AAU

AMERICAN ANDRAGOGY UNIVERSITY

educandis orbis

MATEMATICA II

Conceptos Fundamentales. Conjuntos Numéricos. Campo Real

Concepto de Conjunto Numérico

Se entiende por conjunto numérico una colección de números que guarda una relación estrecha entre sí, mediante alguna propiedad especifica. Cada elemento del conjunto numérico debe existir y ser único.

Los números son elementos que representan de forma abstracta la realidad "real" conocida en filosofía como: realidad objetiva.

Entonces un conjunto numérico seria por ejemplo el conjunto de los naturales. Los números naturales se definen de manera enumerativa como: N={1 ; 1* ; (1*)* ; ((1*)*) } de la forma anterior o una forma igual como: N={1 ; 2 ; 3 ; 4 }. La primera representación de los números naturales se debe al matemático italiano Peano, que los definió de la forma como se conoce hoy en Matemáticas. El símbolo "*" significa que el el numero 1 tiene un sucesor que es el 2 o 1*. Así sucesivamente se van representando los diferentes números naturales.

Campo de los números Reales

Los números naturales, como son conocidos, no satisfacen las necesidades numéricas prácticas del hombre, en particular, si 2 es menor que 3, la operación no tiene sentido en el campo de los números naturales. Para solucionar este conflicto así como otros que fueron apareciendo con el desarrollo de las matemáticas, el ser humano inventó el concepto de Conjunto o Campo de los Números Reales. Este Conjunto de los Números Reales se define rigurosamente de la siguiente forma:

Axioma I- Existe la operación *suma* que le asocia a dos números reales a y b el número $c = a + b$ también real:

I1: $a + b = b + a$ (propiedad conmutativa)

I2: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propiedad asociativa)

I3: Existe el elemento *cero* de la suma: $a+0=0+a=a$

I4: Existe el opuesto $-a$:$a+(-a)=0$

Axioma II- Para dos reales cualesquiera está definido de forma unívoca el producto, que asocia a dos reales a y b el real $c = a \cdot b$ y cumple:

II1: $a \cdot b = b \cdot a$ (propiedad conmutativa)

II2: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (propiedad asociativa)

II3: Existe el elemento *unidad* del producto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$

II4: Existencia del *recíproco* o *inverso de a.*

Axioma III- Relación entre las dos operaciones:

$\forall a,b,c \in R:(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ (propiedad distributiva)

Axioma IV- Ordenamiento: $(\forall a \in R) : (a < 0) \vee (a = 0) \vee (a > 0)$

IV1: Si $(a > 0, b > 0) : (a + b > 0) \wedge (a \cdot b > 0)$

IV2: Si $a + (-b) > 0 \Rightarrow a > b$

Axioma V- Continuidad: Si $(\forall a \in R, b \in R)(a \leq b) \Rightarrow (\exists \alpha \in R) : a \leq \alpha \leq b$

El axioma de continuidad caracteriza el campo de los números reales frente a los otros campos numéricos, y es el que garantiza la idoneidad de este campo para usarlo en la descripción de magnitudes observables.

Leyenda:

- El símbolo ∀ significa "para todo numero real".
- El símbolo ∈ significa "pertenece el numero (símbolo anterior) al conjunto de los Números Reales".
- El símbolo ∃ significa "existe el número (símbolo posterior)".
- El símbolo: significa " tal que".

Concepto de Función. Límite de una Función

Concepto de function

Definimos a priori el campo numérico x y un campo numérico f(x). Se dice que el campo numérico f(x) es función de x si existe una relación entre estos dos campos numéricos, de tal forma que a cada valor de f(x) le corresponde un único valor del campo numérico x. Estas funciones reciben el nombre de **funciones inyectivas.**

El **campo numérico f(x)** recibe el nombre de **imagen de x**.

Evidentemente existen funciones donde cada valor del campo numérico f(x) no le corresponde un único valor del campo numérico x. Estas funciones reciben el nombre de **funciones no inyectivas.**

Si x toma diferentes valores en vez de un solo valor por ejemplo 2,34,67,.... entonces nos encontramos frente a una **magnitud variable.**

Si x tiene solo un valor por ejemplo, el valor 2; entonces x es una **magnitud fija.**

Limite de una función

El vocablo, límite, procede etimológicamente hablando, del latín. En concreto, emana del sustantivo “limes”, que puede traducirse como “frontera o borde”.

La expresión **límite de una función** se utiliza en matemáticas para referirse a la cercanía entre un magnitud variable x y una magnitud fija a. Por ejemplo: si una función **f(x)** tiene un límite **b** en un punto **a**, quiere decir que el valor de **f(x)** puede ser todo lo cercano a **b** que se desee, con puntos suficientemente cercanos a la magnitud fija a, pero distintos.El límite de una función f(x) es una magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los números de la magnitud variable x.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

En este caso el símbolo -> significa que la magnitud variable x "tiende a" la magnitud fija a. El símbolo b es el límite de f(x) cuando x tiende a la magnitud fija a. Intuitivamente, el hecho que una función *f(x)* alcance un límite *b* en el punto *a*, significa que el valor de *f(x)* puede ser tan cercano a *b* como se desee, tomando puntos suficientemente próximos a *a*, sin importar el valor que pudiera adquirir *f(x)* en el punto *a*.

Obsérvese que x es precisamente el campo de los números reales al igual que f(x). Entonces hemos definido la función y la magnitud variable para el campo de los números reales.

Propiedades fundamentales del límite de una función

En la presente lección abordaremos las propiedades del limite de una función de variable real. Ninguna propiedad va a ser demostrada en este curso. Si el alumno desea conocer más del tema puede visitar las referencias bibliográficas al final del curso.

Propiedades del limite de una función.

1- Si la función f(x)= c, donde c es una constante y la variable x pertenece al campo numérico de los reales, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Es decir, el límite de una función constante es la propia constante c.

2- Si existen los limites finitos de $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ entonces existen también el límite de la suma de ambas funciones y el límite de la multiplicación de ambas funciones.

$$\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)]$$

3- Si $\lim_{x \to a} g(x)$ es distinto de cero entonces : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$.

4- Si existe el limite $\lim_{x \to a} f(x)$, entonces para cualquier número real c existe el límite $c \times \lim_{x \to a} f(x)$.

$$\lim_{x \to a} c \times f(x) = c \times \lim_{x \to a} f(x)$$

5- Si la función f(x) se encuentra entre dos funciones distintas que la acotan superior en inferiormente, y estas dos funciones distintas tienen el mismo límite cuyo número denominaremos como c, entonces el límite de la función f(x) será exactamente el número c.

Ejemplo de cálculo de límites sencillos

En esta lección pondré algunos ejemplos de límites sencillos que sirvan para ilustrar la utilidad de las propiedades fundamentales de los límites.

Propiedad 1. Ejemplos.

Calcular el límite de estas dos funciones f(x)= 10,013; donde 10,013 es un número real; g(x)= 3.1415926.... cuando ambas funciones tienden al número 4.

Solución:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} 10.013 = 10.013$$

$$\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} 3.1415926.... = 3.1415926....$$

Nótese que aún cuando ambas funciones tienden al mismo número (4 en este ejemplo), el resultado de ambas es la misma constante de la función 10.013 y 3.1414926... respectivamente. Es decir, para cualquier función constante el resultado de su límite (independientemente de adonde tienda la variable x) es siempre la misma función constante.

Ejemplo Interesante.

Calcular el límite de la siguiente función constante cuando tiende a 3.1418:

$$f(x) = 3^2 + \frac{43.5}{34} + \sqrt[3]{5.67}$$

$$\lim_{x \to 3.1418} f(x) = \lim_{x \to 3.1418} 3^2 + \frac{43.5}{34} + \sqrt[3]{5.67} = 3^2 + \frac{43.5}{34} + \sqrt[3]{5.67}$$

Véase que en este ejemplo la función aunque tenga esta forma sigue siendo una función constante, por tanto el resultado del límite va a ser exactamente la misma función constante. Si deseamos reducir los términos solo tenemos que resolver la combinada. ¡Te reto a que lo realices!

Propiedad 2. Ejemplos.

Calcula el límite compuesto (tanto la suma como la multiplicación) de las siguientes funciones:

f(x)=4.53546 ; g(x)=76.34 ; h(x)= 34

Solución:

Aplicando la propiedad 2 de los límites obtenemos que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x) + \lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3}[f(x) + g(x) + h(x)]$$

$$\lim_{x \to 3}[f(x) + g(x) + h(x)] = 4.53546 + 76.34 + 34 = 114.87546$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \times \lim_{x \to 3} g(x) \times \lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3}[f(x) \times g(x) \times h(x)]$$

$$\lim_{x \to 3}[f(x) \times g(x) \times h(x)] = 4.53546 \times 76.34 \times 34 = 11772.0586$$

Observen que aparte de usar la propiedad 2 usé la propiedad 1 de los límites.

Propiedad 3. Ejemplos.

Calcula el límite compuesto (la divisón) de las siguientes funciones cuando tiende a 3:

g(x)=76.34 ; h(x)= 34

$$\lim_{x \to 3} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to 3} g(x)}{\lim_{x \to 3} h(x)} = \frac{\lim_{x \to 3} 76.34}{\lim_{x \to 3} 34} = \frac{76.34}{34} \cong 2.2453$$

En este caso también utilicé la propiedad 1 de los límites.

Propiedad 4. Ejemplo.

Calcula el límite de la siguiente función cuando tiende a 4:

f(x)=3x

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} 3x = 3 \lim_{x \to 4} x = 3(4) = 12$$

Se utilizo la propiedad 4 y se evalúo el límite poniendo donde estaba la x el número 4 . El resultado de este límite es entonces el número 3 multiplicado por 4.

Ejemplo Interesante.

$$\lim_{x \to 4.3} 4\left(\sqrt{45} + 3,4^2\right)x = 4\left(\sqrt{45} + 3,4^2\right)\lim_{x \to 4.3} x = 4\left(\sqrt{45} + 3,4^2\right) \times (4.3)$$

En este ejemplo se continúa el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, aunque la constante es diferente.

Ejemplos de Límites Sencillos. Método de Evaluación de Límites

En esta lección vamos a introducir el **Método de Evaluación de Límites Finitos**. Se entiende por límite finito aquel donde la variable x tiende a un número cualquiera a. Ejemplo: $x \to a$. Si $x \to \infty$ entonces se llama **Límite Infinito.** El estudio de los límites infinitos es toda una sección del análisis matemático, por tanto se estudiará en próximas lecciones.

Método de Evaluación. Varios Ejemplos.

El método de evaluación de límites consiste en evaluar en la función a la cual le queremos hallar el límite el número al cual tiende la variable x. Ejemplo:

Calcula la siguiente función cuando x tiende a 2.

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = \lim_{x \to 2} (2)^2 = \lim_{x \to 2} 4 = 4$$

Noten que en este ejemplo he usado una de las propiedades de los límites impartidos. ¿Qué propiedad será?

A continuación unos cuantos ejemplos más para que se fije en la memoria el contenido:

$$f(x) = x^2 + x^4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + x^4 = \lim_{x \to 2} (2)^2 + (2)^4 = (2)^2 + (2)^4 = 4 + 16 = 20$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + x^3$$

$$\lim_{x \to 3.14} g(x) = \lim_{x \to 3.14} \frac{1}{x^2} + x^3 = \lim_{x \to 3.14} \frac{1}{(3.14)^2} + (3.14)^3 = \lim_{x \to 3.14} \frac{1}{9.8596} + 30.959144 = \lim_{x \to 3.14} 31.060568$$

$$\lim_{x \to 3.14} 31.060568 = 31.060568$$

$$h(x) = x\sin(x)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x\sin(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$K(x) = e^x \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} K(x) = \lim_{x \to 0} e^x \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to 0} e^0 \sin\left(2(0) + \frac{\pi}{2}\right) = e^0 \sin\left(2(0) + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \times \sin\left(2(0) + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \times 1 = 1$$

Ejemplos de Límites. Método de Evaluación de Límites II

En esta lección vamos a introducir el método de evaluación para funciones de variable real más complejas.Como en la lección anterior el método de evaluación consiste en sustituir en la función a la cual le queremos hallar el límite el valor al cual tiende la variable x.

Ejemplos.

$$c(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 4} c(x)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=0.25$$

$$d(x)=\frac{1}{x^2+2x}$$

$$\lim_{x\to 4} d(x)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x^2+2x}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{4^2+2(4)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{16+8}=\frac{1}{16+8}=\frac{1}{24}=0.041$$

$$e(x)=\frac{x^3+4}{x^2+7}$$

$$\lim_{x\to 2} e(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+4}{x^2+7}=\lim_{x\to 2}\frac{2^3+4}{2^2+7}=\lim_{x\to 2}\frac{8+4}{4+7}=\lim_{x\to 2}\frac{12}{11}=\frac{12}{11}=1.09$$

$$f(x)=\frac{x^2+\sqrt[3]{x}}{x\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+\sqrt[3]{x}}{x\cos(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{3^2+\sqrt[3]{3}}{3\cos(3)}=\lim_{x\to 3}\frac{10.442}{3\cos(3)}=\lim_{x\to 3}\frac{10.442}{-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{10.442}{-3}=\frac{10.442}{-3}\cong -3.48$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{x^3+\sqrt{x}}{e^x\sin(x)}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} g(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{x^3+\sqrt{x}}{e^x\sin(x)}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}^3+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}^3+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{5.13}{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{5.13}{4.81}}=\sqrt{\frac{5.13}{4.81}}\cong 1.033$$

$$h(x)=\int\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\int\frac{1}{x}=\lim_{x\to 2}\ln(x)=\lim_{x\to 2} ln(2)=ln(2)=0.693$$

Ejemplos de Límites. Método de Evaluación de Límites II

En esta lección vamos a introducir el método de evaluación para funciones de variable real más complejas.Como en la lección anterior el método de evaluación consiste en sustituir en la función a la cual le queremos hallar el límite el valor al cual tiende la variable x.

Ejemplos.

$$c(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 4} c(x) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$d(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

$$\lim_{x \to 4} d(x) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{4^2 + 2(4)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{16 + 8} = \frac{1}{16 + 8} = \frac{1}{24} = 0.041$$

$$e(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 7}$$

$$\lim_{x \to 2} e(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 4}{x^2 + 7} = \lim_{x \to 2} \frac{2^3 + 4}{2^2 + 7} = \lim_{x \to 2} \frac{8 + 4}{4 + 7} = \lim_{x \to 2} \frac{12}{11} = \frac{12}{11} = 1.09$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{x\cos(x)}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{x\cos(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{3^2 + \sqrt[3]{3}}{3\cos(3)} = \lim_{x \to 3} \frac{10.442}{3\cos(3)} = \lim_{x \to 3} \frac{10.442}{-3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{10.442}{-3} = \frac{10.442}{-3} \cong -3.48$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3 + \sqrt{x}}{e^x \sin(x)}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{x^3 + \sqrt{x}}{e^x \sin(x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}^3 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2}^3 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{5.13}{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{5.13}{4.81}} = \sqrt{\frac{5.13}{4.81}} \cong 1.033$$

$$h(x) = \int \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \int \frac{1}{x} = \lim_{x \to 2} \ln(x) = \lim_{x \to 2} \ln(2) = \ln(2) = 0.693$$

Método de Evaluación de Límites. Indeterminaciones

En muchas ocasiones la resolución de los límites no se puede hacer por el método de evaluación tradicional. Es aconsejable, en esos casos, primeramente utilizar el método de evaluación tradicional, para determinar a qué tipo de indeterminación nos estamos enfrentando.

Ejemplos.

Halle los siguientes límites de funciones o intente determinar frente a qué tipo de indeterminación se encuentra:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^2-9}{3-3}=\lim_{x\to 3}\frac{9-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+12x-18}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{6(1)^2+12(1)-18}{2(1)-2}=\frac{6+12-18}{2-2}=\frac{18-18}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)^3}=\lim_{x\to 3}\frac{3-3}{(3-3)^3}=\frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}(3-x)\frac{x}{(x-3)^3}=\lim_{x\to 3}(3-3)\frac{3}{(3-3)^3}=\lim_{x\to 3}(0)\frac{3}{(0)^3}=(0)\frac{3}{(0)}=0\times\infty$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ 0\times\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\sin(3x)cosec(3x)=\lim_{x\to 0}sin(3\times(0))cosec(3\times(0))=\lim_{x\to 0}sin(3\times(0))\frac{1}{sin(3\times(0))}=\lim_{x\to 0}0\frac{1}{0}=0\frac{1}{0}=0\times\infty$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ 0\times\infty$$

Método de Evaluación. Indeterminaciones II

Continuando con la lección anterior, vamos a determinar frente a qué tipo de indeterminación nos enfrentamos. Como se dijo en la lección anterior, es aconsejable primeramente utilizar el método de evaluación tradicional para poder determinar frente a qué tipo de indeterminación estamos. Ahora veremos otras indeterminaciones que no abordamos.

Ejemplos.

Halle los siguientes límites de funciones o intente determinar frente a qué tipo de indeterminación se encuentra:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{3^2-9}{3-3} = \lim_{x \to 3} \frac{9-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x^2+12x-18}{2x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{6(1)^2+12(1)-18}{2(1)-2} = \frac{6+12-18}{2-2} = \frac{18-18}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3-x}{(x-3)^3} = \lim_{x \to 3} \frac{3-3}{(3-3)^3} = \frac{0}{0}$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} (3-x)\frac{x}{(x-3)^3} = \lim_{x \to 3} (3-3)\frac{3}{(3-3)^3} = \lim_{x \to 3} (0)\frac{3}{(0)^3} = (0)\frac{3}{(0)} = 0 \times \infty$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ 0 \times \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \sin(3x)cosec(3x) = \lim_{x \to 0} sin(3 \times (0))cosec(3 \times (0)) = \lim_{x \to 0} sin(3 \times (0))\frac{1}{sin(3 \times (0))} = \lim_{x \to 0} 0\frac{1}{0} = 0\frac{1}{0} = 0 \times \infty$$

$$Indeterminacion\ del\ tipo\ 0 \times \infty$$

Método de Evaluación. Indeterminaciones III

En la lección anterior se abordaron dos tipo de indeterminación. Repitiendo una de las ideas fundamentales de la pasada clase, es aconsejable en esos casos, primeramente utilizar el método de evaluación tradicional para determinar a qué tipo de indeterminación nos estamos enfrentando. En esta lección abordaremos las del tipo 0^0 y ∞^0.

Ejemplos.

Halle los siguientes límites de funciones o intente determinar frente a qué tipo de indeterminación se encuentra:

$$f(x) = x^{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{sin(x)} = \lim_{x \to 0} 0^{sin(0)} = 0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$g(x) = \tan(x)^{(x^2 + 3x)}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} tan(x)^{(x^2 + 3x)} = \lim_{x \to 0} tan(x)^{(x^2 + 3x)} = 0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$h(x) = (e^{x^2} - 1)^{2x}$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} (e^{x^2} - 1)^{2x} = \lim_{x \to 0} (e^{(0)^2} - 1)^{2(0)} = (e^{(0)} - 1)^0 = (1 - 1)^0 = 0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$j(x) = \frac{1}{x}^{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} j(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}^{sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{0}^{sin(0)} = \infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

$$k(x) = \frac{1}{e^x - 1}^{(x^3 + 3e^x - 3)}$$

$$\lim_{x \to 0} j(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x - 1}^{(x^3 + 3e^x - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^0 - 1}^{(0^3 + 3e^0 - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^0 - 1}^{(3e^0 - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 1}^{(3 - 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{0}^{(0)} = \infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

$$s(x) = \frac{1}{x}^{x}$$

$$\lim_{x \to 0} s(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}^{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{0}^{0} = \infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

Método de Evaluación. Indeterminaciones III

En la lección anterior se abordaron dos tipo de indeterminación. Repitiendo una de las ideas fundamentales de la pasada clase, es aconsejable en esos casos, primeramente utilizar el método de evaluación tradicional para determinar a qué tipo de indeterminación nos estamos enfrentando. En esta lección abordaremos las del tipo 0^0 y ∞^0

Ejemplos. Halle los siguientes límites de funciones o intente determinar frente a qué tipo de indeterminación se encuentra:

$$f(x)=x^{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}=\lim_{x\to 0} 0^{\sin(0)}=0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$g(x)=\tan(x)^{(x^2+3x)}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} \tan(x)^{(x^2+3x)}=\lim_{x\to 0} \tan(x)^{(x^2+3x)}=0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$h(x)=(e^{x^2}-1)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0} (e^{x^2}-1)^{2x}=\lim_{x\to 0} (e^{(0)^2}-1)^{2(0)}=(e^{(0)}-1)^0=(1-1)^0=0^0$$

indeterminacion del tipo 0^0

$$j(x)=\frac{1}{x}^{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} j(x)=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}^{\sin(x)}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{0}^{\sin(0)}=\infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

$$k(x)=\frac{1}{e^x-1}^{(x^3+3e^x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0} j(x)=\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1}^{(x^3+3e^x-3)}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^0-1}^{(0^3+3e^0-3)}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^0-1}^{(3e^0-3)}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-1}^{(3-3)}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{0}^{(0)}=\infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

$$s(x)=\frac{1}{x}^{x}$$

$$\lim_{x\to 0} s(x)=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}^{x}=\lim_{x\to 0} \frac{1}{0}^{0}=\infty^0$$

indeterminacion del tipo ∞^0

Límites cuyas variables de funciones tienden al infinito

En esta sección abordaremos aquellos casos donde la variable x tiende no a un número finito, ni a cero, sino a infinito. Pero antes de adentrarnos en ejemplos concretos veamos qué significa el infinito.

Concepto de Infinito en Matemáticas.

El concepto de infinito en Matemáticas fue rigurosamente establecido por George Cantor, quien postulaba que:

"Un conjunto es infinito si es posible encontrar un subconjunto propio del mismo que tenga la misma cantidad de elementos que el conjunto original".

Cuando hablamos de subconjunto nos referimos a un conjunto que tiene los elementos del conjunto original, solo que al menos un elemento menos.

Ejemplo:

El conjunto original son los números reales. Un subconjunto sería todos los números reales exceptuando el número 1. Como el subconjunto que definimos tiene la misma cantidad de elementos que el original (infinitos elementos), entonces los números reales es un conjunto infinito.

En Matemáticas existen reglas específicas que regulan cómo operar frente al infinito, aquí ponemos dichas reglas.

1. Existen dos tipos de infinito, el positivo y el negativo.
2. Cualquier número sumado con infinito es infinito.
3. Cualquier número al que se le reste infinito es infinito negativo.
4. Cualquier número al que se divida por infinito es cero.
5. Cualquier número que se multiplique por infinito es infinito, dependiendo de qué tipo de infinito sea.
6. Infinito por infinito es infinito.

Ejemplos de Límites.

$f(x)=x^2+x$

$$\lim_{x\to\infty} x^2+x=\lim_{x\to\infty} \infty^2+\infty=\infty$$

$g(x)=x^3+x$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+x=\lim_{x\to-\infty} (-\infty)^3+(-\infty)=-\infty$$

$h(x)=2^x+3x$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x+3x=\lim_{x\to\infty} 2^{\infty}+3\infty=\infty$$

$k(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

$E(x)=\dfrac{3x^2+3}{4x^2+4}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{4x^2+4}=\frac{3}{4}$$

Nota: No todos los límites de funciones cuyas variables tienden a infinito tienen que ser cero o infinito. De hecho existen muchos de estos límites que tienden a números finitos. Esto lo veremos en la próxima lección.

Variables que tienden al infinito II

En este epígrafe vamos a poner más ejemplos de límites de funciones cuyas variables tienden al infinito. Antes de ello vamos a exponer un método de resolución de límites muy eficaz y sencillo, y se postulan como teoremas de limites infinitos en el caso de una división cualquiera de dos polinomios cualquiera.

Teorema de Limites Infinitos.

Sean f(x) y g(x) dos polinomios cualquiera de grado n y m respectivamente, sus variables tienden al infinito si:

1. El grado n de f(x) es mayor que el de g(x), entonces el resultado del límite será infinito.
2. El grado de f(x) es menor que el de g(x), entonces el resultado del límite será cero.
3. El grado de f(x) es igual al de g(x), entonces el resultado del límite será la división de los coeficientes de los grados n y m, en ese orden.

Ejemplos.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\infty^2+3}{\infty+2}=\infty$$

$$g(x)=\frac{x^3+4x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x}{x}=\lim_{x\to\infty}x^2+4=\lim_{x\to\infty}\infty^2+4=\infty$$

$$h(x)=\frac{x^2+3}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}=0+0=0$$

$$j(x)=\frac{x^4+3x+3}{x^7+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x+3}{x^7+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^7}+\frac{3x}{x^7}+\frac{3}{x^7}}{\frac{x^7}{x^7}+\frac{x}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^6}+\frac{3}{x^7}}{1+\frac{1}{x^6}}=\frac{0+0+0}{1+0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^3+5}{bx^3+8} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n+5}{b_n x^n+8} = \frac{a_n}{b_n}$$

Método de Resolución de Límites. División por la mayor potencia

En esta lección vamos a tener ejemplos de otro método de resolución de límites. Este método consiste en dividir por la mayor potencia que haya en f(x) o en g(x). Se utiliza mucho si la variable x tiende al infinito.

Ejemplos.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3+3}{3x^3+6} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\frac{x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3}+\frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+7x}{4x^4+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\frac{x^2}{x^4}+\frac{7x}{x^4}}{4\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{0+0}{4+0} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5+2x}{x^4+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\frac{x^5}{x^5}+\frac{2x}{x^5}}{\frac{x^4}{x^5}+\frac{x}{x^5}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+0}{0+0} = \frac{3}{0} = \infty$$

Método de Resolución de Límites. División por la mayor potencia II

Vamos a seguir profundizando en el alcance de este método de resolución. Nótese que en la lección anterior se resolvieron varios ejercicios donde se aplicó el método de dividir por la mayor potencia.

Resumiendo su metodología:

1. Encontrar la variable que tiene mayor potencia en toda la función.
2. Dividir cada término de la función entre la mayor potencia.
3. Una vez realizados todo estos pasos proceder a determinar el límite.

Ejemplos:

$$f(x)=\frac{7x^2+4x+5}{2x^2+6x+9}=(1)\ \frac{7x^2+4x+5}{2x^2+6x+9}=\left(\frac{x^2}{x^2}\right)\frac{7x^2+4x+5}{2x^2+6x+9}=\left(\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}}\right)\frac{7x^2+4x+5}{2x^2+6x+9}$$

$$=\frac{\frac{7x^2+4x+5}{x^2}}{\frac{2x^2+6x+9}{x^2}}=\frac{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=\frac{7+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{7+0+0}{2+0+0}=\frac{7}{2}$$

$$g(x)=\frac{x^7+x^6+2x^5}{x^7+x^5+3x^3+4x^6+2x^2}=(1)=\left(\frac{x^7}{x^7}\right)\frac{x^7+x^6+2x^5}{x^7+x^5+3x^3+4x^6+2x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{x^7}{x^7}}\right)\frac{x^7+x^6+2x^5}{x^7+x^5+3x^3+4x^6+2x^2}=\frac{\frac{x^7+x^6+2x^5}{x^7}}{\frac{x^7+x^5+3x^3+4x^6+2x^2}{x^7}}=\frac{\frac{x^7}{x^7}+\frac{x^6}{x^7}+\frac{2x^5}{x^7}}{\frac{x^7}{x^7}+\frac{x^5}{x^7}+\frac{3x^3}{x^7}+\frac{4x^6}{x^7}+\frac{2x^2}{x^7}}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^5}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^5}}=\frac{1+0+0}{1+0+0+0+0}$$

educandis orbis