales $[x_1(0), x_2(0)]^T$. Los resultados del vector de estados que contiene a $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son almacenados en las matrices declaradas en las líneas 16 y 17, para ser graficadas con la función `plot`.

En el sitio web del libro se encuentran varios sistemas dinámicos implementados en código fuente para MatLab, con la finalidad de que el lector encuentre diversidad de ejemplos simulados para un fácil y rápido aprendizaje del comportamiento de sistemas dinámicos. El caso del oscilador mecánico es tan sólo un ejemplo de varios que el lector puede descargar.

if Código Fuente 3.1 Oscilador mecánico

```
%cap3_osciladormec.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
%simulación de un sistema dinámico lineal
%de dimensión 2
%oscilador mecánico
%invariante en el tiempo de la forma
% $\dot{x} = Ax$ 
```

Oscilador mecánico

```
1 %
2 | function xp =cap3_osciladormec(t,x)
3 |   %vector de estados
4 |   x1=x(1); %posición
5 |   x2=x(2); %velocidad
6 |   x=[x1; x2];
7 |   %parámetros de la matriz A
8 |   %del oscilador mecánico
9 |   a11=0;
10 |  a12=1;
11 |  a21=-1;
12 |  a22=0;
13 |   %matriz A
14 |   A=[a11, a12; a21, a22];
15 |   %salida del oscilador mecánico
16 |   xp=A*x; %Salida delSistema lineal
17 %
```



Simulación de sistemas dinámicos

El sitio web del libro contiene código fuente en MatLab para realizar simulación de sistemas dinámicos invariantes en el tiempo. Procedimientos para encontrar plano fase, estudio del régimen transitorio y estacionario en la respuesta de las variables de estado del sistema.

if Código Fuente 3.2 Simulación del Oscilador mecánico

```
%cap3_om.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Simulación del Oscilador mecánico

```
1 %
2   clear;
3   close all;
4   clc;
5   format short g
6   ti=0; %tiempo inicial de simulación
7   h=0.0025; %incremento de tiempo
8   tf=10; %tiempo final
9   ts=ti:h:tf;
10  %simulación para varias condiciones iniciales
11  for i=-4:4
12    x0=[i+1; i]; %condición inicial
13    options=odeset('RelTol',1e-3);
14    %simulación del oscilador mecánico
15    [t, x]=ode45('cap3_osciladormec',ts, x0,options);
16    x1(:,5+i)=x(:,1); %posición articular
17    x2(:,5+i)=x(:,2); %velocidad articular
18  end
19  %gráfica de variables de estado
20  plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'.')
21 %
```

La manera general para determinar la forma estructural de la función candidata de Lyapunov de sistemas lineales se muestra en el siguiente ejemplo.

♣ ♣ Ejemplo 3.22

Determinar la estabilidad asintótica global de sistemas dinámicos lineales.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo se encuentra caracterizado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Si el determinante $\det[A]$ de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cumple con la condición $\det[A] \neq 0$, entonces el punto de equilibrio es único.

Considérese la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x},$$

donde la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, $P > 0$. La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [A^T P + P A] \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} < 0 \\ Q &= -[A^T P + P A] \end{aligned}$$

donde la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida negativa.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

La forma

$$Q = -[A^T P + PA] \quad (3.43)$$

es conocida como *la ecuación algebraica de Lyapunov*.

La ecuación (3.43) representa la forma general de diseñar funciones candidatas de Lyapunov para sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo.

Como un ejemplo práctico considere el siguiente sistema dinámico lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El punto de equilibrio existe y es único, debido a que el determinante de la matriz es $\det[A] = 1$.

Tomando en cuenta los resultados del ejemplo 3.22:

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_{11}p_{11} + 2p_{12}a_{21} & p_{11}a_{12} + p_{22}a_{21} + p_{12}[a_{11} + a_{22}] \\ p_{11}a_{12} + p_{22}a_{21} + p_{21}[a_{11} + a_{22}] & 2p_{12}a_{12} + 2p_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} q_{11} & q_{11} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por ser P una matriz definida positiva, debe tomarse en cuenta que $p_{12} = p_{21}$. Por sencillez, se propone la matriz Q como la matriz identidad. Sustituyendo los valores de la matriz A se obtienen los componentes de la matriz P :

$$Q = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & 3p_{11} - p_{22} - 4p_{12} \\ 3p_{11} - p_{22} - 4p_{21} & 6p_{12} - 8p_{22} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para verificar que es correcto el anterior desarrollo de la matriz P , se analizará la estabilidad asintótica global a través de la siguiente función

de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

la cual es una función definida positiva, debido a que la matriz $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz definida positiva, $P > 0$. La derivada de esta función con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema obtiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x_2 \\ -x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[\frac{5}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \right] \\ &= -x_1^2 - x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Como se ve, la derivada de la función de Lyapunov es una función definida negativa, lo que demuestra estabilidad asintótica global del punto de equilibrio, es decir: $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$.

En la figura 3.9 se presenta el diagrama fase del sistema para las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$. Si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ se encuentra ubicada en el origen de estados, entonces las trayectorias del sistema se quedan estacionarias en el punto de equilibrio. Para el caso en que las condiciones iniciales se encuentran fuera del punto de equilibrio, entonces la evolución de las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al punto de equilibrio.

La evolución en el tiempo de las trayectorias del sistema $[x_1(t), x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ para la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [5\text{rad}, 4\text{rad/seg}] \in \mathbb{R}^2$ se presentan en la figura 3.10. Obsérvese que, conforme el tiempo evoluciona a infinito, la región de atracción del punto de equilibrio lleva a las trayectorias en forma asintótica hacia el origen de estados.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

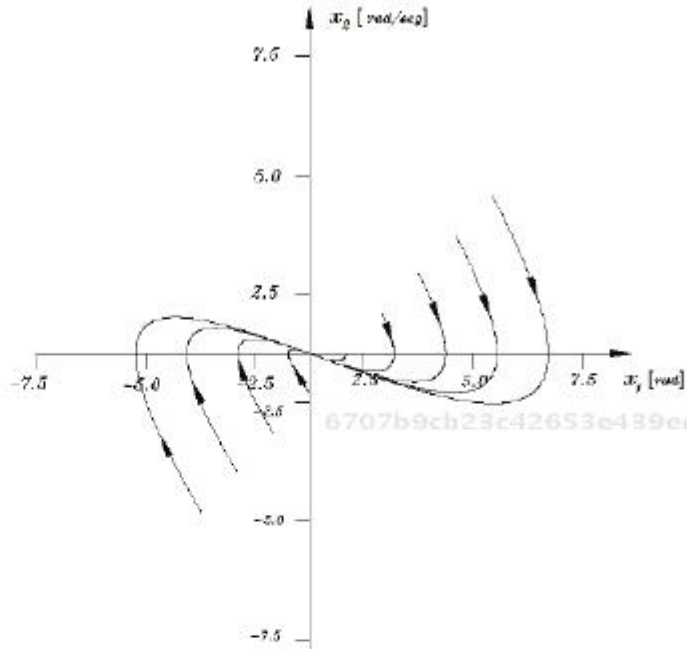


Figura 3.9 Diagrama fase de un sistema con punto de equilibrio asintóticamente estable.

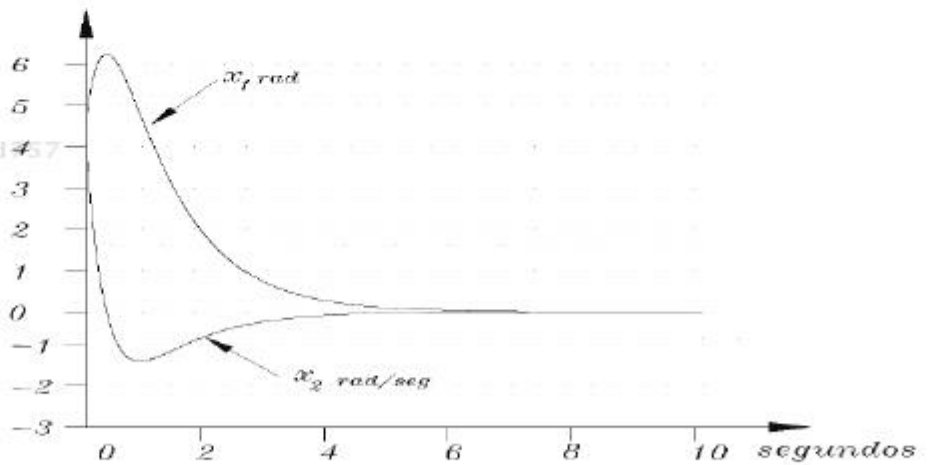


Figura 3.10 Comportamiento asintótico de las trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$ hacia el punto de equilibrio.

♣♣♣ Ejemplo 3.23

Realizar el análisis de estabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \tanh(x)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$.

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El punto de equilibrio existe y es único, debido a que $\tanh(0) = 0$.

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x) &= \ln(\cosh(x)) \\ \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \dot{x} = \tanh(x) \dot{x} = \tanh(x) (-k \tanh(x)) \\ &= -k \tanh^2(x) < 0. \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La derivada temporal de la función de Lyapunov es definida negativa en forma local, ya que $-\dot{V}(x) > 0$ es definida positiva en forma local, es decir, no cumple que $V(x) \rightarrow \infty_+$ si $x(t) \rightarrow \infty$.



♣♣♣ Ejemplo 3.24

Realizar el análisis de estabilidad del siguiente sistema dinámico no lineal:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\dot{x}_1 = -x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^5$$

Implementar un programa en Matlab que permita realizar la simulación del sistema para diversas condiciones iniciales.

Graficar el diagrama fase y explicar el comportamiento de las trayectorias $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Solución

El origen es el único punto de equilibrio $[x_1, x_2]^T = [0, 0]^T$. Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{6}x_2^6$$

Esta función es definida positiva, debido a que es posible estructurarla de la siguiente forma:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{\text{matriz definida positiva}} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

y su matriz respectiva es definida positiva.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se obtiene como:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \left[\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ -x_2^5 \end{bmatrix} = -x_1^6 - x_2^{10} < 0$$

Obsérvese que esta función es definida negativa puesto que $-\dot{V}(x_1, x_2) > 0$, es decir:

$$x_1^6 + x_2^{10} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}$$

En la figura 3.11 se presenta el diagrama de fase del sistema dinámico no lineal, para las condiciones iniciales $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ rad y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$ rad/seg.

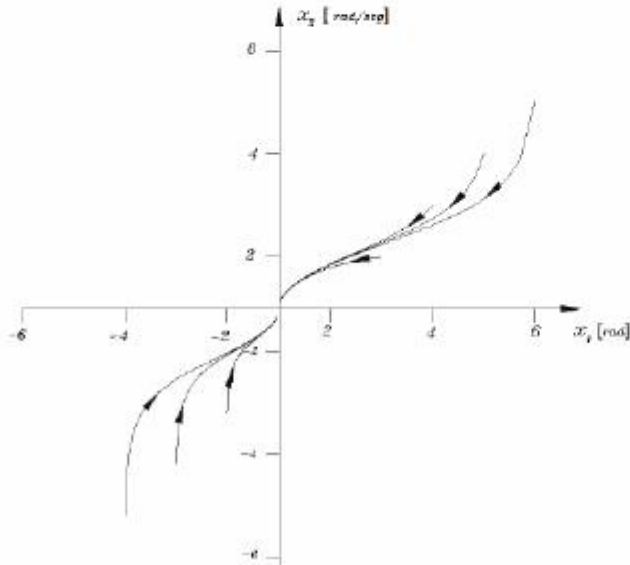
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Figura 3.11 Diagrama fase de un sistema dinámico no lineal $\dot{x}_1 = -x_1^3(t)$ y $\dot{x}_2 = -x_2^5(t)$.

Hay que observar que el atractor que lleva a las trayectorias del sistema $[x_1(t), x_2(t)]^T$, $\forall t \geq 0$ hacia una pequeña vecindad del punto de equilibrio, permaneciendo ahí de manera indefinida conforme $t \rightarrow \infty$.

670
ebruary

En la figura 3.12 se muestran los perfiles de las curvas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ correspondientes a la condición inicial $x_1(0) = 5$ rad y $x_2(0) = 4$ rad/seg.

El código fuente 3.3 es el programa en MatLab que implementa el modelo dinámico del sistema dinámico no lineal $[\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T = [-x_1^3(t), -x_2^5(t)]^T$. Los planos fase representados en las figuras 3.11 y 3.12 se obtienen con el programa del código fuente 3.2 ; en la línea 8 hay que cambiar el tiempo de simulación a $t_s = 400$ segundos, y en la línea 15 hay que insertar el nombre del sistema dinámico a simular: `[t, x]=ode45('cap3_sdn1',ts, x0,options)`.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary



Sistema dinámico no lineal

Una diversidad de ejemplos de simulación implementados en lenguaje MatLab para sistemas dinámicos no lineales pueden ser descargados directamente del sitio web del libro. Análisis del punto de equilibrio y comportamiento de las variables de estado del sistema.

if Código Fuente 3.3 Sistema dinámico no lineal

```
%cap3_sdn1.m   Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Sistema dinámico no lineal

```
1 %
2 function xp =cap3_sdn1(t,x)
3     x1=x(1); %Posición
4     x2=x(2); %Velocidad
5     x=[x1; x2];
6     xp1=-x1*x1*x1;
7     xp2=-x2*x2*x2*x2*x2;
8     xp=[ xp1; xp2];
9     end
10 %
```

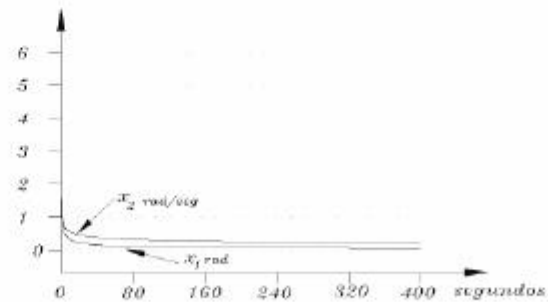
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Figura 3.12 Evolución en el tiempo de las trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$.



♣♣♣ Ejemplo 3.25

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k[1 - \alpha e^{-\alpha x^2}]x$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}_+$ con $0 < \alpha < 1$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Se propone la siguiente estructura de función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} [x^2 + e^{-\alpha x^2} - 1]$$

Obsérvese que en la construcción de la función candidata de Lyapunov se agrega la constante -1 para que se cumpla la condición $V(0) = 0$.

La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada de la siguiente manera:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})x] \dot{x} = [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})x] \dot{x} \\ &= [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})x] [-k(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})x] \\ &= -k(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})^2 x^2 \end{aligned}$$

■ ■ ■

♣♣♣ Ejemplo 3.26

Muéstrase que el siguiente sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

$$\dot{x} = -k \frac{x}{1+x^2}$$

Solución

El origen de estado es el único punto de equilibrio.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} \ln[1+x^2]$$

Esta función es definida positiva, $V(0) = 0$, y cuando $x \rightarrow \infty_+$ o $x \rightarrow \infty_-$ entonces $V(x) \rightarrow \infty_+$.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln[1+x^2]}{\partial x} \dot{x} = \frac{x}{1+x^2} \dot{x} \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2} \right) \left(-k \frac{x}{1+x^2} \right) = -k \frac{x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad asintótica global.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary



♣ Ejemplo 3.27

Hacer el análisis de estabilidad asintótica en forma local del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \operatorname{sen}(x)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Solución

Esta función posee un número infinito de puntos de equilibrio dados por $x = 0, \pm n\pi$, por tanto se realizará el análisis de estabilidad relativo al origen.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = 1 - \cos(x)$$

Esta función es definida positiva en forma local para la región $x \in (-\pi, 0, \pi)$

o $|x| < \pi$.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \sin(x) \dot{x} = -k \sin^2(x) < 0$$

lo que demuestra estabilidad asintótica en forma local. La región de atracción sólo es válida para las trayectorias $x(t) \in (-\pi, \pi)$ y condiciones iniciales $x(0)$ dentro de $(-\pi, \pi)$. Para alguna condición inicial $x(0)$ fuera de este intervalo puede ser atrapada la solución $x(t)$ por otro punto de equilibrio.

♣ ♣ Ejemplo 3.28

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Realizar el análisis de estabilidad asintótica del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \frac{\cosh^{m-1}(x) \sinh(x)}{1 + \cosh^m(x)}$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$ y $m \in \mathbb{N}$.

Solución

El punto de equilibrio existe y es único. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{m} \ln \left[\frac{1 + \cosh^m(x)}{2} \right]$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

Esta es una función definida positiva puesto que $V(0) = 0$ y $V(x) \rightarrow \infty_+$ si $x \rightarrow \infty_+$ o si $x \rightarrow \infty_-$.

La derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1 + \cosh^m(x)} \right] \dot{x} \\ &= \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1 + \cosh^m(x)} \right] \left[-k \frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1 + \cosh^m(x)} \right] \\ &= -k \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1 + \cosh^m(x)} \right]^2 < 0\end{aligned}$$

Debido a que la función $\dot{V}(x)$ es definida negativa, se demuestra la estabilidad asintótica global.

♣♣♣ Ejemplo 3.29

Llevar a cabo el análisis de estabilidad de un péndulo robot y un control proporcional derivativo.

Solución

Considérese un sistema dinámico no lineal describiendo el movimiento de un péndulo simple como el que se muestra en la figura 3.13.

El modelo dinámico del péndulo se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$\tau = I_r \ddot{q} + b \dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) \quad (3.44)$$

donde I_r representa el momento de inercia, b es el coeficiente de fricción viscosa, m es la masa del péndulo, el centro de masa está representado por l_c , y g es la aceleración debido a la gravedad. La longitud del péndulo es de 50 cm.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 3.13 Péndulo

El problema consiste en posicionar al péndulo en un punto deseado, por ejemplo en 90 grados. Para eso, se emplea un algoritmo de control denominado proporcional derivativo más compensación de gravedad descrito por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (3.45)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde $k_p \in \mathbb{R}_+$ y $k_v \in \mathbb{R}_+$ representan las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. El error de posición es \tilde{q} que se define como la diferencia entre la posición deseada q_d y la posición actual del robot $q(t)$, es decir: $\tilde{q} = q_d - q(t)$.

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad del péndulo y el algoritmo de control, se obtiene la ecuación dinámica que relaciona a la dinámica del péndulo (3.44) como el esquema de control (3.45); en otras palabras, se obtiene la ecuación en lazo cerrado.

Las variables de estado que definen el problema de control de posición del péndulo son \tilde{q} y \dot{q} . Por lo tanto, la ecuación en lazo cerrado tiene la

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_r} [k_p \tilde{q} - k_v \dot{\tilde{q}} - b \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_p}{I_r} & -\frac{k_v+b}{I_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

La derivada con respecto al tiempo del error de posición es $\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{dq_d}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = -\dot{q}$, debido a que la posición deseada q_d es una constante y su derivada es cero. La derivada de la velocidad $\dot{\tilde{q}}$ es la aceleración $\frac{d\dot{\tilde{q}}}{dt} = \ddot{q}$ la cual se despeja de la ecuación (3.46).

Es importante destacar que la ecuación en lazo cerrado 3.46 es lineal a pesar de que el modelo dinámico del péndulo es un sistema dinámico no lineal. Esto quiere decir que la ecuación resultante entre el modelo dinámico del sistema y la estructura de control no necesariamente produce una ecuación no lineal.

Para demostrar la existencia del punto de equilibrio se procede de la siguiente forma.



De la primera componente de la ecuación (3.46) se tiene que: $-\dot{q} = -1 \dot{\tilde{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0$



Para la segunda componente de la ecuación (3.46) se emplea el hecho anterior $\dot{\tilde{q}} = 0$, entonces $[k_v + b] \dot{\tilde{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+ \wedge b \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado: $k_p \tilde{q} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+$.

Por lo tanto, el origen de estados es el punto de equilibrio y es único, es decir: $[\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}]^T = [0, 0]^T$.

La construcción de la propuesta de la función de Lyapunov se lleva a cabo del siguiente modo:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} I_r \dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2 \quad (3.47)$$

es una función definida positiva en los dos argumentos \tilde{q} y $\dot{\tilde{q}}$.

La derivada de la función candidata de Lyapunov (3.47) se obtiene incorporando la aceleración $\ddot{q}(t)$ de la ecuación en lazo cerrado (3.46) para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= I_r \dot{\tilde{q}} \ddot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} \dot{\tilde{q}} = I \dot{\tilde{q}} \ddot{\tilde{q}} - k_p \tilde{q} \dot{\tilde{q}} \\ &= \dot{\tilde{q}} k_p \tilde{q} - [b + k_v] \dot{\tilde{q}}^2 - k_p \tilde{q} \dot{\tilde{q}}\end{aligned}\quad (3.48)$$

después de cancelar los términos correspondientes se obtiene:

$$= -[b + k_v] \dot{\tilde{q}}^2 \leq 0. \quad (3.49)$$

Esta es una función semidefinida negativa, ya que sólo depende de la velocidad $\dot{\tilde{q}}$, y la variable de estado \tilde{q} no aparece en el álgebra final. En otras palabras $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0$ si la velocidad $\dot{\tilde{q}} = 0$ y el error de posición \tilde{q} tiene cualquier valor. Por lo tanto se demuestra estabilidad.

En la figura 3.14 se muestra el mapa fase del péndulo para las condiciones iniciales $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ rad y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$ rad/seg; así como la forma que converge a la posición deseada de 90 grados en el plano cartesiano xy .

Nótese que al variar las condiciones iniciales, las trayectorias $[\dot{q}(t), q(t)]^T$ del sistema convergen asintóticamente a $[0 \text{ rad/seg}, q(t) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}]^T$ conforme el tiempo evoluciona a infinito. La velocidad $\dot{q}(t)$ es cero cuando el péndulo alcanza la posición deseada, entonces la posición $q(t)$ es una constante igual a la posición deseada q_d , por lo que el error de posición $\tilde{q}(t) = q_d - q(t) = 0$.

El código fuente 3.4 contiene el código fuente en MatLab que implementa el modelo dinámico de un péndulo. El plano fase representado en la figura 3.14 se obtienen con el código fuente 3.2 que fue utilizado para realizar la simulación del oscilador mecánico, para el caso del péndulo hay que sustituir la línea 15 por `[t, x]=ode45('cap3_pendulo',ts, x0,options)`.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



Péndulo

Algoritmos de control, análisis dinámico y aplicaciones del péndulo pueden ser encontrados en el sitio web del libro implementados en código fuente en MatLab.

if Código Fuente 3.4 Péndulo

```
%cap3_pendolo.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
brary

Péndulo

```
1 %
2 function xp =cap3_pendolo(t,x)
3 %vector de estados
4 q=x(1); %posición articular
5 qp=x(2); %velocidad articular
6 %parámetros del péndulo
7 m=5; %masa
8 lc=0.01; %centro de masa
9 g=9.81; %constante de aceleración gravitacional
10 b=0.17; %coeficiente de fricción viscos
11 Ir=0.16; %momento de inercia del rotor
12 kp=10; %ganancia proporcional
13 kv=2; %ganancia derivativa
14 qd=90*pi/180; %referencia deseada 90 grados
15 qt=qd-q; %error de posición
16 tau=kp*qt-kv*qp+m*g*lc*sin(q); %ley de control
17 %aceleración articular del péndulo
18 qpp=(tau-b*qp-m*g*lc*sin(q))/Ir;
19 %vector de salida
20 xp=[ qp ; %xp(1)=x(2) velocidad articular
21 qpp] ; %xp(2)=qpp aceleración articular
22 end
23 %
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
brary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
brary

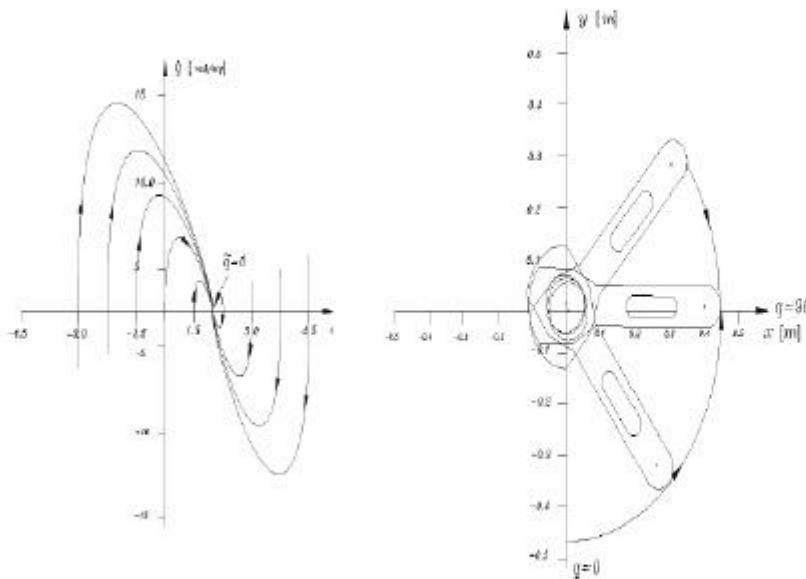


Figura 3.14 Diagrama fase del péndulo y plano cartesiano xy .



Existen otras herramientas de sistemas dinámicos no lineales que permiten obtener la estabilidad asintótica global, cuando previamente se ha demostrado la estabilidad del punto de equilibrio. Estas herramientas pueden ser el *principio de invariancia de LaSalle* y la norma \mathcal{L} .



3.6.4 Principio de invariancia de LaSalle

En algunos casos es posible demostrar estabilidad asintótica, aun cuando la función de Lyapunov es semidefinida negativa. Específicamente, si una función continua y diferenciable, definida sobre un conjunto invariante con respecto al sistema dinámico (3.36), puede ser construida de forma que sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema son semidefinidas negativas y ninguna trayectoria del sistema puede permanecer indefinidamente en puntos donde las derivadas de la función se desvanecen, entonces *el punto de equilibrio es asintóticamente estable*.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Conjunto invariante

Definición 3.10. Un conjunto Ω es un conjunto invariante para un sistema dinámico si para cada trayectoria la cual inicia en Ω permanece en Ω , $\forall t \geq 0$.

Ejemplos de conjuntos invariantes: cualquier punto de equilibrio estable es un conjunto invariante, debido a que ninguna trayectoria puede permanecer indefinidamente en un punto diferente al punto de equilibrio estable.

El dominio de atracción de un punto de equilibrio es también un conjunto invariante. Cualquier trayectoria de un sistema dinámico autónomo en el espacio de estados es un conjunto invariante.

Los ciclos límite estables son casos especiales de las trayectorias del sistema dinámico, representan curvas cerradas en el plano fase; las trayectorias dentro o fuera del ciclo límite convergen hacia esta curva y permanecen ahí de manera indefinida, por lo que también son conjuntos invariantes.



Teorema 3.2 Barbashin-Krasovskii-LaSalle

Considérese el sistema dinámico (3.36)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

cuyo origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio. Supóngase que el conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto positivamente invariante con respecto al sistema dinámico (3.36) y asúmase que existe una función de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, y $\dot{V}(\mathbf{x}) \in \Omega$. Defínase $\Omega_{\mathcal{E}}$ como el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Sea $\Omega_{\mathcal{M}}$ el conjunto invariante más grande contenido en $\Omega_{\mathcal{E}}$ ($\Omega_{\mathcal{M}} \subseteq \Omega_{\mathcal{E}}$), entonces cada solución que empiece en $\Omega_{\mathcal{E}}$ se aproxima a $\Omega_{\mathcal{M}}$, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$ conforme $t \rightarrow \infty$.

El teorema de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se utiliza en demostrar que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo tiende a infinito $t \rightarrow \infty$. Para esta finalidad, es necesario establecer que el conjunto invariante más grande $\Omega_{\mathcal{M}}$ es el origen de estados. Esto puede hacerse para demostrar que ninguna solución $\mathbf{x}(t)$ diferente a $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ puede permanecer en $\Omega_{\mathcal{M}}$. Para tal efecto considérese el siguiente corolario:



Corolario 3.1 Barbashin-Krasovskii-LaSalle

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio del sistema dinámico (3.36), supóngase que $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov, tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$.

Sea:

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \quad (3.50)$$

Supóngase que ninguna otra solución del sistema dinámico con excepción de $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ puede permanecer en el conjunto $\Omega_{\mathcal{M}}$, entonces *el origen es asintóticamente estable*.

Cuando $\dot{V}(\mathbf{x})$ es negativa definida, entonces $\Omega_{\mathcal{M}} = \{0\}$, y por tanto coincide con el teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.

El teorema y corolario de Barbashin-Krasovskii-LaSalle únicamente se emplean para sistemas dinámicos autónomos.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

♣♣♣ Ejemplo 3.30

En el caso del ejemplo del péndulo simple, emplear el corolario de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar estabilidad asintótica.

Solución

Se tiene que la ecuación (3.48) no satisface las condiciones del teorema de estabilidad asintótica global para la ecuación en lazo cerrado (3.46), para todo $[\tilde{q}, \dot{q}]^T \neq [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La ecuación en lazo cerrado (3.46) es de naturaleza autónoma, entonces el conjunto $\Omega_{\mathcal{E}}$:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0, \iff \dot{q} = 0 \in \mathbb{R}, \tilde{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Debe notarse que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$ y el error de posición \tilde{q} toma cualquier valor escalar. Para que una solución $[\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in \Omega_{\mathcal{E}}$ para todo $t \geq 0$, es necesario que $\dot{q} = 0, \forall t \geq 0$. Como la velocidad $\dot{q}(t)$ es cero, significa que la posición $q(t)$ es una constante, dicha constante es la

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

posición deseada q_d , luego entonces el error de posición $\tilde{q} = q_d - q(t) = 0$. Tomando esto en consideración

$$k_p \tilde{q} = 0 \iff \tilde{q} = 0$$

significa que $\tilde{q} = 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, resulta que $[\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es el conjunto invariante más grande $\Omega_{\mathcal{M}} \subseteq \Omega_{\mathcal{E}}, \forall t \geq 0$ para lo cual $[\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)]^T \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$, como $t \rightarrow \infty$. Luego entonces se concluye estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (3.46).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

3.7 Norma \mathcal{L}

La utilidad de la norma \mathcal{L} se ubica en aplicaciones de estabilidad de sistemas dinámicos, en acotamiento de variables de estado y en ser una herramienta fundamental para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores.

La notación asociada a la norma \mathcal{L} es \mathcal{L}_n^p (léase *ele-pe-ene*). De manera general, el espacio \mathcal{L}_p^n para $1 \leq p < \infty$ es definido como el conjunto de funciones continuas $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^n} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (3.51)$$

donde $\|f\|_{\mathcal{L}_p^n}$ representa la norma \mathcal{L}_p^n de la función f , el subíndice p en \mathcal{L}_p^n se refiere al tipo de norma- p usado para definir el espacio, mientras que el número n indica la dimensión de f . Al tipo de espacio definido por $\mathcal{L}_p^n, \forall p \in [1, \infty]$, se le denomina espacio lineal normado.

La norma $\|f\|_{\mathcal{L}_p^n}$ satisface las siguientes propiedades:



La norma $\|f\|_{\mathcal{L}_p^n}$ de la función f es cero \iff la función f es idénticamente a cero.



La norma $\|f\|_{\mathcal{L}_p^n}$ de la función f es positiva, si la función f es diferente a cero.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary



La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ satisface la desigualdad del triángulo:

$$\|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\|_{\mathcal{L}_p^n} \leq \|\mathbf{f}_1\|_{\mathcal{L}_p^n} + \|\mathbf{f}_2\|_{\mathcal{L}_p^n} \quad \forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2.$$

Norma L_∞^n

El espacio L_∞^n consiste del conjunto de todas las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir,

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}(t)\| < \infty.$$

donde sup indica el *supremo* o la cota superior más pequeña.

Por notación, L_∞ sirve para representar el espacio L_∞^1 ($n = 1$).

Norma L_2

El espacio L_2^n es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{f}^T(t) \mathbf{f}(t) dt} = \sqrt{\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt} < \infty.$$

entonces la integral del cuadrado de la norma euclidianas es medible y está acotada superiormente. La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2}$ es ampliamente empleada para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores. La interpretación de la norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2}$ y el desempeño del esquema de control a evaluar es inversamente proporcional al desempeño.

Por notación, L_2 denota el espacio L_2^1 ($n = 1$).

Para ilustrar las anteriores definiciones, considérese los siguientes ejemplos.

♣ ♣ Ejemplo 3.31

Considérese la función continua $f(t) = e^{-\beta t}$. Se desea determinar si f pertenece a los espacios L_2 y L_∞ .

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t)|^2 dt &= \int_0^\infty f^2(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2\beta t} dt \\ &= \frac{1}{2\beta} < \infty, \end{aligned}$$

entonces $f \in L_2$.

Por otro lado, $|f(t)| = |e^{-\beta t}| \leq 1 < \infty$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_\infty$.

En resumen se concluye que $f \in L_2 \cap L_\infty$.

6707b9cb23c42653e439edb57461
ebruary

♣ Ejemplo 3.32

Supóngase que $f(t) = \kappa$ siendo κ una constante, $\kappa \in \mathbb{R}$. Analizar si la función $f(t)$ pertenece a los espacios L_2 y L_∞ .

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} \kappa^2 dt = \kappa^2 \int_0^{\infty} dt = \infty,$$

no converge; en consecuencia $f \notin L_2$. Sin embargo, $|f(t)| = |\kappa| \leq \rho < \infty$, para algún $\rho > \kappa$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_{\infty}$.



♣ Ejemplo 3.33

Considérese la función continua $f(t) = \kappa \tanh(t)$ con $\kappa > 0$. Se desea determinar si f pertenece a los espacios L_2 y L_{∞} .

Solución


Se tiene que


$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \kappa^2 \int_0^{\infty} \tanh^2(t) dt,$$

no converge; en consecuencia $f \notin L_2$. Sin embargo $|f(t)| = |\kappa \tanh(t)| \leq \kappa < \infty$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_{\infty}$.



Considérese una función continua $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función f satisface las siguientes hipótesis:

 $f, \dot{f} \in L_{\infty}^n,$

 $f \in L_2^n.$

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \in \mathbb{R}^n$.



3.7.1 Relación entre \mathcal{L} y estabilidad de Lyapunov

La interconexión entre la norma \mathcal{L} y la teoría de estabilidad de Lyapunov se encuentra dada de la siguiente manera.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

Considérense las funciones continuas y diferenciables $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.52)$$

donde $A_s, B_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas. Si la derivada de V con respecto al tiempo está dada como:


$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z}, h)^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{dt} \quad (3.53)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

satisface

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.55)$$

donde $Q > 0$, entonces

 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n, \mathbf{z} \in \mathcal{L}_\infty^n$

 $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n.$

Para demostrar la membresía de las variables de estado $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ en la norma \mathcal{L}_∞^n se procede de la siguiente forma: debido a que el punto de equilibrio es estable, entonces la función $V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > 0$ es definida positiva, y su su derivada resulta ser semidefinida negativa, entonces la función de energía $V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ es una función decreciente, la cual satisface:

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) \geq V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) > 0$$

de la función de energía (3.52) y empleando el teorema 3.1 de Rayleigh-Ritz se tiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} > 0$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\|\mathbf{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{max} \geq \|\mathbf{x}(t)\|^2 \lambda_{A_s}^{min} > 0$$

$$\|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{max} \geq \|\mathbf{z}(t)\|^2 \lambda_{B_s}^{min} > 0$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{A_s}^{max}}{\lambda_{A_s}^{min}}} \|\mathbf{x}(0)\|$$

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{B_s}^{max}}{\lambda_{B_s}^{min}}} \|\mathbf{z}(0)\|$$

donde $\lambda_{A_s}^{min}$, $\lambda_{A_s}^{max}$, $\lambda_{B_s}^{min}$ y $\lambda_{B_s}^{max}$ representan los valores propios mínimos y máximos de las matrices A y B , respectivamente. Por lo que, $\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_{\infty}^n$.

Considérese la siguiente expresión:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

integrando de ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) - V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) = -\int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$$

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) + \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$$

como la función $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ es decreciente, entonces se cumple que

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) > V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) > 0.$$

Además, $\int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$ es un escalar positivo, por tanto se cumple que $V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) > \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_{B_s}^{min} \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds < \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds < \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} \\ < \|\mathbf{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{max} + \|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{max} \end{aligned}$$

$$\int_0^t \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds < \underbrace{\frac{\|\mathbf{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{max} + \|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{max}}{\lambda_{B_s}^{min}}}_{\text{constante positiva}}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{L}_2^n$.

La interconexión entre la teoría de espacios \mathcal{L} con estabilidad en el sentido de Lyapunov permite aprovechar resultados interesantes para el diseño de algoritmos de control. Por ejemplo, si se ha demostrado estabilidad del punto de equilibrio usando una función de energía $V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > 0$, esto garantiza: $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$, adicionalmente si es posible demostrar que $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces se puede concluir convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de la variable $\mathbf{x}(t)$ aplicando el siguiente corolario.



Corolario 3.2 Convergencia asintótica \mathcal{L}

Considérese la variable de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, supóngase que $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$ y $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$, $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.



3.8 Resumen


El presente capítulo está dedicado a los fundamentos matemáticos de la robótica para ser aplicados en el control de robots manipuladores. Este capítulo tiene la finalidad de presentar las herramientas principales de sistemas dinámicos autónomos y estabilidad de puntos de equilibrio para análisis y diseño de esquemas de control.

Los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica deben ser interpretados como propiedades intrínsecas deseables del punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y no la estabilidad o estabilidad asintótica del sistema dinámico.

El conocimiento medular se encuentra alrededor de la teoría de estabilidad de Lyapunov, la cual establece que el punto de equilibrio de un sistema

dinámico autónomo de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es estable si su energía total es una función definida positiva continuamente decreciente ($V(\mathbf{x}(0)) \geq V(\mathbf{x}(t)) > 0$) hasta alcanzar un estado de equilibrio, el cual representa el mínimo global de la energía total, de forma que entonces su potencia es semidefinida positiva.

La función candidata de Lyapunov para el caso de estabilidad satisface:



$$V(\mathbf{x}) > 0,$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$$

La estabilidad del punto de equilibrio del sistema dinámico autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ garantiza que $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n, \mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$. Existen herramientas adicionales para demostrar la estabilidad asintótica cuando la función candidata de Lyapunov sólo puede demostrar estabilidad. La estabilidad asintótica del punto de equilibrio en el estado completo puede ser demostrada partiendo del hecho que el punto de equilibrio es estable y cuando es posible demostrar que si $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

Otra forma de demostrar estabilidad asintótica es aplicando el teorema de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, lo cual equivale a demostrar que el punto de equilibrio del sistema dinámico es el conjunto invariante más grande dentro de la región de atracción (previa demostración de estabilidad) y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

Evidentemente, la forma más elegante y mejor vista en control automático es por medio de la propuesta de una función estricta de Lyapunov, pero esto no necesariamente representa un problema trivial.

La función estricta de Lyapunov puede ser interpretada como la energía moldeada al sistema, siendo una función definida positiva, y su potencia o derivada temporal es definida negativa, es decir:



$$V(\mathbf{x}) > 0,$$



$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0.$$

El concepto importante para un esquema de control es la estabilidad asintótica global, lo cual significa la existencia y unicidad del punto de equilibrio y la convergencia asintótica de la trayectoria o solución del sistema $\mathbf{x}(t)$ al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito. Por supuesto, estabilidad asintótica no depende de las condiciones iniciales, en el entendido que dichas condiciones iniciales se encuentran confinadas dentro de la región de atracción. Estabilidad asintótica local significa varios puntos de equilibrio y la convergencia de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ es con respecto a uno de esos puntos de equilibrio (generalmente al origen de estados) y por lo tanto sí depende de las condiciones iniciales que se encuentren en la región de atracción del origen de estados. El concepto de estabilidad en sí, no es importante en control de robots manipuladores, debido que el error de posición no alcanza el punto de equilibrio, significa que el robot manipulador no se posicionará en la referencia deseada.



3.9 Referencias selectas

Los preliminares matemáticos son de uso común en textos de matrices, algebra lineal, control automático y sistemas dinámicos. A continuación se presentan una serie de referencias selectas de dichos temas.







3.2 Vectores

Las siguientes referencias el lector pueda encontrar información del tema de vectores.






I. N. Herstein. “*Álgebra moderna*”. Trillas, 1988.

-  Saunders MacLane & Garrett Birkhoff. "*Algebra*". Chelsea Publishing Company, N. Y. 1993.
-  Murray R. Spiegel. "*Análisis vectorial*". McGraw-Hill, 1994.
-  Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba. "*Cálculo vectorial*". Prentice-Hall. Cuarta Edición. 1998.
-  Béla Bollobás. "*Linear analysis*". Cambridge University Press. 1999.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

3.3 Matrices











-  Roger A. Horn & Charles R. Johnson. "*Matrix analysis*". Cambridge University Press. 1996.
-  Sam Perlis. "*Theory of matrices*". Dover Publications, Inc. N. Y. 1991.
-  Fuzhen Zhang. "*Matrix theory*". Springer. 1999.


6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary


3.5 Sistemas dinámicos


-  Joseph La Salle & Solomon Lefschetz. "*Stability by Lyapunov's direct method with applications*". Academic Press. 1961.
-  C. A. Desoer & M. Vidyasagar. "*Feedback systems: input-output properties*". Academic Press. N. Y. 1975.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary


-  Shankar Sastry & Marc Bodson. “*Adaptive control: stability, convergence, and robustness*”. Prentice-Hall. 1989.
-  H. Nijmeijer and A.c.J. van der Schaft. “*Nonlinear dynamical control Systems*”. Springer-Verlag, New York (1990).
-  Eduardo D. Sontag. “*Mathematical control theory*”. Springer-Verlag. 1990.
-  Jean-Jacques E. Slotine. “*Applied nonlinear control*”. Prentice-Hall. 1991.
-  A. M. Lyapunov. “*The general problem of the stability of motion (Lyapunov Centenary Issue)*”. International Journal of Control. Vol. 55. No. 3. pag. 531-773. Taylor & Francis. 1992.
-  F. L. Lewis, C. T. Abdallah, & D. M. Dawson “*Control of robots manipulators*”. Macmillan Publishing Company. N. Y. 1993.
-  M. Vidyasagar. “*Nonlinear systems analysis*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1993).
-  Zoran Gajić & Muhammad Tahir Javed Qureshi. “*Lyapunov matrix equation in system stability and control*”. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 1995.
-  Editor William S. Levine. “*The control handbook*”. CRC-Press, IEEE-Press. 1995.
-  Arjan Van Der Schaft. “ *\mathcal{L}_2 and passivity techniques in nonlinear control*”. Springer. 2000.


 Hassan K. Khalil. “*Nonlinear systems*”. Third Edition. Prentice Hall Inc. 2002.

 R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003.

 R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loria. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Wassim M. Haddad & VijaySekhar Chellaboina “*Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*”. Princeton University Press. Princenton and Oxford. 2008.

 Para programación en lenguaje MatLab se recomienda el siguiente texto: David Báez López. “*MatLab con aplicaciones a la ingeniería, física y finanzas*”. Alfaomega Grupo Editor. Segunda Edición. 2011.

3.10 Problemas propuestos

6707b
ebrary

A continuación se presentan una serie de ejercicios con la finalidad que el lector mejore sus conocimientos sobre preliminares matemáticos para robótica.



3.2 Vectores

3.2.1 Obtener la norma euclidiana de los siguientes vectores:

(a)

$$\mathbf{x} = [8 \quad \sin(t) \quad \sqrt{9 + 10 \cos(t)} \quad \int_0^t t dt]^T$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ALFAOMEGA

(b)

$$\mathbf{x} = [8 \quad \text{sen}(t) \quad [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]^T \quad \frac{d}{dt}e^{-4t^2}]^T$$

3.2.2 Programar en código MatLab un algoritmo que permita sumar vectores.

3.2.3 Demostrar que $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.4 Demostrar que $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.5 Demostrar la desigualdad del triángulo: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.



3.3 Matrices

3.3.1 Comprobar la propiedad de antisimetría para los casos $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$. Sugerencia, obtener la parte antisimétrica de cada caso y llevar a cabo las operaciones internas: $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x}$.

3.3.2 Determine si la siguiente desigualdad es falsa o verdadera:

$$\lambda_{\min} \{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_{\max} \{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

donde el valor propio máximo y mínimo de A están representados por $\lambda_{\max} \{A\}$, $\lambda_{\min} \{A\}$, respectivamente. Argumente y sustente su respuesta.



3.4 Funciones definidas positivas

3.4.1 Analizar si las siguientes funciones son definidas positivas:

$$\text{a) } V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } V(x_1, x_2) = x^2 + 33x_1x_2 + 0,8x_2^2$$

3.10 Problemas propuestos

$$c) V(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 7x_1x_2 + 2x_2^2 + 4$$

3.4.2 Obtener el gradiente de las siguientes funciones escalares:

$$a) V(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\sqrt{\|\mathbf{x}\|}} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \text{ donde } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A > 0, \\ M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$b) V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

$$c) V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T A \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{1+\|\mathbf{q}\|} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \mathbf{q}$$



3.5 Sistemas dinámicos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

3.5.1 Explicar claramente ¿qué es un sistema dinámico?

3.5.2 Defina qué es un sistema dinámico lineal y su diferencia con un sistema dinámico no lineal.

3.5.3 Para un sistema dinámico lineal ¿cuáles son las posibilidades que se pueden dar en la existencia de puntos de equilibrio?

3.5.4 Para un sistema dinámico no lineal ¿qué posibilidades puede tener en la existencia de puntos de equilibrio?

3.5.5 Encontrar los puntos fijos de: $\dot{x} = x^4$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary 3.5.6 Determinar los puntos de equilibrio del siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} [1 - x_1^3] x_2 \\ \text{sen}(x_2) x_1 \end{bmatrix}$$

3.5.7 Trasladar el punto de equilibrio al origen de estados de:

$$\dot{u} = u - 1$$

¿Cómo quedaría el sistema convertido?



3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

3.6.1 ¿Cuál es la interpretación de punto de equilibrio?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

- 3.6.2 Explicar el concepto de estabilidad.
- 3.6.3 Explicar claramente los conceptos de estabilidad local y global.
- 3.6.4 ¿Que es la diferencia hay entre estabilidad y estabilidad asintótica?
- 3.6.5 En referencia a las funciones de energía: ¿Cuál sería la interpretación de una función candidata de Lyapunov?
- 3.6.6 ¿Tiene sentido decir: “ *el sistema es estable*”?
- 3.6.7 ¿Cuál es la interconexión de la teoría de estabilidad de Lyapunov con \mathcal{L} ?

Llevar a cabo el análisis de estabilidad de los siguientes sistemas:

$$3.6.8 \quad \dot{x} = -\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}.$$

$$3.6.9 \quad \dot{x} = -x^{2m-1}, \quad m \text{ es un entero natural.}$$

$$3.6.10 \quad \dot{x} = -\operatorname{atan}(x)$$



3.7 Norma \mathcal{L}

- 3.7.1 Analizar la pertenencia en la norma \mathcal{L}_∞^n y \mathcal{L}_2^n de las siguientes funciones:

$$b) \quad f(t) = t^3$$

$$c) \quad f(t) = \cos(t)$$

$$d) \quad 8e^{-8t^2}$$

- 3.7.2 Demostrar que la variable de estado $x(t) \in \mathcal{L}_\infty$ y $x(t) \in \mathcal{L}_2$ para los siguientes casos:

$$a) \quad \dot{x} = -x^{2m-1}, \quad m \text{ es un entero natural.}$$

$$b) \quad \dot{x} = -\operatorname{atan}(x)$$

$$c) \quad \dot{x} = -\operatorname{senh}(x)$$

¿Qué forma tiene la cota superior?

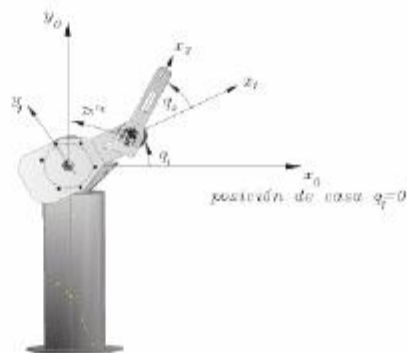
4

CAPÍTULO

Cinemática de robots manipuladores

El modelo cinemático directo en cadena abierta de robots manipuladores, es un procedimiento sistemático que se obtiene por una representación mínima de 4 parámetros dentro de una transformación homogénea.

Denavit-Hartenberg



- 4.1 Introducción
- 4.2 Morfología del robot
- 4.3 Transformaciones homogéneas
- 4.4 Cinemática
- 4.5 Tipos de robots industriales
- 4.6 Resumen
- 4.7 Referencias selectas
- 4.8 Problemas propuestos

Objetivos

Presentar el estudio cinemático de robots manipuladores industriales y las herramientas matemáticas que permiten su modelado.

Objetivos particulares:



Analizar la cinemática directa de diversas configuraciones de robots manipuladores.



Aplicar la convención Denavit-Hartenberg.

Competencias

Mejorar la habilidad y grado de conocimiento en el análisis y modelado cinemático.



Clasificación de robots industriales.



Análisis cinemático y diferencial de robots manipuladores.

4.1 Introducción

4.1 Introducción

El estudio de la cinemática directa de robots manipuladores industriales proporciona elementos para analizar y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot, así como la orientación de la herramienta de trabajo. Dependiendo del tipo de articulaciones que se encuentran incluidas en la estructura mecánica del robot (lineales o rotacionales), se presenta una clasificación general de robots manipuladores industriales, también conocidos como brazos robots: antropomórfico, esférico, cilíndrico, SCARA y cartesiano.

El posicionamiento del robot (*pose*) en el espacio tridimensional requiere de 6 coordenadas: 3 coordenadas para su posición cartesiana y 3 coordenadas para la orientación de la herramienta de trabajo. La relación entre las coordenadas articulares con las coordenadas cartesianas y su orientación se denomina cinemática directa. En este contexto, se presenta una sección de herramientas matemáticas para modelar la posición y orientación del robot usando *transformaciones homogéneas*. Sin embargo, existe un conjunto de parámetros longitudes y ángulos que se utilizan directamente en las transformaciones homogéneas; la metodología Denavit-Hartenberg permite obtener dichos parámetros y establecer de manera concreta la estructura matemática de las transformaciones homogéneas de la cual se desprende el modelo cinemático directo.

4.2 Morfología del robot

La morfología del robot se refiere a la descripción de componentes, partes y estructura mecánica. En principio un robot manipulador es un sistema complejo de propósito general que en la práctica puede realizar una amplia gama de aplicaciones como traslado de objetos, pintado de carrocerías automotrices, soldadura por arco, empaquetado de piezas, ensamblaje, operaciones quirúrgicas, teleoperación, investigación aeroespacial, asistencia

Cinemática directa

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de un sistema mecánico, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen. Por lo tanto, la cinemática directa de robots manipuladores es el estudio del movimiento del robot relacionando las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas articulares o generalizadas. La estructura matemática de la cinemática es generalmente no lineal en las variables de estado de posición, compuesta por funciones trigonométricas y parámetros del robot como lo son sus longitudes.

El estudio de la cinemática de robots manipuladores no involucra ecuaciones diferenciales como en el caso de la dinámica. La *cinemática directa* convierte las coordenadas articulares del robot a coordenadas cartesianas, a través de una función vectorial de la siguiente forma:

$$[x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T = f_R(\mathbf{q})$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares del robot, $\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R}$ son la orientación de la herramienta final del robot, f_R es una función continua y diferenciable en la variable de estado \mathbf{q} y $[x, y, z]^T$ son las coordenadas cartesianas. El empleo de la cinemática directa resulta útil, debido a que es mucho más fácil programar al robot en coordenadas cartesianas que en ángulos.

a personas con capacidades diferenciadas, fisioterapia, etc.

Un robot manipulador está compuesto por una serie consecutiva de eslabones y articulaciones para formar una cadena cinemática abierta. Cada articulación representa la interconexión entre dos eslabones consecutivos. En la figura 4.1 se muestra el esquema de una articulación.

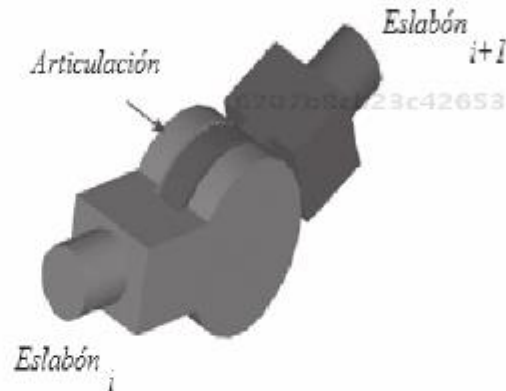


Figura 4.1 Una articulación interconecta dos eslabones.

En la figura 4.2 se ilustra a manera de ejemplo la cadena cinemática abierta, la cual es la estructura mecánica básica de un robot industrial. Dicha cadena cinemática abierta está constituida de la siguiente manera: la primera articulación sirve para formar la base; le siguen conexiones sucesivas entre articulaciones y eslabones, y en el extremo final, esto es, en el último eslabón no hay articulación ya que éste está dedicado a colocar la herramienta indicada para llevar a cabo una aplicación específica. Esto significa que el extremo final del robot no se encuentra conectado a la base.

Desde el punto de vista mecánico, la cadena cinemática se dice que es abierta cuando hay sólo una secuencia de eslabones sin que las dos puntas terminales de la cadena desde la base hasta el extremo final se unan, es decir que no formen un lazo cerrado, de otra manera sería una cadena ci-

nemática cerrada. Los servomotores o actuadores se utilizan para formar



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.2 Robot manipulador formado por cadena cinemática abierta.

las articulaciones, las cuales son las encargadas de transmitir la energía para producir movimiento a cada uno de los eslabones que conforman al robot. Cada articulación contribuye con un grado de libertad, siendo n no sólo la dimensión del vector de posición, sino que también indica el número de articulaciones que corresponde al número de grados de libertad (abreviado *gdl*).

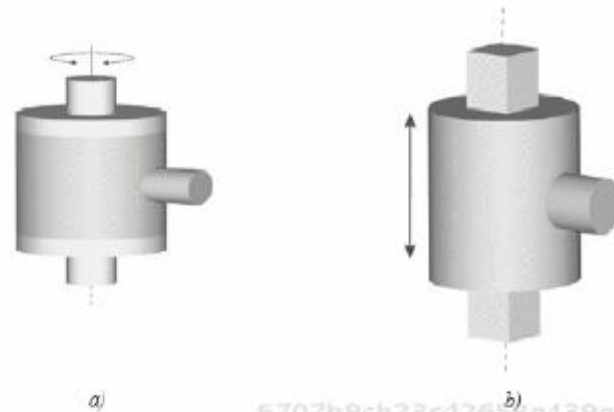
6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Las articulaciones (*joints*) pueden producir movimiento rotacional o movimiento lineal de translación. A las articulaciones que producen movimiento giratorio o rotacional se les denomina **articulaciones rotacionales**. Por otro lado, a las que producen movimiento lineal se les denomina **articulaciones prismáticas o lineales**. En la figura 4.3 se muestran los dos tipos de articulaciones.

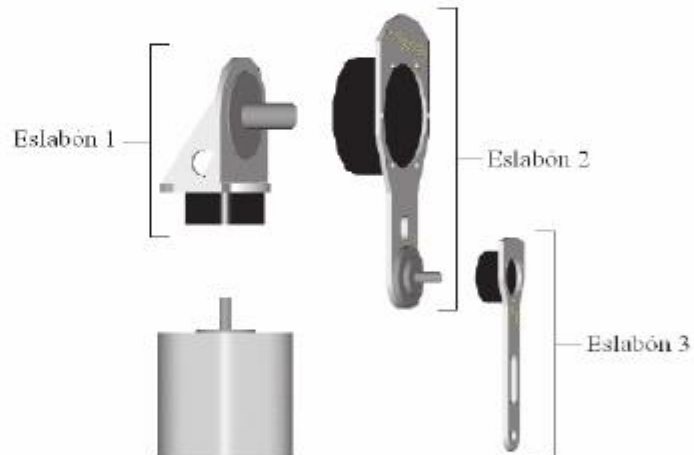
Un **eslabón** (*link*) está formado por una barra metálica acoplada mecánicamente al rotor y al estator de la siguiente articulación. En la figura 4.4 se muestran las partes que componen a un eslabón de un robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Figura 4.3 Tipos de articulaciones: a) rotacional, b) lineal.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

Figura 4.4 Elementos forman un eslabón de un robot manipulador.

El **espacio de trabajo** (*workspace*) de un robot manipulador es el espacio o lugar donde el robot puede realizar todos sus posibles movimientos. El espacio de trabajo está determinado por la geometría del robot y la naturaleza de sus articulaciones (lineales y rotacionales).

El espacio de trabajo de un robot industrial se encuentra acondicionado por sensores especiales y cercas de seguridad para que ninguna persona

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebruary

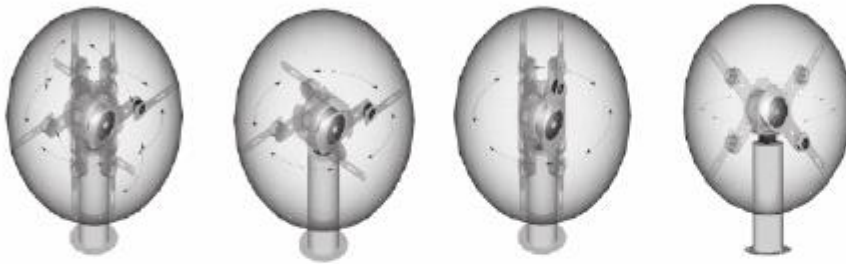


Figura 4.5 Espacio de trabajo de un robot industrial.

pueda invadir su área. Un robot industrial puede tener un peso de más de tres toneladas y alcanzar velocidades superiores a 3000 mm/seg. Mientras el robot está en movimiento, resulta peligroso para un usuario que se encuentre dentro de su espacio de trabajo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El **extremo final** (*end-effector*) es la parte terminal o final del último eslabón, destinado a colocar la herramienta adecuada para una aplicación específica. La posición del extremo final se representa por $[x, y, z]^T$ y su orientación se denota a través de los ángulos de Euler.

Notación

La posición (movimiento rotacional o lineal) del robot se denota por el vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, el cual agrupa la posición i -ésima q_i correspondiente a la i -ésima articulación del robot para $i = 1 \dots, n$. Aquí n es el número de gdl. El valor instantáneo de la i -ésima posición q_i es proporcionado por el encoder integrado en el i -ésimo servomotor. Debido a que q_i representa la posición de la i -ésima articulación, también se le conoce como posición articular o desplazamiento articular.

La figura 4.6 muestra la analogía entre el brazo humano y un brazo robot o robot industrial. La articulación de la base corresponde a la cintura. La articulación del hombro (*shoulder*) debe ser la de mayor capacidad con respecto a las otras articulaciones, ya que es la que mueve y soporta el peso de la articulación del codo (*elbow*) y de la herramienta de trabajo, así como

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

la carga de objetos que realice durante una determinada aplicación.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary

Figura 4.6 Base, hombro y codo de un robot industrial.

4.3 Transformaciones homogéneas

La representación de posicionamiento para robots manipuladores involucra sistemas coordenados cartesianos que especifican posición y orientación del extremo final del robot. La transformación homogénea es una herramienta matemática que involucra operaciones de rotación y traslación dentro de una matriz que estructura el modelo de cinemática directa.

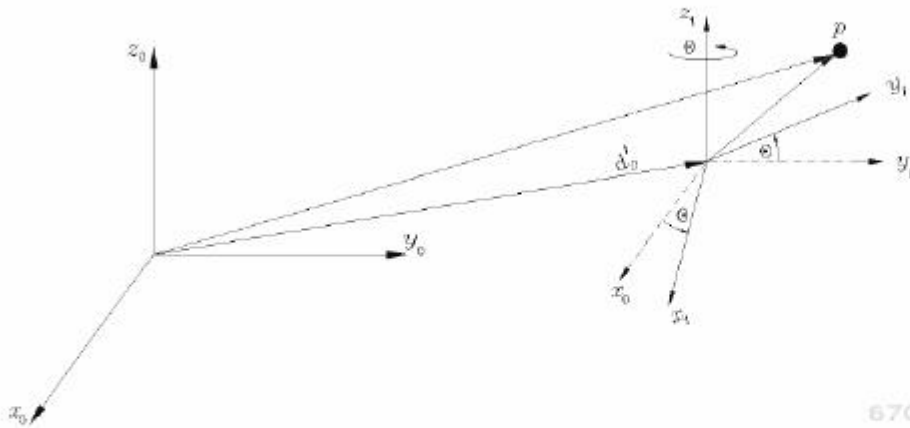
6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebruary

Considérese el sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$ y el sistema de referencia $\Sigma_1 (x_1, y_1, z_1)$, cuyos orígenes no son coincidentes. El origen del sistema de referencia Σ_1 se encuentra desplazado una distancia d_0^1 con respecto al origen del sistema Σ_0 , como se muestra en la figura 4.7.

El vector d_0^1 está expresado en coordenadas del sistema Σ_0 , es decir: $d = [d_{0x}^1, d_{0y}^1, d_{0z}^1]^T$, entonces cualquier punto p tiene representación p_0 y p_1 . La relación general entre los sistemas de referencias $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1 (x_1, y_1, z_1)$ incluyendo la matriz de rotación $R_{z,\theta}$ y el vector de traslación d_0^1 es:

$$p_0 = d_0^1 + R p_1 \quad (4.1)$$



Transformaciones homogéneas

En el sitio web del libro se puede consultar material complementario sobre la teoría de matrices ortogonales, particularmente se demuestran las propiedades de las matrices de rotación las cuales son empleadas para modelar la orientación del sistema de referencia de la herramienta de aplicación colocada en el extremo final del robot. Métodos de rotación sucesivas de sistemas de referencias cartesianas a través de los ángulos de Euler, ángulos de orientación, inclinación y balanceo *roll*, *pitch*, *yaw*, etc.

Así mismo se encuentran las propiedades de las transformaciones homogéneas. Ejemplos y programas en código fuente para MatLab.

Figura 4.7 Traslación y rotación $R_{z,\theta}$ de los sistemas Σ_0 y Σ_1 .

$$= \begin{bmatrix} d_{0x}^1 \\ d_{0y}^1 \\ d_{0z}^1 \end{bmatrix} + R_{z,\theta} \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix}$$

La notación más común para representar la matriz de rotación y el vector de traslación en forma compacta se conoce como **transformación homogénea** la cual, para el caso de la figura 4.7 está dada por la siguiente expresión:

$$H = \begin{bmatrix} R_{z,\theta} & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Matriz de rotación} & \vdots & \text{Vector de Traslación} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{0}^T & & 1 \end{bmatrix}$$

donde $R_{z,\theta} \in SO(3)$ es una matriz ortogonal y $\mathbf{d}_0^1 \in \mathbb{R}^3$. Para propósitos de acoplamiento en dimensiones, el vector $\mathbf{0}^T$ y el número 1 aparecen en el último renglón.