

La entrada al motor del sistema es v_a y ésta se suma a una señal de realimentación de la fuerza contraelectromotriz v_b para dar una señal de error que es la entrada del circuito de la armadura. La ecuación anterior describe la relación entre la entrada de la señal de error en la bobina de la armadura y la salida de la corriente de la armadura i_a . Sustituyendo v_b se obtiene

$$v_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$

La corriente i_a de la armadura produce un par T . Entonces en el motor controlado por armadura, B es constante, y se tiene

$$T = k_1 B i_a = k_4 i_a$$

donde k_4 es una constante. Este par se convierte en la entrada del sistema de carga. El par neto que actúa sobre la carga es

$$\text{Par neto} = T - \text{par de amortiguamiento}$$

El par de amortiguamiento es $c\omega$, donde c es una constante. Por lo tanto, si se desprecian los efectos de resortes torsionales del eje de rotación, se obtiene

$$\text{Par neto} = k_4 i_a - c\omega$$

Esto provoca una aceleración angular $d\omega/dt$, por lo tanto,

$$I \frac{d\omega}{dt} = k_4 i_a - c\omega$$

De esta forma se obtienen dos ecuaciones que describen las condiciones presentes en un motor controlado por armadura, es decir,

$$v_a - k_3\omega = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \quad \text{y} \quad I \frac{d\omega}{dt} = k_4 i_a - c\omega$$

Así podemos obtener la ecuación que relaciona la salida ω con la entrada v_a del sistema al eliminar i_a . Vea una breve explicación de la transformada de Laplace en el capítulo 10, o en el apéndice A, donde se indica cómo realizar lo anterior.

En un *motor controlado por campo* la corriente de la armadura permanece constante y el motor se controla mediante la variación del voltaje de campo. En el circuito de campo (figura 9.8), lo que en esencia se tiene es una inductancia L_f en serie con una resistencia R_f . Por lo tanto, para este circuito

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

Imagine que el motor controlado por campo es el que representa el diagrama de bloques de la figura 9.9b. La entrada al sistema es v_f . El

circuito de campo la convierte en una corriente i_f , la relación entre v_f e i_f está dada por la ecuación anterior. Esta corriente produce un campo magnético y, en consecuencia, un par que actúa en la bobina de la armadura, como indica $T = k_1 B i_a$. Pero la densidad de flujo B es proporcional a la corriente de campo i_f y como i_a es constante, se tiene

$$T = k_1 B i_a = k_5 i_f$$

donde k_5 es una constante. La carga del sistema convierte al torque de salida en una velocidad angular ω . Al igual que antes, el par neto que actúa sobre la carga es

$$\text{Par neto} = T - \text{par de amortiguamiento}$$

El amortiguamiento torsional es $c\omega$, donde c es una constante. Por lo tanto, si los efectos de los resortes torsionales del eje son despreciables, se tiene

$$\text{Par neto} = k_5 i_f - c\omega$$

Esto provocará una aceleración angular de $d\omega/dt$ y, por lo tanto,

$$I \frac{d\omega}{dt} = k_5 i_f - c\omega$$

Las condiciones que caracterizan a un motor controlado por campo están representadas por las ecuaciones:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad \text{y} \quad I \frac{d\omega}{dt} = k_5 i_f - c\omega$$

Así, se obtiene la ecuación que relaciona la salida ω con la entrada v_f del sistema al eliminar i_f . Vea una breve explicación sobre la transformada de Laplace en el capítulo 10, o en el apéndice A, donde se indica cómo realizar lo anterior.

9.4 Sistemas hidro-mecánicos

Los convertidores hidro-mecánicos transforman señales hidráulicas en movimientos traslacionales o rotacionales, y viceversa. Por ejemplo, el movimiento de un pistón en un cilindro como resultado de la presión hidráulica involucra la transformación de la entrada de esa presión hidráulica, en un movimiento de traslación como salida.

La figura 9.10 muestra un sistema hidráulico en el que la entrada es un desplazamiento x_i que se transforma, después de atravesar el sistema, en el desplazamiento x_o de una carga. El sistema consiste en una *válvula de corredera* y un *cilindro*. El desplazamiento a la izquierda de la entrada x_i produce una presión de suministro de fluido hidráulico p_s que provoca el paso del fluido a la parte izquierda del cilindro. Esto empuja al vástago del cilindro a la derecha y causa la salida del fluido a la parte derecha de la cámara, por el puerto de salida en el extremo derecho de la válvula de corredera.

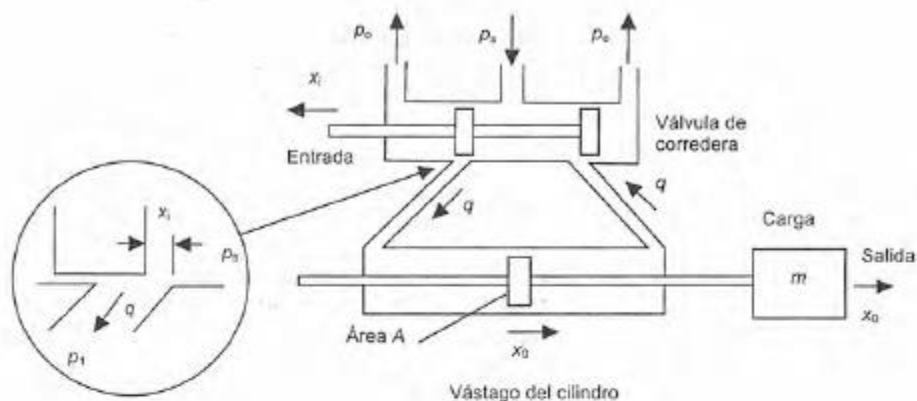


Figura 9.10 Sistema hidráulico y carga

El gasto del fluido que entra y sale de la cámara depende de qué tanto haya descubierto los puertos el movimiento de entrada permitiendo la entrada o salida del fluido de la válvula de corredera. Cuando el desplazamiento de entrada x_i es a la derecha, la válvula de corredera permite que el fluido pase al extremo derecho del cilindro y el resultado es el movimiento del pistón a la izquierda.

El gasto del fluido q que pasa por un orificio, que es lo que los puertos de la válvula de corredera son, es una relación no lineal (vea la sección 9.1.1), dependiendo de la diferencia de presiones entre los dos lados del orificio y de su área transversal A . No obstante, es posible utilizar una versión linealizada de la ecuación (vea en la sección 9.1.1 su deducción).

$$\Delta q = m_1 \Delta A + m_2 \Delta(\text{diferencia de presiones})$$

donde m_1 y m_2 son constantes en el punto de operación. La diferencia de presiones del fluido cuando entra en la cámara es $(p_s - p_1)$ y cuando sale $(p_2 - p_0)$. Si el punto de operación en torno al cual se analizó la ecuación se toma como el punto en el que la válvula de corredera está en su posición central y los puertos que la conectan con el cilindro están ambos cerrados, q es cero y, por lo tanto, $\Delta q = q$, A es proporcional a x_s suponiendo que x_s se mide a partir de su posición central, y el cambio de presión en el lado de entrada del pistón es $-\Delta p_1$ respecto a p_s , y en el lado de salida Δp_2 respecto a p_0 . Por lo tanto, la ecuación correspondiente al puerto de entrada es

$$q = m_1 x_i + m_2 (-\Delta p_1)$$

y para el puerto de salida es

$$q = m_1 x_i + m_2 \Delta p_2$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$2q = 2m_1 x_i - m_2 (\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

$$q = m_1 x_i - m_3 (\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

donde $m_3 = m_2/2$.

Para el cilindro, la variación en el volumen del fluido que entra en el lado izquierdo de la cámara, o que sale por el lado derecho, cuando el pistón se desplaza una distancia x_o es Ax_o , donde A es el área de la sección transversal del pistón. Entonces, la razón de variación del volumen es $A(dx_o/dt)$. La tasa de entrada del fluido en la parte izquierda del cilindro es q . Sin embargo, dado que cierta cantidad de fluido que se fuga de un lado del pistón al otro

$$q = A \frac{dx_o}{dt} + q_L$$

donde q_L es la tasa de la fuga. Sustituyendo q , se obtiene

$$m_1 x_i - m_3 (\Delta p_1 - \Delta p_2) = A \frac{dx_o}{dt} + q_L$$

La razón de la fuga de fluido q_L es un flujo que pasa por un orificio, en este caso el espacio entre el vástago y el cilindro. El orificio tiene una sección transversal constante y una diferencia de presión $(\Delta p_1 - \Delta p_2)$. Por lo tanto, al usar la ecuación linealizada en este tipo de flujo:

$$q_L = m_4 (\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

Y usando esta ecuación para substituir q_L :

$$m_1 x_i - m_3 (\Delta p_1 - \Delta p_2) = A \frac{dx_o}{dt} + m_4 (\Delta p_1 - \Delta p_2)$$

$$m_1 x_i - (m_3 + m_4) (\Delta p_1 - \Delta p_2) = A \frac{dx_o}{dt}$$

La diferencia de presiones en el pistón se produce como resultado de la fuerza que se ejerce en la carga, donde dicha fuerza es igual a $(\Delta p_1 - \Delta p_2)A$. También existe un movimiento amortiguador, es decir de fricción, de la masa. Éste es proporcional a la velocidad de la masa, o sea (dx_o/dt) . Por lo tanto, la fuerza neta que se ejerce sobre la carga es

$$\text{Fuerza neta} = (\Delta p_1 - \Delta p_2)A - c \frac{dx_o}{dt}$$

Esta fuerza neta causa la aceleración de la masa, y como la aceleración es (d^2x_o/dt^2) , entonces:

$$m \frac{d^2x_o}{dt^2} = (\Delta p_1 - \Delta p_2)A - c \frac{dx_o}{dt}$$

Reordenando la ecuación se obtiene:

$$\Delta p_1 - \Delta p_2 = \frac{m}{A} \frac{d^2 x_o}{dt^2} + \frac{c}{A} \frac{dx_o}{dt}$$

Usando esta ecuación para substituir las diferencias de presión en la ecuación anterior

$$m_1 x_i - (m_3 + m_4) \left(\frac{m}{A} \frac{d^2 x_o}{dt^2} + \frac{c}{A} \frac{dx_o}{dt} \right) = A \frac{dx_o}{dt}$$

Reordenando se obtiene

$$\frac{(m_3 + m_4)m}{A} \frac{d^2 x_o}{dt^2} + \left(A + \frac{c(m_3 + m_4)}{A} \right) \frac{dx_o}{dt} = m_1 x_i$$

y reordenando esta ecuación se obtiene

$$\frac{(m_3 + m_4)m}{A^2 + c(m_3 + m_4)} \frac{d^2 x_o}{dt^2} + \frac{dx_o}{dt} = \frac{Am_1}{A^2 + c(m_3 + m_4)} x_i$$

Para simplificar esta ecuación se utilizan dos constantes, k y τ , esta última se conoce como constante de tiempo (vea el capítulo 10). Por lo tanto,

$$\tau \frac{d^2 x_o}{dt^2} + \frac{dx_o}{dt} = k x_i$$

Entonces, la relación entre la entrada y la salida se representa por una ecuación diferencial de segundo orden.

Problemas

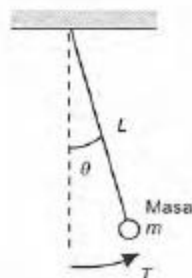


Figura 9.11 Problema 3

1. La relación entre una fuerza F que deforma un resorte una distancia x está dada por

$$F = kx^2$$

donde k es una constante. Linealice esta ecuación para el punto de operación x_o .

2. La relación entre la fem E producida por un termopar y la temperatura T está dada por

$$E = aT + bT^2$$

donde a y b son constantes. Linealice esta ecuación para un punto de operación cuya temperatura es T_o .

3. La relación entre el par T aplicado a un péndulo simple y la desviación angular (figura 9.11) es la siguiente

$$T = mgL \text{sen } \theta$$

donde m es la masa de la pesa, L la longitud del péndulo y g la aceleración debida a la gravedad. Linealice esta ecuación para el ángulo de equilibrio θ de 0° .

4. Deduzca la ecuación diferencial que relaciona el voltaje de entrada para un servomotor de cd y la velocidad angular de salida, suponiendo que el motor está controlado por armadura y el circuito equivalente del motor tiene una armadura que sólo tiene resistencia, su inductancia es despreciable.
5. Deduzca las ecuaciones diferenciales de un generador de cd. Suponga que el generador tiene un campo magnético constante. El circuito de la armadura tiene una bobina de armadura con resistencia e inductancia en serie con la carga. Suponga que la carga tiene resistencia e inductancia.
6. Deduzca las ecuaciones diferenciales de un motor de cd de imán permanente.
7. Considere un actuador de solenoide por el cual pasa una corriente que produce el movimiento de una varilla que entra o sale del solenoide. Proponga modelos del arreglo anterior que se puedan utilizar para deducir una ecuación diferencial que relacione la entrada de la corriente, con la salida de desplazamiento.

10 Respuestas dinámicas de sistemas

10.1 Modelado de sistemas dinámicos

La función más importante de un modelo diseñado como sistema de medición o control es predecir qué salida se obtendrá con una entrada en particular. No sólo se está interesado en una situación estática, es decir, después de que se alcanza un estado estable y hay una salida de x correspondiente a una entrada de y . También es necesario considerar cómo la salida varía con el tiempo cuando la entrada cambia, o bien cuando varía con el tiempo. Por ejemplo, ¿cómo varía con el tiempo la temperatura de un sistema de control de temperatura cuando su termostato se fija a una nueva temperatura de referencia? En un sistema de control, ¿cómo cambiará con el tiempo la salida del sistema al definir un nuevo punto de ajuste o cuando aumenta a una tasa constante?

Los capítulos 8 y 9 se refieren a modelos de sistemas en los que la entrada varía con el tiempo y los resultados respectivos se expresan con ecuaciones diferenciales. Este capítulo trata cómo usar estos modelos para predecir la forma en que las salidas cambian con el tiempo cuando la entrada varía con el tiempo.

10.1.1 Ecuaciones diferenciales

Para describir la relación entre la entrada de un sistema y su salida se debe describir la relación entre entradas y salidas utilizando expresiones que sean funciones del tiempo. Para ello se recurre a una ecuación que exprese cómo varía con el tiempo la salida del sistema cuando la entrada también se modifica con el tiempo. Para este fin se utiliza una *ecuación diferencial*. Esta ecuación incluye derivadas con respecto al tiempo que permiten conocer la forma en que la respuesta del sistema varía con el tiempo. La derivada dx/dt describe la tasa de variación de x en función del tiempo, la derivada d^2x/dt^2 da el cambio de dx/dt en el tiempo. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en ecuaciones de *primer orden*, *segundo orden*, *tercer orden*, etcétera, según sea la derivada de mayor orden en ellas.

El orden máximo de una ecuación de primer orden es dx/dt , el de una de segundo orden es d^2x/dt^2 , el de una de tercer orden es d^3x/dt^3 y el de una de n -ésimo orden es $d^n x/dt^n$.

Este capítulo analiza los tipos de respuestas que se pueden obtener con los sistemas de primer y segundo orden y la solución de tales ecuaciones a fin de obtener las respuestas del sistema para diversos tipos de entrada. Para encontrar la solución de una ecuación en este capítulo se utiliza el método de 'prueba una solución'; en el capítulo 11 se presenta el método de la transformada de Laplace, que se explica con mayor detalle en el apéndice. Para ver un estudio más minucioso de las ecuaciones diferenciales se sugiere consultar *Mathematics for Engineers and Technologists* de H. Fox y W. Bolton (Butterworth-Heinemann, 2002), y para la transformada de Laplace, *Laplace and z-Transforms* de W. Bolton (Longman, 1994).

10.1.2 Respuestas libre y forzada

Un ejemplo de sistema de primer orden es el agua que sale de un tanque (figura 10.1). En este sistema se tiene

$$p_1 - p_2 = Rq$$

donde R es la resistencia hidráulica. Ahora bien, $p_1 - p_2 = h\rho g$, con ρ la densidad del agua y q el gasto de salida del agua del tanque, que también es $-dV/dt$, donde V es el volumen de agua del tanque, que es igual a Ah . Por lo tanto, $q = -d(Ah)/dt = -A dh/dt$. De esta manera, la ecuación anterior se expresa como

$$h\rho g = -RA \frac{dh}{dt}$$

El cambio de la variable h es proporcional a la variable y se conoce como *respuesta libre*, dado que no hay entradas al sistema que fuerzan la variable para que cambie. Para constatar lo anterior, basta escribir la ecuación diferencial con todos los términos de la salida, es decir, h , en el mismo lado de la ecuación, es decir,

$$RA \frac{dh}{dt} + (\rho g)h = 0$$

En la sección 8.4.1 se dedujo una ecuación diferencial para un tanque del cual salía y entraba agua (figura 10.2). Esta ecuación tiene una función de excitación q_1 que se puede escribir como

$$RA \frac{dh}{dt} + (\rho g)h = q_1$$

En otro ejemplo, considere un termómetro que se coloca en un líquido caliente a cierta temperatura T_L . La variación en el tiempo en

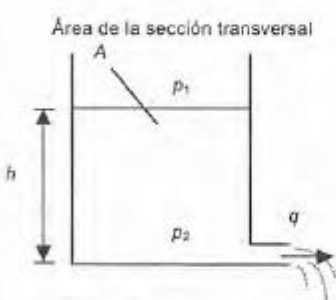


Figura 10.1 Agua que sale de un tanque

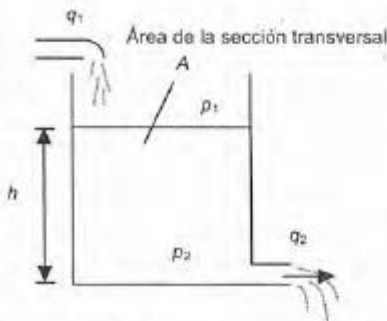


Figura 10.2 Agua que sale de un tanque con entrada



Figura 10.3 Respuestas transitoria y en estado estable de un sistema de resorte

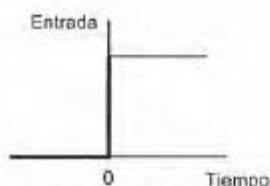


Figura 10.4 Entrada tipo escalón en el tiempo 0

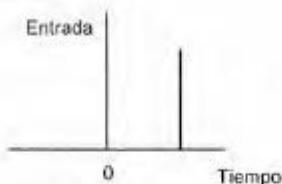


Figura 10.5 Impulso

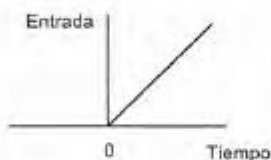


Figura 10.6 Entrada tipo rampa en el tiempo 0

10.2 Sistemas de primer orden

la lectura del termómetro T deducida en la sección 8.5.1, está dada por la siguiente ecuación diferencial

$$RC \frac{dT}{dt} + T = T_L$$

Esta ecuación diferencial tiene una entrada forzada de T_L .

10.1.3 Respuestas transitoria y permanente

Se considera que la respuesta total de un sistema de control, o del elemento de un sistema, está formada por dos aspectos: la respuesta permanente y la respuesta transitoria. La *respuesta transitoria* es la parte de la respuesta de un sistema que se produce cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un intervalo breve. La *respuesta permanente* es la respuesta que permanece una vez que desaparecen todas las respuestas transitorias.

Un ejemplo sencillo es el comportamiento de un resorte suspendido en forma vertical (figura 10.3) y lo que ocurre cuando de él se suspende un peso de improviso. La elongación del resorte aumenta de manera abrupta y puede oscilar hasta que después de cierto tiempo alcanza un valor permanente o estable. Este valor se conoce como respuesta de estado estable del sistema del resorte. La oscilación que se produce antes de alcanzar el estado estable es la respuesta transitoria.

La entrada al sistema de resorte, el peso, es una cantidad que varía con el tiempo. Durante cierto tiempo no se añade peso, es decir, no hay entrada; transcurrido ese lapso existe una entrada que permanece constante durante el resto del tiempo. Este tipo de entrada se conoce como *entrada escalón* y su gráfica se muestra en la figura 10.4.

La señal que entra a los sistemas puede tener otras formas: impulso, rampa y senoidal. El impulso es una entrada de duración breve (figura 10.5); una rampa es una entrada que aumenta de manera constante (figura 10.6) y se representa por la ecuación $y = kt$, donde k es una constante; la entrada senoidal se representa por la ecuación $y = k \sin \omega t$, donde ω es la frecuencia angular e igual a $2\pi f$, donde f es la frecuencia.

Tanto la entrada como la salida son funciones del tiempo. Una forma de indicar lo anterior es escribirlas en la forma $f(t)$, donde f es la función y (t) indica que su valor depende del tiempo, t . Para la entrada del peso W a un sistema de resorte se puede escribir $W(t)$ y para la elongación d de salida $d(t)$. En general, las entradas se representan por $y(t)$ y las salidas por $x(t)$.

Considere un sistema de primer orden (figura 10.7) en el cual $y(t)$ es la entrada al sistema y $x(t)$ la salida; tiene una entrada $b_0 y$ y se puede describir por una ecuación diferencial de la forma

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

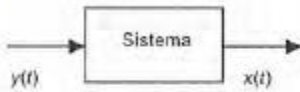


Figura 10.7 Sistema

donde a_1 , a_0 y b_0 son constantes.

Un método para resolver una ecuación de primer orden y obtener una ecuación que indique en forma directa cómo varía la salida con el tiempo involucra identificar el tipo de solución que corresponde a la ecuación diferencial y luego demostrar que esa solución es válida.

La entrada $y(t)$ puede tomar muchas formas. Considere primero el caso en que la entrada es 0. Ya que nada entra al sistema, no hay una señal que lo fuerce a una respuesta de otra manera que no sea su respuesta libre en ausencia de entrada. La ecuación diferencial es

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Probemos con una solución de la forma $x = A e^{st}$, donde A y s son constantes. Se tiene, $dx/dt = sA e^{st}$; sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial se obtiene:

$$a_1 s A e^{st} + a_0 A e^{st} = 0$$

de manera que $a_1 s + a_0 = 0$ y $s = -a_0/a_1$. Así, la solución es

$$x = A e^{-a_0 t/a_1}$$

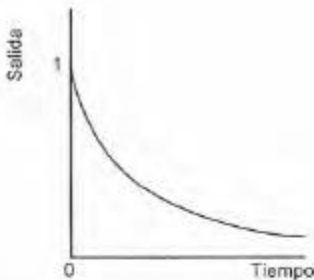


Figura 10.8 Respuesta libre

La expresión anterior se conoce como *respuesta libre* dado que no hay una función de excitación. Para determinar el valor de la constante A suponga algunas condiciones iniciales (límite o de frontera). Si $x = 1$ cuando $t = 0$, entonces $A = 1$. La figura 10.8 ilustra la respuesta libre que corresponde a una caída exponencial.

Ahora considere una ecuación diferencial con una *función forzante*, es decir,

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

Considere que la solución a esta ecuación consta de dos partes, es decir, $x = u + v$. Una de ellas representa la parte transitoria de la solución y la otra, el estado estable. Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$a_1 \frac{d(u + v)}{dt} + a_0 (u + v) = b_0 y$$

Reagrupando se tiene

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) + \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b_0 y$$

Si se hace

$$a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_0 y$$

entonces se tiene

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0$$

es decir, dos ecuaciones diferenciales; una que contiene una función de excitación y otra que es la ecuación de la respuesta libre. Ésta es la ecuación de la respuesta libre que antes se resolvió en esta sección y su solución es del tipo

$$u = A e^{-a_0 t/a_1}$$

La otra ecuación diferencial contiene la función de excitación y . En esta ecuación diferencial el tipo de solución que se intente dependerá de la forma de la señal de entrada y . Para una entrada escalón cuando y es constante todo el tiempo y mayor que 0, es decir, $y = k$, se puede probar una solución como $v = A$, donde A es una constante. Si la señal de entrada es de la forma $y = a + bt + ct^2 + \dots$, donde a , b y c son constantes que también pueden ser cero, se puede intentar una solución de la forma $v = A + Bt + Ct^2 + \dots$. Para una señal senoidal se puede intentar una solución de la forma $v = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

Para ilustrar lo anterior, suponga que en el instante $t = 0$ existe una entrada tipo escalón con magnitud igual a k . Probamos una solución de la forma $v = A$. La diferenciación de una constante da 0; entonces, cuando esta solución se sustituye en la ecuación diferencial se obtiene $a_0 A = b_0 k$ y, así, $v = (b_0/a_0)k$.

La solución completa está dada por $y = u + v$ y se tiene

$$y = A e^{-a_0 t/a_1} + \frac{b_0}{a_0} k$$

Podemos determinar el valor de la constante A suponiendo ciertas condiciones iniciales (de frontera). En consecuencia, si la salida $y = 0$ cuando $t = 0$, entonces:

$$0 = A + \frac{b_0}{a_0} k$$

Por lo tanto, $A = - (b_0/a_0)k$. La solución se convierte en:

$$x = \frac{b_0}{a_0} k (1 - e^{-a_0 t/a_1})$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ el término exponencial tiende a 0. El término exponencial contiene la parte de la respuesta que es la solución transitoria. La respuesta de estado estable es el valor de x cuando $t \rightarrow \infty$, y así es $(b_0/a_0)k$. Por lo tanto, la ecuación se puede expresar como

$$x = \text{valor en estado estable} \times (1 - e^{-a_0 t/a_1})$$

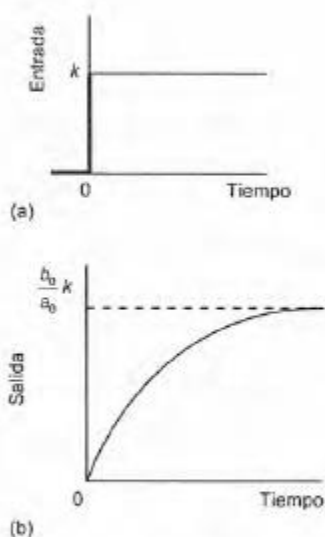


Figura 10.9 (a) Entrada tipo escalón, (b) salida correspondiente

La figura 10.9 muestra la gráfica de cómo la salida x varía con el tiempo para una entrada tipo escalón.

Como ejemplos adicionales, considere los siguientes:

1. Un sistema con un transductor eléctrico que consta de una resistencia en serie con un capacitor. Cuando se le aplica una entrada tipo escalón de magnitud V produce la salida de una diferencia de potencial en el capacitor v que está dada por la ecuación diferencial

$$RC \frac{dv}{dt} + v = V$$

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial, es decir, cuál es la respuesta del sistema y cómo varía v con el tiempo?

Al comparar la ecuación diferencial con la ecuación resuelta antes $a_1 = RC$, $a_0 = 1$ y $b_0 = 1$. Entonces, la solución es de la forma

$$v = V(1 - e^{-t/RC})$$

2. Considere un circuito eléctrico que consiste en una resistencia de $1 \text{ M}\Omega$ en serie con una capacitancia de $2 \mu\text{F}$. En el tiempo $t = 0$, el circuito recibe un voltaje tipo rampa de $4t \text{ V}$, es decir, el voltaje aumenta a una tasa de 4 V cada segundo. Determine cómo varía el voltaje del capacitor en función del tiempo.

La ecuación diferencial tiene una forma similar a la del ejemplo anterior, pero en vez del voltaje V se utiliza el voltaje tipo rampa $4t$ es decir,

$$RC \frac{dv}{dt} + v = 4t$$

Utilizando los valores correspondientes

$$2 \frac{dv}{dt} + v = 4t$$

Suponiendo que $v = v_n + v_f$, es decir, la suma de las respuestas libre y forzada, se tiene para la respuesta libre

$$2 \frac{dv_n}{dt} + v_n = 0$$

y para la respuesta forzada

$$2 \frac{dv_f}{dt} + v_f = 4t$$

Para la ecuación diferencial de la respuesta libre se puede intentar una solución de la forma $v_n = A e^{st}$. Por lo tanto, utilizando este valor:

$$2Ase^{st} + Ae^{st} = 0$$

De esta manera $s = -1/2$ y, así, $v_n = Ae^{-t/2}$.

Para la ecuación diferencial de la respuesta forzada, dado que el segundo miembro de la ecuación es $4t$, podemos intentar una solución de la forma $v_f = A + Bt$. Usando este valor se obtiene $2B + A + Bt = 4t$. Debemos tener, $B = 4$ y $A = -2B = -8$. Por lo tanto, la solución es $v_f = -8 + 4t$. Entonces, la solución completa es

$$v = v_n + v_f = Ae^{-t/2} - 8 + 4t$$

Dado que $v = 0$ cuando $t = 0$, es necesario que $A = 8$. Así,

$$v = 8e^{-t/2} - 8 + 4t$$

3. Considere un motor en el que la relación entre la velocidad angular de salida ω y el voltaje de entrada v para un motor está dada por:

$$\frac{IR}{k_1 k_2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_1} v$$

¿Cuál será el valor en estado estable de la velocidad angular cuando la entrada es un escalón de magnitud 1 V?

Comparando la ecuación diferencial con la ecuación resuelta, tenemos, $a_1 = IR/k_1 k_2$, $a_0 = 1$ y $b_0 = 1/k_1$. El valor en estado estable para una entrada tipo escalón es entonces $(b_0/a_0) = 1/k_1$.

10.2.1 La constante de tiempo

Para un sistema de primer orden sometido a una entrada tipo escalón de magnitud k se obtiene una salida y que varía con el tiempo t de acuerdo con

$$x = \frac{b_0}{a_0} k (1 - e^{-a_0 t/a_1})$$

o bien

$$x = \text{valor en estado estable} \times (1 - e^{-a_0 t/a_1})$$

Para el tiempo $t = (a_1/a_0)$, el término exponencial tiene el valor $e^{-1} = 0.37$ y

$$x = \text{valor en estado estable} \times (1 - 0.37)$$

En este tiempo el valor de la salida aumentó a 0.63 de su valor en estado estable. Este tiempo se llama *constante de tiempo* τ .

$$\tau = \frac{a_1}{a_0}$$

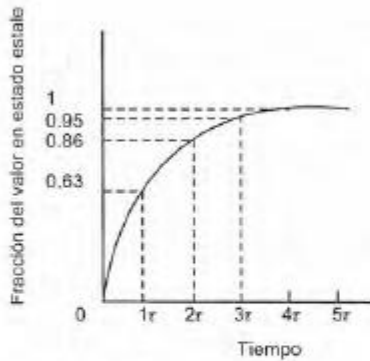


Figura 10.10 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada tipo escalón

En un tiempo $2(a_1/a_0) = 2\tau$, el término exponencial se convierte en $e^{-2} = 0.14$ y, de esta manera,

$$x = \text{valor en estado estable} \times (1 - 0.14)$$

En este instante la salida aumentó a 0.86 de su valor en estado estable. De forma parecida se calculan los valores de la salida después de 3τ , 4τ , 5τ , etcétera. La tabla 10.1 muestra los resultados de estos cálculos y la figura 10.10, la gráfica de cómo varía la salida con el tiempo para una entrada tipo escalón unitario.

Tabla 10.1 Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada tipo escalón

Tiempo t	Fracción de la salida de estado estable
0	0
1τ	0.63
2τ	0.86
3τ	0.95
4τ	0.98
5τ	0.99
∞	1

En términos de la constante de tiempo τ , la ecuación que describe la respuesta de un sistema de primer orden se puede expresar como:

$$x = \text{valor en estado estable} \times (1 - e^{-t/\tau})$$

La constante de tiempo τ es (a_1/a_0) , así la forma general de la ecuación diferencial de primer orden

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

se puede escribir como

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = \frac{b_0}{a_0} y$$

Pero b_0/a_0 es el factor por el que se multiplica la entrada y para obtener el valor en estado estable. Es correcto llamar a este factor *ganancia en estado estable*, dado que es el factor que indica cuántas veces es mayor la salida que la entrada en condiciones de estado estable. Si esta ganancia se representa por G_{SS} , la ecuación diferencial se puede expresar en la forma:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = G_{SS} y$$

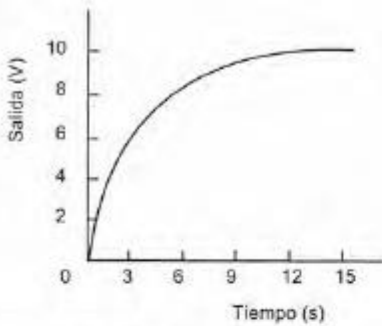


Figura 10.11 Ejemplo

Para ilustrar lo anterior considere la figura 10.11 que se muestra cómo varía en el tiempo la salida v_o de un sistema de primer orden cuando se somete a una entrada tipo escalón de 5 V. La constante de tiempo es el tiempo que debe transcurrir para que la salida de un sistema de primer orden cambie de 0 a 0.63 de su valor final en estado estable. En este caso, el tiempo es de casi 3 segundos. Para verificar este valor, y que el sistema es de primer orden, se determina el valor para 2, es decir, 6 s. Con un sistema de primer orden el valor debe ser 0.86 del valor en estado estable, que es el caso. La salida en estado estable es 10 V. Por lo tanto, la ganancia en estado estable G_{SS} es (salida/entrada en estado estable) = 10/5 = 2. La ecuación diferencial de un sistema de primer orden se puede escribir como:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = G_{SS}x$$

Por lo tanto, para este sistema se tiene:

$$3 \frac{dv_o}{dt} + v_o = 2v_i$$

10.3 Sistemas de segundo orden

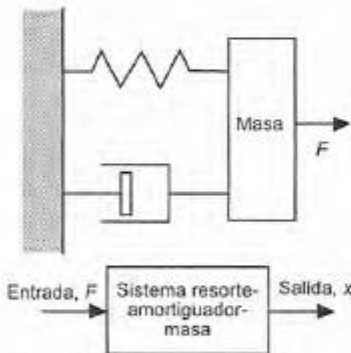


Figura 10.12 Sistema resorte-amortiguador-masa

Muchos sistemas de segundo orden se pueden considerar, en esencia, como un resorte estirado por una masa y provisto de un medio de amortiguamiento. La figura 10.12 muestra el sistema básico anterior, el cual se analizó en la sección 8.2.2. La ecuación que describe la relación entre la entrada de una fuerza F y la salida, un desplazamiento x , es la siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

donde m es la masa, c la constante de amortiguamiento y k la constante del resorte.

La manera como el desplazamiento x obtenido varía con el tiempo dependerá de la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema. De esta manera, si la fuerza aplicada fue una entrada de tipo escalón y no hay amortiguamiento, la masa puede oscilar en forma libre en el resorte y las oscilaciones continuarán de manera indefinida. Si no hay amortiguamiento, entonces $c = 0$, por lo que el término dx/dt es 0. Sin embargo, cuando hay amortiguamiento las oscilaciones tienden a desaparecer hasta que se obtiene un desplazamiento estable de la masa. Si el amortiguamiento es suficiente, no se producen oscilaciones y el desplazamiento de la masa aumenta poco a poco con el tiempo y la masa se mueve de manera gradual en torno a su posición de desplazamiento en estado estable. La figura 10.13 muestra la forma general en que los desplazamientos, para una entrada tipo escalón, varían con el tiempo con varios grados de amortiguamiento.

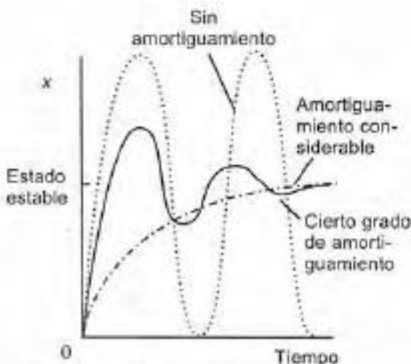


Figura 10.13 Efecto del amortiguamiento

10.3.1 La ecuación diferencial de segundo orden

Considere una masa suspendida del extremo de un resorte. En ausencia de amortiguamiento y permitiendo que oscile en forma libre

sin forzarla, la salida de este sistema de segundo orden es una oscilación continua (movimiento armónico simple). Suponga que esta oscilación se describe por la ecuación

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t$$

donde x es el desplazamiento en el instante t , A la amplitud de la oscilación y ω_n la frecuencia angular de las oscilaciones libres no amortiguadas. Diferenciando, se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_n A \cos \omega_n t$$

Al diferenciar la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_n^2 A \operatorname{sen} \omega_n t = -\omega_n^2 x$$

Reordenando términos se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0$$

Pero para una masa m suspendida en un resorte con rigidez k , se produce una fuerza de restauración kx y, por lo tanto,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Esta ecuación se puede expresar como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Al comparar ambas ecuaciones diferenciales, debe tenerse

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

y $x = A \operatorname{sen} \omega_n t$ es la solución de la ecuación diferencial.

Suponga que ahora sí hay amortiguamiento. El movimiento de la masa se describe por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede resolver con el método utilizado para la ecuación diferencial de primer orden. Suponga que la solución consta de dos elementos, una respuesta transitoria y una respuesta forzada, es decir, $x = x_n + x_f$. Sustituyendo x en la ecuación anterior se obtiene

$$m \frac{d^2 (x_n + x_f)}{dt^2} + c \frac{d(x_n + x_f)}{dt} + k(x_n + x_f) = F$$

Si consideramos que

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + c \frac{dx_n}{dt} + kx_n = 0$$

entonces se obtiene

$$m \frac{d^2 x_f}{dt^2} + c \frac{dx_f}{dt} + kx_f = F$$

Para resolver la ecuación del transitorio intentamos una solución de la forma $x_n = A e^{st}$. De esta manera se obtiene $dx_n/dt = As e^{st}$ y $d^2x_n/dt^2 = As^2 e^{st}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial se obtiene

$$mAs^2 e^{st} + cAse^{st} + kAse^{st} = 0$$

$$ms^2 + cs + k = 0$$

Entonces $x_n = A e^{st}$ es una solución válida sólo cuando la ecuación anterior sea igual a 0. Esta ecuación se llama *ecuación auxiliar*. Las raíces se obtienen por factorización o utilizando la fórmula para obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \\ &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{c^2}{4mk}\right) - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Pero, $\omega_n^2 = k/m$ y, así, si $\zeta^2 = c^2/4mk$, la ecuación anterior se convierte en

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ζ se conoce como *factor de amortiguamiento relativo*.

El valor de s que se obtiene con la ecuación anterior depende en gran medida del valor del término de la raíz cuadrada. Por lo tanto, cuando ζ^2 es mayor que 1, en el término de la raíz cuadrada hay un número positivo; cuando ζ^2 es menor a 1 se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. El factor de amortiguamiento relativo determina si el término de la raíz cuadrada es un número positivo o negativo y, en consecuencia, la forma de la salida del sistema.

Cuando $\zeta > 1$ existen dos raíces reales y diferentes s_1 y s_2

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

y, por lo tanto, la solución general de x_n es

$$x_n = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

En estas condiciones se dice que el sistema está *sobreamortiguado*.

Cuando $\zeta = 1$ existen dos raíces iguales $s_1 = s_2 = -\omega_n$. Con esta condición, conocida como *críticamente amortiguado*

$$x_n = (At + B)e^{-\omega_n t}$$

Puede parecer que la solución para este caso sería $x_n = A e^{s_1 t}$, pero se requieren dos constantes, por lo que la solución es de esta forma (consulte la explicación correspondiente en *Ordinary Differential Equations* de W. Bolton, Longman, 1994).

Cuando $\zeta < 1$ hay dos raíces complejas ya que en ambas está presente la raíz cuadrada de (-1) .

$$s = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{-1} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

si se sustituye $\sqrt{-1}$ por j ,

$$s = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Si se hace

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

entonces se puede escribir $s = -\zeta \omega_d \pm j \omega$ y con esto las raíces son

$$s_1 = -\zeta \omega_d + j \omega \quad \text{y} \quad s_2 = -\zeta \omega_d - j \omega$$

El término ω es la frecuencia del movimiento cuando está en la condición de amortiguamiento especificada por ζ . En estas condiciones la solución es

$$x_n = A e^{(-\zeta \omega_d + j \omega)t} + B e^{(-\zeta \omega_d - j \omega)t} = e^{-\zeta \omega_d t} (A e^{j \omega t} + B e^{-j \omega t})$$

Pero $e^{j \omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t$ y $e^{-j \omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_n &= e^{-\zeta \omega_d t} (A \cos \omega t + j A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t - j B \operatorname{sen} \omega t) \\ &= e^{-\zeta \omega_d t} [(A + B) \cos \omega t + j(A - B) \operatorname{sen} \omega t] \end{aligned}$$

Si las constantes P y Q se sustituyen por $(A + B)$ y $j(A - B)$, respectivamente:

$$x_n = e^{-\zeta \omega_d t} (P \cos \omega t + Q \operatorname{sen} \omega t)$$

En estas condiciones se dice que el sistema está *subamortiguado*.

Lo anterior proporciona las soluciones de la parte libre de la solución total. Para resolver la ecuación de la parte forzada

$$m \frac{d^2 x_f}{dt^2} + c \frac{dx_f}{dt} + kx_f = F$$

es necesario considerar una forma particular de señal de entrada y después intentar una solución. Para una entrada tipo escalón de magnitud F en el instante $t = 0$ se probará la solución $x_f = A$, donde A es una constante (en la explicación de la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden, consulte cómo elegir entre las diversas soluciones posibles). Entonces, $dx_f/dt = 0$ y $d^2x_f/dt^2 = 0$. Cuando estas expresiones se sustituyen en la ecuación diferencial $0 + 0 + kA = F$ y así $A = F/k$ y $x_f = F/k$. La solución completa, que es la suma de las soluciones libre y forzada, para el sistema sobreamortiguado es

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + \frac{F}{k}$$

para el sistema críticamente amortiguado

$$x = (At + B)e^{-\omega_n t} + \frac{F}{k}$$

y para el sistema subamortiguado

$$x = e^{-\zeta \omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + \frac{F}{k}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ las tres ecuaciones anteriores conducen a la solución $x = F/k$. Ésta es la condición de estado estable.

Una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

consta de

$$\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$$

y

$$\zeta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2 a_0}$$

Los siguientes ejemplos están diseñados para ilustrar los puntos anteriores

1. Considere un circuito en serie RLC (figura 10.14) donde $R = 100 \Omega$, $L = 2.0 \text{ H}$ y $C = 20 \mu\text{F}$. La corriente i del circuito está dada por (vea el pie de la figura 8.16):

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$$

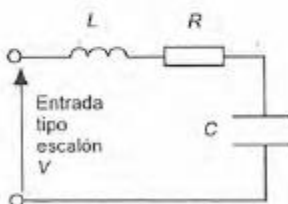


Figura 10.14 Sistema RLC

cuando se presenta una entrada tipo escalón V . Si comparamos esta ecuación con la ecuación diferencial general de segundo orden

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

la frecuencia natural está dada por

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2.0 \times 20 \times 10^{-6}}$$

y $\omega_n = 158$ Hz. Al comparar con la ecuación general de segundo orden se obtiene

$$\zeta^2 = \frac{(R/L)^2}{4 \times (1/LC)} = \frac{R^2 C}{4L} = \frac{100^2 \times 20 \times 10^{-6}}{4 \times 2.0}$$

Entonces, $\zeta = 0.16$. Como ζ es menor que 1, el sistema está subamortiguado. La frecuencia de oscilación amortiguada ω está dada por

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 158 \sqrt{1 - 0.16^2} = 156 \text{ Hz}$$

Dado que el sistema está subamortiguado, la solución tendrá la misma forma que

$$x = e^{-\zeta \omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + \frac{F}{k}$$

y, por lo tanto,

$$i = e^{-0.16 \times 158 t} (P \cos 156 t + Q \sin 156 t) + V$$

Como $i = 0$ cuando $t = 0$, entonces $0 = 1(P + 0) + V$. De esta manera, $P = -V$. Puesto que $di/dt = 0$ cuando $t = 0$, diferenciando la ecuación anterior e igualándola a cero se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= e^{-\zeta \omega_n t} (\omega P \sin \omega t - \omega Q \cos \omega t) \\ &\quad - \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) \end{aligned}$$

Así, $0 = 1(0 - \omega Q) - \zeta \omega_n (P + 0)$ y

$$Q = \frac{\zeta \omega_n P}{\omega} = -\frac{\zeta \omega_n V}{\omega} = -\frac{0.16 \times 158 V}{156} \approx -0.16 V$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial es

$$i = V - V e^{-25.3 t} (\cos 156 t - 0.16 \sin 156 t)$$

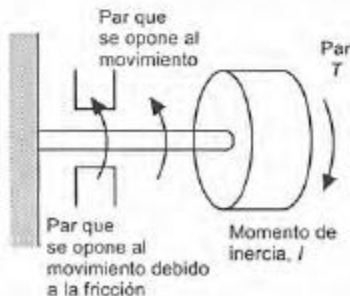


Figura 10.15 Sistema torsional

2. Considere el sistema mostrado en la figura 10.15. La entrada, un par T , se aplica a un disco con un momento de inercia I alrededor del eje. Éste gira en forma libre en el extremo del disco, pero está

fijo en el otro extremo. Al giro del eje se opone la rigidez de la torsión del eje, un par de magnitud $k\theta_0$ que se produce cuando el giro de entrada es θ_0 , donde k es una constante. Las fuerzas de fricción amortiguan el giro del eje y representan un par que se opone con magnitud $c d\theta_0/dt$, donde c es una constante. ¿En qué condiciones estará críticamente amortiguado este sistema?

Lo primero que se necesita obtener es la ecuación diferencial del sistema. El par neto es igual a

$$\text{Par neto} = T - c \frac{d\theta_0}{dt} - k\theta_0$$

El par neto es $I d^2\theta_0/dt^2$, y por lo tanto,

$$I \frac{d^2\theta_0}{dt^2} = T - c \frac{d\theta_0}{dt} - k\theta_0$$

$$I \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + c \frac{d\theta_0}{dt} + k\theta_0 = T$$

La condición para el amortiguamiento crítico se presenta cuando el factor de amortiguamiento relativo ζ es igual a 1. Al comparar la ecuación diferencial anterior con la forma general de una ecuación diferencial de segundo orden, se tiene

$$\zeta^2 = \frac{a_1^2}{4a_2a_0} = \frac{c^2}{4Ik}$$

Por lo tanto, para un amortiguamiento crítico tendremos que $c = \sqrt{4Ik}$.

10.4 Medidas de desempeño de los sistemas de segundo orden

La figura 10.16 muestra la forma característica de la respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado para una entrada tipo escalón. Para especificar este comportamiento se utilizan ciertos términos específicos.

El *tiempo de levantamiento* t_r es el tiempo que tarda la respuesta x para aumentar su valor de 0 al de estado estable x_{SS} y es una medida de cuán rápido el sistema responde a la entrada. Es el tiempo necesario para que la respuesta oscilante complete un cuarto de ciclo, es decir, $1/2\pi$. Por lo tanto,

$$\omega t_r = 1/2\pi$$

En ocasiones este tiempo de levantamiento se define como el tiempo que la respuesta tarda en aumentar su valor desde un porcentaje especificado del valor en estado estable, por ejemplo 10%, hasta otro porcentaje dado, por ejemplo, 90%.

El *tiempo de sobrepaso o pico* t_p es el tiempo que tarda la respuesta en aumentar de 0 al primer valor pico. Es el tiempo necesario para que la respuesta oscilante complete medio ciclo, es decir, π . Por lo tanto,

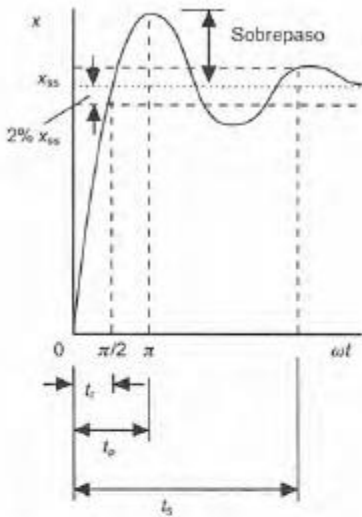


Figura 10.16 Respuesta de un sistema subamortiguado a una entrada tipo escalón

$$\omega t_p = \pi$$

El *sobrepaso* es la cantidad máxima que la respuesta sobrepasa al valor de estado estable. Es decir, es la amplitud del primer pico. El sobrepaso en general se expresa como un porcentaje del valor de estado estable. Para las oscilaciones subamortiguadas de un sistema se tiene

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + \text{valor en estado estable}$$

Dado $x = 0$ cuando $t = 0$, entonces $0 = 1(P + 0) + x_{SS}$ y, por lo tanto, $P = -x_{SS}$. El sobrepaso se produce cuando $\omega t = \pi$ y, entonces

$$x = e^{-\zeta\omega_n \pi / \omega} (P + 0) + x_{SS}$$

El sobrepaso es la diferencia entre la salida en ese tiempo y el valor de estado estable. Entonces

$$\text{Sobrepaso} = x_{SS} e^{-\zeta\omega_n \pi / \omega}$$

Como $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{Sobrepaso} &= x_{SS} \exp\left(\frac{-\zeta\omega_n \pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \\ &= x_{SS} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \end{aligned}$$

Expresado como porcentaje de x_{SS} ,

$$\text{Porcentaje de sobrepaso} = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \times 100\%$$

La tabla 10.2 proporciona los valores del porcentaje de sobrepaso para diversos valores de amortiguamiento

Tabla 10.2 Porcentaje de sobrepaso pico

Factor de amortiguamiento relativo	Porcentaje de sobrepaso
0.2	52.7
0.4	25.4
0.6	9.5
0.8	1.5

La *razón de decaimiento* o *decremento* es una indicación de la rapidez de la disminución en la amplitud de las oscilaciones. Es igual a la amplitud del segundo sobrepaso dividido entre la del primer so-

brepaso. El primero se produce cuando $\omega t = \pi$, y el segundo, cuando $\omega t = 2\pi$. Por lo tanto,

$$\text{Primer sobrepaso} = x_{SS} \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$\text{Segundo sobrepaso} = x_{SS} \exp\left(\frac{-2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

y, por lo tanto,

$$\text{Razón de decaimiento} = \frac{\text{segundo sobrepaso}}{\text{primer sobrepaso}} = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

El *tiempo de asentamiento* t_s es una medida del tiempo que las oscilaciones tardan en desaparecer. Es el tiempo que tarda la respuesta en llegar a un valor dado y permanecer dentro de un porcentaje especificado, por ejemplo, 2% del valor de estado estacionario (vea la figura 10.15). Esto significa que la amplitud de la oscilación debe ser menor al 2% de x_{SS} . Se tiene entonces que

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + \text{valor en estado estable}$$

y, como antes se obtuvo, $P = -x_{SS}$. La amplitud de la oscilación es $(x - x_{SS})$ donde x es el valor máximo. Los valores máximos se producen cuando ωt es un múltiplo de π y, por lo tanto, $\cos \omega t = 1$ y $\sin \omega t = 0$. Para 2% de tiempo de asentamiento, el tiempo de asentamiento t_s se produce cuando la amplitud máxima es 2% de x_{SS} , es decir, $0.02x_{SS}$. Entonces

$$0.02x_{SS} = e^{-\zeta\omega_n t_s} (x_{SS} \times 1 + 0)$$

Tomando logaritmos se obtiene $\ln 0.02 = -\zeta\omega_n t_s$ y como $\ln 0.02 = -3.9$, o aproximadamente 4, se tiene

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Éste es el valor del tiempo de asentamiento si el porcentaje especificado es 2%. Si el porcentaje es 5%, la ecuación se convierte en

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Como el tiempo necesario para completar un ciclo, es decir, el tiempo del periodo es $1/f$, donde f es la frecuencia, y dado $\omega = 2\pi f$, entonces el tiempo para completar un ciclo es $2\pi/f$. Durante el tiempo de asentamiento t_s el número de oscilaciones producidas es

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{\text{tiempo de asentamiento}}{\text{tiempo del periodo}}$$

y, por lo tanto, para un tiempo de asentamiento definido por el 2% del valor de estado estable

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{4/\zeta\omega_n}{2\pi/\omega}$$

Como $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, entonces

$$\text{Número de oscilaciones} = \frac{2\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{\pi\zeta\omega_n} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}$$

Para ilustrar lo anterior, considere un sistema de segundo orden cuya frecuencia natural es 2.0 Hz y tiene una frecuencia amortiguada de 1.8 Hz. Dado que $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, el factor de amortiguamiento es

$$1.8 = 2.0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

y $\zeta = 0.44$. Puesto que $\omega t_r = \frac{1}{2}\pi$, entonces 100% del tiempo de asentamiento es igual a

$$t_r = \frac{\pi}{2 \times 1.8} = 0.87 \text{ s}$$

El porcentaje del sobrepaso está dado por

$$\begin{aligned} \text{Porcentaje del sobrepaso} &= \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \times 100\% \\ &= \exp\left(\frac{-0.44\pi}{\sqrt{1 - 0.44^2}}\right) \times 100\% \end{aligned}$$

El porcentaje de sobrepaso es entonces 21%. El 2% del tiempo de asentamiento está dado por

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.44 \times 2.0} = 4.5 \text{ s}$$

El número de oscilaciones que ocurren dentro de 2% del tiempo de asentamiento está dado por:

$$\begin{aligned} \text{Número de oscilaciones} &= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{0.44^2} - 1} = 1.3 \end{aligned}$$

10.5 Identificación de sistemas

En el capítulo 9 se diseñaron modelos para sistemas considerándolos como formados por elementos sencillos. Una forma alternativa para desarrollar un modelo para un sistema real es hacer pruebas para determinar la respuesta debida a una entrada, por ejemplo, una entrada escalón, y luego encontrar un modelo que se ajuste a la respuesta. Este proceso para determinar el modelo matemático se conoce como *identificación de sistemas*. De esta manera, si se obtiene una respuesta a una entrada escalón de la forma mostrada en la figura 10.9, entonces se podría suponer que es un sistema de primer orden y determinar la constante de tiempo a partir de la curva de respuesta. Por ejemplo, suponga que a la respuesta toma 1.5 s para alcanzar 0.63 de la altura final y que la altura final es 5 veces la magnitud de la entrada escalón. En la tabla 10.1 se indica una constante de tiempo de 1.5 s y por lo que la ecuación diferencial que describe el modelo es

$$1.5 \frac{dx}{dt} + x = 5y$$

Un sistema de segundo orden subamortiguado dará una respuesta de la forma mostrada en la figura 10.16. El factor de amortiguamiento relativo se puede determinar a partir de las mediciones del primero y segundo sobrepasos, donde el cociente de estos sobrepasos, es decir, el cociente de hundimiento, proporciona el factor de amortiguamiento relativo. La frecuencia natural se puede determinar a partir del tiempo entre sobrepasos sucesivos. Después se pueden usar estos valores para determinar las constantes en la ecuación diferencial de segundo orden.

Problemas

1. La constante de tiempo de un sistema de primer orden es 4 s y el valor de la función de transferencia en estado estable es 6. ¿Qué forma tiene la ecuación diferencial del sistema?
2. La constante de tiempo de un termómetro de mercurio en tubo de vidrio es 10 s. Si en forma súbita se lleva de una temperatura de 20 °C y se le sumerge en agua caliente a 80 °C, ¿cuál será la temperatura que indique el termómetro después de a) 10 s, b) 20 s?
3. Un circuito consta de un resistor R en serie con un inductor L . Cuando en el tiempo $t = 0$ se le aplica un voltaje V de entrada tipo escalón, la ecuación diferencial del sistema es:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

Encuentre a) la solución de esta ecuación diferencial, b) la constante de tiempo, c) la corriente en estado estable i .

4. Describa cómo la salida de un sistema de segundo orden varía con el tiempo después de aplicarle una entrada tipo escalón; con un factor de amortiguamiento relativo de: a) 0, b) 0.5, c) 1.0 y d) 1.5.
5. Un circuito RLC tiene una corriente i que varía con el tiempo t cuando se somete a una entrada tipo escalón de magnitud V y está descrita por:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 16i = 16V$$

Determine a) frecuencia no amortiguada, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la solución de la ecuación si $i = 0$ donde $t = 0$ y $di/dt = 0$ cuando $t = 0$.

6. Un sistema tiene una salida x que varía con el tiempo t cuando se somete a una entrada tipo escalón y que está descrita por:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 25x = 50y$$

Determine a) la frecuencia sin amortiguamiento, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la solución de la ecuación si $x = 0$ cuando $t = 0$ y $dx/dt = -2$ cuando $t = 0$ y hay una entrada tipo escalón de magnitud igual a 3 unidades.

7. Un acelerómetro (instrumento para medir la aceleración) tiene una frecuencia no amortiguada de 100 Hz y un factor de amortiguamiento relativo de 0.6. ¿Cuál será a) el sobrepaso máximo en porcentaje y b) el tiempo de subida cuando se produce un cambio súbito en la aceleración?
8. Encuentre a) la frecuencia no amortiguada, b) el factor de amortiguamiento relativo, c) la frecuencia angular amortiguada, d) el tiempo de levantamiento, e) sobrepaso máximo en porcentaje y f) el tiempo de asentamiento de 0.2% para un sistema que produce la siguiente ecuación diferencial cuando la entrada y es un escalón.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 16x = 16y$$

9. Cuando en forma súbita se aplica un voltaje de 10 V a un voltímetro con bobina móvil se observa que la aguja del instrumento alcanza una lectura de 11 V antes de disminuir y asentarse en una lectura de 10 V. Determine a) el factor de amortiguamiento relativo y b) el número de oscilaciones de la aguja antes de que esté dentro de 0.2% de su valor de estado estable.
10. Un sistema de segundo orden está descrito mediante ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 4x = 16y$$

¿Cuál es el valor de la constante de amortiguamiento c que se necesitará si el sobrepaso debe ser menor que 9.5%?

11. Al observar las oscilaciones producidas por un sistema amortiguado al responder a una entrada se ve que el desplazamiento máximo durante el segundo ciclo es 75% del desplazamiento en el primer ciclo. ¿Cuál es el factor de amortiguamiento del sistema?
12. Se tiene un sistema de segundo orden que tiene un tiempo entre el primer y segundo sobrepasos de 1.6 s. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema?

11 Funciones de transferencia de sistemas

11.1 La función de transferencia

En relación con los sistemas de amplificadores es común hablar de la *ganancia* del amplificador. La ganancia indica qué tan grande es la señal de salida respecto de la señal de entrada; permite determinar la salida para entradas específicas. Por ejemplo, si a un amplificador con ganancia en voltaje de 10 se le suministra un voltaje de entrada de 2 mV, la salida será 20 mV; si la entrada es 1 V, la salida será 10 V. La ganancia establece la relación matemática entre la salida y la entrada de un bloque.

$$\text{Ganancia} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$$

Sin embargo, para muchos sistemas la relación entre la salida y la entrada adopta la forma de una ecuación diferencial, por lo que no es posible expresar la función sólo como un número y decir, por ejemplo, que tiene una ganancia de 10. No es posible dividir la salida entre la entrada, porque la relación es una ecuación diferencial y no una algebraica. Sin embargo, la ecuación diferencial se puede transformar en una ecuación algebraica utilizando lo que se conoce como *transformada de Laplace*. Las ecuaciones diferenciales describen el comportamiento de los sistemas en función del tiempo y la transformada de Laplace las convierte en ecuaciones algebraicas sencillas que no incluyen el tiempo y en las cuales se pueden llevar a cabo manipulaciones algebraicas de las cantidades. Se dice que el comportamiento en el *dominio del tiempo* se transforma en el *dominio de s*. Así es posible definir la relación entre la salida y la entrada en términos de una *función de transferencia*. Ésta define la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, es decir:

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\text{transformada de Laplace de la salida}}{\text{transformada de Laplace de la entrada}}$$

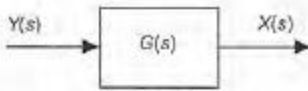
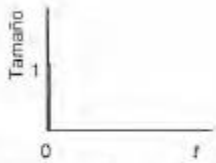
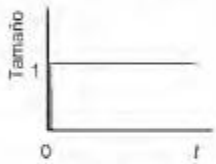


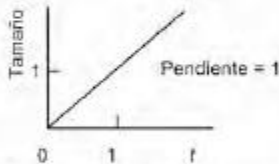
Figura 11.1 Diagrama de bloques



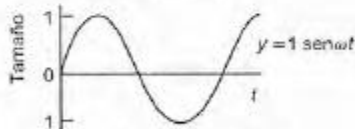
Impulso unitario en tiempo cero
tiene transformada de 1



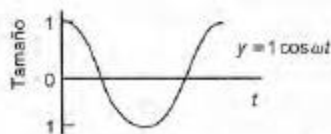
Escalón unitario en tiempo cero
tiene transformada de $1/s$



Rampa unitaria en tiempo cero
tiene transformada de $1/s^2$



Onda senoidal de amplitud unitaria
tiene transformada de $\omega/(s^2 + \omega^2)$



Onda cosenoidal de amplitud unitaria
tiene transformada de $s/(s^2 + \omega^2)$

Figura 11.2 Transformadas de Laplace para entradas comunes

Para indicar que una señal está en el dominio del tiempo, es decir, que es una función del tiempo, se representa como $f(t)$. Cuando está en el dominio de s , dado que es función de s , se expresa como $F(s)$. Es común utilizar una letra F mayúscula para indicar una transformada de Laplace y una f minúscula para indicar una función que varía con el tiempo $f(t)$.

Suponga que la entrada de un sistema lineal tiene una transformada de Laplace de $Y(s)$ y que la transformada de Laplace de la salida es $X(s)$. La *función de transferencia* $G(s)$ del sistema se define como

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

con todas las condiciones iniciales iguales a cero; es decir, se supone que la salida es cero cuando la entrada es cero, una razón de cambio de la salida en el tiempo de cero cuando la razón de cambio de la entrada en el tiempo también es cero. Por lo tanto, la transformada de salida es $X(s) = G(s)Y(s)$, es decir, es el producto de la transformada de entrada y la función de transferencia. Si el sistema se representa por un diagrama de bloques (figura 11.1), entonces $G(s)$ es la función en la caja que recibe una entrada $Y(s)$ y la convierte en una salida $X(s)$.

Este capítulo indica cómo usar la transformada de Laplace en relación con las funciones de transferencia de los sistemas. Para obtener más detalles se sugiere consultar el apéndice, o *Laplace and z-Transforms* de W. Bolton (Longman, 1994), de la serie Matemáticas para Ingenieros de la misma editorial.

11.1.1 Transformadas de Laplace

Para obtener la transformada de Laplace de una ecuación diferencial que incluye magnitudes las cuales son funciones del tiempo, se puede recurrir a tablas y aplicar algunas reglas básicas (el apéndice A contiene esta tabla y detalles sobre las reglas). La figura 11.2 muestra las transformadas básicas para algunas formas comunes de entradas.

Las siguientes son algunas reglas básicas que se aplican cuando se trabaja con transformadas de Laplace:

1. Si una función de tiempo se multiplica por una constante, la transformada de Laplace también se multiplica por la misma constante, es decir,

$$af(t) \text{ tiene la transformada } aF(s)$$

Por ejemplo, la transformada de Laplace de una entrada tipo escalón de 6 V a un sistema eléctrico es 6 veces la transformada de un escalón unitario, es decir, $6s$.

2. Si una ecuación incluye la suma de, por ejemplo, dos cantidades independientes y ambas son funciones del tiempo, la transformada de la ecuación será la suma de cada una de las dos transformadas de Laplace, esto es,

$$f(t) + g(t) \text{ tiene la transformada } F(s) + G(s)$$

3. La transformada de Laplace de la primera derivada de una función es

$$\text{Transformada de } \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = sF(s) - f(0)$$

donde $f(0)$ es el valor inicial de $f(t)$ cuando $t = 0$. Sin embargo, cuando se trata de una función de transferencia todas las condiciones iniciales son cero.

4. La transformada de Laplace de la segunda derivada de una función es

$$\text{Transformada de } \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = s^2 F(s) - s f(0) - \frac{d}{dt} f(0)$$

donde $df(0)/dt$ es el valor inicial de la primera derivada de $f(t)$ cuando $t = 0$. Sin embargo, cuando se trata de funciones de transferencia todas las condiciones iniciales son cero.

5. La transformada de Laplace de la integral de una función es

$$\text{Transformada de } \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Así, para obtener las transformadas de ecuaciones diferenciales o integrales cuando todas las condiciones iniciales son cero:

*Se reemplaza una función del tiempo $f(t)$ por $F(s)$,
se reemplaza una primera derivada $df(t)/dt$ por $sF(s)$,
se reemplaza una segunda derivada $d^2 f(t)/dt^2$ por $s^2 F(s)$,
se reemplaza una integral $\int f(t) dt$ por $F(s)/s$.*

Cuando se han realizado manipulaciones algebraicas en el dominio de s , es posible volver a transformar el resultado al dominio de tiempo utilizando la tabla de transformadas de manera inversa, es decir, buscando la función en el dominio del tiempo que corresponde al resultado en el dominio de s . Es posible que se necesite reordenar la transformada para que tenga la misma forma que aparece en la tabla. Las siguientes son algunas inversiones útiles de este tipo. En la tabla del apéndice A podrá consultar otras más.

	<i>Transformada de Laplace</i>	<i>Función del tiempo</i>
1.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
2.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$(1 - e^{-at})$
3.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
4.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
5.	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$

11.2 Sistemas de primer orden

En las siguientes secciones se ilustra la aplicación de lo anterior en sistemas de primer y segundo orden.

Considere un sistema donde la relación entre la entrada y la salida está representada por una ecuación diferencial de primer orden, que es de la forma

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

donde a_1 , a_0 y b_0 son constantes, y es la entrada y x la salida, ambas funciones del tiempo. La transformada de Laplace, suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero, es

$$a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 Y(s)$$

y entonces, la función de transferencia $G(s)$ se expresa como

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Al reordenar la ecuación anterior se obtiene

$$G(s) = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)s + 1} = \frac{G}{\tau s + 1}$$

donde G es la *ganancia* del sistema cuando se dan condiciones de estado permanente, es decir, no tiene término dx/dt . (a_1/a_0) es la constante de tiempo τ del sistema (vea la sección 10.2.3).

Cuando un sistema de primer orden está sujeto a una entrada de tipo escalón unitario, $Y(s) = 1/s$ y la transformada de salida $X(s)$ es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{G}{s(\tau s + 1)} = G \frac{(1/\tau)}{s(s + 1/\tau)}$$

Por lo tanto, como la transformada tiene la forma $a/s(s + a)$, usando la segunda transformada inversa de la lista de la sección anterior se obtiene

$$x = G(1 - e^{-t/\tau})$$

Los siguientes ejemplos ilustran los puntos anteriores, considerando la función de transferencia de un sistema de primer orden y observando su comportamiento cuando se somete a una entrada de tipo escalón.

1. Considere un circuito que tiene un resistor R en serie con un capacitor C . La entrada del circuito es v y la salida es la diferencia de potencial en el capacitor v_C . La ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida es:

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Determine la función de transferencia.

Tomando la transformada de Laplace y suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero, entonces

$$V(s) = RCsV_C(s) + V_C(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

2. Considere un termopar cuya función de transferencia que relaciona la salida de voltaje V con la entrada de temperatura es

$$G(s) = \frac{30 \times 10^{-6}}{10s + 1} \text{ V/}^\circ\text{C}$$

Determine la respuesta del sistema cuando está sujeta a una entrada de tipo escalón de magnitud 100°C y, por lo tanto, el tiempo que tarda en llegar a 95% del valor en estado estable.

Puesto que la transformada de la salida es igual al producto de la función de transferencia y la transformada de la entrada, entonces

$$V(s) = G(s) \times \text{entrada}(s)$$

La entrada escalón de 100°C , es decir, la temperatura del termopar aumenta en forma abrupta en 100°C , es $100/s$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{30 \times 10^{-6}}{10s + 1} \times \frac{100}{s} = \frac{30 \times 10^{-4}}{10s(s + 0.1)} \\ &= 30 \times 10^{-4} \frac{0.1}{s(s + 0.1)} \end{aligned}$$

El elemento fraccionario es de la forma $a/s(s + a)$, por lo que su transformada inversa es

$$V = 30 \times 10^{-4} (1 - e^{-0.1t}) \text{ V}$$

El valor final, es decir, el valor en estado estable, se alcanza cuando $t \rightarrow \infty$, y es cuando el término exponencial es cero. El valor final es entonces $30 \times 10^{-4} \text{ V}$. De esta manera, el tiempo para alcanzar 95% está expresado por:

$$0.95 \times 30 \times 10^{-4} = 30 \times 10^{-4} (1 - e^{-0.1t})$$

Por lo tanto, $0.05 = e^{-0.1t}$ y $\ln 0.05 = -0.1t$. Entonces el tiempo es 30 s.

3. Suponga que el sistema anterior del termopar está sujeto a una entrada de tipo rampa de $5t^\circ\text{C/s}$, es decir, la temperatura aumenta 5°C cada segundo. Determine cómo varía el voltaje del termopar con el tiempo y cuál es el voltaje después de 12 s.

La transformada de la señal tipo rampa es $5/s^2$. Por lo tanto

$$V(s) = \frac{30 \times 10^{-6}}{10s + 1} \times \frac{5}{s^2} = 150 \times 10^{-6} \frac{0.1}{s^2(s + 0.1)}$$

La transformada se obtiene usando el elemento 5 de la lista presentada en la sección anterior. Por lo tanto

$$V = 150 \times 10^{-6} \left(t - \frac{1 - e^{-0.1t}}{0.1} \right)$$

Después de un tiempo de 12 s se tiene $V = 7.5 \times 10^{-4}$ V.

4. Considere una entrada de tipo impulso de magnitud 100°C , es decir, el termopar se somete a un aumento de temperatura momentáneo de 100°C . Determine cómo varía el voltaje del termopar en función del tiempo y cuánto vale el voltaje después de 2 s.

La transformada del impulso es igual a 100. Por lo tanto,

$$V(s) = \frac{30 \times 10^{-6}}{10s + 1} \times 100 = 3 \times 10^{-4} \frac{1}{s + 0.1}$$

Por lo tanto, $V = 3 \times 10^{-4} e^{-0.1t}$ V. Después de 2 s, el voltaje del termopar es $V = 1.8 \times 10^{-4}$ V.

11.3 Sistemas de segundo orden

Para un sistema de segundo orden, la relación entre la entrada y , y la salida x está representada por una ecuación diferencial de la forma

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y$$

donde a_2 , a_1 , a_0 y b_0 son constantes. La transformada de Laplace de esta ecuación, cuando todas las condiciones iniciales son cero, es

$$a_2 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 Y(s)$$

Por lo tanto,

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Otra forma de representar la ecuación diferencial de un sistema de segundo orden es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = b_0 \omega_n^2 y$$

donde ω_n es la frecuencia natural con la que oscila el sistema y ζ el factor de amortiguamiento relativo. La transformada de Laplace de esta ecuación es

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Las anteriores son las formas generales de la función de transferencia de un sistema de segundo orden.

Cuando un sistema de segundo orden se somete a una entrada de tipo escalón unitario, es decir, $Y(s) = 1/s$, la transformada de la salida es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$$

La cual se reagrupa como sigue

$$X(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s(s + p_1)(s + p_2)}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

De esta manera, usando la ecuación para las raíces de una ecuación cuadrática:

$$p = \frac{-2\zeta \omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

entonces las dos raíces p_1 y p_2 son

$$p_1 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{y} \quad p_2 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Cuando $\zeta > 1$ el término de la raíz cuadrada es real y el sistema está sobreamortiguado. Para determinar la transformada inversa se puede recurrir a fracciones parciales (vea el apéndice A) para desglosar la expresión en varias fracciones simples, o utilizar el elemento 14 de la tabla de transformadas del apéndice A; en ambos casos, el resultado es

$$x = \frac{b_0 \omega_n^2}{p_1 p_2} \left[1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{-p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{-p_2 t} \right]$$

Cuando $\zeta = 1$ el término de la raíz cuadrada es cero y, por lo tanto, $p_1 = p_2 = -\omega_n$. El sistema está críticamente amortiguado. La ecuación es ahora

$$X(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

Esta ecuación se puede descomponer en fracciones parciales (consulte el apéndice A), para obtener

$$X(s) = b_0 \omega_n^2 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right]$$

Por lo tanto,

$$x = b_0 \omega_n^2 [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}]$$

Cuando $\zeta < 1$, empleando el elemento 28 de la tabla del apéndice, se obtiene

$$x = b_0 \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi \right) \right]$$

donde $\cos \phi = \zeta$. Ésta es una oscilación subamortiguada.

Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior:

1. ¿Cuál es el estado de amortiguamiento de un sistema que tiene una entrada de tipo escalón unitario y su función de transferencia es la siguiente?

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$$

Para una entrada de tipo escalón unitario $Y(s) = 1/s$, por lo que la transformada de la salida es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 16)} = \frac{1}{s(s + 4)(s + 4)}$$

Las raíces de $s^2 + 8s + 16$ son $p_1 = p_2 = -4$. Ambas raíces son reales e iguales, por lo que el sistema está críticamente amortiguado.

2. La siguiente función de transferencia del brazo de un robot está sujeta a una entrada de tipo rampa unitaria. ¿Cuál será la salida?

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}$$

La transformada de la salida $X(s)$ es

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{K}{(s + 3)^2} \times \frac{1}{s^2}$$

Usando fracciones parciales (vea el apéndice A), esto se convierte en

$$X(s) = \frac{K}{9s^2} + \frac{2K}{9(s + 3)} + \frac{K}{9(s + 3)^2}$$

Y la transformada inversa es:

$$x = \frac{1}{9}Kt - \frac{2}{9}Ke^{-3t} + \frac{1}{9}Kte^{-3t}$$

11.4 Sistemas en serie

Cuando un sistema está formado por varios subsistemas en serie, como en la figura 11.3, la función de transferencia del sistema, $G(s)$, está dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{X_1(s)}{Y(s)} \times \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \times \frac{X(s)}{X_2(s)} \\ &= G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s) \end{aligned}$$

La función de transferencia del sistema como un todo es el producto de las funciones de transferencia de cada elemento de la serie. Los siguientes ejemplos ilustran esto. Se supone que cuando los subsistemas están enlazados, los bloques no interactúan entre sí, lo cual produciría cambios en las funciones de transferencia. Así, si los subsistemas son circuitos eléctricos puede haber problemas cuando los circuitos interactúan y se cargan unos a otros.

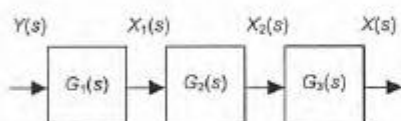


Figura 11.3 Sistemas en serie

1. ¿Cuál es la función de transferencia de un sistema que está formado por tres elementos conectados en serie, donde las funciones de transferencia son 10 , $2/s$ y $4/(s+3)$?

Con base en la ecuación desarrollada,

$$G(s) = 10 \times \frac{2}{s} \times \frac{4}{s+3} = \frac{80}{s(s+3)}$$

2. Un motor de cd controlado por campo está formado por tres subsistemas en serie: el circuito de campo, el devanado de la armadura y la carga. La figura 11.4 ilustra el arreglo anterior y las funciones de transferencia de cada uno de los subsistemas. Determine la función de transferencia total del sistema.



Figura 11.4 Motor de cd controlado por campo

La función de transferencia total es el producto de las funciones de transferencia de los elementos en serie. Por lo tanto,

$$G(s) = \frac{1}{Ls+R} \times k \times \frac{1}{Is+c} = \frac{k}{(Ls+R)(Is+c)}$$

11.5 Sistemas con lazos de realimentación

La figura 11.5 muestra un sistema sencillo con realimentación negativa. Cuando existe *realimentación negativa* la entrada del sistema y

las señales de realimentación se restan en el punto de suma. El término *ruta en sentido directo* designa la ruta en que aparece la función de transferencia $G(s)$ en la figura, y *ruta de realimentación* es la que contiene a $H(s)$. Todo el sistema se conoce como *sistema de lazo cerrado*.

Para el sistema de realimentación negativa, la entrada al subsistema que contiene la función de transferencia $G(s)$ de la ruta en sentido directo es $Y(s)$ menos la señal de realimentación. El lazo de realimentación contiene la función de transferencia $H(s)$ y su entrada es $X(s)$, por lo tanto, la señal de realimentación es $H(s)X(s)$. Así, el elemento $G(s)$ tiene una entrada de $Y(s) - H(s)X(s)$ y una salida de $X(s)$, por lo tanto,

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s) - H(s)X(s)}$$

Al reordenar la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Entonces, la función de transferencia global del sistema con realimentación negativa, $T(s)$, es:

$$T(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Los siguientes ejemplos ilustran lo anterior:

1. ¿Cuál será la función de transferencia global de un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia de la trayectoria directa es $2/(s+1)$ y la función de transferencia de la trayectoria de realimentación negativa es $5s$?

Con base en la ecuación desarrollada

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{2/(s+1)}{1 + [2/(s+1)]5s} = \frac{2}{11s+1}$$

2. Considere un motor de cd controlado por armadura (figura 11.6). Su trayectoria directa consta de tres elementos: el circuito de la armadura con función de transferencia $1/(Ls+R)$, el devanado de la armadura con función de transferencia k y la carga con función de transferencia $1/(Is+c)$. Hay una trayectoria de realimentación negativa con una función de transferencia K . Determine la función de transferencia global del sistema.

La función de transferencia de la trayectoria directa para los elementos en serie es el producto de las funciones de transferencia de estos elementos en serie, es decir,

$$G(s) = \frac{1}{Ls+R} \times k \times \frac{1}{Is+c} = \frac{k}{(Ls+R)(Is+c)}$$

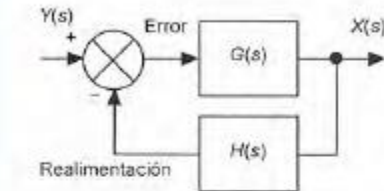


Figura 11.5 Sistema con realimentación negativa



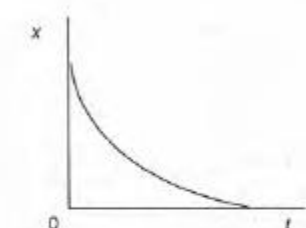
Figura 11.6 Motor de cd controlado por armadura

La trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia igual a K . Así, la función de transferencia global es

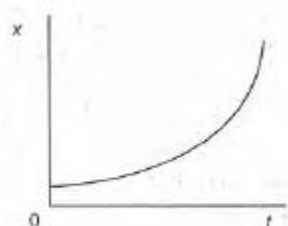
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{k}{(Ls + R)(Is + c)}}{1 + \frac{kK}{(Ls + R)(Is + c)}}$$

$$= \frac{k}{(Ls + R)(Is + c) + kK}$$

11.6 Efecto de la ubicación de los polos en la respuesta transitoria



a)



b)

Figura 11.7 Sistemas de primer orden: a) cuando la raíz es negativa; b) cuando la raíz es positiva

Considere un sistema de primer orden cuya función de transferencia es $1/(s + 1)$ y que está sujeto a una entrada de impulso unitario. La salida del sistema $X(s) = [1/(s + 1)] \times 1$ y, por lo tanto, $x = e^{-t}$. Al pasar el tiempo t la salida disminuye hasta que se convierte en cero. Ahora considere la entrada de tipo impulso unitario de un sistema cuya función de transferencia es $1/(s - 1)$. La salida es, entonces, $x = e^t$. Cuando t aumenta, también aumenta la salida. Así, un impulso momentáneo que entra al sistema produce una salida creciente; el sistema con este polo es inestable. Entonces, en general, en un sistema de primer orden cuya función de transferencia es $1/(s + p)$, el sistema es estable si se tiene $(s + p)$, es decir, el polo es negativo, y es inestable si se tiene $(s - p)$, esto es, el polo es positivo (figura 11.7).

Un sistema es estable si la parte real de todos los polos es negativa. Un sistema es inestable si la parte real de cualesquiera de sus polos es positiva.

Para un sistema de segundo orden con función de transferencia

$$G(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

cuando el sistema está sujeto a una entrada de tipo impulso unitario

$$X(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Usando la ecuación para determinar las raíces de una ecuación cuadrática,

$$p = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Dependiendo del valor del factor de amortiguamiento relativo, el término dentro del radical puede ser real o imaginario. Si es imaginario, en la salida está presente una oscilación. Por ejemplo, suponga que se tiene un sistema de segundo orden cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]}$$

es decir, $p = -2 \pm j1$. Cuando el sistema recibe una entrada tipo impulso unitario, la salida es $e^{-2t} \sin t$. La amplitud de la oscilación, es decir e^{-2t} , disminuye conforme aumenta el tiempo, por lo que el efecto del impulso es una oscilación que disminuye de manera gradual (figura 11.8a). El sistema es estable.

Suponga ahora un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{[s - (2 + j1)][s - (2 - j1)]}$$

es decir, $p = +2 \pm j1$. Cuando este sistema recibe una entrada tipo impulso unitario, la salida es $e^{2t} \sin t$. La amplitud de la oscilación, es decir e^{2t} , aumenta cuando el tiempo aumenta (figura 11.8b). El sistema es inestable.

En general, cuando se aplica un impulso al sistema, la salida adquiere la forma de la suma de diversos términos exponenciales. Si sólo uno de estos términos tiene crecimiento exponencial, la salida continúa creciendo y el sistema es inestable. Cuando hay pares de polos en los que hay términos imaginarios \pm , la salida es una oscilación.

11.6.1 Compensación

La salida de un sistema puede ser inestable, o quizás la respuesta sea demasiado lenta, o haya demasiado sobrepaso. Para modificar las respuestas de los sistemas a ciertas entradas se utilizan *compensadores*. Un compensador es un bloque que se incorpora al sistema para modificar la función de transferencia global del sistema de manera que se obtengan las características requeridas.

Como ejemplo del uso de un compensador, considere un sistema de control de posición que tiene una realimentación negativa con función de transferencia de 1 y dos subsistemas en su trayectoria directa: un compensador con función de transferencia igual a K y un sistema motor/actuador con función de transferencia $1/(s + 1)$. ¿Qué valor de K se necesita para que el sistema esté críticamente

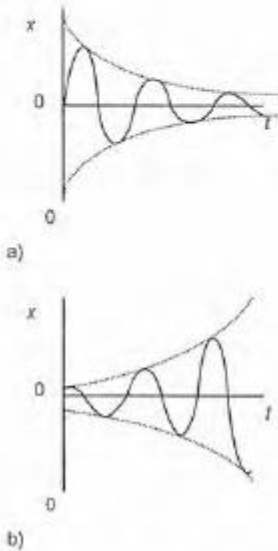


Figura 11.8 Sistemas de segundo orden

amortiguado? La trayectoria directa tiene función de transferencia $K/s(s+1)$ y la trayectoria de realimentación tiene una función de transferencia igual a 1. Por lo tanto, la función de transferencia total del sistema es

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s(s+1) + K}$$

El denominador es, entonces, $s^2 + s + K$. Las raíces de esta ecuación son:

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$

Para que sea un sistema críticamente amortiguado es necesario que $1 - 4K = 0$ y, por lo tanto, el compensador debe tener una ganancia proporcional de $K = 1/4$.

11.7 MATLAB y SIMULINK

Existe software que ayuda a calcular y modelar sistemas. Un programa que se usa con frecuencia es MATLAB. La siguiente es una breve introducción a MATLAB (una marca registrada de Mathworks, Inc.) versión 4.0 o posterior. Si desea información adicional consulte la guía del usuario u obras como *The MATLAB Handbook* de Eva Pärt-Enander, Anders Sjöberg, Bo Melin y Pernilla Isaksson (Addison-Wesley, 1996) y *Using MATLAB to Analyse and Design Control Systems*, 2a. ed., de Naomi Ehrich Leonard y William S. Levine (Addison-Wesley, 1995).

Los comandos se introducen escribiéndolos en seguida del indicador ($>$, *prompt*) y oprimiendo la tecla intro (*return*) para ejecutar el comando. En la siguiente explicación de los comandos no se repetirá que se debe oprimir la tecla intro o return, se dará por supuesta en todos los casos. Para iniciar MATLAB en los sistemas Windows o Macintosh, haga clic en el icono de MATLAB, o escriba "matlab". En la pantalla aparecerá el indicador de MATLAB $>>$. Para salir de MATLAB escriba "quit" o "exit" (salir) después del prompt. Dado que MATLAB es un programa que distingue entre mayúsculas y minúsculas, para escribir los comandos debe usar letras minúsculas.

Si escribe "help" (ayuda) después del indicador, o selecciona "help" de la barra de menú en la parte superior de la ventana de MATLAB, aparecerá una lista de temas de ayuda de MATLAB. Para obtener información sobre un tema de la lista, por ejemplo exponentes, escriba "help exp". Si escribe "lookfor" (busca) y algún tema indicará a MATLAB que busque información sobre ese tema, por ejemplo "lookfor integ" desplegará varios comandos que sirven para integrar.

En general, las operaciones matemáticas se introducen en MATLAB de la misma manera que se escribirían en papel. Por ejemplo

```
>> a = 4/2
```

da como respuesta

```
a =
    2
```

y:

```
>> a = 3*2
```

da como respuesta

```
a =
    6
```

Las operaciones se realizan de acuerdo con el siguiente orden: ^ potenciación, * multiplicación, / división, + suma, - resta. El orden de precedencia de los operadores es de izquierda a derecha; se pueden usar paréntesis para modificar el orden anterior. Por ejemplo,

```
>> a = 1+2^3/4*5
```

da como respuesta

```
a =
   11
```

porque se tiene $2^3/4$ multiplicado por 5, y sumado con 1; por otra parte,

```
>> a = 1+2^3/(4*5)
```

da como respuesta

```
a =
   1.4
```

porque se tiene 2^3 dividido entre el producto de 4 por 5, y luego sumado a 1.

Las siguientes son algunas funciones matemáticas con las que cuenta MATLAB:

abs(x)	Da el valor absoluto de x , es decir, $ x $
exp(x)	Da la exponencial de x , es decir, e^x
log(x)	Da el logaritmo natural de x , es decir, $\ln x$
log10(x)	Da el logaritmo base 10 de x , es decir, $\log_{10} x = \log x$
sqrt(x)	Da la raíz cuadrada de x , es decir \sqrt{x}
sin(x)	Da el sen x , donde x está en radianes
cos(x)	Da el cos x , donde x está en radianes
tan(x)	Da la tan x , donde x está en radianes
asin(x)	Da el arcsen x , es decir, $\sin^{-1} x$
acos(x)	Da el arccos x , es decir, $\cos^{-1} x$
atan(x)	Da el arctan x , es decir, $\tan^{-1} x$
csc(x)	Da $1/\sin x$

sec(x) Da $1/\cos x$
cot(x) Da $1/\tan x$

para introducir π se escribe pi.

En vez de escribir una serie de comandos después del prompt, se puede preparar un archivo de texto y después ejecutarlos haciendo que MATLAB se refiera a ese archivo. Al hablar de estos archivos se utiliza el término archivo-M, dado que estos archivos de texto con comandos MATLAB consecutivos tienen el sufijo .m. Al escribir este tipo de archivos, la primera línea debe iniciar con la palabra function (función) seguida por una sentencia que identifique el nombre de la función (function name) y la entrada y la salida de la siguiente manera:

```
function [salida] = function name [entrada]
```

Por ejemplo, function y=cotan(x) es el archivo que se utiliza para determinar el valor de y dado por $\cotan x$. Este archivo se puede invocar con una secuencia de comandos de MATLAB, escribiendo el nombre seguido de la entrada, por ejemplo, cotan(x). Esta función ya está incluida en MATLAB y se usa cuando se necesita la cotangente de x . Sin embargo, el usuario puede preparar este archivo. Las funciones que tienen varias entradas deben especificarse todas en el enunciado de la función. Por otra parte, cuando una función produce varios valores, será necesario listar todas las salidas posibles.

Las líneas que inician con % son líneas de comentarios; MATLAB no las interpreta como comandos. Por ejemplo, supongamos que preparamos un programa para calcular los valores de la raíz cuadrática media de una columna de datos. El programa se vería como sigue:

```
function y=rms(x)
% rms Raíz cuadrática media
% rms(x) da el valor cuadrático medio de los
% elementos del vector columna x.
xs=x^2;
s=size(x);
y=sqrt(sum(xs)/s);
```

Se definió xs como el cuadrado de cada valor x . Con el comando $s=size(x)$ se obtiene la magnitud, es decir, la cantidad de entradas en la columna de datos. El comando $y=sqrt(sum(xs)/s(1))$ obtiene la raíz cuadrada de la suma de todos los valores xs dividida entre s . El comando “;” se coloca al final de cada línea del programa.

MATLAB cuenta con varias cajas de herramientas que contienen colecciones de archivos M. De particular importancia para este libro es la caja de herramientas “Control System” (sistema de control), que permite obtener las respuestas en tiempo de un sistema que tiene entradas tipo impulso, escalón, rampa, etcétera, así como el análisis de Bode, Nyquist, lugar geométrico de las raíces, etcétera.

11.7.1 Graficación

Para producir gráficas lineales de dos dimensiones se utiliza el comando "plot(x,y)", el cual permite graficar los valores de x y y . Por ejemplo:

```
x=[0 1 2 3 4 5];
y=[0 1 4 9 16 25];
plot(x,y)
```

Para graficar una función, ya sea estándar o definida por el usuario, se usa el comando `fplot(function name,lim)`, donde `lim` define el intervalo de graficación, es decir, los valores máximo y mínimo de x .

El comando "semilogx(x,y)" genera una gráfica de los valores de x y y utilizando una escala logarítmica para x y una escala lineal para y . El comando "semilogy(x,y)" produce una gráfica de los valores de x y y , con una escala lineal para x y una escala logarítmica para y . El comando "loglog(x,y)" genera una gráfica de los valores de x y y en la cual las escalas para x y y son logarítmicas. El comando "polar(theta,r)" produce una gráfica en coordenadas polares, siendo θ el argumento en radianes y r la magnitud.

El comando "subplot" permite dividir la ventana de gráficas y coloca las gráficas en cada una. Por ejemplo:

```
x=[0 1 2 3 4 5 6 7];
y=exp(x);
subplot(2,1,1);plot(x,y);
subplot(2,1,2);semilogy(x,y);
```

En el comando "subplot(m,n,p)" los dígitos m y n indican que la ventana de gráficas se dividirá en una cuadrícula o malla de $m \times n$ de ventanas más pequeñas; m es el número de renglones, n el número de columnas y el dígito p especifica la ventana que se usa para la gráfica. Las subventanas se numeran por renglón, de izquierda a derecha y de arriba abajo. Por lo tanto, la secuencia de comandos anterior divide la ventana en dos partes, con una gráfica arriba de la otra; la gráfica de arriba es una gráfica lineal y la de abajo es una gráfica semilogarítmica.

Se pueden seleccionar el número y tipo de líneas de la cuadrícula, el color de la gráfica y la inclusión de texto en una gráfica. El comando "print" (imprimir) se utiliza para imprimir una copia dura de una gráfica, ya sea en un archivo o en una impresora. Para ello, se elige el menú archivo (file) de la ventana de la figura y se selecciona la opción imprimir (print).

11.7.2 Funciones de transferencia

Las siguientes líneas de un programa MATLAB ilustran cómo especificar una función de transferencia y presentarla en la pantalla

```
% G(s)=4(s+10)/(s+5)(s+15)
num=4*[1 10];
den=conv([1 5],[1 15]);
printsys(num,den,'s')
```

El comando “num” se usa para especificar el numerador de la función de transferencia, en potencias decrecientes de s . El comando “den” sirve para indicar el denominador en potencias decrecientes de s para cada uno de los dos polinomios del denominador. El comando “conv” multiplica dos polinomios, que en este caso son $(s+5)$ y $(s+15)$. El comando “printsys” despliega en la pantalla la función de transferencia, con numerador y denominador especificados y escritos en el dominio de s .

En ocasiones la función de transferencia se presenta como el cociente de dos polinomios y es necesario determinar los polos y ceros. En este caso se puede usar:

```
% Encontrar los polos y ceros de la función de transferencia
% G(s)=(5s^2+3s+4)/(s^3+2s^2+4s+7)
num=[5 3 4];
den=[1 2 4 7];
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

$[z,p,k]=tf2zp(num,den)$ es el comando para determinar y presentar los ceros (z), los polos (p) y la ganancia (k) de la función de transferencia introducida.

Con MATLAB es posible obtener gráficas en las que se muestra la respuesta de un sistema para diferentes entradas. Por ejemplo, con el siguiente programa se obtiene la respuesta del sistema a una entrada tipo escalón unitario, $u(t)$, el cual tienen una función de transferencia dada:

```
% Muestra la respuesta a una entrada de escalón para un sistema
% con función de transferencia G(s)=5/(s^2+3s+12)
num=5;
den=[1 3 12];
step(num,den)
```

11.7.3 Diagramas de bloques

Es común representar a los sistemas de control como una serie de bloques unidos entre sí, cada uno de los cuales tiene características específicas. MATLAB permite que se construyan sistemas uniendo diversos bloques. Los comandos utilizados son “cloop” cuando un bloque con una función de transferencia en lazo abierto tiene realimentación unitaria. Si la realimentación no es unitaria, se utiliza el comando “feedback”. Por ejemplo, a la figura 11.9 corresponde el programa:

```
% Sistema con realimentación
ngo=[1 1];
dgo=conv([1 3],[1 4]);
```

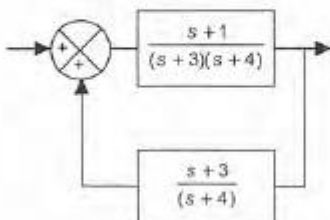


Figura 11.9 Diagrama de bloques

```

nh=[1 3];
dh=[1 4];
[ngc2,dgc2]=feedback(ngo,dgo,nh,dh)
printsys(ngc2,dgc2,'s')

```

ngo y dgo indican el numerador y denominador de la función de transferencia en lazo abierto $G_0(s)$, nh y dh son el numerador y denominador respectivos, de la función de transferencia del lazo de realimentación $H(s)$. El programa presenta en la pantalla la función de transferencia del sistema completo.

El comando "series" (en serie) indica que dos bloques están en serie en una trayectoria dada; el comando "parallel" (en paralelo) indica que dichos bloques están en paralelo.

11.7.4 SIMULINK

SIMULINK se utiliza con MATLAB para especificar sistemas 'conectando' cajas o bloques, en vez de escribir una serie de comandos para producir la descripción del diagrama de bloques. Una vez iniciado MATLAB, se ejecuta SIMULINK con el comando ">>simulink". Esto abre la ventana de control del SIMULINK, y junto con ella aparecen sus iconos y menús desplegables en la barra superior. Haga clic en "file" (archivo), luego clic en "new" (nuevo) en el menú desplegable. Esto abre una ventana en donde se puede unir el nuevo sistema.

Para iniciar el ensamble de los bloques requeridos, regrese a la ventana de control y haga doble clic en el icono "linear" (lineal). Haga clic y arrastre el icono "transfer Fcn" a la nueva ventana que todavía no tiene título. Si necesita un bloque para la ganancia, haga clic y arrastre el icono "gain" (ganancia) a la ventana sin título. Repita lo anterior con el icono "sum" (suma) y, quizás, también con el icono "integrator" (integrador). De esta manera, vaya arrastrando todos los iconos que necesite y déjelos en la ventana sin título. Ahora haga doble clic en el icono "Sources" (fuentes) y elija la fuente apropiada del menú, por ejemplo, la entrada "step" (escalón) y arrástrelo a la ventana que no tiene nombre. Haga doble clic en el icono "sinks" (descarga o exhibición) y arrastre el icono "graph" (gráfica) hasta la ventana sin título. Para conectar los iconos, oprima el botón del ratón mientras la flecha del ratón está en el símbolo de salida de un icono y arrastre éste hasta el símbolo de entrada del icono que se desea conectar. Repita lo anterior con todos los iconos, hasta terminar de armar todo el diagrama de bloques.

Para asignar a la caja de "transfer Fcn" una función de transferencia, haga doble clic en la caja. Aparecerá un cuadro de diálogo en la que puede introducir comandos de MATLAB para numerador y denominador. Haga clic en el numerador y si requiere $(s + 1)$ escriba [1 1]. Haga clic en el denominador y si necesita $(s^2 + 2s + 3)$ escriba [1 2 3]. Luego haga clic en el icono "done" (terminar). Haga doble clic en el icono "gain" (ganancia) y escriba el valor de la ganancia. Haga doble clic en el icono "sum" (suma) y ponga los signos + o - según si

necesita una realimentación positiva o negativa. Haga doble clic en el icono "graph" y defina los parámetros de la gráfica. Ahora ya tiene todo el diagrama de la simulación en la pantalla, que se muestra en la figura 11.10. Para borrar bloques o conexiones, selecciónelos haciendo clic sobre ellos y luego oprima la tecla .

Para simular el comportamiento del sistema, haga clic en "Simulation" (simulación), para desplegar su menú. Seleccione "Parameters" (parámetros) y defina los momentos de inicio y terminación de la simulación. En el menú "Simulation", elija "Start" (inicio). SIMULINK creará una ventana para graficar y desplegará la salida correspondiente del sistema. Ahora guarde el archivo seleccionando "File" (archivo) y haga clic en "SAVE AS" (guardar como) en el menú desplegable. Inserte el nombre del archivo en el cuadro de diálogo y haga clic en "Done".

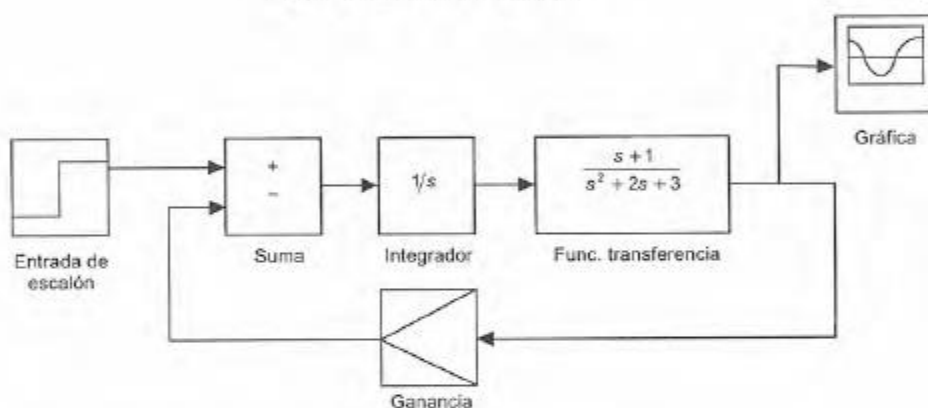


Figura 11.10 Ejemplo de empleo de SIMULINK

Problemas

1. ¿Cuáles son las funciones de transferencia de los sistemas cuyas relaciones de entrada/salida son las siguientes?

a) Un sistema hidráulico cuya entrada es q y su salida h , donde

$$q = A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho gh}{R}$$

b) Un sistema de resorte-amortiguador-masa, con entrada F y salida x , donde

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

c) Un circuito RLC con entrada v y salida v_C , donde

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C$$

2. ¿Cuáles son las constantes de tiempo de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes: a) $G(s) = 5/3s + 1$ y

b) $G(s) = 3/2s + 3$?

3. Determine cómo varían con el tiempo las salidas de los siguientes sistemas al someterlos a una entrada tipo escalón unitario en el tiempo $t = 0$: a) $G(s) = 2/s + 2$ y b) $G(s) = 10/s + 5$.
4. ¿Cuál es el estado de amortiguamiento de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes?

$$\text{a) } G(s) = \frac{5}{s^2 - 6s + 16}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{10}{s^2 + s + 100}$$

$$\text{c) } G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 1}, \quad \text{d) } G(s) = \frac{3s + 20}{s^2 + 2s + 20}$$

5. ¿Cuál es la salida de un sistema con la función de transferencia $s/(s+3)^2$ y que se somete a una entrada tipo escalón unitario en el tiempo $t = 0$?
6. ¿Cuál es la salida de un sistema cuya función de transferencia es $G = 2/(s+3)(s+4)$ y está sujeta a un impulso unitario?
7. ¿Cuáles son las funciones de transferencia totales de los siguientes sistemas con realimentación negativa?

Trayectoria directa

Trayectoria de realimentación

$$\text{a) } G(s) = \frac{4}{s(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\text{c) } G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+3)}$$

$$H(s) = 5$$

$$\text{d) } \text{dos elementos en serie}$$

$$G_1(s) = 2/(s+2)$$

$$\text{y } G_2(s) = 1/s.$$

$$H(s) = 10$$

8. ¿Cuál es la función de transferencia global de un sistema en lazo cerrado que tiene una función de transferencia de la trayectoria directa $5/(s+3)$ y una función de transferencia en la trayectoria de realimentación negativa igual a 10?
9. Un sistema en lazo cerrado tiene una trayectoria directa con dos elementos en serie cuyas funciones de transferencia son 5 y $1/(s+1)$. Si la trayectoria de realimentación tiene función de transferencia $2/s$, ¿cuál es la función de transferencia global del sistema?
10. Un sistema en lazo cerrado tiene una trayectoria directa con dos elementos en serie cuyas funciones de transferencia son 2 y $1/(s+1)$. Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación es s , ¿cuál es la función de transferencia global del sistema?

12 Respuesta en frecuencia

12.1 Entrada senoidal

En los dos capítulos anteriores la atención se centró en la respuesta de los sistemas a entradas de tipo escalón, impulso y rampa. En este capítulo se ampliará el estudio y se considerarán entradas senoidales. Si bien en muchos sistemas de control no es frecuente encontrar entradas senoidales, éstas son útiles para realizar pruebas, ya que la forma en que el sistema responde a estas entradas es una muy buena fuente de información que ayuda al diseño y el análisis de los sistemas.

Considere un sistema de primer orden que se describe por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

donde y es la entrada y x la salida. Suponga una entrada senoidal de amplitud unitaria $y = \text{sen } \omega t$. ¿Cuál será la salida? Sabemos que cuando se suman $a_1 dx/dt$ y $a_0 x$ al final se obtiene la función senoidal $b_0 \text{sen } \omega t$. Las senoídes tienen la propiedad de que su diferenciación da como resultado también una senoíde de la misma frecuencia [un coseno es una función senoidal: $\text{sen } (\omega t + 90^\circ)$]. El resultado es siempre el mismo, no importa cuántas veces se lleve a cabo la diferenciación. Por ello, es de esperar que la respuesta de estado estable de x también sea senoidal y con la misma frecuencia. Sin embargo, la salida puede diferir respecto a la entrada en amplitud y fase.

12.2 Fasores

Para estudiar las señales senoidales conviene utilizar *fasores*. Considere una señal senoidal descrita por la ecuación $v = V \text{sen } (\omega t + \phi)$, donde V es la amplitud, ω la frecuencia angular y ϕ el ángulo de fase. El fasor se representa por una línea de longitud $|V|$

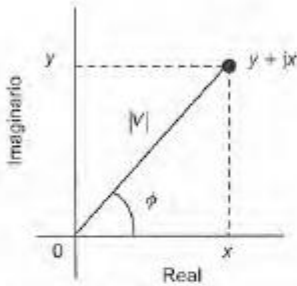


Figura 12.1 Representación compleja de un fasor

que forma un ángulo ϕ con el eje de referencia. Las líneas $|$ indican que al especificar la longitud del fasor lo único que nos interesa es su magnitud o tamaño. Al especificar una cantidad fasorial siempre debe indicarse la magnitud y el ángulo de fase correspondientes. La convención en general aceptada es representar al fasor con letras en negritas, no cursivas, por ejemplo, V . Cuando aparece este símbolo se entiende que existe una cantidad que tiene tanto magnitud como ángulo.

Este fasor también se puede representar con la notación de números complejos. Las magnitudes complejas se representan por $(x + jy)$, donde x es la parte real y y la parte imaginaria del número complejo. En una gráfica la parte imaginaria es el eje y y la parte real, el eje x ; x y y son las coordenadas cartesianas del punto que representa el número complejo (figura 12.1). Si consideramos la línea que une ese punto con el origen de la gráfica como la representación del fasor, el ángulo de fase ϕ del fasor se representa por

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

y, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, su longitud es

$$\text{Longitud del fasor } |V| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Puesto que $x = |V| \cos \phi$ y $y = |V| \sin \phi$, se puede escribir

$$V = x + jy = |V| (\cos \phi + j \sin \phi)$$

Es decir, al especificar las partes real e imaginaria de un número complejo también se puede especificar un fasor.

Considere un fasor de longitud 1 y ángulo de fase 0° (figura 12.2a). Su representación compleja es $1 + j0$. Ahora considere otro fasor con la misma longitud, pero con ángulo de fase de 90° (figura 12.2b). Su representación compleja es $0 + j1$. De esta manera, una rotación del fasor igual a 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj corresponde a la multiplicación del fasor por j . Si este fasor se gira 90° más (figura 12.2c), de acuerdo con la misma regla de multiplicación, ahora el fasor original está multiplicado por j^2 . El fasor es justo el fasor original, pero en dirección opuesta, es decir, multiplicado por -1 . Por lo tanto, $j^2 = -1$ y, así, $j = \sqrt{-1}$. La rotación del fasor original un total de 270° , es decir, $3 \times 90^\circ$, equivale a multiplicar el fasor original por $j^3 = j(j^2) = -j$.

Para ver un estudio más profundo de los números complejos y sus aplicaciones en ingeniería, se recomienda consultar *Complex Numbers* de W. Bolton (Longman, 1994) de la serie Matemáticas para Ingenieros de esa editorial.

Para ilustrar lo anterior, suponga un voltaje, v , que varía en forma senoidal con el tiempo, de acuerdo con la ecuación:

$$v = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

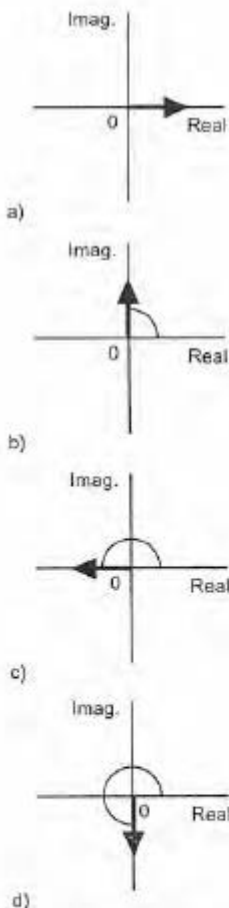


Figura 12.2 Rotación del fasor: a) 0° , b) 90° , c) 180° , d) 270°

Si el voltaje anterior se representa por un fasor, ¿cuál es su a) longitud, b) su ángulo respecto al eje de referencia, c) su parte real e imaginaria cuando se representa por un número complejo?

- El fasor tiene una longitud que representa la amplitud de la senoide y, por lo tanto, es 10 V.
- El ángulo del fasor respecto al eje de referencia es igual al ángulo de fase, es decir, 30° .
- La parte real se obtiene por la ecuación $x = 10 \cos 30^\circ = 8.7$ V y la parte imaginaria por $y = 10 \sin 30^\circ = 5.0$ V. Por lo tanto, el fasor se especifica por $8.7 + j5.0$ V.

12.2.1 Ecuaciones fasoriales

Considere un fasor que representa la senoide de amplitud unitaria de $x = \sin \omega t$. Al diferenciar la senoide se obtiene $dx/dt = \omega \cos \omega t$. Pero esto también se puede escribir como $dx/dt = \omega \sin(\omega t + 90^\circ)$. Es decir, la diferenciación sólo produce un fasor con una longitud aumentada por un factor igual a ω y con un giro de 90° respecto al fasor original. Por lo tanto, en la notación de los números complejos, el fasor original se debe multiplicar por $j\omega$, dado que la multiplicación por j equivale a girar 90° .

Entonces, la ecuación diferencial

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 y$$

se puede escribir, en notación compleja, como la *ecuación fasorial*:

$$j\omega a_1 \mathbf{X} + a_0 \mathbf{X} = b_0 \mathbf{Y}$$

donde las literales en negritas, sin cursivas, indican que los datos se refieren a fasores. Podemos decir que la ecuación diferencial, que era una ecuación en el dominio del tiempo, se transformó en una ecuación en el *dominio de la frecuencia*. La ecuación en el dominio de la frecuencia se puede reescribir como

$$(j\omega a_1 + a_0) \mathbf{X} = b_0 \mathbf{Y}$$

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0}$$

Sin embargo, en la sección 11.2, cuando la misma ecuación diferencial se expresó en el dominio de s , se tenía:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Sustituyendo s por $j\omega$ se obtiene la misma ecuación. Ocurre que siempre se puede hacer esto para pasar del dominio de s al dominio de la frecuencia. Este resultado nos lleva a la definición de *función*

de respuesta en frecuencia o función de transferencia en frecuencia $G(j\omega)$ en estado permanente o estable, como

$$G(j\omega) = \frac{\text{fasor de salida}}{\text{fasor de entrada}}$$

Para ilustrar lo anterior se determinará la función de respuesta en frecuencia de un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo s por $j\omega$. Por lo tanto

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

La función de transferencia de un sistema de primer orden es

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

donde τ es la constante de tiempo del sistema (vea la sección 11.2). La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ se obtiene sustituyendo s por $j\omega$. Entonces:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

Para expresar esta ecuación en forma más conveniente, el numerador y el denominador se multiplican por $(1 - j\omega\tau)$ para dar

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \times \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j^2\omega^2\tau^2}$$

Pero $j^2 = -1$, entonces

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Esta expresión es de la forma $x + jy$ y como $G(j\omega)$ es el fasor de salida dividido entre el fasor de entrada, la magnitud del fasor de salida es proporcional a la del fasor de entrada por un factor igual a $|G(j\omega)|$, donde

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

$|G(j\omega)|$ indica qué tanto es mayor o menor la amplitud de la salida que la amplitud de la entrada. En general se conoce como *magnitud* o *ganancia*. La diferencia de fase ϕ entre el fasor de salida y el fasor de entrada está dado por

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = -\omega\tau$$

El signo negativo indica que el fasor de salida va retrasado respecto al fasor de entrada por ese ángulo.

Los siguientes ejemplos ilustran esto.

1. Determine la función de respuesta en frecuencia, la magnitud y la fase de un sistema (un circuito eléctrico con un resistor en serie con un capacitor del cual se toma la salida) cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo $j\omega$ por s

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la ecuación anterior por $1 - j\omega RC$ y reordenar términos, se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 (RC)^2} - j \frac{\omega(RC)}{1 + \omega^2 (RC)^2}$$

Así,

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2}}$$

$$\text{y } \tan \phi = -\omega RC$$

2. Determine la magnitud y la fase de la salida de un sistema cuya entrada es una señal senoidal de $2 \sin(3t + 60^\circ)$ y tiene una función de transferencia

$$G(s) = \frac{4}{s + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo s por $j\omega$. Es decir:

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 1}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la ecuación por $(-j\omega + 1)$

$$G(j\omega) = \frac{-j4\omega + 4}{\omega^2 + 1} = \frac{4}{\omega^2 + 1} - j \frac{4\omega}{\omega^2 + 1}$$

La magnitud es, por lo tanto

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{4^2}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{4^2 \omega^2}{(\omega^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

y el ángulo de fase está dado por $\tan \phi = y/x$ y entonces,

$$\tan \phi = -\omega$$

Para la entrada específica, $\omega = 3$ rad/s. La magnitud es

$$|G(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 1}} = 1.3$$

y la fase es $\tan \phi = -3$. Por lo tanto, $\phi = -72^\circ$. Éste es el ángulo de fase entre la entrada y la salida. Por lo tanto, la salida es $2.6 \sin(3t - 12^\circ)$.

12.3.1 Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

Suponga que la función de transferencia de un sistema de segundo orden es la siguiente (vea la sección 11.3)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde ω_n es la frecuencia natural y ζ el coeficiente o factor de amortiguamiento relativo. Para obtener la función en respuesta a la frecuencia, s se reemplaza por $j\omega$. Es decir,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega\omega_n} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión por

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - j2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

se obtiene

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - j2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}$$

La expresión anterior es de la forma $x + jy$, y entonces, como $G(j\omega)$ es el fasor de salida dividido entre el fasor de entrada, resulta que el tamaño o magnitud del fasor de salida es proporcional al del fasor de entrada por un factor dado por $\sqrt{x^2 + y^2}$, es decir,

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}}$$

La diferencia de fase, ϕ , entre la entrada y la salida está dada por $\tan \phi = x/y$ y así,

$$\tan \phi = - \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

El signo menos indica que la fase de salida está atrasada respecto a la entrada.

12.4 Trazas de Bode

La respuesta en frecuencia de un sistema es el conjunto de valores de la magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase ϕ que se presentan cuando una señal senoidal de entrada varía en un intervalo de frecuencias. Esto se puede expresar como dos gráficas, una de la magnitud $|G(j\omega)|$ contra la frecuencia angular ω y la otra de la fase ϕ graficada contra ω . La magnitud y la frecuencia angular se grafican en escalas logarítmicas. Estas dos gráficas se llaman *trazas de Bode*.

La magnitud se expresa en unidades de decibeles (dB)

$$|G(j\omega)| \text{ en dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

Por ejemplo, una magnitud de 20 dB significa que

$$20 = 20 \log |G(j\omega)|$$

entonces $1 = \log |G(j\omega)|$ y $10^1 = |G(j\omega)|$. Así, una magnitud de 20 dB significa que la magnitud es 10, por lo tanto, la amplitud de salida es diez veces la de entrada. Una magnitud de 40 dB significa una

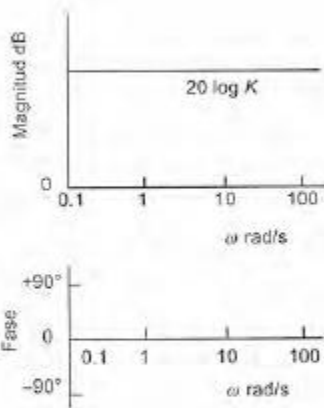


Figura 12.3 Trazas de Bode para $G(s) = K$

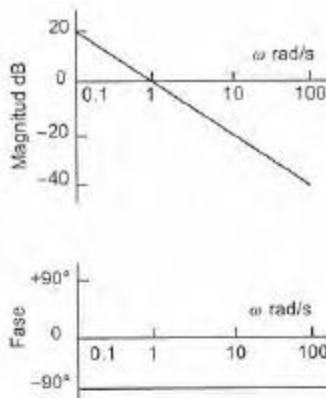


Figura 12.4 Trazas de Bode para $G(s) = 1/s$

magnitud de 100 y que la amplitud de salida es 100 veces la de entrada.

12.4.1 Ejemplos de trazas de Bode

Considere la traza de Bode de un sistema cuya función de transferencia es $G(s) = K$, donde K es una constante positiva. La función de respuesta en frecuencia es, por lo tanto, $G(j\omega) = K$. La magnitud es $|G(j\omega)| = K$ y en decibeles es $|G(j\omega)| = 20 \log K$. La traza de la magnitud es entonces una línea de magnitud constante, y al cambiar K lo único que sucede es que la magnitud sube o baja cierto número de decibeles. La fase es cero. La figura 12.3 muestra las trazas de Bode.

Considere la traza de Bode de un sistema cuya función de transferencia es $G(s) = 1/s$. La función de respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ es $1/j\omega$. Multiplicando esto por j/j se obtiene $G(j\omega) = -j/\omega$. Así, la magnitud $|G(j\omega)|$ es $1/\omega$. En decibeles es igual a $20 \log(1/\omega) = -20 \log \omega$. Cuando $\omega = 1$ rad/s, la magnitud es 0. Cuando $\omega = 10$ rad/s, es -20 dB. Cuando $\omega = 100$ rad/s la magnitud es -40dB. Cada vez que la frecuencia angular aumenta diez veces, la magnitud disminuye -20 dB. La traza de magnitud es entonces una línea recta con pendiente de -20 dB por década de frecuencia y la cual pasa por 0 dB cuando $\omega = 1$ rad/s. La fase de este sistema es

$$\tan \phi = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Por lo tanto, $\phi = -90^\circ$ para todas las frecuencias. La figura 12.4 ilustra las trazas de Bode.

Considere ahora la traza de Bode de un sistema de primer orden cuya función de transferencia está dada por

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

La función de respuesta en frecuencia es

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

La magnitud es entonces (vea la sección 12.2.1)

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

que en decibeles es

$$20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \right)$$

Si $\omega \ll 1/\tau$, entonces $\omega^2\tau^2$ es despreciable comparado con 1, por lo que la magnitud es $20 \log 1 = 0$ dB. Por consiguiente, a frecuencias bajas la traza de la magnitud es una línea recta con valor constante de 0 dB. Para frecuencias mayores, cuando $\omega \gg 1/\tau$, $\omega^2\tau^2$ es mucho

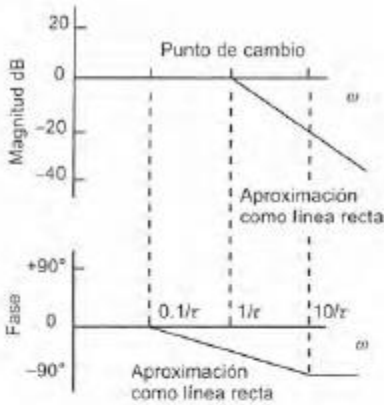


Figura 12.5 Trazas de Bode para un sistema de primer orden

mayor que 1, por lo que este valor puede ser despreciado. Entonces la magnitud es $20 \log (1/\omega)$, es decir, $-20 \log \omega\tau$. Ésta es una línea recta con pendiente de $-20 \text{ dB por década de frecuencia}$, la cual intersecta la línea 0 dB cuando $\omega\tau = 1$, es decir, cuando $\omega = 1/\tau$. La figura 12.5 muestra estas líneas para frecuencia alta y baja y cuya intersección, o *punto de quiebre* o *frecuencia de esquina*, está en $\omega = 1/\tau$. Las dos líneas rectas se conocen como *aproximación asintótica de la gráfica real*. Ésta se localiza alrededor de la intersección de las dos líneas. La diferencia entre la gráfica real y la aproximación es un máximo de 3 dB en el punto de quiebre.

La fase del sistema de primer orden (vea la sección 12.2.1) está dada por $\tan \phi = -\omega\tau$. A frecuencias bajas, cuando $\omega\tau$ es menor que alrededor de $0.1/\tau$, la fase es prácticamente 0° . A frecuencias mayores, cuando $\omega\tau$ es mayor que $10/\tau$, la fase es prácticamente -90° . Entre estos dos extremos, se puede considerar que el ángulo de fase produce en la traza de Bode una línea que es razonable considerar recta (figura 12.5). El error máximo que se produce con esta suposición es 5.5° .

Considere un sistema de segundo orden cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La función de respuesta a la frecuencia se obtiene sustituyendo s por $j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

La magnitud es (vea la sección 12.2.2)

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}}$$

Por lo tanto, la magnitud en decibeles es

$$\begin{aligned} 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \\ = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2} \end{aligned}$$

Cuando $(\omega/\omega_n) \ll 1$ la magnitud se aproxima a $-20 \log 1$, o 0 dB ; para $(\omega/\omega_n) \gg 1$ la magnitud se aproxima a $-20 \log (\omega/\omega_n)^2$. Por lo tanto, cuando ω aumenta en un factor de 10, la magnitud aumenta en

un factor de $-20 \log 100$ o -40 dB. Entonces a frecuencias bajas la traza de la magnitud es una línea recta a 0 dB, en tanto que a frecuencias altas es una línea recta de -40 dB por década de frecuencia. La intersección de estas dos líneas, es decir, el punto de quiebre, se encuentra en $\omega = \omega_n$. La traza de la magnitud está dada en forma aproximada por estas dos líneas asintóticas. Sin embargo, el valor real dependerá del factor de amortiguamiento relativo ζ . La figura 12.6 muestra las dos líneas asintóticas y las trazas reales con diversos factores de amortiguamiento.

La fase (vea la sección 12.2.2) está dada por

$$\tan \phi = -\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para $(\omega/\omega_n) \ll 1$, por ejemplo $(\omega/\omega_n) = 0.2$, la $\tan \phi$ es casi 0 y $\phi = 0^\circ$. Para $(\omega/\omega_n) \gg 1$, por ejemplo si $(\omega/\omega_n) = 5$, $\tan \phi$ es casi $-\infty$ y $\phi = -180^\circ$. Cuando $\omega = \omega_n$, $\tan \phi = -\infty$ y $\phi = -90^\circ$. Una aproximación razonable es una línea recta que pasa por -90° a $\omega = \omega_n$ y los puntos 0° para $(\omega/\omega_n) = 0.2$ y -180° cuando $(\omega/\omega_n) = 5$. La figura 12.6 muestra las trazas correspondientes.

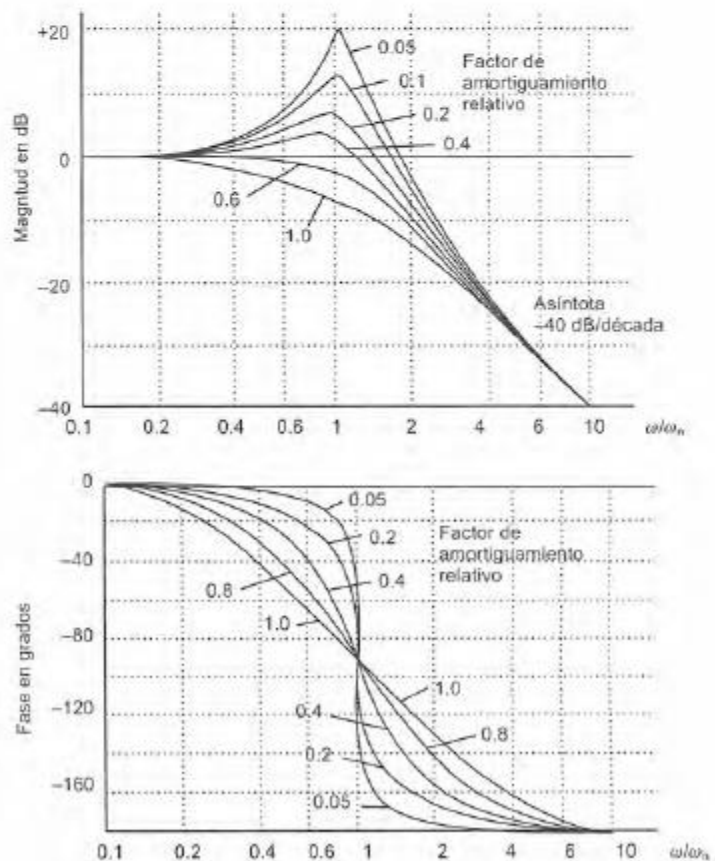


Figura 12.6 Trazas de Bode para un sistema de segundo orden

12.4.2 Construcción de trazas de Bode

Considere un sistema compuesto por varios elementos en serie. La función de transferencia del sistema completo es (vea la sección 11.4)

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \dots \text{etc.}$$

Por lo tanto, la función de respuesta en frecuencia de un sistema con dos elementos, cuando $j\omega$ substituye a s , es

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

La función de transferencia $G_1(j\omega)$ se puede expresar como un número complejo (vea la sección 12.2), es decir,

$$x + jy = |G_1(j\omega)| (\cos \phi_1 + j \operatorname{sen} \phi_1)$$

donde $|G(j\omega)|$ es la magnitud y ϕ_1 la fase de la función de respuesta en frecuencia. Asimismo, $G_2(j\omega)$ se puede expresar como

$$|G_2(j\omega)| (\cos \phi_2 + j \operatorname{sen} \phi_2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G_1(j\omega)| (\cos \phi_1 + j \operatorname{sen} \phi_1) \\ &\quad \times |G_2(j\omega)| (\cos \phi_2 + j \operatorname{sen} \phi_2) \\ &= |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| [\cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ &\quad + j (\operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2) + j^2 \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2] \end{aligned}$$

Pero $j^2 = -1$ y como $\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 = \cos(\phi_1 + \phi_2)$ y $\operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 = \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)$, entonces

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| [\cos(\phi_1 + \phi_2) + j \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)]$$

La magnitud de la función de respuesta en frecuencia del sistema es el producto de las magnitudes de cada uno de sus elementos y una fase que es la suma de las fases de los elementos separados,

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| |G_3(j\omega)| \dots \text{etc.}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \text{etc.}$$

Si ahora se considera las trazas de Bode donde se grafican los logaritmos de las magnitudes:

$$\log |G(j\omega)| = \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \log |G_3(j\omega)| + \dots \text{etc.}$$

Es decir, para obtener la traza de Bode de un sistema se suman las trazas de Bode de las magnitudes de cada elemento que conforma el sistema. Asimismo, la traza de la fase se obtiene sumando todas las fases de dichos elementos.

A partir de varios elementos básicos es sencillo obtener las trazas de Bode de una gran variedad de sistemas. Los elementos básicos que se utilizan son:

1. $G(s) = K$
Da las trazas de Bode mostradas en la figura 12.3.
2. $G(s) = 1/s$
Da las trazas de Bode mostradas en la figura 12.4.
3. $G(s) = s$
Da las trazas de Bode que son imagen simétrica de las de la figura 12.4. $|G(j\omega)| = 20$ dB por década de frecuencia, y pasa por 0 dB a $\omega = 1$ rad/s; ϕ es constante a 90° .
4. $G(s) = 1/(\tau s + 1)$
Da las trazas de Bode mostradas en la figura 12.5.
5. $G(s) = \tau s + 1$
Da las trazas de Bode que son imagen simétrica de las de la figura 12.5. Para la gráfica de la magnitud, el punto de quiebre está en $1/\tau$, la línea antes del punto se encuentra en 0 dB y después del punto tiene una pendiente de 20 dB por década de frecuencia. La fase es cero en $0.1/\tau$ y aumenta a $+90^\circ$ en $10/\tau$.
6. $G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$
Da las trazas de Bode de la figura 12.6.
7. $G(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) / \omega_n^2$
Da las trazas de Bode que son una imagen simétrica de la figura 12.6.

Para ilustrar lo anterior, se dibujarán las asíntotas de las trazas de Bode de un sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{10}{2s + 1}$$

La función de transferencia consta de dos elementos, uno con función de transferencia de 10 y otro con función de transferencia $1/(2s + 1)$. Se dibujan las trazas de Bode de los elementos anteriores y luego se suman para obtener la gráfica deseada. Las trazas de Bode para la función de transferencia 10 tiene forma similar a la que ilustra la figura 12.3, con $K = 10$; la de $1/(2s + 1)$ es como la de la figura 12.5, con $\tau = 2$. El resultado final se muestra en la figura 12.7.

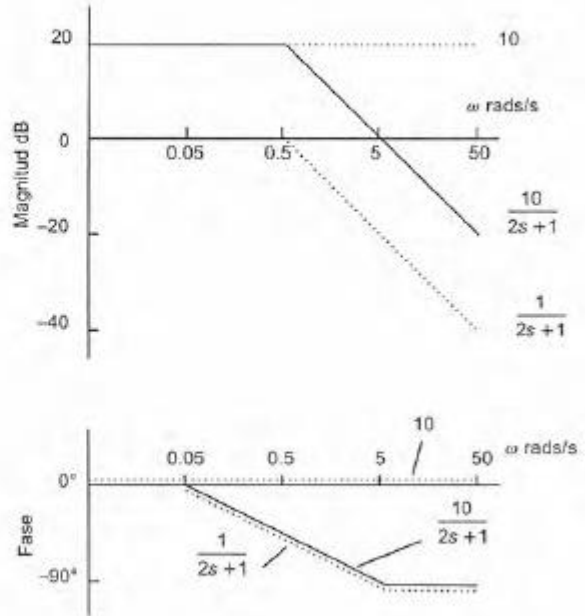


Figura 12.7 Construcción de las trazas de Bode

Otro ejemplo es el dibujo de las asíntotas de la traza de Bode de un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{2.5}{s(s^2 + 3s + 25)}$$

La función de transferencia consta de tres elementos, uno con función de transferencia de 0.1, otro con función de transferencia $1/s$ y el tercero con función de transferencia $25/(s^2 + 3s + 25)$. La función de transferencia de 0.1 produce una traza de Bode como la de la figura 12.3, con $K = 0.1$. La función de transferencia de $1/s$ da una traza de Bode como la de la figura 12.4. La función de transferencia de $25/(s^2 + 3s + 25)$ se puede representar como $\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$, con $\omega_n = 5$ rad/s y $\zeta = 0.3$. El punto de quiebre ocurre cuando $\omega = \omega_n = 5$ rad/s. La asíntota de la fase pasa por -90° en el punto de quiebre y es 0° cuando $(\omega/\omega_n) = 0.2$ y -180° cuando $(\omega/\omega_n) = 5$. La figura 12.8 muestra la traza de Bode correspondiente.

12.4.3 Trazas de Bode con MATLAB

Con MATLAB se pueden obtener trazas de Bode (vea en la sección 11.7 la presentación preliminar de MATLAB). Para obtener las trazas de Bode de un sistema descrito por la función de transferencia $4/(s^2 + 2s + 3)$ el programa es:

```
% Genera la gráfica de Bode para G(s)= 4/(s^2 + 2s + 3)
num=4;
```

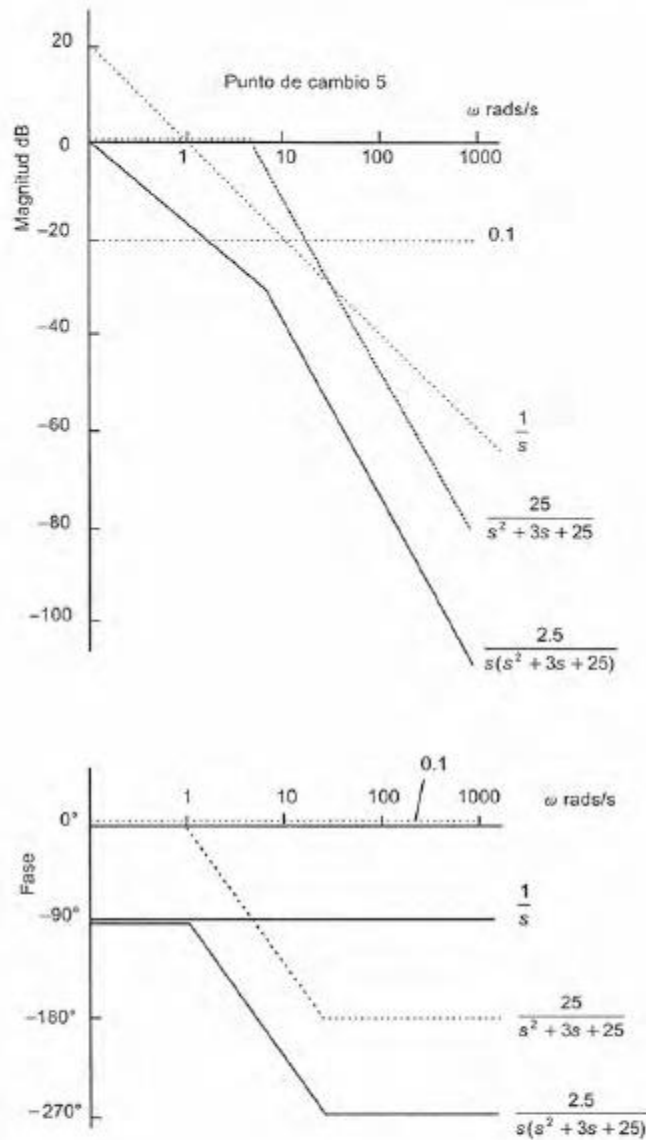


Figura 12.8 Construcción de un diagrama de Bode

```
den=[1 2 3];
bode(num,den)
```

Con el comando `bode(num,den)` se obtienen las gráficas de Bode de la ganancia en dB contra la frecuencia en rad/s en escala logarítmica; y la de la fase en grados contra la frecuencia en rad/s en escala logarítmica.

12.4.4 Identificación de sistemas

Si se determina experimentalmente la traza de Bode para un sistema considerando su respuesta a una entrada senoidal, entonces se puede

obtener la función de transferencia para el sistema. En esencia sólo se requiere dibujar las asíntotas sobre la traza de Bode en magnitud y considerar sus pendientes. La traza de ángulo de fase se usa para verificar los resultados que se obtienen a partir del análisis de la traza de magnitud.

1. Si la pendiente en frecuencias bajas antes de la primera frecuencia de esquina es cero, entonces no existe elemento s o $1/s$ en la función de transferencia. El término K se obtiene a partir de la magnitud en frecuencias bajas, la magnitud en dB = $20 \log K$.
2. Si la pendiente inicial en frecuencias bajas es -20 dB/década, entonces la función de transferencia tiene un elemento $1/s$.
3. Si la pendiente se hace más negativa en la frecuencia de esquina a razón de 20 dB/década, existe un término $(1 + s/\omega_c)$ en el denominador de la función de transferencia, donde ω_c es la frecuencia de corte o esquina donde ocurre el cambio. Estos términos se pueden presentar en más de una frecuencia de corte.
4. Si la pendiente se hace más positiva en la frecuencia de corte a razón de 20 dB/década, existe un término $(1 + s/\omega_c)$ en el numerador de la función de transferencia, con ω_c la frecuencia de esquina a la que ocurre el cambio. Dichos términos se pueden presentar para más de una frecuencia de corte.
5. Si la pendiente se hace más negativa en la frecuencia de corte a razón de 40 dB/década, existe un término $(s^2/\omega_c^2 + 2\zeta s/\omega_c + 1)$ en el denominador de la función de transferencia. El factor de amortiguamiento relativo ζ se puede determinar observando el detalle de la traza de Bode en la frecuencia de corte, como en la figura 12.6.
6. Si la pendiente se hace más positiva en la frecuencia de corte a razón de 40 dB/década, existe un término en el numerador de la función de transferencia. El factor de amortiguamiento relativo, ζ se puede determinar observando el detalle de la traza de Bode en la frecuencia de corte, como en la figura 12.6.
7. Si la pendiente en baja frecuencia no es cero, se puede determinar el término K en el numerador de la función de transferencia considerando el valor de la asíntota en baja frecuencia. En frecuencias bajas, se pueden despreciar muchos términos en la función de transferencia y la ganancia en dB se aproxima a $20 \log (K/\omega^2)$. Así, en $\omega = 1$ la ganancia en dB se aproxima a $20 \log K$.

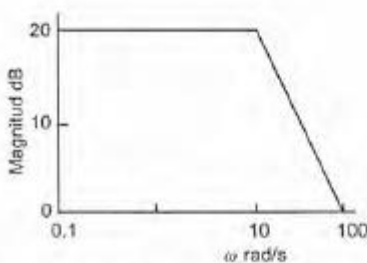


Figura 12.9 Traza de Bode

Como ilustración considere la magnitud de la traza de Bode mostrada en la figura 12.9. El gradiente inicial es 0 por lo que no hay término $1/s$ o s en la función de transferencia. La ganancia inicial es 20 y así, $20 = 20 \log K$ y $K = 10$. El gradiente cambia en -20 dB/década a una frecuencia de 10 rad/s. Entonces, hay un término $(1 + s/10)$ en

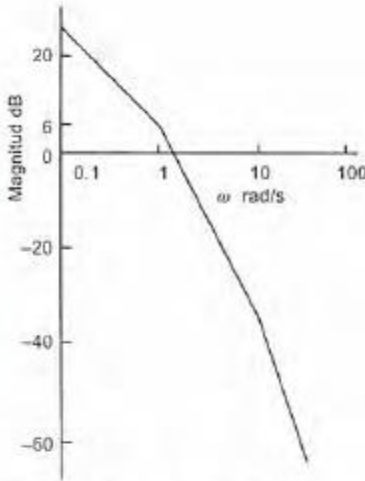


Figura 12.10 Traza de Bode

el denominador. Por lo tanto, la función de transferencia es $10/(1 + 0.1s)$.

Como ejemplo adicional, considere la figura 12.10. Existe una pendiente inicial de -20 dB/década y un término $1/s$. En la frecuencia de esquina 1.0 rad/s hay un cambio en el gradiente de -20 dB/década y el término $1/(1 + s/1)$. En la frecuencia de esquina 10 rad/s hay un cambio adicional en el gradiente de -20 dB/década y un término $1/(1 + s/10)$. En $z = 1$ la magnitud es 6 dB y $6 = 20 \log K$ y $K = 10^{6/20} = 2.0$. La función de transferencia es entonces $2.0/s(1 + s)(1 + 0.1s)$.

Un ejemplo más la figura 12.11 muestra una traza de Bode que tiene un gradiente cero inicial que cambia en -40 dB/década a 10 rad/s. La magnitud inicial es 10 dB por lo que $10 = 20 \log K$ y $K = 10^{0.5} = 3.2$. El cambio de -40 dB/década a 10 rad/s significa que hay un término $(s^2/10^2 + 2\zeta s/10 + 1)$ en el denominador. La función de transferencia es entonces $3.2 / (0.01s^2 + 0.2\zeta s + 1)$. El factor de amortiguamiento relativo se puede obtener por comparación de la traza de Bode en las frecuencias esquina con la figura 12.6. Se eleva alrededor de 6 dB arriba de la esquina y esto corresponde a un factor de amortiguamiento relativo cercano a 0.2 . Así, la función de transferencia es $3.2 / (0.01s^2 + 0.04s + 1)$

12.5 Especificaciones de desempeño

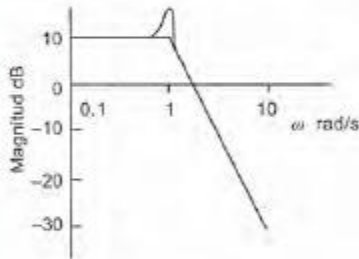


Figura 12.11 Traza de Bode

Los términos que describen el comportamiento de un sistema cuando se somete a una entrada senoidal son el pico de resonancia y el ancho de banda. El *pico de resonancia* M_p se define como el valor máximo de la magnitud (figura 12.12). Un valor grande del pico de resonancia corresponde a un valor grande del sobrepaso máximo de un sistema. Un sistema de segundo orden se puede relacionar en forma directa con el factor de amortiguamiento relativo, comparando la respuesta con la traza de Bode de la figura 12.6; un factor de amortiguamiento relativo bajo corresponde a un pico de resonancia alto.

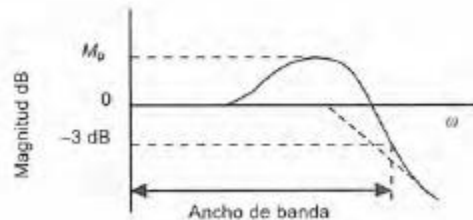


Figura 12.12 Especificaciones de comportamiento

El *ancho de banda* se define como el intervalo de frecuencias dentro del cual la magnitud no es menor que -3 dB. En el sistema cuya traza de Bode es la de la figura 12.12, el ancho de banda es el espacio entre la frecuencia cero y la frecuencia para la cual la magnitud disminuye a menos de -3 dB.

12.6 Estabilidad

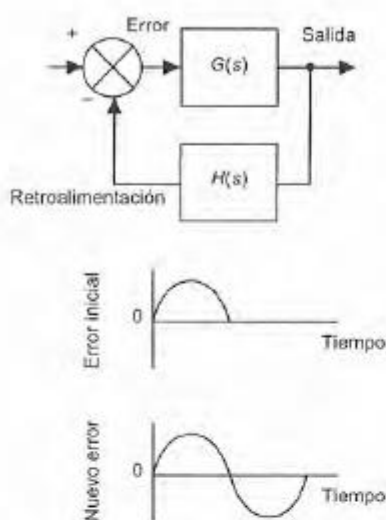


Figura 12.13 Oscilaciones autosustentadas

Cuando la entrada a un sistema es senoidal, la salida también lo es y la frecuencia es la misma, pero puede tener una amplitud y una fase diferentes a las de la entrada. Considere un sistema en lazo cerrado con realimentación negativa (figura 12.13) y sin entrada. Suponga que, por alguna razón, la señal de error del sistema es un pulso senoidal con rectificación de media onda y que esta señal llega a la salida, se realimenta y llega al elemento comparador sin modificar su amplitud, pero con un retardo de medio ciclo, es decir, con un cambio de fase de 180° , como se observa en la figura. Cuando esta señal se resta a la señal de entrada se obtiene una señal de error que continúa el pulso inicial rectificado media onda. Este pulso regresa por medio del lazo de realimentación y de nuevo llega a tiempo para continuar la señal. Entonces, existe una oscilación autosustentada.

Para que las oscilaciones autosustentadas se produzcan es necesario que la función de respuesta en frecuencia del sistema tenga una magnitud de 1 y una fase de -180° . El sistema por el que pasa la señal es $G(s)$ en serie con $H(s)$. Si la magnitud es menor que 1, la magnitud de cada uno de los pulsos de media onda siguientes será cada vez menor, hasta que la oscilación desaparece. Si la magnitud es mayor que 1, la magnitud de cada pulso será mayor que la del precedente, la señal se incrementa y el sistema es inestable.

1. Un sistema de control oscila con amplitud constante si la magnitud que resulta del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es 1 y la fase es -180° .
2. Un sistema de control oscila con amplitud cada vez menor si la magnitud que resulta del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es menor que 1 y la fase -180° .
3. Un sistema de control oscila con amplitud cada vez mayor y por lo mismo es inestable, si la magnitud resultante del sistema $G(s)$ en serie con $H(s)$ es mayor que 1 y la fase es -180° .

Para tener un buen sistema de control estable en general es necesario que la magnitud de $G(s)H(s)$ sea significativamente menor que 1. Por lo general, se utiliza un valor entre 0.4 y 0.5. Además, el ángulo de fase debe estar entre -115° y -125° . Estos valores producen un sistema de control poco subamortiguado, el cual produce, con una entrada escalón, alrededor de 20 o 30% de sobrepaso con una razón de decaimiento de cerca de 3 a 1 (consulte la explicación de estos términos en la sección 10.4).

Siempre es interesante saber qué tan estable es un sistema de control y si no tiene posibilidad de oscilar cuando se presenten pequeñas perturbaciones. El término *margen de ganancia* se aplica al factor por el cual se debe multiplicar la relación de la magnitud cuando la fase es de -180° para que tenga el valor 1 y produzca inestabilidad. El término *margen de fase* se refiere al número de grados que el án-

gulo de fase es numéricamente menor que -180° cuando la magnitud es 1. Estas reglas significan un margen de ganancia entre 2 y 2.5 y un margen de fase entre 45° y 65° para un buen sistema de control estable.

Problemas

1. ¿Cuáles son las magnitudes y los ángulos de fase de los sistemas cuyas funciones de transferencia son las siguientes?

$$\text{a) } \frac{5}{s+2}, \quad \text{b) } \frac{2}{s(s+1)}, \quad \text{c) } \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

2. ¿Cuál es la respuesta en estado permanente de un sistema cuya función de transferencia es $1/(s+2)$, si su entrada es la señal senoidal $3 \sin(5t + 30^\circ)$?
3. ¿Cuál es la respuesta en estado estable de un sistema con una función de transferencia $5/(s^2 + 3s + 10)$, si su entrada es la señal senoidal $2 \sin(2t + 70^\circ)$?
4. Determine los valores de las magnitudes y ángulos de fase, a las frecuencias angulares de i) 0 rad/s, ii) 1 rad/s, iii) 2 rad/s y iv) ∞ rad/s para sistemas con las siguientes funciones de transferencia a) $1/s(2s+1)$, b) $1/(3s+1)$.
5. Dibuje las asíntotas de las trazas de Bode para los sistemas que tienen funciones de transferencia: a) $10/s(0.1s+1)$, b) $1/(2s+1)(0.5s+1)$.
6. Obtenga las funciones de transferencia de los sistemas dados en las trazas de Bode de la figura 12.14.

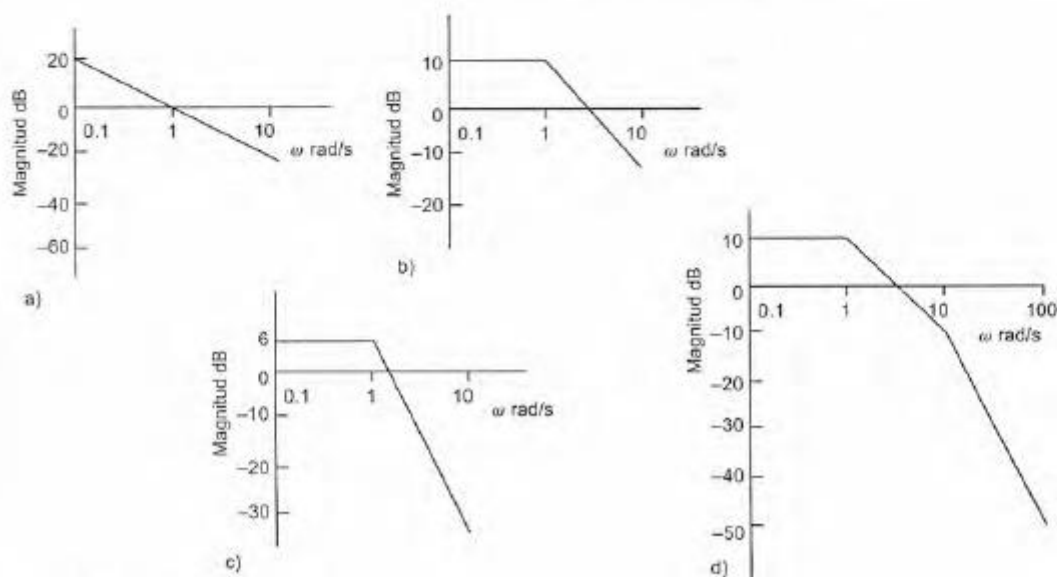


Figura 12.14 Problema 6

13 Controladores en lazo cerrado

13.1 Procesos continuos y discretos

En esencia, el control en lazo abierto es sólo un control de encendido-apagado, por ejemplo, para calentar una habitación, un calentador eléctrico se enciende o se apaga. En los sistemas de control en lazo cerrado, el controlador se usa para comparar la salida de un sistema con la condición requerida y convertir el error que resulta en una acción de control diseñada para reducir el error. Éste puede deberse a algún cambio en las condiciones que se están controlando, o a la modificación del valor de interés, por ejemplo, cuando en el sistema se introduce una señal de entrada tipo escalón, para cambiar el valor establecido por uno nuevo. En este capítulo se estudiarán las maneras en que los controladores pueden reaccionar a las señales de error, es decir, los *modos de control*, que es como se les conoce, y que se presentan en procesos continuos. Los controladores pueden ser sistemas neumáticos o sistemas basados en amplificadores operacionales, aunque los sistemas de cómputo están reemplazando con rapidez a muchos de estos sistemas. El término *control digital directo* se usa cuando una computadora está en el lazo de realimentación y se encarga del control. Este capítulo trata el tema del control en lazo cerrado.

Muchos procesos no sólo necesitan controlar que una variable (por ejemplo la temperatura) tenga un valor determinado, sino que también incluyen una secuencia de operaciones. Es el caso de una lavadora (vea la sección 1.4.3), donde se deben realizar varias acciones en una secuencia predeterminada. Otro ejemplo es la fabricación de un producto que incluye un sistema controlado que ensambla varias partes en una secuencia específica. La secuencia de operaciones puede estar *basada en el reloj* o *basada en los eventos*, o una combinación de éstas. En el primer caso, las acciones se realizan en tiempos específicos y en el segundo, cuando la realimentación indica que ha ocurrido un evento en particular.

El término *controlador lógico programable* (PCL, *programmable logic controller*) se refiere a un controlador sencillo basado en un microprocesador. El controlador examina las señales de entrada provenientes de los sensores y lleva a cabo instrucciones lógicas programadas y guardadas en su memoria. La salida obtenida consiste en se-

ñales que se alimentan a las unidades de corrección/actuación. De esta forma se pueden llevar a cabo las secuencias de operaciones. La diferencia principal entre un PLC y una computadora es que en el primero la programación se enfoca a operaciones lógicas y de conmutación y la interfase para los dispositivos de entrada y salida está dentro del controlador. Estos controladores se explican con más detalle en el capítulo 18.

En muchos procesos puede haber una mezcla de control continuo y control discreto. Por ejemplo, en una lavadora hay un control de la secuencia de las diversas etapas del ciclo de lavado con un control en lazo de realimentación para la temperatura y el nivel del agua.

13.1.1 Retraso

En todos los sistemas de control hay retrasos; esto es, el cambio en una condición que se está controlando no produce de manera inmediata una respuesta correctiva del sistema de control. Esto se debe a que el sistema requiere tiempo para producir las respuestas necesarias. Por ejemplo, cuando se controla la temperatura de una habitación mediante un sistema de calefacción central habrá un retraso entre el momento en que la temperatura baja a menos de la temperatura requerida y el momento en que el sistema de control responde y enciende el calentador. Éste no es el único retraso. Aun cuando el sistema de control responde, la respuesta de la temperatura de la habitación se retrasa porque pasa el tiempo para que el calor se transfiera del calentador al aire de la habitación.

13.1.2 Error en estado permanente

En el controlador se produce una señal de error como resultado de un cambio en la variable que se está controlando, o en el valor de entrada establecido. Por ejemplo, se introduce una señal tipo rampa al sistema a fin de que la variable controlada aumente de manera constante con el tiempo. El término *error en estado estable* se refiere a la diferencia entre el valor de entrada establecido y la salida una vez que todos los transitorios desaparecen. Es una medida de la exactitud del sistema de control para seguir el valor de entrada establecido.

Considere un sistema de control con realimentación unitaria (figura 13.1). Si la entrada de referencia es $R(s)$, la salida es $X(s)$. La señal de realimentación es $X(s)$, por lo que la señal de error es $E(s) = R(s) - X(s)$. Si $G(s)$ es la función de transferencia de la trayectoria directa, entonces para el sistema completo con realimentación unitaria se tiene

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Por lo tanto

$$E(s) = R(s) - X(s) = R(s) - \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

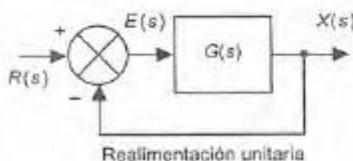


Figura 13.1 Sistema con realimentación unitaria

Por lo tanto, el error depende de $G(s)$.

Para determinar el error en estado estable, se determina cuál es el error e como función del tiempo y después se determina cuál es el valor del error cuando todos los transitorios desaparecen, es decir, el error cuando t tiende a infinito. Si bien es posible obtener la inversa de $E(s)$ y luego calcular su valor cuando $t \rightarrow \infty$, existe un método más sencillo basado en el *teorema del valor final* (vea el apéndice A), esto involucra calcular el valor de $sE(s)$ cuando s tiende a cero.

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Para ilustrar lo anterior, considere un sistema con realimentación unitaria con función de transferencia de la trayectoria directa $k/(\tau s + 1)$, y sujeto a una señal tipo escalón unitario $1/s$.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + k/(\tau s + 1)} \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{1 + k}$$

Entonces existe un error en estado estable; la salida del sistema nunca alcanza el valor predeterminado. Al aumentar la ganancia k del sistema se puede reducir este error en estado estable.

Sin embargo, si el sistema con realimentación unitaria tuviera una función de transferencia de la trayectoria directa $k/s(\tau s + 1)$ y en él se introdujera una entrada escalón, el error en estado estable sería

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + k/s(\tau s + 1)} \frac{1}{s} \right] = 0$$

En este sistema no existe error en estado estable.

13.2 Modos de control

Una unidad de control puede reaccionar de varias maneras ante una señal de error y proporcionar señales de salida para que actúen los elementos correctores:

1. En el *modo de control de dos posiciones*, el controlador es en esencia un interruptor activado por la señal de error y proporciona sólo una señal correctora tipo encendido-apagado.
2. El *modo de control proporcional (P)* produce una acción de control que es proporcional al error. La señal de corrección aumentará en la medida en que lo haga el error. Si el error disminuye, también disminuye la magnitud de la corrección y el proceso de corrección es más lento.
3. El *modo de control derivativo (D)* produce una acción de control que es proporcional a la rapidez con la que cambia el error. Cuando hay un cambio súbito en la señal de error, el controlador produce una señal de corrección de gran magnitud; cuando el cambio es gradual, sólo se produce una pequeña señal de

corrección. Se puede considerar que el control derivativo es una forma de control anticipativo, toda vez que al medir la rapidez con la que cambia el error se anticipa la llegada de un error más grande y se aplica la corrección antes de que llegue. El control derivativo no se usa solo, sino siempre en combinación con el control proporcional y, con frecuencia, con el control integral.

4. El *modo de control integral (I)* produce una acción de control que es proporcional a la integral del error en el tiempo. Entonces una señal de error constante producirá una señal de corrección creciente. La señal de corrección seguirá aumentando mientras el error persista. Se puede considerar que el controlador integral “mira hacia atrás”, suma todos los errores y responde a los cambios que ocurren.
5. Combinación de modos: proporcional derivativo (PD), proporcional integral (PI) y proporcional integral derivativo (PID). El término *controlador de tres términos* se usa para el modo PID.

En las siguientes secciones de este capítulo se estudiarán estos cinco modos de control. El controlador puede lograr estos modos mediante circuitos neumáticos, circuitos electrónicos analógicos con amplificadores operacionales, o mediante la programación de un microprocesador o una computadora.

13.3 Modo de control de dos posiciones

Un ejemplo de *modo de control de dos posiciones* es el termostato bimetálico (vea la figura 2.49), el cual puede usarse con un sistema de control de temperatura sencillo. Éste es un interruptor que se enciende o apaga, dependiendo de la temperatura. Si la temperatura de la habitación es mayor que la requerida, el par bimetálico está en la posición de apagado y también el calentador. Si la temperatura de la habitación baja a menos de la requerida, el par bimetálico cambia a la posición de encendido y el calentador se enciende. En este caso, el controlador sólo puede estar en dos posiciones, apagado o encendido, como se ve en la figura 13.2.

La acción de control del modo de dos posiciones es discontinua. En consecuencia ocurren oscilaciones de la variable controlada en torno a la condición requerida. Esto se debe a retrasos en la respuesta del sistema de control y en el proceso. Por ejemplo, en el caso del control de temperatura en un sistema de calefacción central doméstico, cuando la temperatura de la habitación baja a menos del nivel requerido, el tiempo que pasa antes de que el sistema de control responda y encienda el calentador es muy pequeño en comparación con el tiempo que transcurre antes de que el calentador empiece a tener efecto en la temperatura de la habitación. Mientras tanto la temperatura descende aún más. Sucede lo contrario cuando la temperatura aumenta al valor requerido. Como pasa un tiempo antes de que el sistema de control reaccione y apague el calentador, y más tiempo para que se enfríe el calentador y deje de calentar la habitación, la



Figura 13.2 Control de dos posiciones

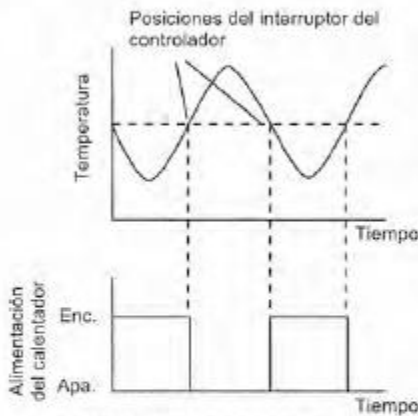


Figura 13.3 Oscilaciones en un control de dos posiciones

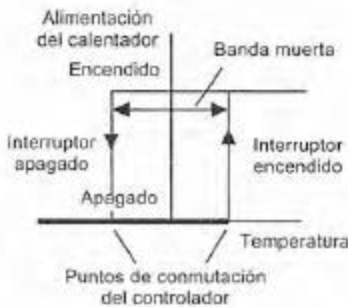


Figura 13.4 Control de dos posiciones cuyo controlador tiene dos puntos de conmutación

temperatura sobrepasa el valor requerido. El resultado es que la temperatura de la habitación oscila arriba y abajo de la temperatura requerida (figura 13.3).

Con el sencillo sistema de dos posiciones antes descrito existe el problema de que cuando la temperatura de la habitación ronda el valor predeterminado, el termostato alterna continuamente entre encendido y apagado, reaccionando a pequeños cambios en la temperatura. Para evitar lo anterior, en vez de usar sólo un valor de temperatura para que el controlador encienda o apague el calentador, se utilizan dos valores y el calentador se enciende a una temperatura menor que a la que se apaga (figura 13.4). El término *banda muerta* se refiere a los valores comprendidos entre los valores de encendido y apagado. Una banda muerta grande produce grandes fluctuaciones de la temperatura alrededor del valor predeterminado; una banda muerta pequeña produce un aumento en la frecuencia de conmutación. El elemento bimetálico de la figura 2.49 tiene un imán permanente que hace contacto para la conmutación; este imán tiene el efecto de producir la banda muerta.

Las acciones del control de dos posiciones tienden a usarse cuando los cambios se producen de manera muy lenta, es decir, en un proceso cuya capacitancia es grande. En el caso del calentamiento de una habitación, el efecto de encender o apagar el calentador para modificar la temperatura produce un cambio lento. El resultado es una oscilación de periodo largo. Si bien el control de dos posiciones no es muy preciso, los dispositivos que utiliza son sencillos y, por lo mismo, es bastante barato. El control de dos posiciones no se limita a interruptores mecánicos como los pares bimetálicos o los relevadores; mediante el uso de circuitos con tiristores y amplificadores operacionales se logra una conmutación rápida (vea la sección 7.2.2); un circuito así puede usarse para controlar la velocidad de un motor.

13.4 Modo de control proporcional

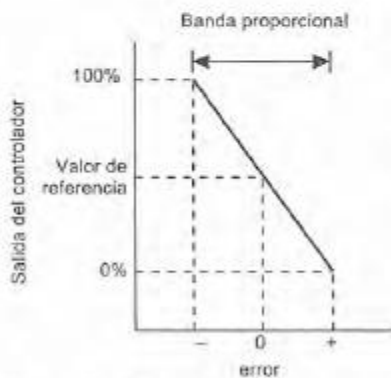


Figura 13.5 Banda proporcional

En el control de dos posiciones, la salida es una señal de encendido o apagado sin importar la magnitud del error. En el *modo proporcional*, la magnitud de la salida del controlador es proporcional al tamaño del error. Es decir, el elemento de corrección del sistema de control, por ejemplo, una válvula, recibe una señal que es proporcional a la magnitud de la corrección requerida.

La figura 13.5 muestra cómo varía la salida del controlador con la magnitud y el signo del error. La relación lineal entre la salida del controlador y el error tiende a existir sólo dentro de cierto intervalo de errores que se llama *banda proporcional*. Dentro de la banda proporcional la ecuación de la línea recta está representada por:

$$\text{Cambio en la salida del controlador respecto al valor de referencia} = K_p e$$

Donde e es el error y K_p una constante. K_p es la pendiente de la línea recta de la figura 13.5.

En general, la salida del controlador se expresa como un porcentaje del intervalo total de salidas posibles dentro de la banda proporcional. Esta salida correspondería, digamos, al cambio en la apertura de una válvula completamente cerrada a completamente abierta. Asimismo, el error se expresa como un porcentaje del valor del intervalo total, o sea, el intervalo de error correspondiente a una salida del controlador de 0 a 100%. Entonces

$$\% \text{ cambio en la salida del controlador respecto al valor de referencia} = K_p \times \% \text{ cambio en el error}$$

Como el 100% de la salida del controlador corresponde a un porcentaje de error igual a la banda proporcional

$$K_p = \frac{100}{\text{banda proporcional}}$$

Esta ecuación también se puede expresar como:

$$\text{cambio en la salida} = I_o - I_0 = K_p e$$

donde I_0 es el porcentaje de la salida del controlador correspondiente a un error de cero, I_o es el porcentaje de la salida cuando el porcentaje de error es e . Obteniendo las transformadas de Laplace

$$\text{Cambio en la salida } (s) = K_p E(s)$$

y, como

$$\text{Función de transferencia} = \frac{\text{cambio en la salida } (s)}{E(s)}$$

K_p es, dentro de la banda proporcional, la función de transferencia del controlador.

En general, cuando el error es cero, se elige como salida 50% de la salida del controlador. En el caso de un controlador que administra el paso de agua a un tanque, cuando el error es cero la válvula está abierta a la mitad (50%). Esto da un gasto normal. Cualquier error aumenta o disminuye el gasto dependiendo de la magnitud del error. El objetivo será regresar el error a su valor cero y el controlador a 50% de la salida. Suponga que el proceso tiene un flujo de líquido que entra a un tanque y por alguna razón se necesita un nuevo valor de referencia para la tasa de flujo. Este cambio se puede considerar como tener una señal de entrada tipo escalón al sistema de control. Este nuevo valor de referencia podría exigir que la válvula de corrección esté abierta a un porcentaje mayor, digamos 60%. Esto no se puede lograr estableciendo un error de cero, sino que requiere un valor de error permanente, que se conoce como *desviación* (figura 13.6). La magnitud de esta desviación es directamente proporcional a la magnitud de los cambios en la carga e inversamente proporcional a la K_p ; cuanto mayor sea el valor de K_p , más pronunciado será el

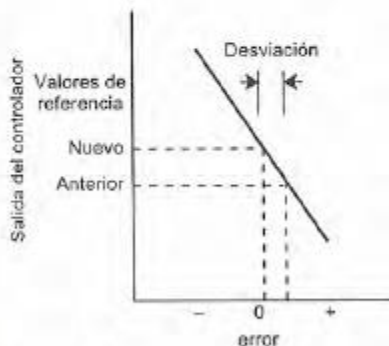


Figura 13.6 Desviación

gradiente de la figura 13.6 y, por lo tanto, menor será el cambio necesario en el error para manejar un cambio en la carga.

El modo de control proporcional tiende a emplearse en procesos donde la función de transferencia K_p puede hacerse suficientemente grande para reducir la desviación a un nivel aceptable. Sin embargo, cuanto más grande sea la función de transferencia, mayor será la posibilidad de que el sistema oscile y se vuelva inestable.

Para ilustrar la explicación anterior, considere un controlador proporcional que se usa para controlar la altura del agua en un tanque, donde el nivel del agua puede variar entre cero y 9.0 m. ¿Qué banda proporcional y función de transferencia se necesitan para obtener una altura de agua de 5.0 m si el controlador cierra por completo la válvula cuando el agua llega a 5.5 m y la abre toda cuando baja a 4.5 m? Cuando el error es -0.5 m la salida del controlador debe ser 100% abierto y cuando es $+0.5$ m debe ser 0% abierto. Por lo tanto, la banda proporcional debe cubrir un error en la altura de -0.5 m hasta uno de $+0.5$ m. Expresada como porcentaje, la banda proporcional cubre desde

$$-(0.5/9.0) \times 100 = -5.6\% \text{ a } (0.5/9.0) \times 100 = +5.6\%$$

Por lo tanto, la banda proporcional es de 11.2%. Observe que si el controlador se trabaja en porcentajes, también el error debe trabajarse en porcentajes. A este valor de banda proporcional corresponde una función de transferencia K_p de $(100\%)/(11.2\%) = 8.9$.

Como ejemplo de desviación en el error, considere un controlador proporcional cuya función de transferencia es 15 y su valor de referencia es 50% de la salida. Su señal de salida va a una válvula cuyo valor de referencia permite un flujo de $200 \text{ m}^3/\text{s}$. La válvula modifica su salida en $4 \text{ m}^3/\text{s}$ por cada unidad porcentual de cambio en la salida del controlador. ¿Cuál será la salida del controlador y la desviación en el error si es necesario modificar el flujo a $240 \text{ m}^3/\text{s}$? El nuevo valor del controlador, expresado en porcentaje, para un cambio en el flujo de 200 a $240 \text{ m}^3/\text{s}$, es $40/4 = 10\%$, un cambio de 50 a 60%. Es decir,

$$K_p = 15 = \frac{60 - 50}{e}$$

Entonces la desviación es, $e = 0.67\%$.

13.4.1 Controlador proporcional electrónico

Las funciones de un controlador proporcional se pueden obtener mediante un amplificador operacional sumador con un inversor (figura 13.7). En este caso se tiene (vea la sección 3.2.3)

$$V_{\text{sal}} = -R_f \left(\frac{V_0}{R_2} + \frac{V_c}{R_1} \right)$$

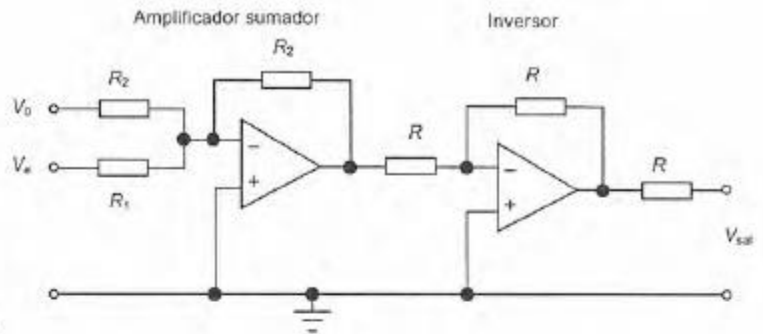


Figura 13.7 Controlador proporcional

La entrada al amplificador sumador presente en R_2 es el voltaje con error de cero V_0 , es decir, el valor predeterminado, y la entrada presente en R_1 es la señal de error, V_e . Si el resistor de realimentación $R_f = R_2$, la ecuación se convierte en:

$$V_{sal} = -\frac{R_2}{R_1} V_e - V_0$$

Si la salida del amplificador sumador pasa por un inversor, es decir por un amplificador operacional cuya resistencia de realimentación es igual a la resistencia de entrada, entonces:

$$V_{sal} = \frac{R_2}{R_1} V_e + V_0$$

$$V_{sal} = K_p V_e + V_0$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad. El resultado es un controlador proporcional.

Como ejemplo, la figura 13.8 muestra un sistema de control proporcional para controlar la temperatura del líquido en un recipiente en el momento en que se bombea.

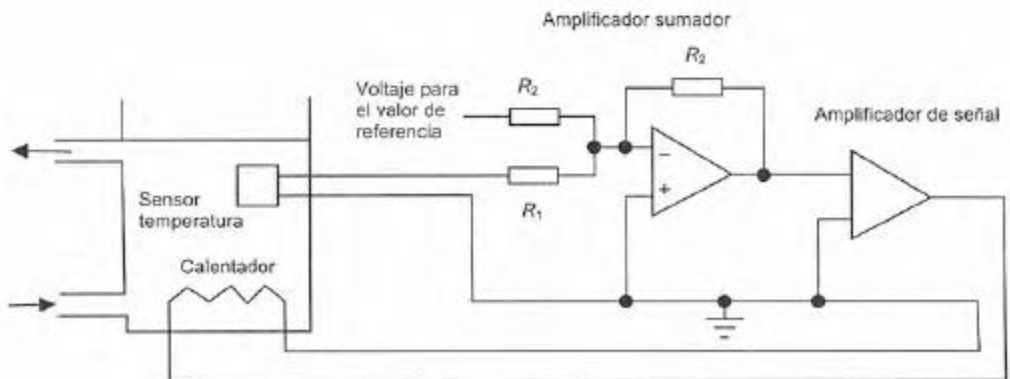


Figura 13.8 Controlador proporcional para control de temperatura

13.4.2 Respuesta del sistema

En el control proporcional hay un elemento de ganancia cuya función de transferencia es K_p en serie con el elemento en la trayectoria directa $G(s)$ (figura 13.9). El error es entonces:

$$E(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} R(s)$$

y si la entrada es un escalón, el error en estado estable es

$$e_{SS} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + 1/K_p G(s)} \frac{1}{s} \right]$$

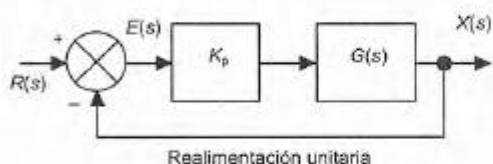


Figura 13.9 Sistema con control proporcional

Lo anterior tendrá una magnitud finita, es decir, siempre habrá un error en estado estable. A valores pequeños de K_p corresponden errores de estado estable grandes, pero también respuestas estables. A valores grandes de K_p corresponden errores de estado estable pequeños, aunque una mayor tendencia a la inestabilidad.

13.5 Control derivativo

En el *control derivativo*, el cambio de la salida del controlador respecto al valor de referencia es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la señal de error. Esto se representa mediante la ecuación

$$I_{sal} - I_0 = K_D \frac{de}{dt}$$

donde I_0 es el valor de la salida para el valor de referencia, I_{sal} el valor de la salida cuando el error e cambia con una tasa igual a de/dt . Es común expresar estas salidas del controlador como un porcentaje del intervalo total de la salida y el error como un porcentaje del intervalo total. K_D es la constante de proporcionalidad.

La función de transferencia se obtiene tomando transformadas de Laplace, por lo tanto,

$$(I_{sal} - I_0)(s) = K_D s E(s)$$

Por lo que la función de transferencia es $K_D s$.

En el control derivativo, en cuanto la señal de error empieza a cambiar existe la posibilidad de que el controlador produzca una salida de gran magnitud, ya que es proporcional a la rapidez con que cambia la señal de error, y no a su valor. Por lo tanto, se producen

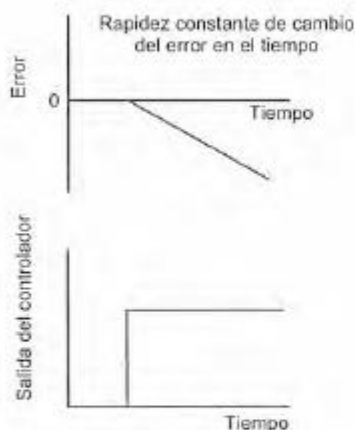


Figura 13.10 Control derivativo

respuestas iniciales rápidas. La figura 13.10 muestra la salida que produce el controlador cuando la rapidez con que cambia la señal de error en el tiempo es constante. La salida del controlador es constante porque la tasa de cambio también es constante y se produce en cuanto se presenta la desviación. Por otra parte, los controladores derivativos no responden al error en estado estable, pues en este caso la tasa de cambio del error en el tiempo es cero. Por lo anterior, el control derivativo siempre se combina con el control proporcional; la parte proporcional responde a todas las señales de error, incluso señales estables, en tanto que la parte derivativa responde a la tasa del cambio.

Para ilustrar lo anterior, considere un controlador derivativo cuyo valor de referencia es 50% y su constante derivativa K_D de 0.4 s. ¿Cuál será la salida del controlador cuando el error a) cambia a 1%/s, b) es constante en 4%? Mediante la ecuación dada antes

$$I_{\text{sal}} = K_D \frac{de}{dt} + I_0 = 0.4 \times 1 + 50 = 50.4\%$$

Si de/dt es cero, entonces I_{sal} es igual a I_0 , es decir, 50%. La salida sólo difiere del valor de referencia cuando el error está variando.

La figura 13.11 muestra el circuito de un controlador derivativo electrónico, el cual cuenta con un amplificador operacional configurado como diferenciador, seguido de otro amplificador operacional configurado como inversor. El tiempo derivativo, K_D , es igual a R_2C .

13.5.1 Control proporcional derivativo

El control derivativo nunca se utiliza solo ya que no es capaz de producir una salida cuando hay una señal de error constante, por lo que no es posible una corrección. Por ello, en forma invariable se utiliza junto con el control proporcional.

Cuando de manera conjunta se utilizan el control proporcional y el control derivativo, el cambio en la salida del controlador respecto al valor de referencia está dado por

$$\text{Cambio en la salida respecto al valor de referencia} = K_p e + K_D \frac{de}{dt}$$

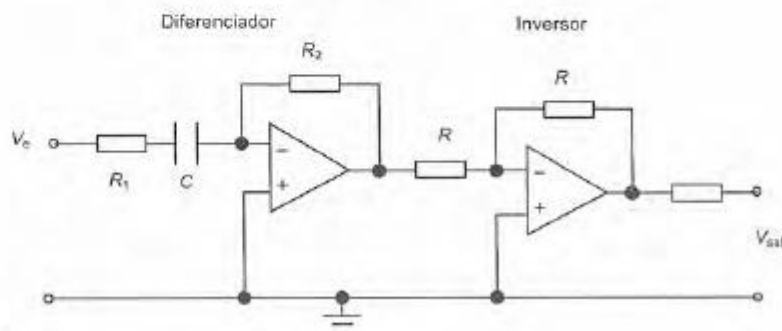


Figura 13.11 Controlador derivativo

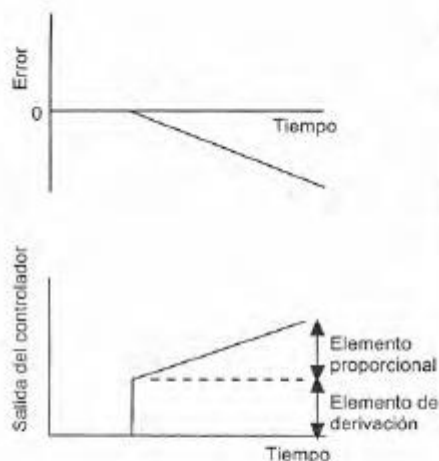


Figura 13.12 Control PD

Por lo tanto:

$$I_{\text{sal}} = K_p e + K_D \frac{de}{dt} + I_0$$

donde I_0 es la salida del valor de referencia, I_{sal} la salida cuando el error es e , K_p la constante de proporcionalidad y K_D la constante derivativa, de/dt es la tasa de cambio del error. La función de transferencia del sistema es

$$(I_{\text{sal}} - I_0)(s) = K_p E(s) + K_D s E(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia es $K_p + K_D s$. En general, se expresa como

$$\text{Función de transferencia} = K_D \left(s + \frac{1}{T_D} \right)$$

donde $T_D = K_D/K_p$, es la *constante de tiempo derivativa*.

La figura 13.12 ilustra cómo varía la salida del controlador cuando hay un error que cambia constantemente. Se observa un rápido cambio inicial en la salida del controlador debido a la acción derivativa seguida por el cambio gradual de la acción proporcional. Es decir, esta forma de control es adecuada para manejar cambios rápidos en el proceso; sin embargo, un cambio en el valor predeterminado requiere una desviación en el error (vea la explicación anterior de control proporcional).

Para ilustrar esto, considere, cuál será la salida del controlador proporcional y derivativo a) inicialmente y b) 2 s después de que el error empieza a cambiar desde su valor de cero, a una tasa de 1.2%/s. El valor de referencia del controlador es 50%, $K_p = 4$ y $K_D = 0.4$ s. Usando la ecuación dada antes

$$I_{\text{sal}} = K_p e + K_D \frac{de}{dt} + I_0$$

Al principio el error e es cero. Por lo tanto, al inicio, cuando el error empieza a cambiar

$$I_{\text{sal}} = 0 + 0.4 \times 1.2 + 50 = 50.48\%$$

Dado que la tasa de cambio es constante, después de 2 s el error se habrá convertido en 2.4%. Por lo tanto,

$$I_{\text{sal}} = 4 \times 2.4 + 0.4 \times 1.2 + 50 = 60.08\%$$

13.6 Control integral

El *modo de control integral* es en el que la tasa de cambio de la salida de control I es proporcional a la señal de error de entrada e .

K_I es la constante de proporcionalidad y, cuando la salida del controlador y el error se expresan como porcentajes, tiene unidades s^{-1} . Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_{I_0}^{I_{sal}} dI = \int_0^t K_I e dt$$

$$I_{sal} - I_0 = \int_0^t K_I e dt$$

I_0 es la salida del controlador en el tiempo cero, I_{sal} es la salida en el tiempo t .

La función de transferencia se obtiene tomando la transformada de Laplace. Entonces

$$(I_{sal} - I_0)(s) = \frac{1}{s} K_I E(s)$$

y así,

$$\text{Función de transferencia} = \frac{1}{s} K_I$$

La figura 13.13 ilustra la acción de un controlador integral cuando hay una señal de error constante como entrada al controlador. Estas gráficas se pueden observar de dos formas. Cuando la salida del controlador es constante, el error es cero; cuando la salida del controlador varía a una tasa constante, el error tiene un valor constante. La otra manera de interpretar las gráficas es en términos del área bajo la curva del error.

$$\text{Área bajo la curva del error entre } t = 0 \text{ y } t = \int_0^t e dt$$

Hasta el momento que se produce el error, el valor de la integral es cero y $I_{sal} = I_0$. Cuando ocurre el error mantiene un valor constante. Por lo tanto, el área bajo la curva aumenta cuando se incrementa el tiempo. Dado que el área aumenta a una tasa constante, la salida del controlador también aumenta a una tasa constante.

Para ilustrar lo anterior, considere un controlador integral con un valor de K_I de 0.10/s y una salida de 40% del valor de referencia. ¿Cuál será la salida después de a) 1 s, b) 2 s, si se produce un cambio súbito a un error constante de 20%? Use la ecuación desarrollada

$$I_{sal} - I_0 = \int_0^t K_I e dt$$

Cuando el error no varía con el tiempo, la ecuación se convierte en

$$I_{sal} = K_I e t + I_0$$

Para el caso a), cuando $t = 1$ s,

$$I_{sal} = 0.10 \times 20 \times 1 + 40 = 42\%$$

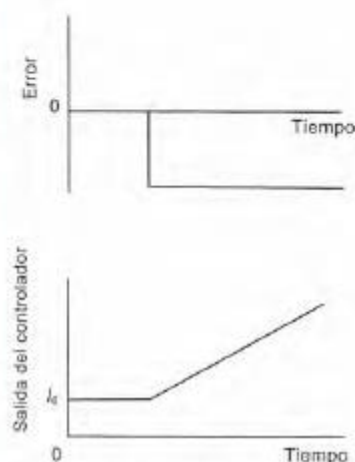


Figura 13.13 Control integral

Para el caso (b), cuando $t = 2$ s,

$$I_{sal} = 0.10 \times 20 \times 2 + 40 = 44\%$$

La figura 13.14 muestra el circuito electrónico utilizado como controlador integral. Consta de un amplificador operacional conectado como integrador seguido de otro amplificador operacional conectado como sumador y en el cual la salida del integrador se suma a la señal del controlador correspondiente en el tiempo cero. K_I es $1/R_1C$.

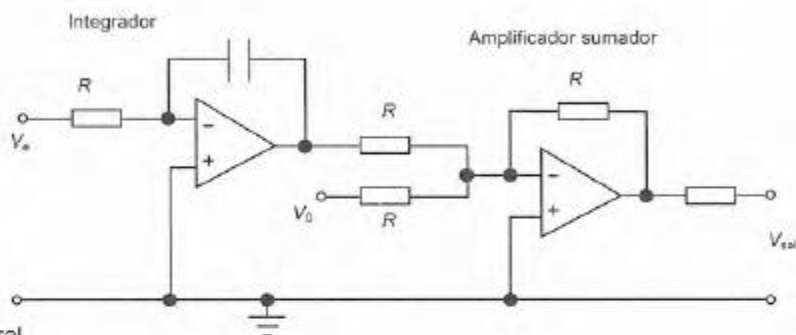


Figura 13.14 Controlador integral

13.6.1 Controlador proporcional integral

El modo de control integral por lo común no se utiliza solo, con frecuencia se usa junto con el modo proporcional. Cuando una acción integral se suma a un sistema de control proporcional, la salida del controlador I_{sal} está dada por

$$I_{sal} = K_p e + K_I \int e dt + I_0$$

donde K_p es la constante de control proporcional, K_I la constante de control integral, I_{sal} la salida cuando existe un error e , e I_0 la salida del valor de referencia cuando el error es cero. La función de transferencia es entonces

$$\text{Función de transferencia} = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$$

donde $T_I = K_p/K_I$ y es la *constante de tiempo integral*.

La figura 13.15 muestra cómo reacciona el sistema ante un cambio abrupto en un error constante. El error da lugar a una señal de salida del controlador proporcional, la cual permanece constante ya que el error no cambia. A esta acción se sobrepone una señal de salida del controlador que aumenta de manera constante y que se produce por la acción integral.

Suponga que se modifica el valor de referencia del controlador, digamos de 50 a 60%. Si sólo hubiera un controlador proporcional, ese cambio sólo sería posible teniendo una desviación en el error, es decir, un valor de referencia que no sea cero. Sin embargo, con la combinación del modo integral y proporcional la situación es diferente. La parte de integración del controlador modifica la salida del

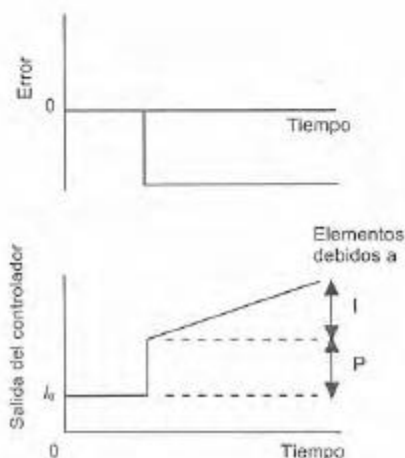


Figura 13.15 Control PI

controlador sin desviar el error. Se podría decir que el controlador reposiciona su propio valor de referencia. La figura 13.16 muestra los efectos de las acciones proporcional e integral cuando se crea una señal de error que aumenta desde un valor de cero y luego disminuye otra vez hasta llegar a cero. Con la acción proporcional por sí sola el controlador lo único que hace es reflejar ese cambio para al final llegar de nuevo a su valor de referencia original. La acción integral del controlador aumenta en proporción con el aumento del área bajo la curva error- tiempo y como, aun cuando el error regrese a cero, todavía queda un valor del área, también existe un cambio en la salida del controlador que persiste después de que el error desaparece. El efecto de combinar las acciones proporcional e integral, es decir, de sumar dos gráficas, es un cambio en la salida del controlador sin desviación en el error. Al aplicar una señal de entrada tipo escalón al sistema de control se producirá un valor de estado estable en el que no hay error.

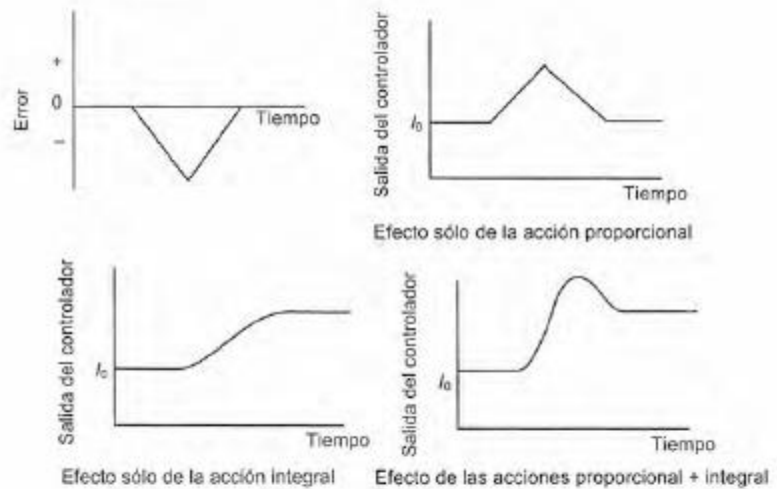


Figura 13.16 Control PI

Debido a que no tiene error de desviación, este tipo de controlador se utiliza cuando la variable del proceso experimenta grandes cambios. Sin embargo, como la parte integral del control toma tiempo en llevarse a cabo, los cambios deben ser más o menos lentos para evitar oscilaciones. Otra desventaja de esta forma de control es que cuando el proceso se inicia con la salida del controlador en 100% (por ejemplo, con un control de nivel de líquido, la condición inicial podría ser un tanque vacío, por lo que el error es tan grande que el controlador produce una salida de 100% para abrir toda la válvula) la acción integral produce un sobrepaso considerable del error antes de lograr finalmente su estabilidad.

13.7 Controlador PID

Al combinar los tres modos de control (proporcional, integral y derivativo) se obtiene un controlador que no tiene desviación en el error y disminuye la tendencia a producir oscilaciones. Este tipo de con-

trolador se conoce como *controlador de tres modos* o *controlador PID*. La ecuación que describe su comportamiento es

$$I_{sal} = K_p e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt} + I_0$$

donde I_{sal} es la salida del controlador cuando existe un error e , el cual varía con el tiempo t , I_0 es la salida del valor de referencia cuando no hay error, K_p es la constante de proporcionalidad, K_I la constante integral y K_D la constante derivativa. El controlador de tres modos se puede considerar como un controlador proporcional que a su vez tiene un control integral para eliminar la desviación en el error, así como un control derivativo para reducir los retrasos. Aplicando transformadas de Laplace, se obtiene:

$$(I_{sal} - I_0)(s) = K_p E(s) + \frac{1}{s} K_I E(s) + s K_D (s)$$

y, por lo tanto,

$$\text{Función de transferencia} = K_p e + \frac{1}{s} K_I + s K_D = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

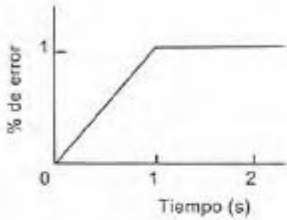


Figura 13.17 Señal de error

Para ilustrar lo anterior, considere cuál será la salida de un controlador de tres modos, en el cual K_p es 4, K_I es 0.6/s, K_D es 0.5 s, la salida para el valor de referencia es 50% y el cambio en el error, mostrado en la figura 13.17, a) inmediatamente después de que el cambio comienzan a producirse y b) 2 s después de producirse el cambio. Con base en la ecuación antes dada para I_{sal}

$$I_{sal} = K_p e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt} + I_0$$

en el caso de a) $e = 0$, $de/dt = 1/s$, $\int e dt = 0$. Entonces

$$I_{sal} = 0 + 0 + 0.5 \times 1 + 50 = 50.5\%$$

En el caso de b), para un valor de 2 s, $e = 1\%$, $\int e dt = 1.5$ s dado que la integral es el área bajo la gráfica error-tiempo hasta llegar a 2 s, y $de/dt = 0$. Por lo tanto,

$$I_{sal} = 4 \times 1 + 0.6 \times 1.5 + 0 + 50 = 54.9\%$$

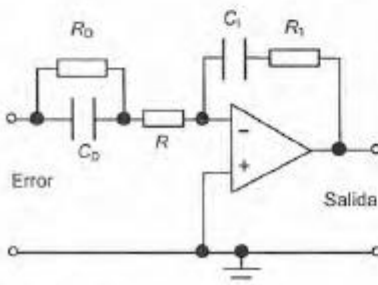


Figura 13.18 Circuito PID

13.7.1 Circuitos PID con amplificadores operacionales

Al combinar cada uno de los circuitos descritos en este capítulo para los modos proporcional, integral y derivativo se obtiene un controlador de tres modos. Sin embargo, se puede obtener el mismo controlador de manera más práctica con un solo amplificador operacional. La figura 13.18 muestra este circuito. La constante proporcional K_p es $R_1/(R + R_D)$; la constante derivativa K_D es $R_D C_D$ y la constante de integración K_I es $1/R_1 C_1$.

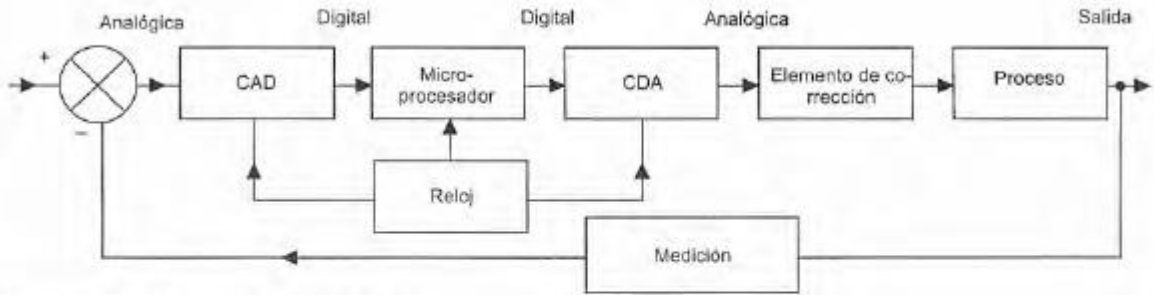


Figura 13.19 Sistema de control digital

13.8 Controladores digitales

La figura 13.19 muestra la base de un sistema de control digital directo, que se utiliza en procesos continuos. El término *control digital directo* se usa cuando el controlador digital, básicamente un microprocesador, controla el sistema de control en lazo cerrado. El controlador recibe las señales de entrada de los sensores, ejecuta los programas de control y proporciona una señal que envía a los elementos de corrección. Estos controladores requieren señales de entrada digitales, procesan la información en forma digital y producen una señal de salida digital. Dado que muchos sistemas de control realizan mediciones analógicas, se utiliza un convertidor analógico a digital (ADC) para convertir las señales de entrada. Un reloj envía un pulso a intervalos regulares e indica en qué momento el ADC debe tomar muestras de la variable controlada. Estas muestras se convierten en señales digitales que el microprocesador compara con la magnitud del valor de referencia para producir la señal de error. El microprocesador inicia, entonces, un modo de control que procesa la señal de error y produce una señal de salida digital. El modo de control que utiliza el microprocesador está determinado por el programa de instrucciones que se use para procesar las señales digitales, es decir, el *software*. La salida digital se utiliza para iniciar la acción de corrección, lo que en general sucede después de procesarla en un convertidor digital a analógico (DAC), dado que los elementos de corrección por lo común requieren señales analógicas.

En el controlador digital se realiza básicamente el siguiente ciclo de eventos:

1. Se muestrea la variable de medición.
2. Se compara con el valor predeterminado y se establece el error.
3. Se realizan cálculos basados en la magnitud del error, así como en valores guardados de señales de entrada y salida anteriores para obtener la señal de salida.
4. La señal de salida se envía al DAC.
5. Aguada hasta el siguiente tiempo de muestreo para entonces repetir el ciclo.

Los microprocesadores utilizados como controladores aventajan a los controladores analógicos en que la acción de control (por ejem-

plo, proporcional o de tres modos) se puede alterar con sólo modificar el software de cómputo; no es necesario cambiar el hardware ni el cableado eléctrico. Sin duda el programa de cómputo es capaz de modificar la estrategia de control durante una acción de control en respuesta a la situación que se desarrolla.

También tienen otras ventajas. En el control analógico se requieren controles asignados en forma específica a cada uno de los procesos que se controlan. En cambio, con un microprocesador es posible controlar varios procesos independientes realizando muestreos con un multiplexor (vea el capítulo 3). El control digital proporciona mayor precisión que el analógico dado que las características de amplificadores y demás componentes que se utilizan en los sistemas analógicos varían con el tiempo y la temperatura, y presentan corrimiento; en cambio, como el control digital funciona con base en señales sólo del tipo encendido-apagado, no sufre el corrimiento de la misma manera.

13.8.1 Cómo poner en práctica los modos de control

Para obtener un controlador digital que proporcione un modo de control en particular es necesario crear un programa adecuado para el controlador. Este programa debe indicar cómo se procesará la señal de error digital en un momento dado para obtener el valor de salida correcto para el siguiente elemento de corrección. Este procesamiento puede involucrar la señal de entrada presente junto con las señales de entrada y salida anteriores. El programa, por lo tanto, pide al controlador resolver una ecuación en diferencias (vea sección 3.10).

La función de transferencia de un controlador analógico PID es:

$$\text{Función de transferencia} = K_p + \frac{1}{s} K_i + s K_D$$

Una multiplicación por s equivale a una diferenciación. Sin embargo, también es posible considerar la derivada de la respuesta en el tiempo de la señal de error en el presente instante de tiempo como (última muestra del error, e_n , menos penúltima muestra del error, e_{n-1})/(intervalo de muestreo, T_s) (figura 13.20). Dividir entre s equivale a integrar. Sin embargo, se puede considerar que la integral del error al término del periodo de muestreo es el área bajo la gráfica error-tiempo durante el último intervalo de muestreo más la suma de las áreas bajo la gráfica de todas las muestras anteriores (Int_{prev}). Si el periodo de muestreo es breve comparado con los tiempos involucrados, entonces, el área durante el último intervalo de muestreo es casi $\frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}) / T_s$ (vea en la sección 13.10 otra aproximación conocida como aproximación de Tustin). Por lo tanto, para la señal de salida x_n del controlador en un instante en particular, el equivalente de la función de transferencia es



Figura 13.20 Señales de error

$$x_n = K_p e_n + K_i \left(\frac{(e_n + e_{n-1}) T_s}{2} + \text{Int}_{\text{prev}} \right) + K_D \frac{e_n - e_{n-1}}{T_s}$$

Si se reordena esta ecuación, se obtiene:

$$x_n = A e_n + B e_{n-1} + C(\text{Int}_{\text{prev}})$$

donde $A = K_p + 0.5K_i T_s + K_D/T_s$, $B = 0.5K_i T_s - K_D/T_s$ y $C = K_i$.

El programa para un control PID consiste en:

1. Determinar los valores de K_p , K_i y K_D .
2. Determinar los valores iniciales de e_{n-1} , Int_{prev} y el tiempo de muestreo, T_s .
3. Reestablecer el temporizador del intervalo de muestreo.
4. Introducir el error e_n .
5. Calcular y_n con la ecuación anterior.
6. Actualizar, dejándolo listo para el siguiente cálculo, el valor del área anterior a $\text{Int}_{\text{prev}} + 0.5(e_n + e_{n-1})T_s$.
7. Actualizar, dejándolo listo para el siguiente cálculo, el valor del error definiendo e_{n-1} igual a e_n .
8. Esperar a que transcurra el intervalo de muestreo.
9. Ir al paso 3 y repetir el ciclo.

13.8.2 Un sistema de control por computadora

Por lo general, un sistema de control por computadora consta de los elementos que se muestran en la figura 13.19, con los valores de referencia y los parámetros de control introducidos con un teclado. El software utilizado en este sistema proporciona el programa de las instrucciones necesarias, por ejemplo, para que la computadora ponga en marcha el modo de control PID, proporcione la pantalla del operador, reconozca y procese las instrucciones introducidas por el operador, proporcione información del sistema, proporcione instrucciones para el arranque y paro y proporcione información de reloj/calendario. En la pantalla del operador aparece información como el valor de referencia, el valor real medido, el intervalo de muestreo, el error, la calibración del controlador y el estado del elemento de corrección. La pantalla se actualiza de manera constante cada pocos segundos.

Si el lector desea profundizar en el tema de los sistemas de control por computadora, se recomiendan libros especializados como *Real-time Computer Control* de S. Bennett (Prentice-Hall, 1994).

13.9 Desempeño de los sistemas de control

La función de transferencia de un sistema de control se modifica dependiendo de cuál sea el modo de control utilizado en el controlador. Por lo tanto, la respuesta del sistema, digamos, a una entrada tipo escalón, se verá afectada por dicho modo de control. Considere el sencillo sistema que ilustra la figura 13.21. Si se emplea un control proporcional, la función de transferencia de la ruta en sentido directo es $K_p G(s)$ y, por lo tanto, la función de transferencia del sistema de realimentación $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)}$$

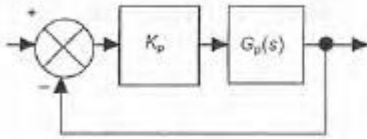


Figura 13.21 Sistema con control proporcional

Suponga que la función de transferencia de un proceso de primer orden es $1/(\tau s + 1)$, donde τ es la constante de tiempo. Si el control es proporcional y la realimentación unitaria, la función de transferencia del sistema de control es:

$$G(s) = \frac{K_p / (\tau s + 1)}{1 + K_p / (\tau s + 1)} = \frac{K_p}{\tau s + 1 + K_p}$$

El sistema de control sigue siendo un sistema de primer orden. El efecto que produce el control proporcional ha sido modificar la forma de la respuesta de primer orden del proceso. Sin el controlador, la respuesta a una entrada tipo escalón unitario fue (vea la sección 11.2)

$$y = 1 - e^{-t/\tau}$$

Ahora es

$$y = K_p (1 - e^{-t/\tau/(1 + K_p)})$$

El efecto del control proporcional ha sido reducir la constante de tiempo de τ a $\tau/(1 + K_p)$.

Si el control es integral (figura 13.22) la función de transferencia de la trayectoria directa es $K_I G_p(s)/s$, y así, la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{K_I G_p(s)}{s + K_I G_p(s)}$$

De esta manera, si ahora tenemos un proceso de primer orden cuya función de transferencia es $1/(\tau s + 1)$, con un control integral y realimentación unitaria la función de transferencia del sistema de control es

$$G(s) = \frac{K_I / (\tau s + 1)}{s + K_I / (\tau s + 1)} = \frac{K_I}{s(\tau s + 1) + K_I} = \frac{K_I}{\tau s^2 + s + K_I}$$

El sistema de control es ahora un sistema de segundo orden. Ahora, si la entrada es un escalón, el sistema produce una respuesta de segundo orden en vez de una de primer orden.

Si el sistema tiene un control derivativo (figura 13.23), la función de transferencia de la trayectoria directa es $s K_D G_p(s)$, y con realimentación unitaria, la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{s K_D G_p(s)}{1 + K_D G_p(s)}$$

Con un proceso de primer orden cuya función de transferencia es $1/(\tau s + 1)$, el control derivativo produce una función de transferencia global de:

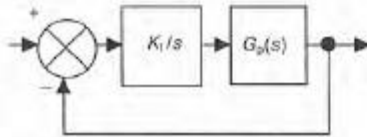


Figura 13.22 Sistema con control integral

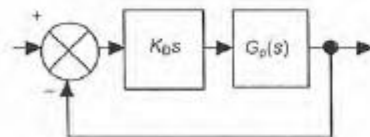


Figura 13.23 Sistema con control derivativo

13.10 Sintonización de controladores

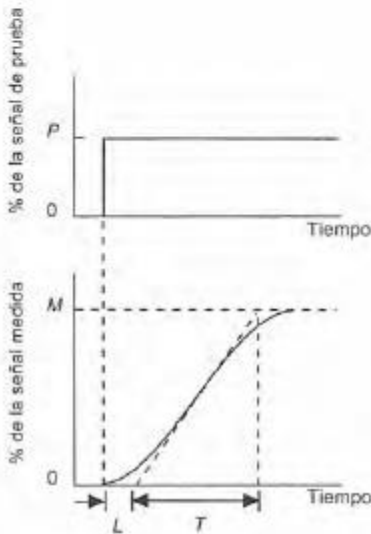


Figura 13.24 Curva de reacción del proceso

$$G(s) = \frac{sK_D/(\tau s + 1)}{1 + sK_D/(\tau s + 1)} = \frac{sK_D}{\tau s + 1 + sK_D}$$

El término *sintonización* describe el proceso de selección de los mejores parámetros del controlador. En el controlador proporcional se refiere a la determinación del valor de K_p ; con el controlador PID hay que elegir las tres constantes K_p , K_i y K_D . Existen varios métodos para hacerlo, de los cuales sólo estudiaremos dos, ambos propuestos por *Ziegler* y *Nichols*. Ellos supusieron que cuando el sistema bajo control es en lazo abierto, una aproximación razonable para describir su comportamiento es un sistema de primer orden al que se incorpora un retardo en el tiempo. Con base en esto, se procede a obtener los parámetros para un desempeño óptimo.

13.10.1 Método de la curva de reacción del proceso

Por lo general, el lazo de control del proceso se abre entre el controlador y la unidad de corrección, para que no se produzcan acciones de control. A la unidad de corrección se aplica una señal de entrada de prueba y se determina la respuesta de la variable controlada. La señal de prueba debe ser tan pequeña como sea posible. La figura 13.24 muestra la forma de la señal de prueba y una respuesta típica. La señal de prueba es una señal tipo escalón y la amplitud del escalón se expresa como el cambio porcentual P en la unidad de corrección. La gráfica de la variable medida en función del tiempo se conoce como *curva de reacción del proceso*. La variable medida se expresa como porcentaje del intervalo a escala total.

Se traza una tangente para obtener el gradiente máximo de la curva. En la figura 13.24 la pendiente máxima R es M/T . El tiempo entre el inicio de la señal de prueba y el punto donde esta tangente interseca el eje de tiempo se conoce como retardo, L . La tabla 13.1 muestra el criterio recomendado por *Ziegler* y *Nichols* para elegir los parámetros del controlador con base en los valores de P , R y L .

Tabla 13.1 Criterio de la curva de la reacción del proceso

Modo de control	K_p	T_i	T_D
P	P/RL		
PI	$0.9 P/RL$	$3.33 L$	
PID	$1.2 P/RL$	$2 L$	$0.5 L$

Considere el siguiente ejemplo. Determine los parámetros de un controlador de tres modos cuya curva de reacción del proceso se muestra en la figura 13.25, cuando la señal de prueba fue 6% de cambio en la posición de la válvula de control. Dibujando una tangente en la parte de la curva con pendiente máxima se obtienen un retardo L de 150 s y un gradiente R de $5/300 = 0.017/s$. Entonces



Figura 13.25 Ejemplo de curva de proceso

$$K_p = \frac{1.2P}{RL} = \frac{1.2 \times 6}{0.017 \times 150} = 2.82$$

$$T_i = 2L = 300\text{s}$$

$$T_D = 0.5L = 0.5 \times 150 = 75\text{s}$$

13.10.2 Método de la última ganancia

Con este método, las acciones integral y derivativa primero se reducen a sus valores mínimos. Se define un valor bajo de la constante de proporcionalidad K_p que luego se aumenta en forma gradual. Esto equivale a decir que la banda proporcional se estrecha de manera gradual. Al mismo tiempo se aplican pequeñas perturbaciones al sistema. Esto continúa hasta que se producen oscilaciones sostenidas. Cuando esto se produce, el valor crítico de la constante proporcional K_{pc} se anota y se mide el período de las oscilaciones T_c . La tabla 13.2 muestra la relación entre el criterio recomendado por Ziegler y Nichols para los parámetros del controlador y este valor de K_{pc} . La banda proporcional crítica es $100/K_{pc}$.

Tabla 13.2 Criterio del ciclo final

Modo de control	K_p	T_i	T_D
P	$0.5 K_{pc}$		
PI	$0.45 K_{pc}$	$T_c/1.2$	
PID	$0.6 K_{pc}$	$T_c/2.0$	$T_c/8$

Considere el siguiente ejemplo. Al sintonizar un sistema de control de tres modos mediante el método de la última ganancia se determinó que las oscilaciones se iniciaban cuando la banda proporcional disminuía a 30%. Las oscilaciones tienen un período de 500 s. ¿Cuáles son los parámetros adecuados para el controlador? El valor crítico de K_{pc} es $100/\text{banda proporcional crítica}$, es decir, $100/30 = 3.33$. Entonces, usando el criterio expuesto en la tabla 13.2:

$$K_p = 0.6K_{pc} = 0.6 \times 3.33 = 2.0$$

$$T_i = T_c/2.0 = 500/2 = 250 \text{ s}$$

$$T_D = T_c/8 = 500/8 = 62.5 \text{ s}$$

13.11 Control de velocidad

Considere el problema de controlar el movimiento de una carga mediante un motor. Debido a que el sistema del motor es probablemente de segundo orden, un control proporcional hará que la salida del sistema necesite tiempo para lograr el desplazamiento requerido cuando, por ejemplo, entre al sistema una señal tipo escalón, y puede oscilar algún tiempo en torno al valor requerido. Es decir, el sistema requerirá cierto tiempo para responder a la señal de entrada. Utilizando un control PD en vez de utilizar sólo un control P se logrará una mayor velocidad de respuesta con menos oscilaciones. Existe, sin embargo, una alternativa para lograr el mismo efecto y consiste en emplear un segundo lazo de realimentación que dé una medición relacionada con la rapidez con que cambia el desplazamiento. Esto se conoce como *realimentación de velocidad*. La figura 13.26 muestra este sistema; en la realimentación de velocidad se utiliza un tacogenerador que produce una señal proporcional a la velocidad de giro del eje del motor y, por lo tanto, la rapidez con la que cambia el desplazamiento, y este desplazamiento se puede monitorear utilizando un potenciómetro rotacional.

13.12 Control adaptable

Existen muchas situaciones de control en las que los parámetros de la planta cambian con el tiempo o tal vez con la carga; por ejemplo, un manipulador de robot que se usa para mover cargas cuando la carga cambia. Si la función de transferencia de la planta cambia, es deseable una resintonización del sistema para determinar los valores óptimos de las constantes proporcional, derivativa e integral. Para los sistemas de control hasta aquí considerados, se ha supuesto que una vez sintonizado el sistema conserva sus valores de las constantes proporcional, derivativa e integral, hasta que el operador proceda a una resintonización. Una alternativa es un *sistema de control adaptable*, el cual se 'adapta' a los cambios y modifica sus parámetros de acuerdo con las circunstancias prevalecientes.

El sistema de control adaptable se basa en el empleo de un microprocesador como controlador. Este dispositivo permite que el modo y los parámetros de control utilizados se adapten a las circunstancias, y se pueden modificar cuando éstas cambien.

Es posible considerar que un sistema de control adaptable tiene las siguientes etapas de funcionamiento:

1. Empieza a funcionar con las condiciones del controlador definidas con base en una condición supuesta.
2. El desempeño deseable se compara continuamente con el desempeño real del sistema.
3. El modo y los parámetros del sistema de control se ajustan de manera automática y continua para minimizar la diferencia entre el desempeño deseado y el real.

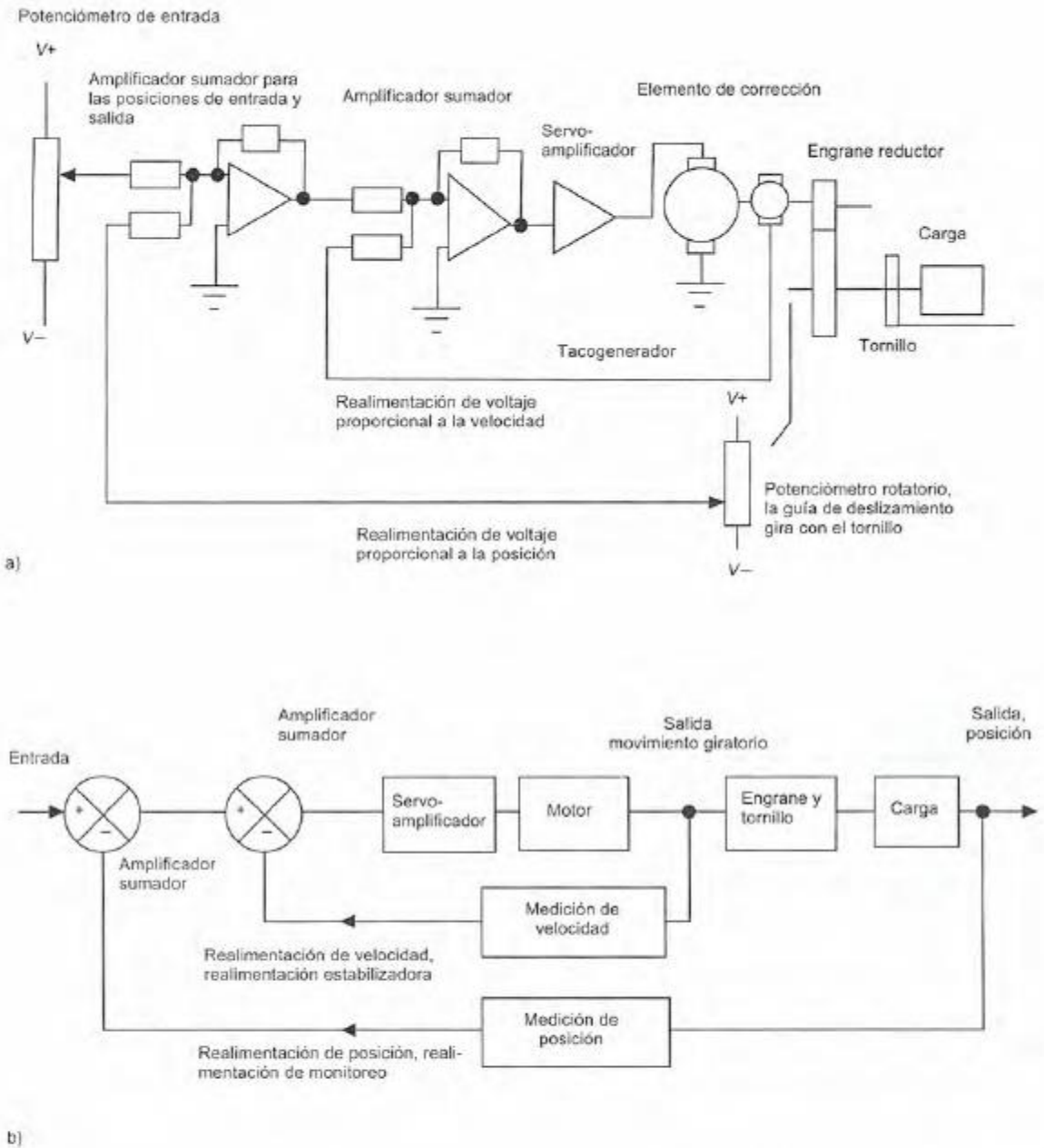


Figura 13.26 Sistema con realimentación de velocidad. a) diagrama descriptivo del sistema; b) diagrama de bloques del sistema

Por ejemplo, en un sistema de control que funciona en modo proporcional, la constante de proporcionalidad K_p se podría ajustar en forma automática a las circunstancias, y cambiar cuando ellas cambien.

Los sistemas de control adaptables pueden adoptar varias formas. Tres de las más comunes son:

1. Control de ganancia preprogramada.
2. Control autosintonizable.
3. Control basado en un modelo de referencia.

13.12.1 Control de ganancia preprogramada

En el *control de ganancia preprogramada* o, como a veces se le conoce, *control adaptable preprogramado*, los cambios preestablecidos en los parámetros del controlador se realizan con base en alguna medición auxiliar de una variable del proceso. La figura 13.27 ilustra este método. El término *control de ganancia preprogramada* se utilizó porque el único parámetro que originalmente se ajustaba era la ganancia, es decir, la constante de proporcionalidad K_p .

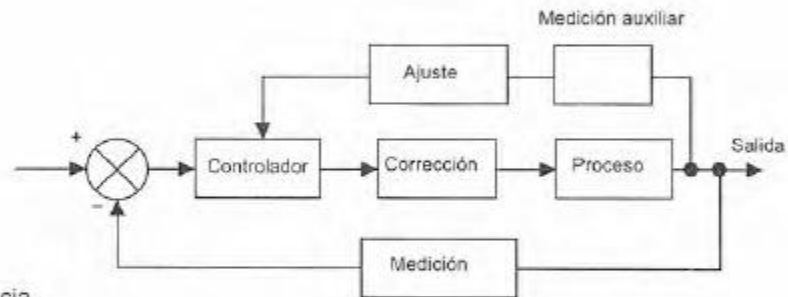


Figura 13.27 Control de ganancia preprogramada

En un sistema de control que se utiliza para controlar la posición de una carga, se calculan los parámetros del sistema para diversos valores de la carga y en la memoria del controlador se almacena una tabla con esos valores. Una celda de almacenamiento puede usarse para medir la carga real y enviar una señal al controlador con el valor de la masa, que después utiliza el controlador para seleccionar los parámetros adecuados.

Una desventaja de este sistema es que se deben determinar los parámetros de control para muchas condiciones de operación, de modo que el controlador elija la que convenga a las condiciones prevalentes. Una ventaja, sin embargo, es que los cambios en los parámetros se pueden hacer con rapidez cuando cambian las condiciones.

13.12.2 Control autosintonizable

En este caso, el sistema ajusta sus parámetros en forma continua con base en el monitoreo de la variable que el sistema debe controlar y en la salida del controlador. La figura 13.28 ilustra las características de este sistema.

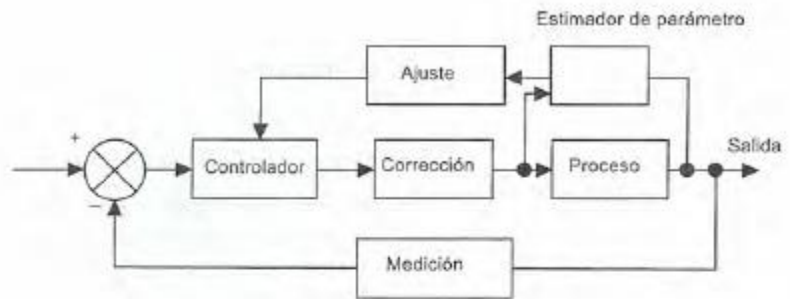


Figura 13.28 Regulador autosintonizable

Es frecuente que los controladores PID comerciales cuenten con *autosintonización*. Cuando el operador oprime un botón, el controlador inyecta una pequeña perturbación al sistema y mide la respuesta. Ésta se compara con la respuesta deseada y se ajustan los parámetros de control, mediante una regla de Ziegler-Nichols modificada, para acercar la respuesta real a la respuesta deseada.

13.12.3 Sistemas adaptables basados en un modelo de referencia

En el sistema adaptable basado en un *modelo de referencia* se desarrolla un modelo preciso del sistema. El valor establecido se usa como entrada para el sistema de control real y para el modelo de referencia, y se observa la diferencia entre la salida real y la salida del modelo. La diferencia entre estas señales sirve para ajustar los parámetros del controlador con el fin de minimizar la diferencia. La figura 13.29 ilustra las características de este sistema.

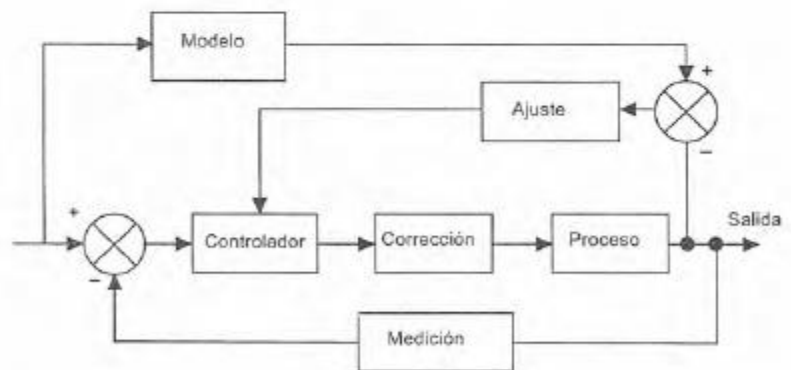


Figura 13.29 Control basado en un modelo de referencia

Si el lector desea obtener más información sobre el control adaptable, consulte libros especializados como *Adaptive Control* de K. J. Åström y B. Wittenmark (Addison-Wesley, 1989).

Problemas

1. ¿Cuáles son las limitaciones del control de dos posiciones (encendido-apagado) y en qué situaciones es común emplear este tipo de control?
2. Un controlador de dos posiciones enciende el calentador de una habitación cuando la temperatura desciende a 20°C y lo apaga cuando llega a 24°C . Cuando el calentador está encendido, el aire de la habitación aumenta su temperatura a razón de 0.5°C por minuto; cuando el calentador está apagado, se enfría a 0.2°C por minuto. Si los retrasos del sistema de control son despreciables, ¿qué tiempo se necesita para que a) el calentador pase de encendido a apagado, b) el calentador pase de apagado a encendido?
3. Un controlador basado en el modo de control de dos posiciones se utiliza para controlar el nivel del agua de un tanque abriendo o cerrando una válvula; en su posición abierta, permite la entrada del agua con un gasto de $0.4\text{ m}^3/\text{s}$. El área transversal del tanque es 12 m^2 y el agua sale de él a un gasto constante de $0.2\text{ m}^3/\text{s}$. La válvula se abre cuando el nivel del agua sube a 4.0 m y se cierra a 4.4 m . ¿Qué tiempo tarda a) en pasar la válvula de abierta a cerrada, b) en pasar la válvula de cerrada a abierta?
4. Un controlador proporcional se utiliza para controlar la altura del agua en un tanque cuando el nivel puede variar entre cero y 4.0 m . La altura requerida es 3.5 m y el controlador debe cerrar por completo una válvula cuando la altura del agua es 3.9 m y abrirla por completo cuando la altura es 3.1 m . ¿Qué banda proporcional y función de transferencia se necesitarán?
5. La K_p de un controlador proporcional es 20 y el valor de referencia 50% de la salida. En su salida se utiliza una válvula que en el valor de referencia permite un flujo de $2.0\text{ m}^3/\text{s}$. La válvula cambia su salida en proporción directa a la salida del controlador. ¿Cuál será la salida del controlador y la desviación en el error cuando el flujo debe cambiar a $2.5\text{ m}^3/\text{s}$?
6. El valor de referencia de un controlador derivativo es 50% y la constante derivativa K_D es 0.5 s . El error inicia en cero y luego cambia a $2\%/s$ por 3 s antes de convertirse en constante durante 2 s , después de lo cual disminuye a $1\%/s$ hasta cero. ¿Cuál será la salida del controlador después de a) 0 s , b) 1 s , c) 4 s y d) 6 s ?
7. El valor de referencia de un controlador integral es 50% y el valor de K_I es $0.10/s$. El error se inicia en cero y cambia a $4\%/s$ por 2 s antes de convertirse en constante durante 3 s . ¿Cuál será la salida después de a) 1 s , b) 3 s ?
8. El K_p de un controlador de tres modos es 2, K_I es $0.1/s$, K_D es 1.0 s y la salida del valor de referencia es 50%. El error se inicia en cero, cambia a $5\%/s$ por 2 s antes de convertirse en constante durante 3 s . Luego disminuye a $2\%/s$ hasta llegar a cero y permanece en cero. ¿Cuál será la salida del controlador después de a) 0 s ; b) 3 s ; c) 7 s ?
9. Describa y compare las características de a) un control proporcional, b) un control proporcional integral, c) un control proporcional integral derivativo.

10. Determine los parámetros de K_p , T_1 y T_D necesarios en un controlador de tres modos cuya curva de reacción del proceso tiene un retardo L de 200 s y una pendiente R de 0.010%/s, cuando la magnitud de la señal de prueba fue 5% de cambio en la posición de la válvula de control.
11. Durante la sintonización de un controlador de tres modos utilizando el método de la última ganancia se pudo determinar que las oscilaciones iniciaban cuando la banda proporcional se disminuyó a 20%. Las oscilaciones tenían un tiempo periódico de 200 s. ¿Cuáles son los valores adecuados de K_p , T_1 y T_D ?
12. Explique cómo funcionan las siguientes modalidades de sistemas de control adaptable a) de ganancia preprogramada, b) autosintonizable, c) basado en un modelo.
13. Un motor de c.d. se comporta como sistema de primer orden con una función de transferencia en la que se relaciona la posición de salida hasta la que ha girado una carga, con la señal de entrada de $1/s(1 + s\tau)$. Si la constante de tiempo τ es de 1 s y el motor se utilizará en un sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria y un controlador proporcional, determine el valor de la constante de proporcionalidad que permita obtener una respuesta en lazo cerrado con un sobrepaso de 25%.
14. El pequeño motor ultrasónico utilizado para desplazar las lentes de enfoque automático de una cámara (vea la sección 22.3.3) desplaza el aro (del pistón) con una inercia tan pequeña que la función de transferencia mediante la que se relacionan la posición angular y la señal de entrada es $1/cs$, donde c es la constante de proporcionalidad que relaciona el par de torsión de fricción con la velocidad angular. Si el motor se controla mediante un sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria, ¿qué comportamiento se puede esperar si se utiliza un control proporcional?

14 Lógica digital

14.1 Lógica digital

Muchos sistemas de control tienen el propósito de activar o desactivar eventos, cuando se cumplen ciertas condiciones. Por ejemplo, en la lavadora doméstica el calentador sólo se enciende cuando la tina tiene agua y el nivel es el correcto. Este tipo de control usa señales *digitales* donde sólo hay dos niveles de señal posibles. Los circuitos digitales son la base de las computadoras digitales y de los sistemas controlados con microprocesadores.

Estos circuitos se desarrollaron a partir de circuitos de transistores que producían una salida de uno de dos niveles de voltaje, dependiendo de los niveles de sus entradas. Los dos niveles, en general 5 V y 0 V, son las señales alta y baja y se representan por 1 y 0. En el *sistema de numeración binario* sólo se utilizan los números 0 y 1 y se usa mucho en circuitos digitales. Estos dos valores de 0 y 1 pueden representar niveles de encendido o apagado, abierto o cerrado, sí o no, verdadero o falso, +5 V o 0 V, etcétera.

Con el *control digital*, por ejemplo en el caso de la lavadora, la entrada de agua se activa cuando la puerta está cerrada y se alcanza determinado momento del ciclo de lavado. Hay dos señales de entrada que pueden ser sí o no, y una señal de salida que puede ser sí o no. Aquí el controlador se programa de manera que sólo produzca una salida de sí, si ambas señales de entrada son sí, es decir, si las entradas *A* y *B* son 1, entonces la salida será 1. Se dice que la operación anterior está controlada por una *compuerta lógica*, en este ejemplo es una compuerta AND. Muchas máquinas y procesos se controlan de esta manera.

El término *lógica combinacional* se refiere a la combinación de dos o más compuertas lógicas básicas para obtener una función requerida. Por ejemplo puede requerirse una alarma al encender un automóvil con una puerta abierta, o si las luces delanteras están encendidas y la puerta del conductor se abre.

Además de estudiar el tema de lógica combinacional, en este capítulo también se tratará la *lógica secuencial*. Estos circuitos digitales se usan para controlar un conjunto de eventos en una secuencia

específica dictada por un reloj de control o por señales de activación-desactivación. Éstos son los circuitos de lógica combinatorial con memoria.

14.2 Sistemas numéricos

El *sistema decimal* se basa en 10 símbolos o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Cuando un número se representa con este sistema, la posición del dígito indica que el peso asignado a cada uno aumenta en un factor de 10 al moverse de derecha a izquierda.

...	10^3	10^2	10^1	10^0
	millares	centenas	decenas	unidades

El *sistema binario* se basa en sólo dos símbolos o estados: 0 y 1, los cuales se conocen como dígitos binarios o *bits*. Cuando un número se representa con este sistema, la posición del dígito en el número indica que el peso asignado a cada dígito aumenta en un factor de 2 al moverse de derecha a izquierda.

...	2^3	2^2	2^1	2^0
	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

Por ejemplo, el número decimal 15 en el sistema binario es 1111. En un número binario el bit 0 (el que se encuentra más a la derecha) se le conoce como *bit menos significativo* (LSB, *least significant bit*) y al bit que se encuentra más a la izquierda como *bit más significativo* (MSB, *most significant bit*).

El *sistema octal* se basa en ocho dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Cuando un número se representa con este sistema, la posición del dígito en el número indica que el peso asignado a cada dígito aumenta en un factor de 8 al ir de derecha a izquierda.

...	8^3	8^2	8^1	8^0
-----	-------	-------	-------	-------

Por ejemplo, el número decimal 15, en el sistema octal es 17.

El *sistema hexadecimal* se basa en 16 dígitos/símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Cuando un número se representa en este sistema, la posición del dígito en el número indica que el peso asignado a cada dígito aumenta en un factor de 16 al ir de derecha a izquierda.

...	16^3	16^2	16^1	16^0
-----	--------	--------	--------	--------

Por ejemplo, el número decimal 15 es F en el sistema hexadecimal. Este sistema en general se utiliza cuando se elaboran programas de sistemas basados en microprocesadores, ya que es un método muy compacto para introducir datos.

El *sistema decimal de codificación binaria* (BCD, *binary coded decimal system*) es un sistema muy utilizado en computadoras. Cada dígito decimal se codifica por separado en binario. Por ejemplo, el

número decimal 15 en BCD es 0001 0101. Este código es útil en las salidas de sistemas basados en microprocesadores, en los que la salida activa displays decimales; el microprocesador asigna a cada dígito decimal del display su propio código binario.

La tabla 14.1 muestra ejemplos de números en los sistemas decimal, binario, BCD, octal y hexadecimal.

Tabla 14.1 Sistemas numéricos

Decimal	Binario	BCD	Octal	Hexadecimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F

14.2.1 Operaciones binarias

En la suma de números binarios se observan las siguientes reglas:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10 \quad \text{es decir, 0 y 1 de acarreo}$$

$$1 + 1 + 1 = 11 \quad \text{es decir, 1 y 1 de acarreo}$$

En números decimales la suma de 14 y 19 da 33. En números binarios esta suma se convierte en:

Cosumando (primer sumando)	01110
Sumando	10011
Suma	100001

Para el bit 0, $0 + 1 = 1$. Para el bit 1, $1 + 1 = 10$, es decir, 0 y el 1 se acarrea a la siguiente columna. Para el bit 3, $1 + 0 + 1$ de acarreo = 10. Para el bit 4, $1 + 0 + 1$ de acarreo = 10. Se continúa de esta manera con cada uno de los bits y se termina con la suma. El número final es 100001. Cuando se suman los números binarios A y B , para obtener C , es decir $A + B = C$, entonces A se conoce como *cosumando* (*primer sumando*), B como *sumando* y C como *suma*.

La resta de números binarios se realiza de acuerdo con las siguientes reglas:

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 - 1 = 10 - 1 + \text{préstamo} = 1 + \text{préstamo}$$

Al calcular $0 - 1$, se toma en préstamo un 1 de la siguiente columna de la izquierda en la que aparezca un 1. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior. En números decimales la resta de 27 menos 14 da 13.

Minuendo	11011
Sustraendo	01110
<hr/>	
Resta o diferencia	01101

Para el bit 0 se tiene $1 - 0 = 1$. Para el bit 1 se tiene $1 - 1 = 0$. Para el bit 2 se tiene $0 - 1$. Se toma prestado 1 de la siguiente columna y se tiene $10 - 1 = 1$. Para el bit 3 se tiene $0 - 1$; recuerde que se pidió prestado el 1. De nuevo, pidiendo prestado 1 de la siguiente columna tenemos $10 - 1 = 1$. Para el bit 4 se tiene $0 - 0 = 0$; recuerde que se pidió prestado el 1. Cuando se restan los números binarios, A y B resulta C , es decir $A - B = C$, entonces A se conoce como *minuendo*, B como *sustraendo* y C como *diferencia*.

La resta de números binarios es más fácil en forma electrónica utilizando un método alterno de sustracción. El ejemplo anterior de la resta podría considerarse también como la suma de un número positivo y un número negativo. Las siguientes técnicas muestran cómo especificar números negativos para convertir la resta en una suma. También facilitan el manejo de los números negativos en cualquier circunstancia.

Los números utilizados hasta aquí se conocen como números *sin signo*, dado que el número no indica si es positivo o negativo. Se dice que un número *tiene signo* cuando el bit más significativo indica el signo del número; se usa 0 si el número es positivo y 1 si es negativo. Para indicar que se trata de un número positivo se escribe el número precedido por un 0. Así, el número binario positivo de 10010 se escribe como 010010. El número binario negativo de 10010 se escribe como 110010. Sin embargo, éste no es el mejor camino para representar números negativos para facilitar su manipulación por computadora.

Otra forma más útil de representar los números negativos es usar el método del complemento a dos. Los números binarios tienen dos complementos, conocidos como, el *complemento a uno* y el *complemento a dos*. El complemento a uno de un número binario se obtiene cambiando todos los unos del número sin signo por ceros y los ceros por unos. El complemento a dos se obtiene sumando 1 al complemento a uno. En un número negativo se obtiene el complemento a dos y se le pone signo antecediéndolo con un 1; el signo positivo se indica con un 0. Supongamos la representación del número decimal -3 como un número de complemento a dos con signo. Primero se escribe el número binario del 3 sin signo como 0011, luego se obtiene el complemento a uno, 1100, y se suma 1 para obtener el complemento a dos sin signo quedando 1101, finalmente se pone el signo con 1 para indicar que es negativo. El resultado final es 11101. El siguiente es otro ejemplo, en el cual se obtiene el complemento a dos con signo de un número de 8 bits correspondiente a -6 .

Tabla 14.2 Números con signo

Número decimal	Número con signo	
+127	0111 1111	Sólo el número binario con signo con un 0
etc.		
+6	0000 0110	
+5	0000 0101	
+4	0000 0100	
+3	0000 0011	
+2	0000 0010	
+1	0000 0001	Complemento a dos con signo con un 1
+0	0000 0000	
-1	1111 1111	
-2	1111 1110	
-3	1111 1101	
-4	1111 1100	
-5	1111 1011	
-6	1111 1010	
etc.		
-127	1000 0000	

Número binario sin signo	000 0110
Complemento a uno	111 1001
Sumar 1	1
Complemento a dos sin signo	111 1010
Complemento a dos con signo	1111 1010

Cuando se tiene un número positivo, se escribe de la manera normal precedido de un 0. Por ejemplo, el número binario positivo 100 1001 se escribiría como 0100 1001. La tabla 14.2 muestra algunos ejemplos de números en este sistema.

Para restar un número positivo de un número positivo es necesario obtener el complemento a dos con signo del sustraendo y sumar el resultado al minuendo con signo. Es decir, para restar al número decimal 6 del número decimal 4, se realiza lo siguiente:

Minuendo con signo	0000 0100
Sustraendo, complemento a dos con signo	1111 1010
Suma	1111 1110

El bit más significativo del resultado es 1, por lo que el resultado es negativo. Éste es el complemento a dos con signo de -2 .

Otro ejemplo es, la resta de 57 menos 43. El número positivo con signo de 57 es 0011 1001. El complemento a dos con signo de -43 está dado por:

Número binario sin signo para 43	010 1011
Complemento a uno	101 0100
Se suma 1	1
<hr/>	
Complemento a dos sin signo	101 0101
Complemento a dos con signo	1101 0101

De este modo, al sumar el número positivo con signo y el número del complemento a dos con signo se obtiene:

Minuendo con signo	0011 1001
Sustraendo, complemento a dos con signo	1101 0101
<hr/>	
Suma	0000 1110 y 1 de acarreo

El acarreo de 1 no se toma en cuenta. El resultado es 0000 1110 y, dado que el bit más significativo es 0, el número es positivo. El resultado es el número decimal 14.

Si se desea sumar dos números negativos, entonces se obtiene el complemento a dos con signo de cada número y luego se suman. Cuando el número es negativo se utiliza el complemento a dos con signo; para números positivos, sólo se usa el número con signo.

14.2.2 Números de punto flotante

En el sistema numérico decimal, con frecuencia números grandes como 120 000 se escriben en *notación científica* como 1.2×10^5 o quizás como 120×10^3 y números pequeños como 0.000 120 se escriben como 1.2×10^{-4} en lugar de un número con ubicación fija para el punto decimal. Los números expresados usando esta notación se escriben en términos de potencias de 10. Asimismo, esta notación se puede utilizar con números binarios, pero éstos se escriben en términos de potencias de 2. Por ejemplo, se podría tener 1010 escrito como 1.010×2^3 o quizás 10.10×2^2 . Debido a que el punto binario se puede mover a diferentes posiciones mediante la elección de la potencia a la que se eleva el 2, esta notación se denomina *punto flotante*.

Un número de punto flotante es de la forma:

$$a \times r^e$$

donde a se conoce como *mantisa*, r como *radical* o *base* y e como *exponente* o *potencia*. Con números binarios está entendido que la base es 2, es decir, se tiene $a \times r^e$.

La ventaja de usar números de punto flotante, comparados con la representación de punto fijo, es que se pueden representar una gama mucho más amplia de números para una cantidad dada de dígitos.

Debido a que con números de punto flotante es posible almacenar un número en diferentes formas, por ejemplo 0.1×10^2 y 0.01×10^3 , con los sistemas de cómputo dichos números se *normalizan*, es decir, todos se escriben en la forma $(0.1 \times r^e)$. Por lo tanto con números

binarios se tiene (0.1×2^e) y entonces si se tiene 0.00001001 éste se convierte en 0.1001×2^{-4} . Con la finalidad de tener en cuenta el signo del número binario se debe añadir un bit de signo de 0 para números positivos y de 1 para números negativos. Así, el número 0.1001×2^{-4} se convierte en 1.1001×2^{-4} si es negativo y 0.1001×2^{-4} si es positivo.

Si se quiere sumar 2.01×10^3 y 10.2×10^2 se debe tener en cada número la misma potencia (suele usarse el término *exponente*). De este modo se puede escribir 2.01×10^3 y 1.02×10^3 . Entonces se puede escribir $2.01 \times 10^3 + 1.02 \times 10^3$. Es posible sumarlos dígito a dígito, tomando en cuenta los acarreo si existen, para obtener 3.01×10^3 . Un procedimiento similar se adopta para números binarios de punto flotante. Si se quiere sumar 0.101100×2^4 y 0.111100×2^2 , primero se deben ajustar las potencias, para que sean las mismas, es decir, 0.101100×2^4 y 0.001111×2^4 , y entonces se pueden sumar dígito a dígito, lo que da como resultado 0.111011×2^4 .

Asimismo, la resta de números de punto flotante dígito a dígito ocurre sólo si los dos números tiene el mismo exponente. Así, 0.1101100×2^{-4} menos 0.1010100×2^{-5} , se puede escribir como $0.01101100 \times 2^{-4} - 0.101010 \times 2^{-4}$, y el resultado está dado por 0.1000010×2^{-4} .

Tabla 14.3 Código Gray

Número decimal	Código binario	Código Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

14.2.3 Código Gray

Considere dos números sucesivos expresados en código binario 0001 y 0010 (en el sistema decimal 1 y 3); al pasar de un número al siguiente, cambiaron dos bits en el grupo de código. Entonces si tenemos un codificador absoluto (sección 2.3.7) y se asignan posiciones sucesivas a números binarios sucesivos, es necesario realizar dos cambios. Un problema es que ambos cambios deben realizarse justo en el mismo instante; si uno ocurre una fracción de tiempo antes que el otro, podría haber otro número indicado por un momento. Es decir, al pasar de 0001 a 0010, de momento parecería 0011 o 0000. Así, una alternativa es recurrir a otro tipo de codificación.

Esta opción es el *código Gray*, donde sólo un bit del grupo de código cambia al pasar de un número al siguiente. El código Gray es un código sin peso en el sentido de que a las posiciones de los bits en el grupo del código no se les asigna un peso específico. Por ello no es adecuado para operaciones aritméticas, en cambio se utiliza mucho en dispositivos de entrada-salida como los codificadores absolutos. La tabla 14.3 lista números decimales y sus valores tanto en código binario como en Gray.

14.2.4 Método de paridad para la detección de errores

Cuando se transportan datos digitales de un sitio a otro existe la posibilidad de que se produzcan errores de transmisión; el receptor no recibe la misma señal transmitida como consecuencia de ruidos eléctricos en el proceso de transmisión. Algunas veces el impulso del ruido es de tal magnitud en algún punto que altera el nivel lógico de

la señal. Por ejemplo, al transmitir la secuencia 1001 se recibe 1101. Para detectar este tipo de errores se utiliza un *bit de paridad*. Éste es un bit 0 o 1 que se añade a un grupo de código durante la transmisión. Con el método de *paridad par* se elige el valor del bit de manera que la cantidad total de unos en el grupo de código, incluido el bit de paridad, sea un número par. Por ejemplo, al transmitir 1001 el bit de paridad utilizado sería 0 para obtener 01001 y, con ello, un número par de unos. Al transmitir 1101 el bit de paridad utilizado sería 1, con lo que se obtendría 11101, y una cantidad par de unos. En la *paridad non*, el bit de paridad se elige de manera que la cantidad total de unos, incluido el bit de paridad, sea impar. Entonces, si en el receptor la cantidad de unos en un grupo de código no produce la paridad requerida, el receptor lo interpreta como un error y puede solicitar la retransmisión del código.

Una extensión de la verificación de paridad es la *verificación de la suma*, en la cual la verificación de los bloques de código se realiza enviando una serie de bits que representan la suma binaria de esos bloques. Las verificaciones de paridad y suma sólo detectan un error sencillo en los bloques de código; los errores dobles pasan sin detectarse. Además, el error no se ubica de manera que el receptor pueda hacer la corrección. Se han inventado técnicas para la detección de errores múltiples, así como métodos para indicar errores (vea la sección 21.3); en libros como *Audio, Video and Data Telecommunications* de D. Peterson (McGraw-Hill, 1992) se explica lo anterior con mayor detalle.

14.3 Compuertas lógicas

Las *compuertas lógicas* son los bloques de construcción básicos de los circuitos electrónicos digitales.

14.3.1 Compuerta AND

Suponga que una compuerta produce una salida de valor alto sólo cuando la entrada A y la entrada B tienen un valor alto; y en cualquier otra condición, el valor es bajo. Ésta es una compuerta AND, la cual se puede considerar como un circuito eléctrico en el que hay dos interruptores en serie (figura 14.1). Sólo cuando ambos interruptores, A y B están cerrados pasa la corriente.

Un ejemplo de compuerta AND es un sistema de control del bloqueo de una máquina herramienta tal que si el interruptor de seguridad está en su sitio y produce una señal 1 y la máquina está encendida, entonces puede haber una señal de salida 1, y la máquina funciona. Otro ejemplo es una alarma contra robo, que produce una salida sonora cuando está encendida y cuando la puerta se abre y activa un sensor.

Las relaciones entre las salidas y las entradas de las compuertas lógicas se pueden tabular, en la forma que se conoce como *tablas de verdad*. Éstas indican las relaciones entre las entradas y las salidas. En una compuerta AND con entradas A y B y cuya única salida es Q , la salida será 1 si y sólo si $A = 1$ y $B = 1$. En todas las demás combinaciones de A y B la salida es 0. Entonces, la tabla de verdad es:



Figura 14.1 Representación de una compuerta AND

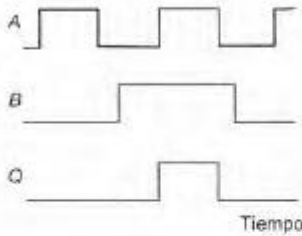


Figura 14.2 Compuerta AND

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Q</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Considere qué sucede cuando hay dos entradas digitales que son función del tiempo, como en la figura 14.2. La compuerta AND produce una salida sólo cuando ambas entradas tienen valor alto, y la salida es como la que se muestra en la figura.

La relación entre las entradas y las salidas de una compuerta AND se puede expresar con la ecuación conocida como *ecuación booleana*. La ecuación booleana de la compuerta AND es:

$$A \cdot B = Q$$

Se utilizan diversos tipos de símbolos estándar para los circuitos de las compuertas lógicas; el más común se diseñó en Estados Unidos; ahora se dispone de una presentación estándar internacional (IEEE/ANSI) que elimina la forma característica y en su lugar utiliza un rectángulo dentro del cual se escribe la función lógica. La figura 14.3a muestra el símbolo que se utiliza en Estados Unidos para representar una compuerta AND y en b) la nueva forma estandarizada; el símbolo & indica que es una compuerta AND. En este libro se utilizarán ambas representaciones.

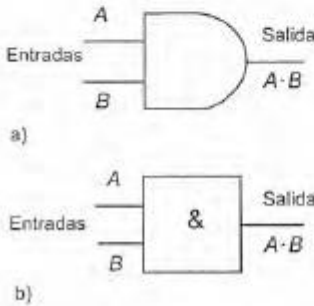


Figura 14.3 Símbolos estándar de compuertas AND

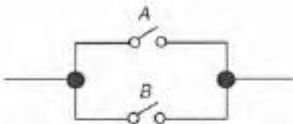


Figura 14.4 Representación de una compuerta OR

14.3.2 Compuerta OR

La compuerta OR produce una salida de 1 cuando las entradas *A* o *B* son 1. Se puede visualizar esta compuerta como un circuito eléctrico en el que hay dos interruptores en paralelo (figura 14.4). Cuando alguno de los interruptores *A* o *B* está cerrado, entonces circula la corriente. En las compuertas OR puede haber más de dos entradas. La tabla de verdad de esta compuerta es:

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Q</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La ecuación booleana de la compuerta OR se puede expresar como:

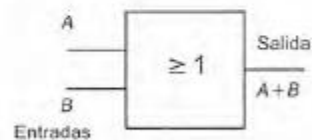
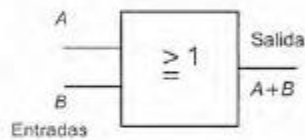
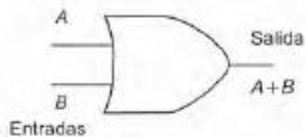


Figura 14.5 Símbolos de una compuerta OR

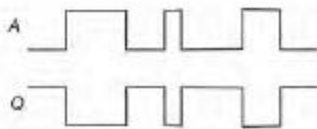


Figura 14.6 Compuerta NOT

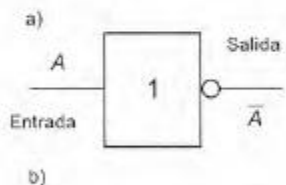


Figura 14.7 Símbolos de una compuerta NOT

$$A + B = Q$$

Los símbolos de una compuerta OR se muestran en la figura 14.5; se usa un signo mayor o igual que 1 para representar esta compuerta dado que la función OR es verdadera si por lo menos una de las entradas es verdadera.

14.3.3 Compuerta NOT

La compuerta NOT sólo tiene una entrada y una salida: la salida es 1 cuando la entrada es 0 y es 0 cuando la entrada es 1. La compuerta NOT produce una salida igual al inverso de la entrada y se conoce como *compuerta inversora*. Si la entrada digital varía con el tiempo, como en la figura 14.6, la variación de la salida con el tiempo es el inverso de la entrada.

La siguiente es la tabla de verdad de la compuerta NOT:

Entrada	Salida
A	Q
0	1
1	0

La ecuación booleana que describe una compuerta NOT es:

$$\bar{A} = Q$$

La barra sobre la letra indica que se utiliza la inversa o complemento; por lo tanto, la barra sobre la A indica que la salida Q es igual al inverso del valor A . La figura 14.7 muestra los símbolos de una compuerta NOT. Cuando 1 representa a NOT, en realidad simboliza la identidad, es decir, no hay operación y la inversión está representada por el círculo en la salida.

14.3.4 Compuerta NAND

La compuerta NAND se puede considerar como una combinación de una compuerta AND seguida de una compuerta NOT (figura 14.8a). Así, cuando la entrada A es 1 y la B es 1, la salida es 0; las demás entradas dan una salida 1.

La compuerta NAND corresponde en forma exacta a la tabla de verdad de la compuerta AND con las salidas invertidas. Otra manera de considerar esta compuerta es como una compuerta AND en cuyas entradas se conecta una compuerta NOT para invertir las entradas antes de que lleguen a la compuerta AND. La figura 14.8b muestra los símbolos usados para la compuerta NAND los cuales corresponden al símbolo de la compuerta AND seguido del círculo que indica la inversión. La siguiente es la tabla de verdad:

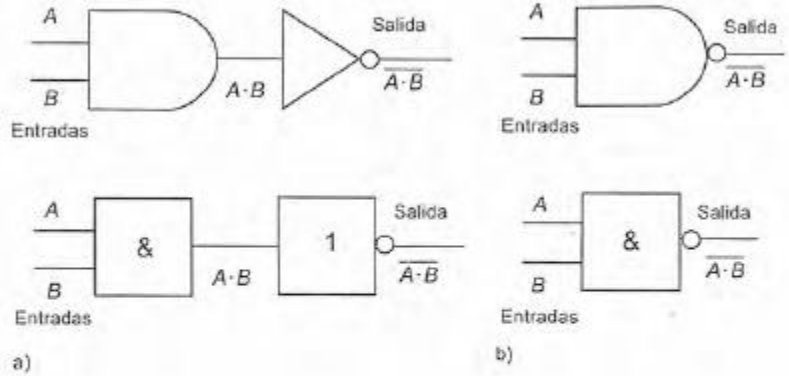


Figura 14.8 Compuerta NAND

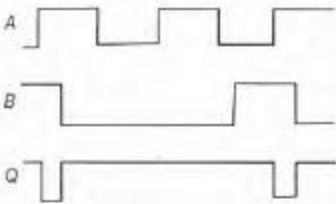


Figura 14.9 Compuerta NAND

Entradas		Salida
A	B	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La ecuación booleana que describe la compuerta NAND es:

$$\overline{A \cdot B} = Q$$

La figura 14.9 ilustra la salida que se obtiene en una compuerta NAND cuando sus dos entradas son señales digitales que varían con el tiempo. Sólo se produce una salida baja cuando ambas entradas son altas.

14.3.5 Compuerta NOR

La compuerta NOR se puede considerar como una combinación de una compuerta OR seguida de una compuerta NOT (figura 14.7a). Cuando la entrada A o la entrada B es 1, se produce una salida de 0. Se trata de la misma compuerta OR, pero con las salidas invertidas. Otra manera de interpretar esta compuerta es como una compuerta OR en cuyas entradas se conectan compuertas NOT para invertir la entrada antes de que llegue a la compuerta OR. La figura 14.10b muestra los símbolos de una compuerta NOR; se trata del símbolo de la compuerta OR seguido del círculo que indica inversión. La ecuación booleana de la compuerta NOR es:

$$\overline{A + B} = Q$$

La siguiente es la tabla de verdad de la compuerta NOR:

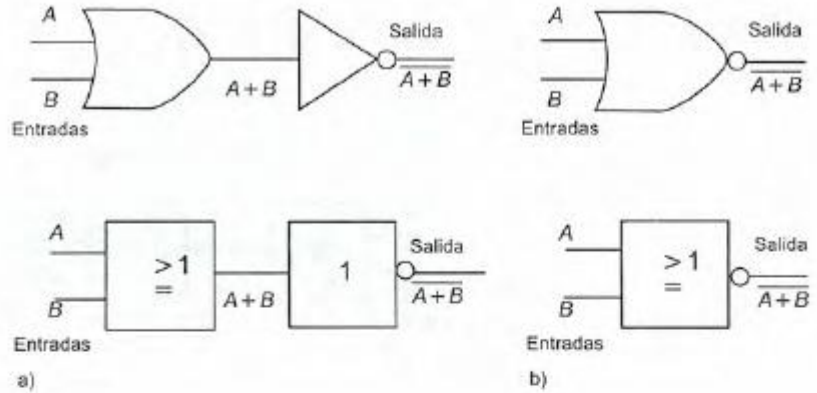


Figura 14.10 Compuerta NOR

Entradas		Salida
A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

14.3.6 Compuerta XOR

La compuerta or-exclusiva XOR se puede considerar como una compuerta OR con una compuerta NOT aplicada a una de las entradas para invertirla antes de que llegue a la compuerta OR (figura 14.11a). También se puede considerar como una compuerta AND con una de sus entradas conectada a una compuerta NOT para invertirla antes de que llegue a la compuerta AND. Los símbolos se muestran en la figura 14.11b; el =1 indica que la salida es verdadera si sólo una entrada es verdadera. La siguiente es la tabla de verdad:

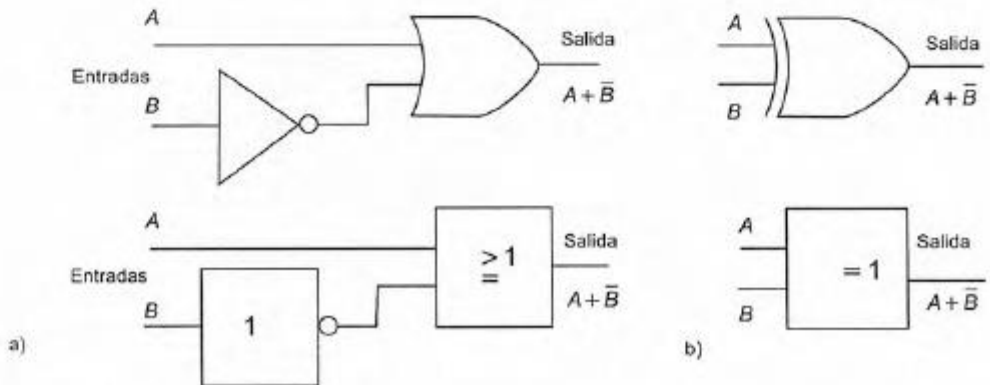


Figura 14.11 Compuerta XOR

Entradas		Salida
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

14.3.7 Combinación de compuertas

En apariencia, para construir sistemas lógicos se requiere una variedad de compuertas. Sin embargo, como se muestra a continuación, es posible construir todo tipo de compuertas a partir de una sola. Considere, la combinación de las tres compuertas que muestra la figura 14.12. La tabla de verdad con sus salidas intermedias y finales, es la siguiente:

A	B	C	D	Q
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

El resultado es el mismo que el de una compuerta AND. Si a continuación de este conjunto de compuertas se coloca una compuerta NOT, se obtiene una tabla de verdad igual a la de una compuerta NAND.

La figura 14.13 muestra una combinación de tres compuertas NAND. Su tabla de verdad, con las salidas intermedias y finales, es la siguiente:

A	B	C	D	Q
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

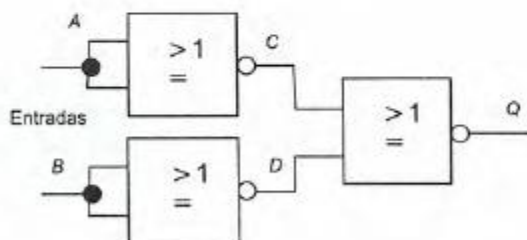
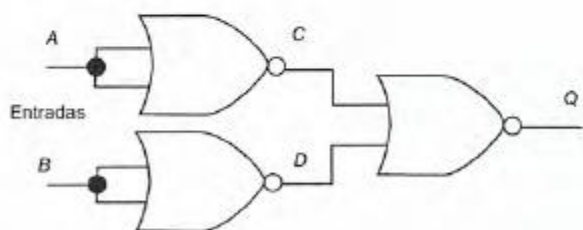


Figura 14.12 Tres compuertas NOR

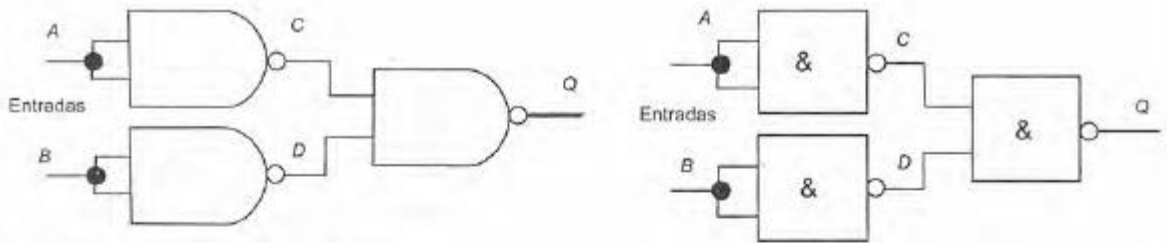


Figura 14.13 Tres compuertas NAND

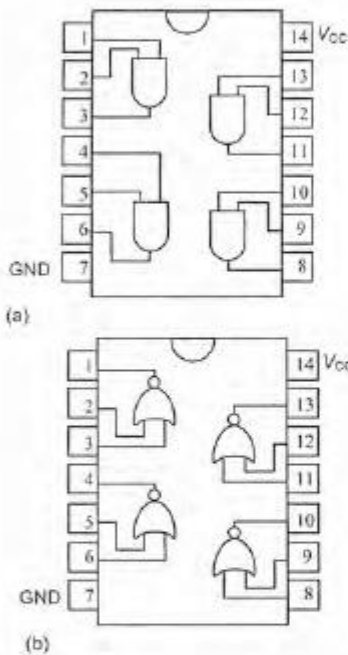


Figura 14.14 Circuitos integrados: (a) 7408; (b) 7402

El resultado obtenido es el de una compuerta OR. Si se siguiera este conjunto por una compuerta NOT, se obtendría una tabla de verdad igual a la de una compuerta NOR.

Los dos ejemplos anteriores de combinaciones de compuertas muestran cómo usar un tipo de compuerta, NOR o NAND, para reemplazar otras compuertas, siempre y cuando se utilice más de una. También es posible combinar compuertas para obtener circuitos complejos de compuertas así como circuitos secuenciales.

Existen compuertas lógicas en forma de circuitos integrados. Los fabricantes han estandarizado la numeración de sus configuraciones para que los números de sus partes básicas sean iguales sin importar el fabricante. Por ejemplo, la figura 14.14a muestra las compuertas con las que cuenta el circuito integrado 7408; tiene cuatro compuertas AND de dos entradas y viene en una base de 14 terminales. La alimentación se conecta en las terminales 7 y 14, las cuales alimentan el voltaje de las cuatro compuertas AND. Para indicar en cuál de los extremos de la base se encuentra la terminal 1, se hace una muesca entre las terminales 1 y 14. El circuito integrado 7411 tiene tres compuertas AND y cada una tiene tres entradas; el circuito integrado 7421 tiene dos compuertas AND cada una con cuatro entradas. En la figura 14.14b se muestra el circuito integrado 7402. Éste tiene cuatro compuertas NOR de dos entradas cada una, en una base de 14 terminales; la alimentación se conecta en las terminales 7 y 14. El circuito integrado 7427 tiene tres compuertas, cada una con tres entradas; el circuito integrado 7425 tiene dos compuertas, cada una con cuatro entradas.

Los circuitos integrados anteriores, designados por números 74xx, son circuitos de lógica de transistor transistor (TTL, *transistor-transistor logic*), y se basan en el uso de transistores; básicamente funcionan entre los niveles de 0 y 5 V. La familia del semiconductor de óxido metálico complementario (CMOS) estándar tiene una numeración 40xx y la familia CMOS de alta velocidad, la numeración 74HCxx. En la tabla 14.4 se muestran las características generales de estas familias; en la figura 14.15 se muestran los voltajes de entrada y salida correspondientes.

14.4 Álgebra booleana

En el álgebra booleana intervienen los dígitos 1 y 0 así como las operaciones \cdot , $+$ e inversas. Las leyes que rigen este tipo de álgebra son:

Tabla 14.4 Características generales de las familias TTL y CMOS

		TTL	CMOS
Alimentación		4.75 – 5.25 V	5 – 15 V
Corriente de alimentación máxima		-100 mA	-0.02 mA
Estado 0	Voltaje	0.8 V	1.5 V
	Corriente	-0.4 mA	-0.0001 mA
Estado 1	Voltaje	2.0 V	3.5 V
	Corriente	0.02 mA	0.0001 mA
Frecuencia máxima de operación		33 MHz	10 MHz
Consumo máximo de potencia		8 mW	0.1 mW

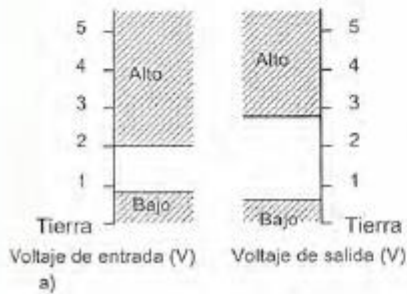


Figura 14.15 Definición de valor alto y valor bajo: a) TTL, b) CMOS

1. Todo aquello a lo que se aplique el operador OR consigo mismo es igual a sí mismo: $A + A = A$
2. Todo aquello a lo que se aplique el operador AND consigo mismo es igual a sí mismo: $A \cdot A = A$
3. El orden de las entradas de las compuertas OR y AND es indistinto. Por ejemplo:

$$A + B = B + A \quad \text{y} \quad A \cdot B = B \cdot A$$

4. Como se indica en la siguiente tabla de verdad:

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

A	B	C	$B \cdot C$	$A + B \cdot C$	$A + B$	$A + C$	$(A + B) \cdot (A + C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. Asimismo, se puede emplear una tabla de verdad para mostrar que es posible manipular los términos entre paréntesis de la misma manera que en el álgebra ordinaria, es decir:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

6. Todo aquello a lo que se aplique el operador OR con su propio inverso es igual a 1:

$$A + \bar{A} = 1$$

7. Todo aquello a lo que se aplique el operador AND con su inverso es igual a 0:

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

8. Todo aquello a lo que se aplique el operador OR con el valor 0 es igual a sí mismo; todo aquello a lo que se aplique el operador OR con el valor 1 es igual a 1. Entonces $A + 0 = A$ y $A + 1 = 1$.

9. Todo aquello que se aplique a la compuerta AND con el valor 0 es igual a 0; todo aquello que se aplique a la compuerta AND con el valor 1 es igual a sí mismo. Entonces $A \cdot 0 = 0$ y $A \cdot 1 = A$.

Para ilustrar cómo emplear lo anterior en la simplificación de expresiones booleanas, considere los siguientes casos:

$$(A + B) \cdot \bar{C} + A \cdot C$$

Aplicando la regla 5 en el primer término se obtiene:

$$A \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} + A \cdot C$$

Reagrupando lo anterior y aplicando la regla 6 se obtiene:

$$A \cdot (\bar{C} + C) + B \cdot \bar{C} = A \cdot 1 + B \cdot \bar{C}$$

Usando la regla 9, la expresión simplificada es:

$$A + B \cdot \bar{C}$$

14.4.1 Leyes de De Morgan

Como se mostró, las leyes del álgebra booleana se pueden usar para simplificar expresiones booleanas. Además de estas leyes existe lo que se conoce como leyes de *De Morgan*:

1. La inversa de la aplicación del operador OR en A y B , equivale a aplicar el operador AND a las inversas de A y B por separado. La siguiente tabla de verdad muestra la validez de esta aseveración:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2. La inversa del resultado de la aplicación del operador AND a A y B es igual a la aplicación del operador OR a las inversas de A y B por separado. La siguiente tabla de verdad muestra la validez de la afirmación:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Como ejemplo de la aplicación de una ley de De Morgan, considere la simplificación del circuito lógico que muestra la figura 14.16.

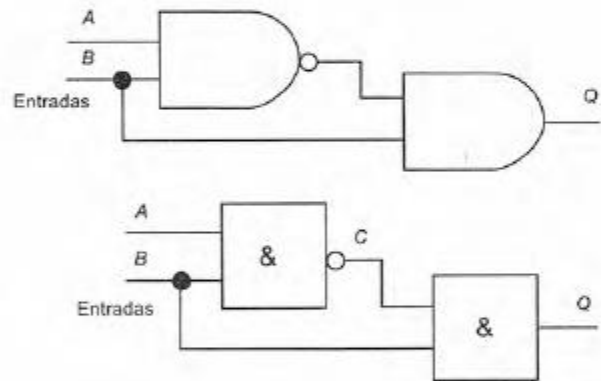


Figura 14.16 Simplificación de circuito

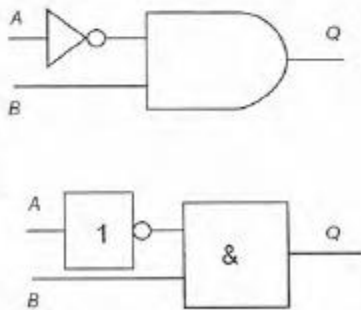


Figura 14.17 Simplificación de circuito

La ecuación booleana de la salida en función de la entrada es:

$$Q = \overline{A} \cdot B \cdot B$$

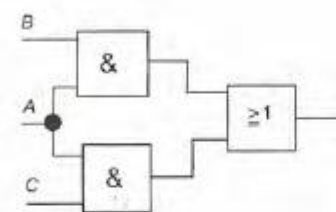
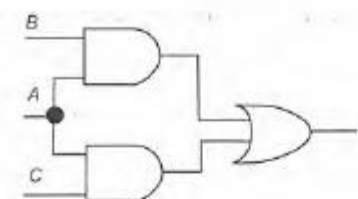
Aplicando la segunda ley se obtiene:

$$Q = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot B$$

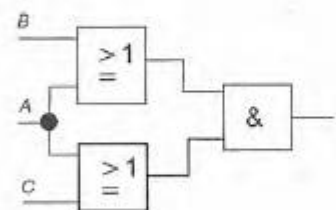
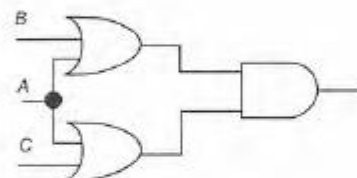
Lo cual se puede expresar como:

$$Q = \overline{A} \cdot B + \overline{B} \cdot B = \overline{A} \cdot B + 0 = \overline{A} \cdot B$$

Por lo tanto, el circuito simplificado es como el que muestra la figura 14.17.



a)



b)

14.4.2 Obtención de una función booleana a partir de tablas de verdad

Supongamos que los requisitos de un sistema se especifican mediante una tabla de verdad. ¿Cómo se diseñaría el sistema de compuertas lógicas de dicha tabla con el mínimo número de compuertas?

El álgebra booleana puede usarse para transformar las funciones de conmutación en formas equivalentes, algunas de las cuales requieren más compuertas lógicas que otras; sin embargo, la mayoría de ellas se reducen a compuertas AND que accionan una compuerta OR, o viceversa. Dos compuertas AND que accionan una compuerta OR (figura 14. 18a) dan por resultado:

$$A \cdot B + A \cdot C$$

Lo anterior se conoce como configuración *suma de productos*. Para dos compuertas OR que accionan a una compuerta AND (figura 14. 18b) se tiene:

$$(A + B) \cdot (A + C)$$

Esto se llama configuración *producto de sumas*.

Al tratar de determinar cuál es la forma mínima que corresponde a una tabla de verdad dada, el procedimiento usual es determinar la suma de productos o el producto de sumas que se ajusta a los datos. En general se utiliza la suma de productos. El procedimiento empleado consiste en examinar cada renglón de la tabla de verdad y encontrar el producto que se ajusta a dicho renglón. El resultado final es la suma de todos estos productos.

Supongamos que uno de los renglones de la tabla de verdad es:

$$A = 1, B = 0 \text{ y la salida } Q = 1$$

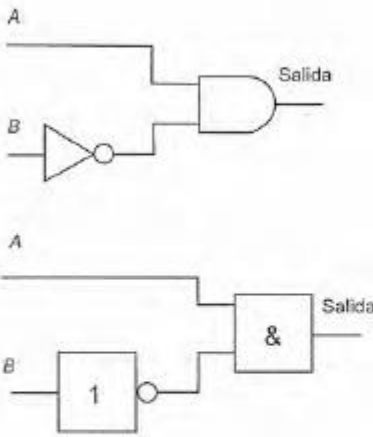
Cuando A es 1 y B no es 1, la salida es 1; por lo tanto, el producto es:

$$Q = A \cdot \bar{B}$$

Esta operación se repite para cada renglón de la tabla de verdad, como se indica en la siguiente tabla.

A	B	Salida	Productos
0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	1	0	$\bar{A} \cdot B$
1	0	1	$A \cdot \bar{B}$
1	1	0	$A \cdot B$

Figura 14.18 a) Suma de productos; b) producto de sumas

Figura 14.19 $A \cdot \bar{B}$

Sin embargo, sólo es necesario considerar el renglón de la tabla de verdad cuya salida es 1, puesto que los renglones con salida 0 no contribuyen a la expresión final; el resultado es entonces:

$$Q = A \cdot \bar{B}$$

El sistema de compuertas lógicas que permite obtener esta tabla de verdad es el que muestra la figura 14.19.

Otro ejemplo es la siguiente tabla de verdad, donde sólo se incluyen los productos que dan una salida de 1:

A	B	C	Salida	Productos
0	0	0	1	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

La suma de los productos correspondiente a esta tabla es:

$$Q = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

Si ésta se simplifica, se obtiene:

$$Q = \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{B} + B) = \bar{A} \cdot \bar{C}$$

Es decir, la tabla de verdad se obtiene mediante una sola compuerta NAND.

14.5 Mapas de Karnaugh

El *mapa de Karnaugh* es un método gráfico que se emplea para obtener expresiones booleanas simplificadas a partir de sumas de productos obtenidas de tablas de verdad. La tabla de verdad tiene un renglón para el valor de la salida de cada combinación de los valores de entrada. A dos variables de entrada corresponden cuatro líneas en la tabla de verdad; a tres variables de entrada, seis líneas y a cuatro variables de entrada, 16 líneas. Entonces con dos variables de entrada hay cuatro productos, con tres variables de entradas hay seis y con cuatro variables de entrada, 16. El mapa de Karnaugh consiste en un arreglo rectangular de cuadros, cada uno de los cuales corresponde a un determinado producto. Para dos variables de entrada hay cuatro cuadros, para tres variables de entrada hay seis cuadros y para cuatro variables de entrada hay 16 cuadros. Los valores de salida de los

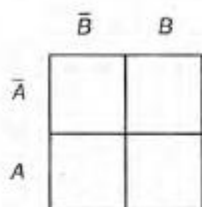


Figura 14.20 Mapa de variables con dos entradas

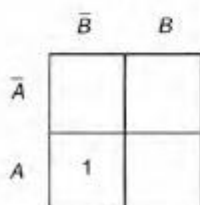


Figura 14.21 Mapa de variables con dos entradas.

renglones se ponen en sus cuadros del mapa de Karnaugh; por lo general sólo se indican los valores con salida igual a 1, los cuadros con salida 0 se dejan vacíos.

La figura 14.20 muestra el mapa correspondiente a dos variables de entrada. A las celdas se les asignan los valores de salida de los siguientes productos:

cuadro superior izquierdo $\bar{A} \cdot \bar{B}$

cuadro inferior izquierdo $A \cdot \bar{B}$

cuadro superior derecho $\bar{A} \cdot B$

cuadro inferior derecho $A \cdot B$

La disposición de los cuadros del mapa es tal que los cuadros adyacentes en sentido horizontal sólo difieren por una variable; asimismo, los cuadros adyacentes en sentido vertical difieren sólo por una variable. En el mapa que nos ocupa, en sentido horizontal las variables difieren sólo por A y en sentido vertical sólo por B .

Si en la siguiente tabla de verdad, los valores de los productos se colocan en el mapa de Karnaugh indicando sólo los que tienen valor 1 y dejando en blanco los de valor 0, se obtiene el mapa que muestra la figura 14.21.

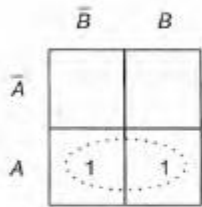
A	B	Salida	Productos
0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	1	0	$\bar{A} \cdot B$
1	0	1	$A \cdot \bar{B}$
1	1	0	$A \cdot B$

Dado que la única entrada 1 está en el cuadro inferior izquierdo, la tabla de verdad se representa mediante la expresión booleana:

$$\text{salida} = A \cdot \bar{B}$$

Un ejemplo más es la siguiente tabla de verdad:

A	B	Salida	Productos
0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	1	0	$\bar{A} \cdot B$
1	0	1	$A \cdot \bar{B}$
1	1	1	$A \cdot B$



Ésta produce el mapa de Karnaugh que ilustra la figura 14.22. Su salida es:

$$\text{salida} = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

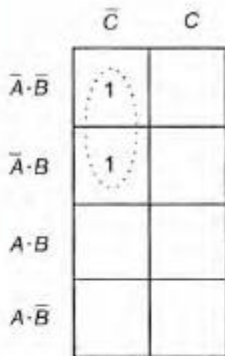
La cual se reduce a:

$$A \cdot \bar{B} + A \cdot B = A \cdot (\bar{B} + B) = A$$

Cuando dos cuadros que contienen un 1 comparten la misma arista vertical, la expresión booleana se simplifica a sólo la variable común. Para ello, basta observar el mapa, indicar en él qué cuadros se pueden simplificar señalándolos con un óvalo, como en la figura 14.22.

La figura 14.23 ilustra el mapa de Karnaugh de la siguiente tabla de verdad, en la cual hay tres variables de entrada. Como antes, se usan óvalos para simplificar la expresión booleana resultante a la variable común. El resultado es:

$$\text{salida} = \bar{A} \cdot \bar{C}$$



A	B	C	Salida	Productos
0	0	0	1	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
0	0	1	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$
0	1	0	1	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
0	1	1	0	$\bar{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	0	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
1	0	1	0	$A \cdot \bar{B} \cdot C$
1	1	0	0	$A \cdot B \cdot \bar{C}$
1	1	1	0	$A \cdot B \cdot C$

La figura 14.24 muestra el mapa de Karnaugh de la siguiente tabla de verdad, la cual tiene cuatro variables de entrada. Uniendo con óvalos se simplifica la expresión booleana y se obtiene:

$$\text{salida} = \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C$$

Los anteriores son sólo unos ejemplos sencillos de los mapas de Karnaugh y de cómo se usan los óvalos. Observe que al trazar los óvalos, se pueden considerar cuadros adyacentes aquellos que están en los renglones arriba y abajo de las columnas extrema izquierda y extrema derecha. Piense en los bordes opuestos del mapa que se unen entre sí. Al unir con óvalos un par de unos adyacentes en un mapa se elimina la variable que aparece en su forma complementada y no complementada. Al enlazar con un óvalo cuatro unos adyacentes se eliminan las dos variables que aparecen tanto en forma complementada como no complementada. Al unir un octeto de unos ad-

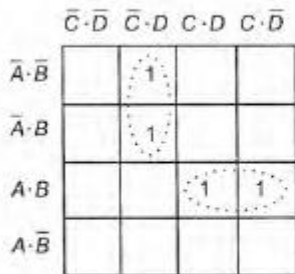


Figura 14.24 Mapa de cuatro variables

yacentes se eliminan las tres variables que aparecen en forma complementada como no complementada.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	Salida	Productos
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}$
1	1	1	1	1	$A \cdot B \cdot C \cdot D$

	\bar{C}	<i>C</i>
$\bar{A} \cdot \bar{B}$		
$\bar{A} \cdot B$		1
<i>A</i> · <i>B</i>	1	1
<i>A</i> · \bar{B}		1

Figura 14.25 Mapa para la máquina

Otro ejemplo es una máquina automatizada que arranca sólo cuando dos de tres sensores *A*, *B* y *C* producen una señal. La siguiente tabla de verdad corresponde a estos requerimientos. La figura 14.25 muestra el mapa de Karnaugh de tres variables.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Salida	Productos
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A \cdot \bar{B} \cdot C$
1	1	0	1	$A \cdot B \cdot \bar{C}$
1	1	1	1	$A \cdot B \cdot C$

La expresión booleana se ajusta a este mapa y, por lo tanto, describe la respuesta de la máquina es:

$$\text{Resultado} = A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$$

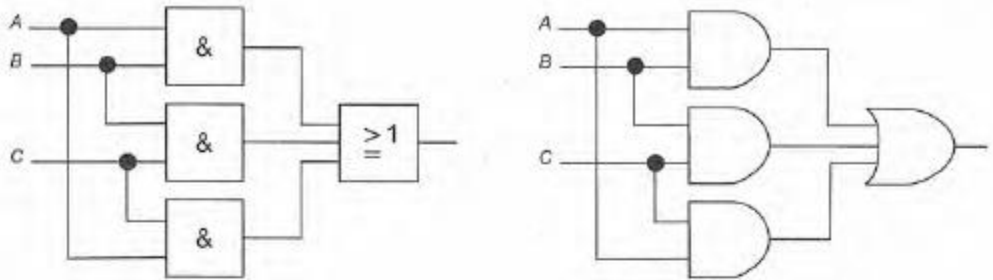


Figura 14.26 Máquina automatizada

La figura 14.26 muestra las compuertas lógicas que se pueden usar para generar esta expresión booleana. $A \cdot B$ representa una compuerta AND para las entradas A y B . Asimismo, $B \cdot C$ y $A \cdot C$ son dos compuertas AND adicionales. Los signos $+$ indican que las salidas de las tres compuertas AND son las entradas de una compuerta OR.

En algunos sistemas lógicos existen algunas combinaciones de variables de entrada cuyas salidas no se especifican y que se conocen como “estados que no importan”. Cuando se ponen en un mapa de Karnaugh los cuadros pueden tener un 1 o un 0, de manera que permitan simplificar las ecuaciones de salida.

14.6 Aplicaciones de las compuertas lógicas

Los siguientes son algunos ejemplos de aplicaciones sencillas de las compuertas lógicas.

14.6.1 Generadores de paridad

En la sección 14.2.4 se mostró cómo se usan los bits de paridad para detectar errores. Se añade un solo bit a cada bloque de código para forzar la cantidad de unos en el bloque, incluyendo el bit de paridad y obtener un número impar, en caso de utilizar la paridad impar o un número par, si se usa la paridad par.

La figura 14.27 muestra un circuito con compuertas lógicas que se usa para determinar y agregar el bit de paridad apropiado. El sistema utiliza compuertas XOR; en este caso, si todas las entradas son 0, o todos son unos, la salida es 0; si las entradas no son iguales, la salida es un 1. Se verifican los pares de bits y se produce una salida 1 si no son iguales. Si se requiere paridad impar, el bit prejuzgado es 0; si se usa paridad par es 1. El bit prejuzgado que sea adecuado se incorpora a la señal para su transmisión. Este mismo circuito se utiliza para verificar la paridad en el receptor, siendo la salida final igual a 1 cuando hay un error. Estos circuitos están disponibles como circuitos integrados.

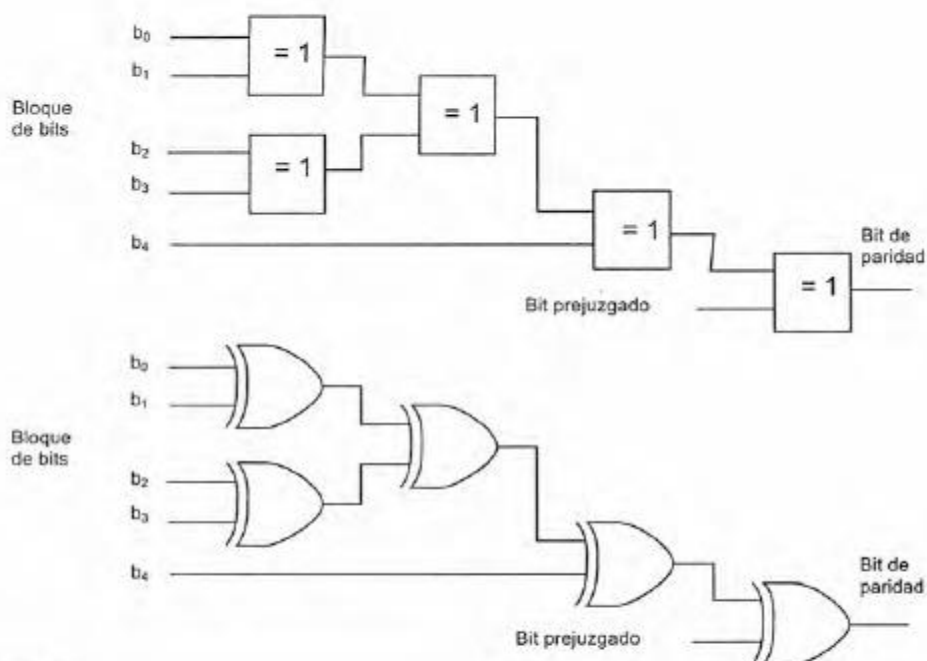


Figura 14.27 Generador de bits de paridad

14.6.2 Comparador digital

Un comparador digital se usa para comparar dos palabras digitales con objeto de saber si son exactamente iguales. Ambas se comparan bit por bit y si son iguales el resultado es 1. Para comparar la igualdad de dos bits se puede usar una compuerta XOR; si ambos bits son 0 o 1, la salida es 0; si no son iguales, la salida es 1. Para obtener una salida 1 cuando ambos bits son iguales hay que añadir una compuerta NOT; esta combinación de XOR y NOT se conoce como compuerta XNOR. Para comparar cada par de bits en dos palabras se necesita una compuerta XNOR para cada par. Si los pares consisten en los mismos bits, la salida de cada compuerta XNOR es un 1. Podemos utilizar una compuerta AND para obtener una salida 1 cuando todas las salidas de las compuertas XNOR son unos. La figura 14.28 muestra el sistema correspondiente.

Los comparadores digitales están disponibles como circuitos integrados y en general no sólo son capaces de determinar si dos palabras son iguales, sino también cuál de ellas es la mayor. Por ejemplo, el comparador de 4 bits 7485 compara dos palabras de 4 bits, A y B , su terminal 5 produce una salida 1 si A es mayor que B , una salida 1 de la terminal 6 si A es igual a B y una salida 1 de la terminal 7 si A es menor que B .

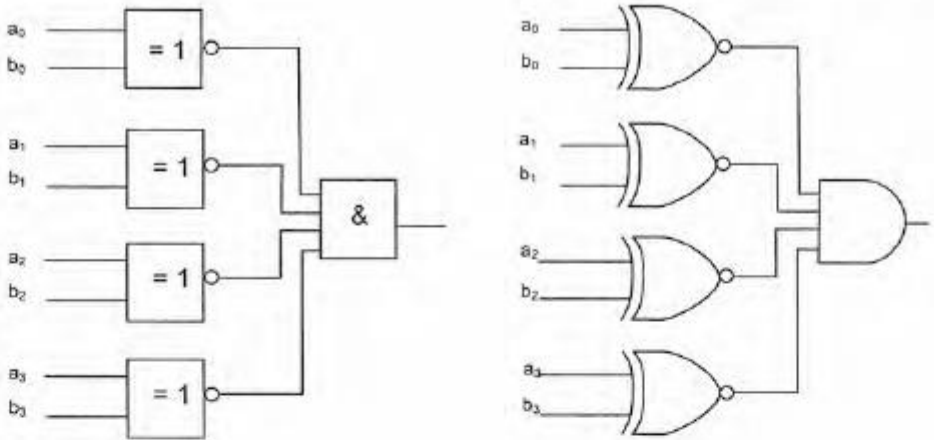


Figura 14.28 Comparador

14.6.3 Convertidor de código

En muchas aplicaciones es necesario cambiar datos de un tipo de código a otro. Por ejemplo, la salida de un microprocesador puede ser BCD y es necesario transformarla en un código que permita su presentación en un display de siete segmentos. El término *decodificación de datos* se refiere al proceso de conversión de un grupo de código, por ejemplo BCD, binario, hexadecimal, en una salida activa individual que represente ese grupo. Un decodificador tiene n líneas de entrada binarias para codificar una palabra de n bits y cuenta con m líneas de salida de manera que sólo una línea se activa para una posible combinación de entradas, es decir, sólo una línea de salida produce una salida correspondiente a un código de entrada de una palabra en particular. Por ejemplo, un decodificador BCD a decimal tiene un código de entrada de 4 bits y 10 líneas de salida, de manera que una entrada en particular en BCD causa la activación exclusiva de una de las líneas de salida, de esta manera se indica un número decimal en particular por cada línea de salida correspondiente a un número decimal (figura 14.29).

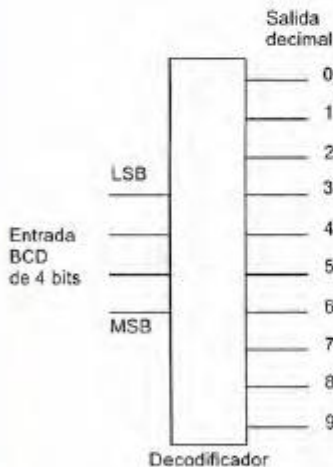
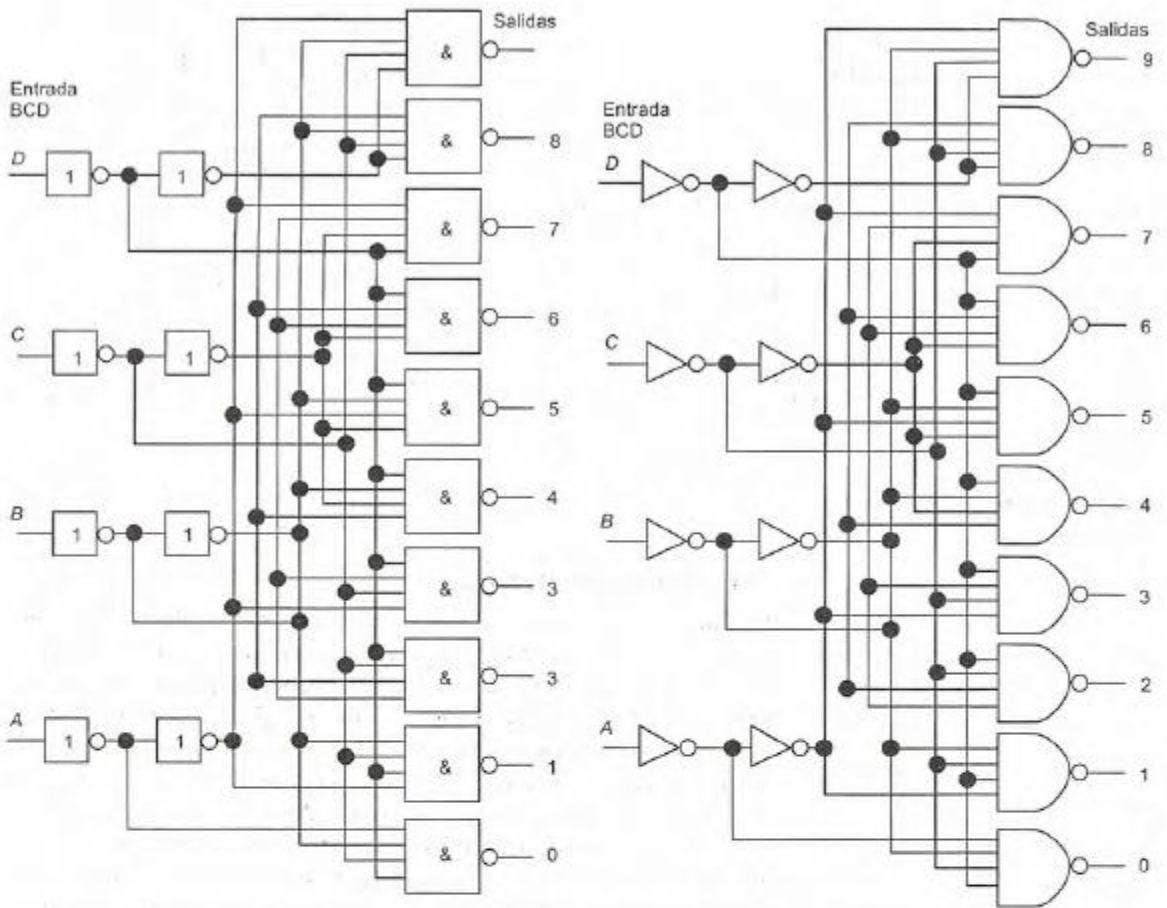


Figura 14.29 Decodificador

Entonces en general, un decodificador es un dispositivo que ve sus entradas y determina qué número está ahí, y activa la salida que corresponde a ese número. Los decodificadores se usan ampliamente en circuitos con microprocesadores.

Los decodificadores pueden tener una salida activa alta, y las inactivas bajas; o bien, la salida activa baja y las inactivas altas. En las salidas activas altas, el decodificador se construye utilizando compuertas AND, mientras que para salidas activas bajas se usan compuertas NAND. La figura 14.30 muestra la configuración de un decodificador BCD a decimal para una salida activa baja y se presenta la tabla de verdad resultante. Este tipo de decodificador está disponible como circuito integrado; por ejemplo, el 74LS145.

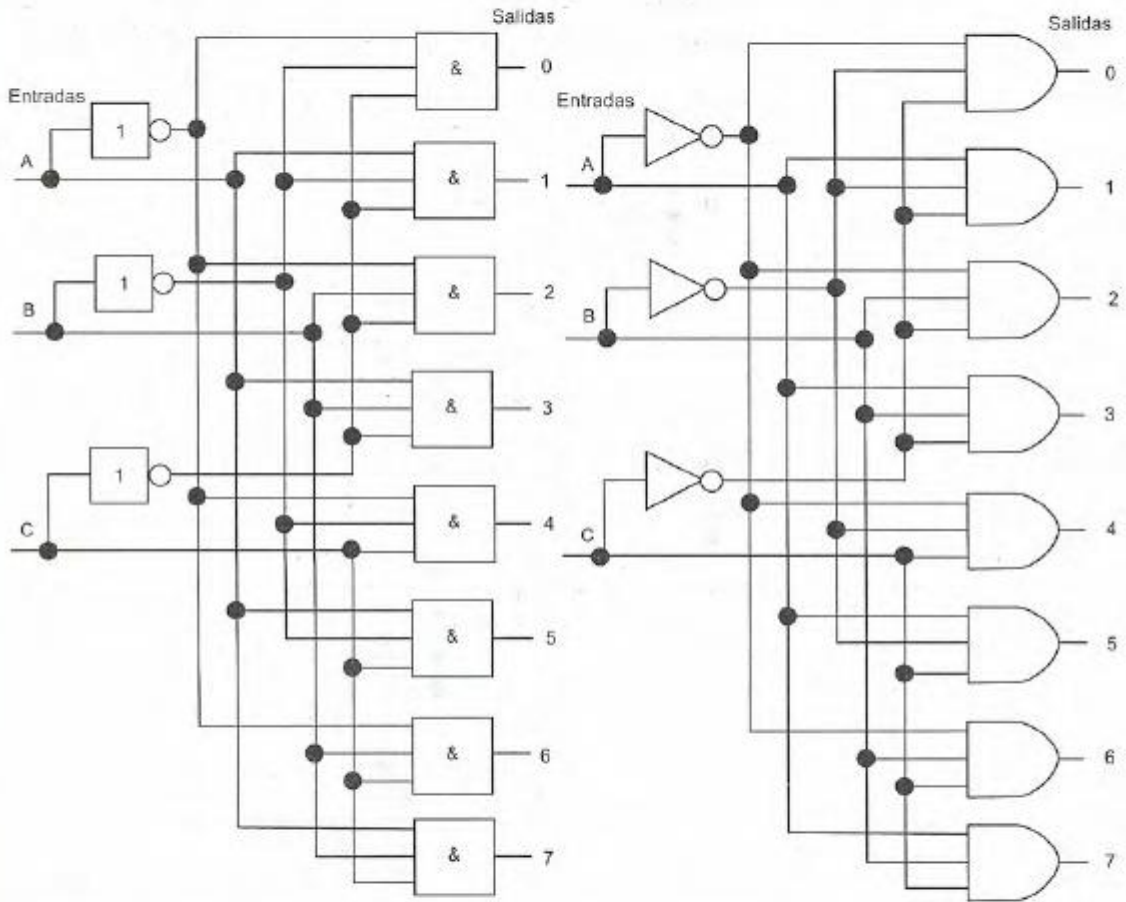
Uno de los decodificadores que más se utiliza es el BCD a siete, por ejemplo, el 74LS244, para tomar una entrada BCD de 4 bits y producir una salida que alimenta un display de siete segmentos.



Entradas				Salidas									
A	B	C	D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 14.30 Decodificador BCD a decimal: 1 = HIGH, 0 = LOW

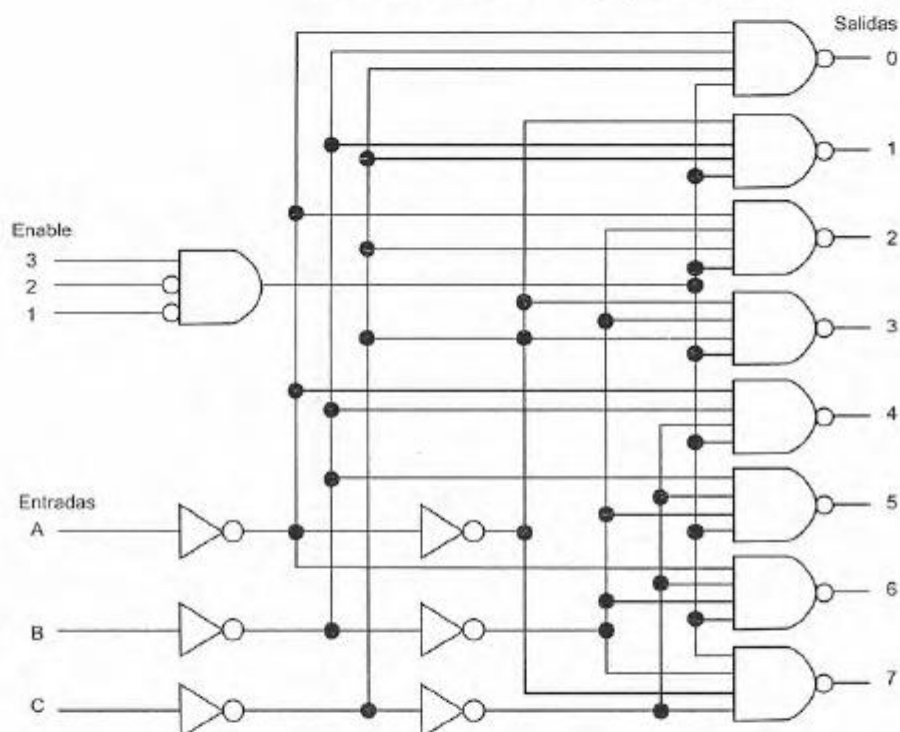
El término *decodificador de 3 líneas a 8 líneas* se utiliza cuando un decodificador tiene tres líneas de entrada y ocho de salida. Éste toma el número binario de 3 bits y activa una de las ocho salidas que corresponden a ese número. En la figura 14.31 se muestra cómo se puede implementar dicho decodificador, a partir de compuertas lógicas y su tabla de verdad.



Entradas			Salidas							
C	B	A	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Figura 14.31 Decodificador de 3 líneas a 8 líneas

Algunos decodificadores tienen una o más entradas de habilitación (ENABLE) que se utilizan para controlar la operación del decodificador. Así, con la línea de ENABLE en ALTO el decodificador funcionará en su forma normal y las entradas determinarán cuál de las salidas es ALTA; con la línea de ENABLE en BAJO, todas las salidas se mantendrán en BAJO sin importar las entradas. La figura 14.32 muestra un decodificador de 3 a 8 líneas de uso común con esta característica, el 74LS138. Observe que las salidas están activas en BAJO a diferencia del decodificador de la figura 14.31 con salidas activas en ALTO, y que tiene tres líneas de ENABLE, con el



Enable			Entradas			Salidas							
E1	E2	E3	C	B	A	0	1	2	3	4	5	6	7
1	X	X	X	X	X	1	1	1	1	1	1	1	1
X	1	X	X	X	X	1	1	1	1	1	1	1	1
X	X	0	X	X	X	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Figura 14.32 74LS138: 1 = HIGH, 0 = LOW, X = no importa

requisito para operación normal de que E1 y E2 sean BAJAS y E3 sea ALTA. Todas las otras variaciones dan por resultado que el decodificador esté deshabilitado y produzca una salida ALTA.

La figura 14.33 presenta el tipo de respuesta que se puede obtener del decodificador 74LS138 para diferentes entradas.

Un decodificador 74LS138 se podría utilizar con un microprocesador, usando el ENABLE para encender el decodificador y luego depender del estado de las tres líneas de salida del microprocesador de modo que una de las 8 salidas del decodificador produzca una salida BAJA mientras las otras permanecen en ALTO. Así, se puede considerar que cada dispositivo de salida tiene una dirección, es decir, un número binario de salida único, de tal manera que cuando el microprocesador envía una dirección al decodificador activa el dispositivo que se asocia con esa dirección. Se puede hacer referencia al 74LS138 como un decodificador de direcciones.

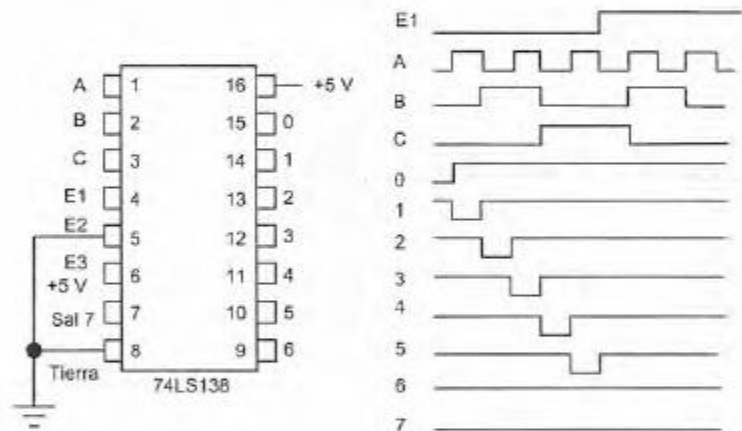


Figura 14.33 74LS138

14.7 Lógica secuencial

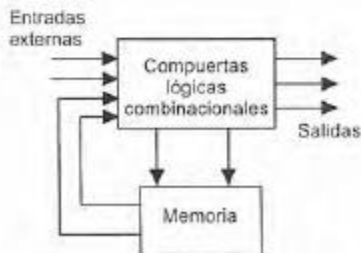


Figura 14.34 Sistema de lógica secuencial

Los circuitos lógicos mencionados en secciones anteriores de este capítulo son ejemplos de sistemas de lógica combinacional. En estos sistemas, la salida está definida por la combinación de las variables de entrada en un instante dado. Por ejemplo, si la entrada *A* y la entrada *B* ocurren al mismo tiempo, entonces la compuerta AND produce una salida. La salida no depende de cuáles fueron las entradas anteriores. Cuando un sistema requiere una salida que dependa de valores anteriores de las entradas, se necesita un sistema de *lógica secuencial*. La diferencia principal entre un sistema de lógica combinacional y un sistema de lógica secuencial es que éste debe tener algún tipo de memoria.

La figura 14.34 muestra la configuración básica de un sistema de lógica secuencial. La parte combinacional del sistema acepta señales lógicas provenientes de entradas externas y de salidas de la memoria. El sistema combinacional opera con esas entradas para producir sus salidas. Las salidas son, entonces, una función de sus entradas externas y de la información presente en su memoria.