AAU

AMERICAN ANDRAGOGY UNIVERSITY

educandis orbis

TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO 01 Sistemas de Medición Angular

OBJETIVOS:

Reconocer los sistemas de medición angular y sus unidades.

Relacionar los sistemas de medición angular, mediante factores de conversión.

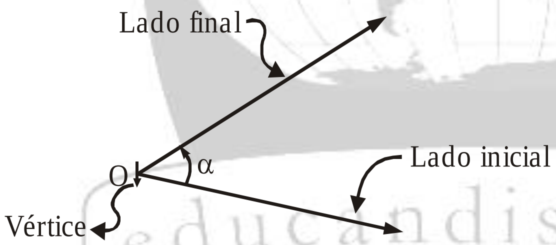
MOTIVACIÓN

HIPARCO: PADRE DE LA TRIGONOMETRÍA

Según Theon de Alejandría entre 161 y 126 a.C, hay un florecimiento científico, dentro del cual se debe considerar a Hiparco como el verdadero creador de la Trigonometría: en efecto, de acuerdo a la tendencia más pragmática de los alejandrinos, parece haber sido el primero en emplearla para resolver ciertos problemas prácticos. Y creó esta ciencia precisado por las exigencias de la Astronomía de entonces; pues ya que se conocía la propiedad geométrica de que los arcos no son proporcionales a sus cuerdas, se vio impedido a hacer una tabulación de las cuerdas y arcos, dividiendo la circunferencia en 360 grados y el radio en 60 partes iguales.

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo, alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.



Giro antihorario es positivo +

Giro horario es negativo -

CAPÍTULO 02 Longitud de Arco

OBJETIVOS:

Identificar una longitud de arco.

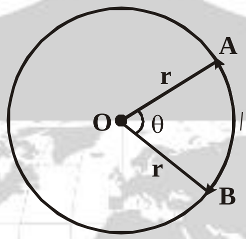
Calcular la longitud de arco mediante una fórmula.

MOTIVACIÓN

Se dice que la Trigonometría es una ciencia antigua con aplicaciones ultramodernas. El punto de partida para su estudio detenido se debió a su gran utilidad en la medida indirecta de ángulos y distancias. Sin embargo, hoy en día juega un papel importante en la investigación atómica, en la electricidad, en la termodinámica, en el estudio de las vibraciones mecánicas y en todo aquello donde existen fenómenos con características periódicas.
En la metemática pura, sus aspectos teóricos son indispensables, sobre todo por el papel que juegan las funciones trigonométricas. Asimismo, esta ciencia es de gran utilidad en la navegación aérea y marítima, en las ciencias físicas e ingeniería. En la ciencia militar, su conocimiento es indispensable en aspectos vitales como la teoría del lanzamiento de bombas, la dirección del juego de artillería, el lanzamiento de cohetes dirigidos, etc.

LONGITUD DE ARCO

La longitud del arco AB es igual a:



$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

$$\boxed{\ell = \theta \, . \, r}$$

$$r = \frac{\ell}{\theta}$$

r: radio de la circunferencia
θ: ángulo central medido en radianes: $\theta < \theta \leq 2\pi$

CAPÍTULO **03**

Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos I

OBJETIVOS:

- Aplicar el Teorema de Pitágoras.
- Identificar los elementos para definir una razón trigonométrica.
- Definir una razón trigonométrica.

MOTIVACIÓN

Trigonometría es una palabra que proviene de los términos griegos metron (medida) y trígono (triángulo). Por tanto, podríamos decir que la Trigonometría no es más que la medida del triángulo.

De hecho, se trata de la parte de las matemáticas dedicada inicialmente al estudio de las relaciones entre las amplitudes de los ángulos y las longitudes de los segmentos que sus lados determinan en las rectas que cortan.

Un triángulo contiene seis elementos: tres lados y tres ángulos. Sabemos por la Geometría que un triángulo queda determinada cuando se conocen tres de sus elementos de los cuales, uno al menos, deje ser un lado. Cuando, conocidos los elementos que determinan un triángulo, se hallan el valor de los restantes, decimos que se ha resuelto el triángulo.

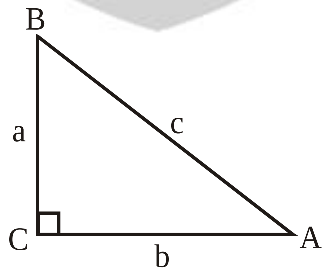
La resolución de un triángulo puede llevarse a cabo por dos métodos distintos: por construcciones gráficas o por medio del cálculo. La resolución gráfica de un triángulo se hace por construcción se construye el triángulo según los datos (que pueden ser los tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido, a un lado y dos ángulos interiores, etc) y en la figura obtenida se mide con regla y transportador los elementos desconocidos. Este método gráfico es muy limitado, pues supone la construcción del triángulo u otra figura plana limitada por rectas, que no siempre es posible; la exactitud de la construcción y de la medición de los elementos de la figura construida, dependiendo ambas de los instrumentos utilizados y de la habilidad del que realiza la construcción y la medición.

El segundo método, el de cálculo, proporciona resultados más exactos, especialmente cuando los elementos que se han de determinar son ángulos: es por ello el método más empleado en la resolución de infinidad de problemas que exigen soluciones muy precisas. La Trigonometría nos enseña a resolver todos los problemas del triángulo por medio del cálculo y a encontrar relaciones en forma matemática entre segmentos y ángulos del triángulo y de otras figuras planas limitadas por rectas, de hecho se basa en las propiedades de las llamadas razones trigonométricas. La trigonometría es una parte de las matemáticas eminentemente práctica y presenta una gran ventaja: se puede tener una visión bastante real; casi todo se puede dibujar sobre papel.

Si nos remontamos a tiempos muy lejanos en la historia de las matemáticas, encontramos algunos problemas que ya implicaba elementos de trigonometría: los egipcios ya lo utilizaban en la construcción de sus pirámides y los babilonios en sus cálculos. Los griegos hicieron por vez primera un estudio sistemático de las relaciones entre dos ángulos y la longitud de la cuerda que lo determina en una circunferencia de radio la unidad.

Con el paso del tiempo, la trigonometría adquirió la forma que tiene actualmente; pasó del estudio de las relaciones entre los ángulos de un triángulo rectángulo al de las razones entre los catetos y la hipotenusa del triángulo para extenderse finalmente al estudio de las funciones abstractas.

TEOREMA DE PITÁGORAS



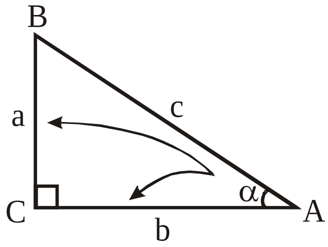
a,b: catetos
c: hipotenusa

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea el triángulo ABC.

$\left(\hat{c} = 90^\circ\right)$



a: cateto opuesto al α.

b: cateto adyacente al α.

Seno: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

Coseno: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cat. Adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

Tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Cat. Adyacente}} = \dfrac{a}{b}$

CAPÍTULO 04

Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos II

OBJETIVOS:

- Definir las razones trigonométricas: ctg, sec, csc.
- Calcular las R.T. de un ángulo, conocida una de ellas.
- Interpretar enunciados de características geométricas.

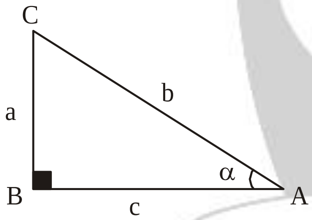
I. MOTIVACIÓN

Creadores de la Trigonometría. Generalmente se considera como creador de la Trigonometría al griego Hiparco de Nicea (150 a.C.), quien recopiló en unalista la posición de 1 000 estrellas fijas y confeccionó una tabla de funciones trigonométricas con ayuda de la cual halló la distancia de la Tierra a la Luna.

Fue Claudio Ptolomeo quien sistematizó la Trigonometría de entonces, enriqueciéndola con nuevas fórmulas y procedimientos. Publicó su inmortal obra *Al Magisti o Almagesto* cuyos métodos eran tan correctos que aún siglos más tarde se enseñaban en distintas universidades llegando a constituir la base de las tablas astronómicas que facilitaron los descubrimientos de Enrique el Navegante y Cristóbal Colón. Fue autor de la teoría geocéntrica del sistema solar así como de importantes obras que por muchos siglos fueron la única fuente de consulta, hasta la aparición de Copérnico, Galileo y Kepler.

Modernamente, descuellan en el perfeccionamiento de la Trigonometría Francisco Viete, Leonardo Euler y John Kepler.

II. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO



$$\boxed{b^2 = a^2 + b^2}$$

Para el ángulo α.

b : Hipotenusa
a : Cateto Opuesto
c : Cateto Adyacente

Luego podemos definir

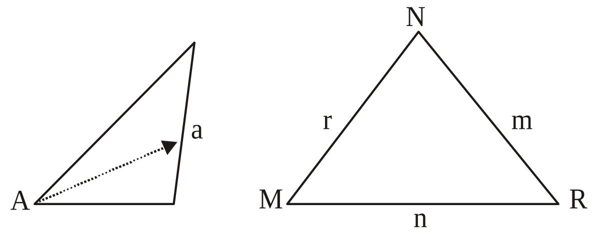
$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

$$\csc \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

Observación

1. En los vértices de los triángulos siempre se colocan letras mayúsculas y a los lados que se oponen se colocan sus respectivas letras minúsculas.



2. Una razón trigonométrica indica la proporción en que se encuentran los lados.

3. $(\text{sen}\ \alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha\ \text{sen}\alpha^2$

- $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta \neq \text{sen}\,(\alpha + \beta)$
- $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \neq \dfrac{\alpha}{\beta}$

(Lo mismo sucede con las otras razones trigono-métricas).

CAPÍTULO 05 R.T. de Ángulos Agudos Notables I

(30°- 60°, 45°, 37°, 53°, 16°- 74°)

OBJETIVOS:

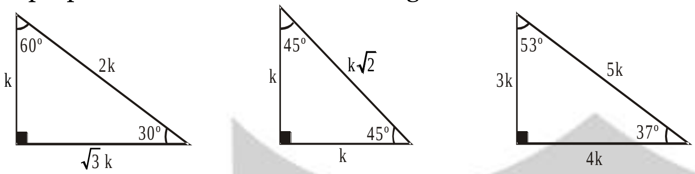
- Identificar la proporción en que se encuentran los lados de un triángulo rectángulo notable.
- Reconocer el valor numérico de las razones trigonométricas de ángulos notables y aproximados.

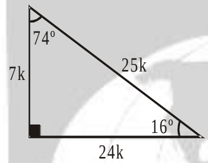
NOTA HISTÓRICA

Investigar el origen de una palabra con frecuencia significa tener que efectuar muchas conjeturas, especialmente cuando intervienen varios idiomas. La designación intervienen varios idiomas. La designación de "seno" dada a la razón trigonométrica de este nombre es un ejemplo destacado. El matemático árabe Aryabhata (aproximadamente en el año 530 d.C.) empleó la denominación ardha-jyija (o semicuerda) para lo que ahora llamamos "seno". Los árabes tenían la curiosa costumbre de omitir las vocales, de modo que la expresión ya fue interpretada fonéticamente como jiba por los matemáticos árabes, y como jaib por los matemáticos europeos que vertían al latín. Como resultado jya (cuerda) se convirtió en jaib, que significa seno (el pecho femenino) concepto que se designa en latín con la palabra sinus. Esto es lo que dice esta historia. Aryabhata es conocido también por haber asignado la expresión 62 832/20 000 (o sea, 3927/1250) como un valor aproximado del número π.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULO NOTABLES

Son aquellos triángulos rectángulos; donde conociendo las medidas de sus ángulos agudos, se puede saber la proporción de sus lados. Los triángulos conocidos son:





OBJETIVOS:

- Resolver triángulos rectángulos, relacionando las longitudes de los lados mediante una razón trigonométrica.
- Encontrar equivalencias entre las razones trigonométricas de ángulos notables en enunciados de características geométricas.

MOTIVACIÓN

La trigonometría, ¿para qué sirve?

El problema básico de la trigonometría es algo parecido a esto:

Está cerca de un río ancho y necesita conocer la distancia hasta la otra orilla, digamos hasta el árbol marcado en el dibujo por la letra C (para simplificar, ignoremos la tercera dimensión). ¿Cómo hacerlo sin cruzar el río?

La forma habitual es como sigue. Clave postes en el suelo en los puntos A y B y mida con una cinta la distancia c entre ellos (la base).

Luego extraiga el poste del punto A y sustitúyalo por un telescopio de topógrafo como el que se muestra aquí (teodolito), contando con una placa dividida en 360 grados, marque la dirección (azimut) a la que apunta el telescopio.

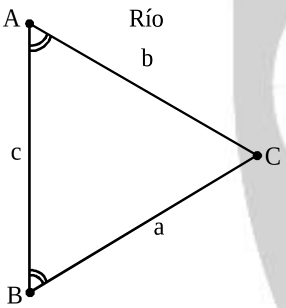
Dirigiendo el telescopio primero hacia el árbol y luego hacia el poste B, mide el ángulo A del triángulo ABC, igual a la diferencia entre los números que ha leído de la placa azimut. Sustituya el poste, lleve el teodolito al punto B y mida de la misma forma el ángulo B.

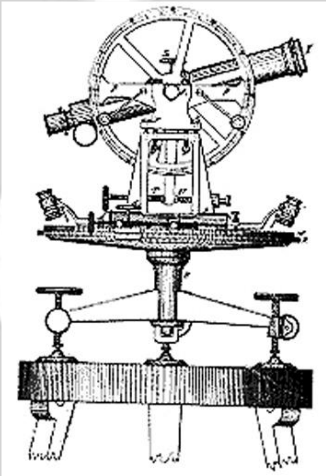
La longitud c de la base y los dos ángulos A y B son todo lo que necesita para conocer el triángulo ABC, suficiente, por ejemplo, para construir un triángulo de la misma forma y mismo tamaño, en un sitio más conveniente. La trigonometría (de trigon=triángulo) en un principio fue el arte de calcular la información perdida mediante simple cálculo. Dada la suficiente información para definir un triángulo, la trigonometría le permite calcular el resto de las dimensiones y de ángulos.

¿Por qué triángulos?

Porque son los bloques básicos de construcción para cualquier figura rectilínea que se pueda construir. El cuadrado, pentágono u otro polígono puede dividirse en triángulos por medio de líneas rectas radiando desde un ángulo hacia los otros.

Para topografiar una tierra los topógrafos la dividen en triángulos y marcan cada ángulo con un punto de referencia, que hoy en día es, a menudo, una placa de latón redonda fijada en el suelo con un agujero en el centro, sobre el que se ponen sus varillas y teodolitos (George Washington hizo este trabajo cuando era un adolescente). Después de medir la base, como la AB en el ejemplo del río, el topógrafo medirá (de la forma descrita aquí) los ángulos que se forman con el punto C y usar la trigonometría para calcular las distancias AC y BC. Estas pueden servir como base de dos nuevos triángulos, que a su vez suministrarán base para dos más..., y de esta forma construirá más y más triángulos hasta que se cubra la tierra al completo con una red que tiene distancias conocidas. Posteriormente se puede añadir una red secundaria, subdividiendo los triángulos grandes y marcando sus puntos con estacas de hierro, que proporcionarán distancias conocidas adicionales en las que se pueden basar los mapas o planos.





CAPÍTULO 07

Propiedades de las Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos

OBJETIVOS:

- Reconocer las propiedades de las razones trigonométricas.
- Encontrar equivalencias entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Resolver problemas haciendo uso de la resolución de ecuaciones.

MOTIVACIÓN

Uno de los genios más extraordinarios de la historia de la matemática fue el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss demostró antes que nadie el Teorema Fundamental del Álgebra y efectuó importantes estudios que lo llevaron a dejar fundamentada la Aritmética superior. Su obra principal fue *Disquisitione Arithmeticae*.

Karl Friedrich Gauss

Razones Trigonométricas Recíprocas

Si θ es un ángulo agudo se cumple:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{ctg}\theta = 1$$

Ejemplo:

Determinar *x* en cada uno de los casos:

1.

ángulos iguales

$$\text{Si}: \cos(60° - 5x).\sec x = 1 \Rightarrow 60° - 5x = x$$

$$60° = 6x$$

$$x = 10°$$

.

2.

ángulos iguales

$$\text{Si}: \operatorname{tg} 3x.\operatorname{ctg}(80° - 5x) = 1 \Rightarrow 3x = 80° - 5x$$

$$8x = 80°$$

$$x = 10°$$

CAPÍTULO 08

Resolución de Triángulos Rectángulos

OBJETIVOS:

- Aplicar las definiciones de las razones trigonométricas de ángulos agudos en la resolución de problemas.
- Aplicar, a casos de la vida práctica, los conceptos sobre las razones trigonométricas.

MOTIVACIÓN

Introducción histórica

Uno de los más grandes algebristas del siglo XIX fue el matemático noruego Hiels Henrik Abel (1802-1829). Abel demostró el teorema general del binomio y la imposibilidad de la resolución de las ecuaciones de quinto grado. Por su trabajo sobre las funciones elípticas obtuvo el Gran Premio de Matemática del Instituto de Francia.

CÁLCULO DE LADOS

Es el procedimiento mediante el cual se calculan los lados desconocidos de un triángulo rectángulo, en función de un lado y un ángulo agudo, también conocido. El criterio a emplear es el siguiente:

$$\boxed{\frac{\text{lado desconocido}}{\text{lado conocido}} = \text{R.T}\left(\text{ángulo conocido}\right)}$$

Despejándose de esta expresión, el lado incógnita. La R.T. a colocar; responde directamente a la posición de los lados que se dividen respecto al ángulo conocido.

Es decir:

Se tienen los siguientes casos:

I. Conocido el ángulo agudo y el cateto L adyacente a dicho ángulo.

CAPÍTULO 09

Geometría Analítica

OBJETIVOS:

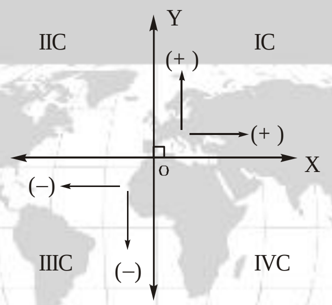
– Ubicar correctamente los puntos en el plano cartesiano.
–Aplicar y adaptar convenientemente las fórmulas del capítulo a situaciones geométricas determinadas.

MOTIVACIÓN

Uno de los mayores aportes a la teoría de las ecuaciones se debe al matemático francés, aunque nacido en Italia, Joseph Luis Lagrange (1736-1813). Lagrange fue uno de los mayores analistas de su época, y, además del Álgebra, destacó en otras disciplinas. Su mayor aporte al Álgebra es su famosa memoria *Sobre la resolución de las ecuaciones numéricas,* escrita, en 1767.

PLANO CARTESIANO

Llamado también sistema de coordenadas rectangulares, es aquel sistema de referencia formado por el corte perpendicular de dos rectas numéricas en un punto denominado origen del sistema.



En el gráfico adjunto se puede apreciar la división del plano en cuatro regiones, cada una de las cuales se va a denominar cuadrante y tienen la numeración que se indica. Las rectas numéricas se llaman:

eje X: eje de abscisas.

eje Y: eje de ordenadas.

Nota: Los cuadrantes no consideran a punto sobre el eje X e Y.
Sobre este plano cartesiano, René Descartes dio origen a su Geometría Analítica y a representar geométricamente ecuaciones algebraicas que relacionaban dos variables (x e y); tal es el caso de las

rectas, las cónicas (parábola, elipse, hipérbola), la circunferencia y otras curvas maravillosas (lemniscatas, cicloides, espirales de Arquímedes, etc.); que son materia de análisis en un curso más completo de Geometría Analítica que el que aquí presentamos.

PAR ORDENADO (X;Y)

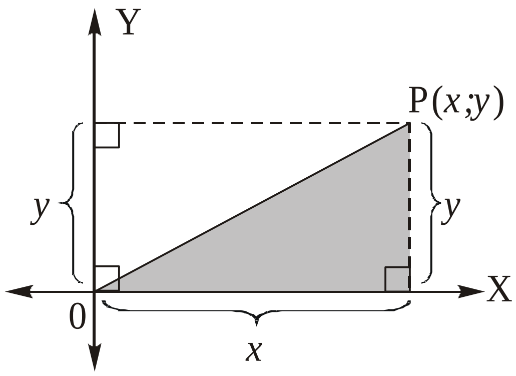
Es un conjunto formado por dos elementos que tienen un orden establecido, el primer elemento pertenece al eje de las abscisas, el segundo elemento pertenece al eje de las ordenadas.

Observación

x: ubicación del punto respecto del eje de abscisas
y: ubicación del punto respecto del eje de ordenadas.

UBICACIÓN DE UN PUNTO

Un punto queda localizado en el plano cartesiano; cuando se conocen los valores que le corresponden a la proyección del punto sobre cada uno de los ejes. En el gráfico:



x e y: componentes de P.

El punto es:

P(x; y)

x: abscisa de P.

y: ordenada de P.

: radio vector

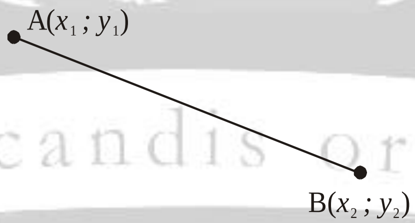
Se cumple:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}\ ; r > 0$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

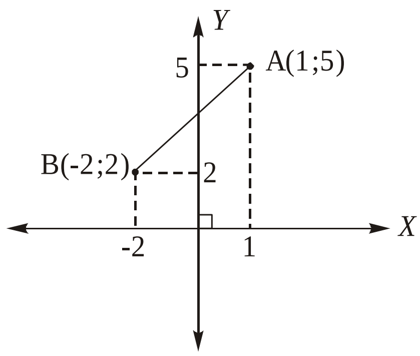
Dados los puntos

$A(x_1;y_1)$ y $B(x_2;y_2)$; la distancia entre ellos es calculada así:



$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo:



A(1; 5) y B(−2; 2)

$$d(A;B)=\sqrt{\left[1-(-2)\right]^2+(5-2)^2}$$

$$d(A;B)=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}\rightarrow\therefore\ d(A;B)=3\sqrt{2}$$

DISTANCIA HORIZONTAL (D_H)

Dado los puntos $P(x_1; y)$ y $Q(x_2; y)$, entonces la distancia horizontal (D_H), se calcula restando las abcisas de P y Q.

$$\Rightarrow \boxed{D_H = x_2 - x_1}, \text{ donde } x_2 > x_1$$

Ejemplos:

1. Hallar la distancia horizontal entre $P(-4; 3)$ y $Q(5; 3)$

$\Rightarrow D_H = 5-(-4) \qquad \therefore \boxed{D_H = 9}$

DISTANCIA VERTICAL (D_V)

Dado los puntos $P(x; y_1)$ y $Q(x; y_2)$, entonces la distancia vertical (D_V), se calcula restando las ordenadas de P y Q.

$$\Rightarrow \boxed{D_V = y_2 - y_1}, \text{ donde } y_2 > y_1$$

1. Hallar la distancia vertical entre $A(-4; 5)$ y $B(-4; -3)$.

$$\Rightarrow D_V = 5-(-3) \qquad \therefore \boxed{D_V = 8}$$

2. Hallar la distancia vertical entre $R(2; 16)$ y $S(2; 4)$.

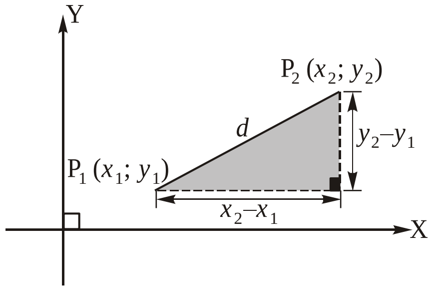
$$\Rightarrow D_V = 16-4 \qquad \therefore \boxed{D_V = 12}$$

Problema desarrollado

Demostrar que la distancia entre los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ es:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}$$

Demostración:



Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo tenemos:

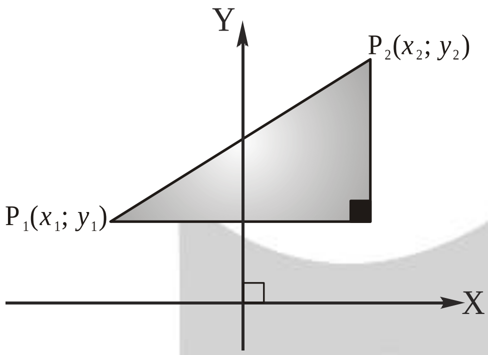
$$d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Problema por desarrollar

1. Demostrar que el área del triángulo mostrado es:

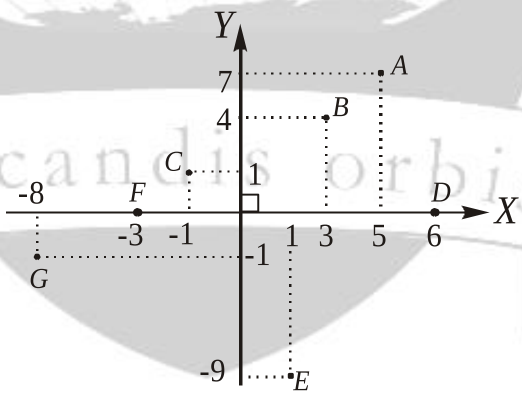
$$S = \frac{\left(x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1\right) - \left(x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2\right)}{2}$$



Demostración:

PRACTICA

1. Indicar las coordenadas de cada punto.



Rpta.:..

2. ¿En qué cuadrante se ubica P(-3;2)?

Rpta.:..

3. ¿El punto P(4;0) se ubica en el IC?

Rpta.:..

4. ¿Cuál es la distancia del punto P(3;6) al eje X?

Rpta.:..

5. ¿Cuál es la distancia entre P(1;-2) y Q(4;2)?

Rpta.:..

6. ¿Cuál es la distancia entre A(3;5) y B(3;-4)?

Rpta.:..

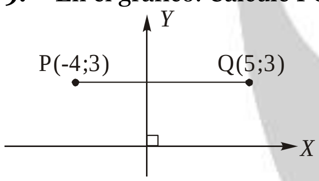
7. ¿Cuál es la distancia entre M(-2;6) y N(4;-2)?

Rpta.:..

8. Dado los puntos P(-6;2), Q(4;2); R(1;5) y T(1;-5).
Calcule:

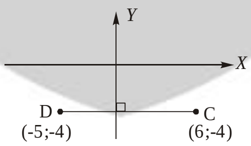
Rpta.:..

9. En el gráfico. Calcule PQ.



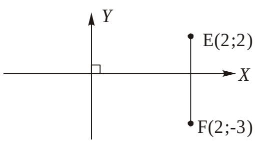
Rpta.:..

10. En el gráfico. Calcule DC.



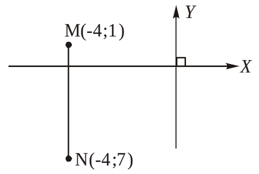
Rpta.:..

11. En el gráfico. Calcule EF.



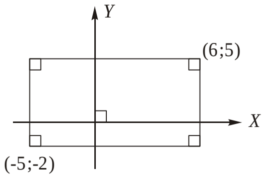
Rpta.:..

12. En el gráfico. Calcule MN.



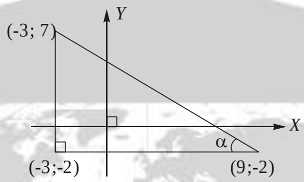
Rpta.:...

13. Determine el perímetro de la figura:



Rpta.:...

14. Calcule tg, si:

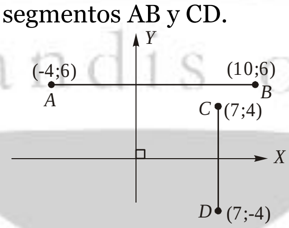


Rpta.:...

15. Si dos vértices de un triángulo equilátero son A(3;1) y B(7;4). Calcular su perímetro.

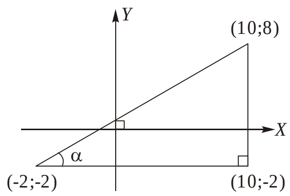
Rpta.:...

16. Calcule la suma de distancias de los segmentos AB y CD.



Rpta.:...

17. Calcule ctg.



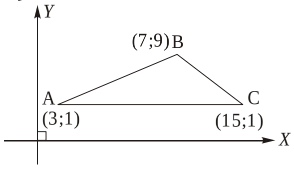
Rpta.:...

18. Calcule el área del rectángulo cuyos vértices están en los puntos:

A(-2; 7), B(– 2, 2), C(6; 2) y D(6; 7)

Rpta.:...

19. Calcule el área del triángulo ABC.



Rpta.:...

20. Calcule la distancia entre:

P(3a-2b; 2a+3b) y Q(2a-b; a+2b)

Si: $a^2+b^2=8$

Rpta.:...

TAREA

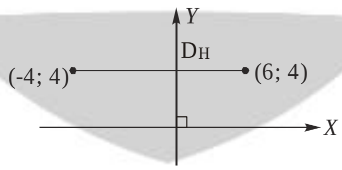
1. ¿Cuál es la distancia del punto P(3; 4) al eje X?

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 7

2. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A(-1; 3) y B(2; 5)?

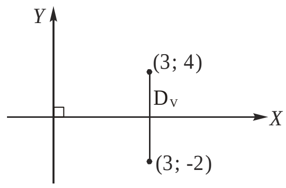
A) B) C)
D) E)

3. Calcule la distancia horizontal:



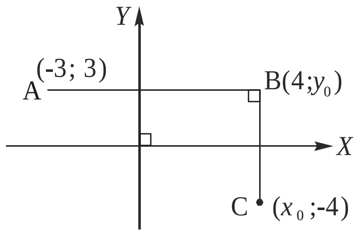
A) 10 B) 8 C) 6
D) 5 E) 4

4. Calcule la distancia vertical:



A) 5 B) 8 C) 6
D) 2 E) 0

5. Calcule: $(x_o + y_o)$.



A) 1 B) 3 C) 5

D) 7 E) 9

CAPÍTULO 10

Coordenadas del punto medio de un segmento

OBJETIVOS:

- ***Reconocer el punto medio de un segmento.***
- ***Calcular las coordenadas del punto medio de un segmento.***

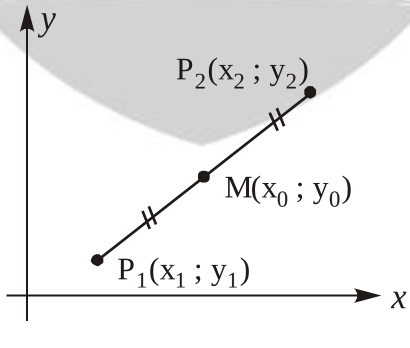
Introducción Histórica

Leonardo de Pisa (1170 - 1250)

Fue educado por maestros árabes que le pusieron al corriente de los muchos conocimientos matemáticos heredados de los griegos.

En 1202 publicó el *Liber Abaci*, que constituye una colección de problemas aritméticos y algebraicos, además de una defensa apasionada del sistema de numeración árabe. Es considerado como el matemático más destacado de la Europa Medieval.

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



Las coordenadas del punto medio $M(x_o; y_o)$ de un segmento cuyos extremos son

$P_1(x_1;y_1)$ $P_2(x_2;y_2)$:

y son:

$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$ $\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$

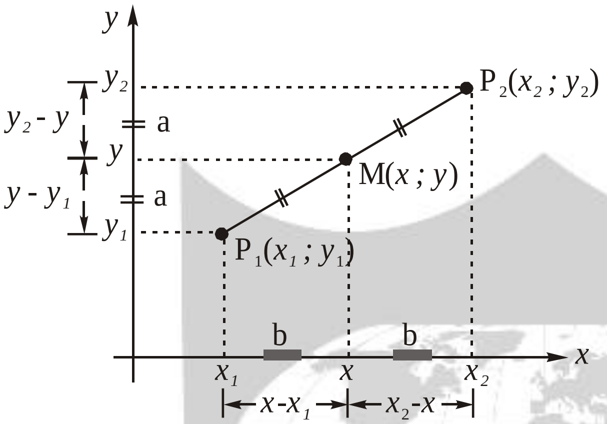
Problemas de Ensayo

Problema desarrollado:

1. Demostrar que las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $P_1(x_1\,;\,y_1)$ y $P_2(x_2\,;\,y_2)$ son .

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Resolución:



En el gráfico por el teorema de Thales:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{\text{b}}{\text{b}}=1$$

$$x-x_1=x_2-x \;\rightarrow\; 2x=x_1+x_2$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

De forma análoga:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{\text{a}}{\text{a}}=1$$

$$y-y_1=y_2-y \;\rightarrow\; 2y=y_1+y_2$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

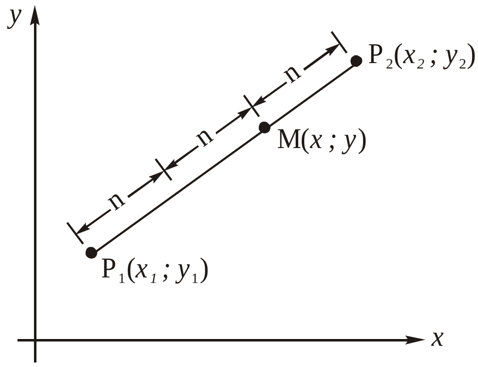
$$\therefore\; M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Problema por desarrollar:

2. En el siguiente gráfico demostrar que las coordenadas del punto M son:

$$x=\frac{x_1+2.x_2}{3}$$

$$y=\frac{y_1+2.y_2}{3}$$



Práctica

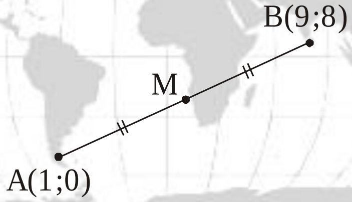
1. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son: A(3;2) y B(9;10)

Rpta.:...

2. Calcule las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son: P(8;2) y Q(-2;6)

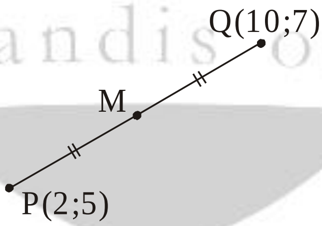
Rpta.:...

3. Calcule las coordenadas del punto "M"



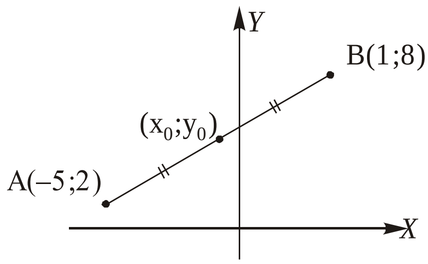
Rpta.:...

4. Calcule la suma de coordenadas del punto "M"



Rpta.:...

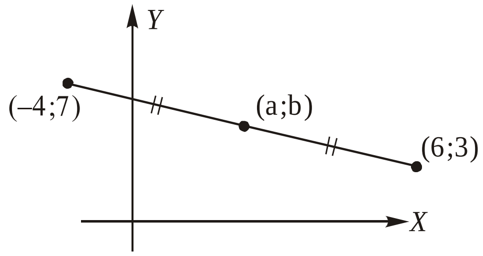
5. Del gráfico, calcule "$y_o - x_o$":



Rpta.:...

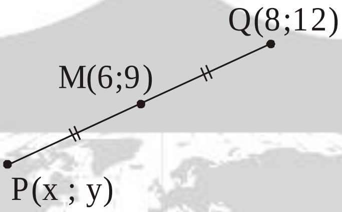
6. Calcule:

$$E = \frac{b}{a}$$



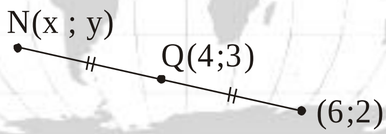
Rpta.:...

7. Calcule las coordenadas del punto "P"



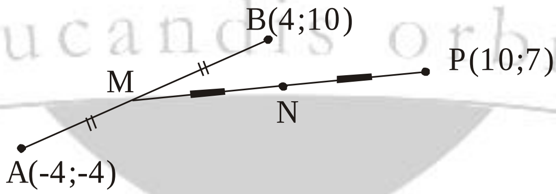
Rpta.:...

8. Calcule las coordenadas del punto "N"



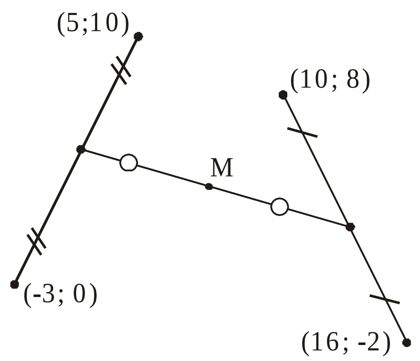
Rpta.:...

9. Calcule las coordenadas del punto "N"



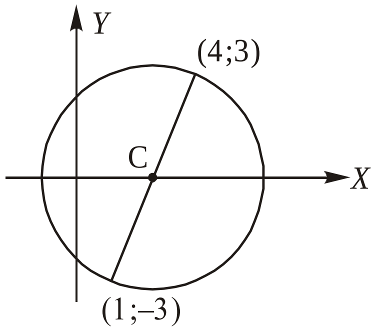
Rpta.:...

10. Calcule las coordenadas del punto medio "M"



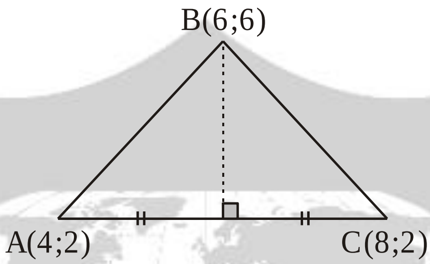
Rpta.:...

11. Calcule las coordenadas del centro de la circunferencia.



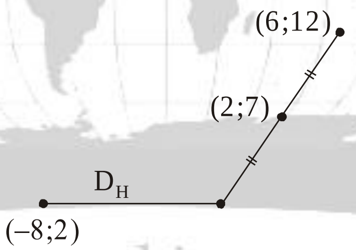
Rpta.:...

12. Calcule el área del triángulo:



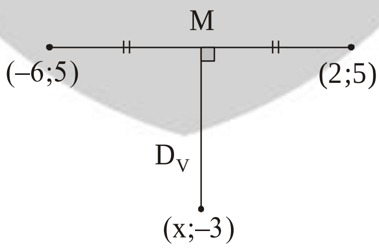
Rpta.:...

13. Calcule la distancia horizontal:



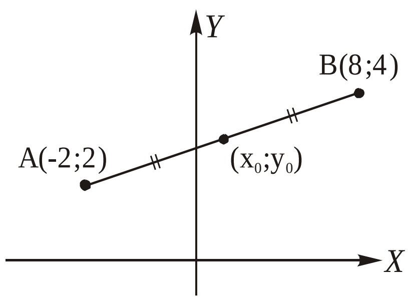
Rpta.:...

14. Calcule la distancia vertical:



Rpta.:...

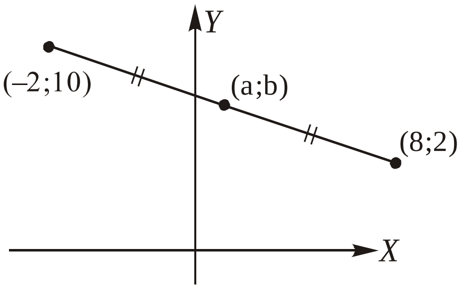
15. Del gráfico, calcule: "y_o - x_o"



Rpta.:...

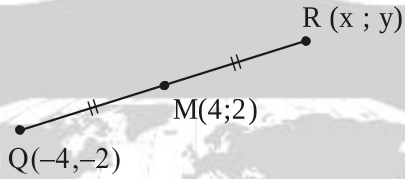
16. Halle:

$$R = \frac{b}{a}$$



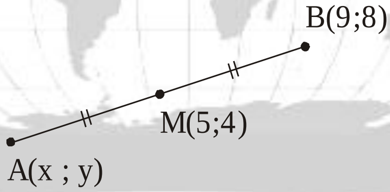
Rpta.:...

17. Calcule las coordenadas del punto “R”



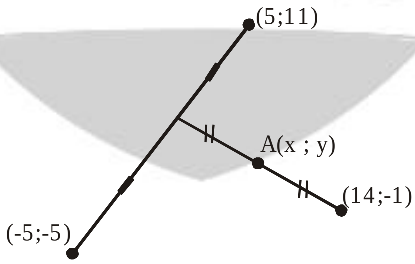
Rpta.:...

18. Calcule las coordenadas del punto A(x ; y)



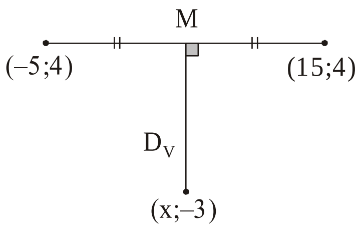
Rpta.:...

19. Calcule las coordenadas del punto A(x ; y).



Rpta.:...

20. Calcule la distancia vertical:



Rpta.:...

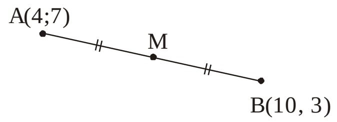
Tarea

1. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento NP cuyos extremos son:

N(3;5) y P(7;7)

A) (5;6) B) (3;6) C) (6;3)
D) (6;5) E) (6;6)

2. Calcule las coordenadas del punto "M"

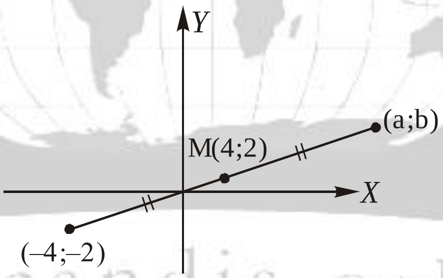


A) (5;10) B) (7;5) C) (10;7)
D) (7;10) E) (5;7)

3. Calcule las coordenadas del punto "A"

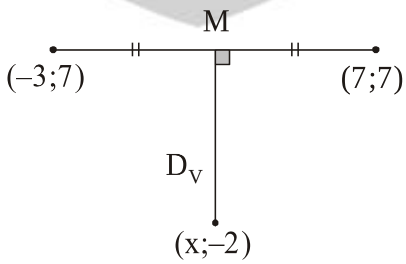
A) (16;14) B) (12;14) C) (16;12)
D) (12;12) E) (14;12)

4. Calcule :E=a/b



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. Calcule la distancia vertical:



A) 3 B) 1 C) 9
D) 5 E) 7

CAPÍTULO 11

Ecuación de la Recta

OBJETIVOS:

- ***Calcular la pendiente de una recta.***
- ***Cálculo de la ecuación de la recta.***
- ***Uso de la ecuación general de la recta en situaciones geométricas.***

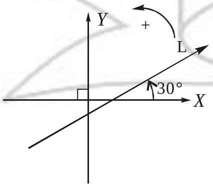
Introducción Histórica

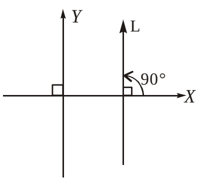
Peter G. Dirichlet (1805 - 1859)

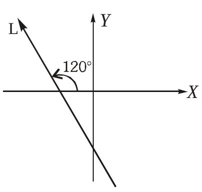
Estudió la convergencia de series demostrando que en una serie completamente convergente el valor de la suma de los términos es independiente del orden de los mismos. Junto con Legendre, demostró el teorema de Fermat para n = 5, ahora tan a de actualidad con la aparentemente buena demostración de Andrew Wytes.

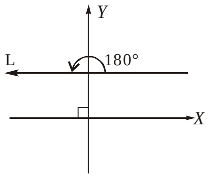
ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA

La dirección de una recta “L” se indica por el ángulo “” que forma con el eje “x”. El ángulo de inclinación “” se mide en sentido antihorario desde el eje “x” hasta la recta “L”.







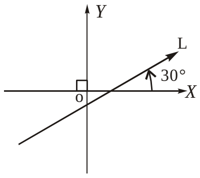


PENDIENTE DE UNA RECTA

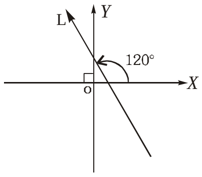
La pendiente de una recta "L" se denota por «m» y se define como la tangente de su ángulo de inclinación "θ". Es decir:

$$\boxed{m = \operatorname{tg}\theta}$$

Ejemplos:



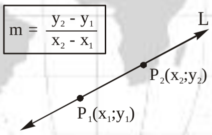
$$m = \operatorname{tg}30°$$
$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$m = \operatorname{tg}120°$$
$$m = -\sqrt{3}$$

Si una recta "L" pasa por los puntos $P_1(x_1;y_1)$ y $P_2(x_2;y_2)$ la pendiente "m" se calcula como sigue:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Ejemplo:

Calcule la pendiente de la recta "L" que pasa por los puntos $P_1(2;-3)$ y $P_2(5;6)$

Resolución:

$$m = \frac{6-(-3)}{5-2} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

ECUACIÓN DE UNA RECTA

Si P(x;y) es un punto cualquiera de una recta "L" y $P(x_1;y_1)$ es un punto conocido de ella, entonces la recta "L" queda determinada mediante la ecuación:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$ *forma punto-pendiente*

Esta ecuación la convertimos a una expresión lineal y resulta:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$ *forma general*

Ejemplo:

Calcule la ecuación de una recta que pasa por los puntos A(4 ; -3) y B(7 ; 9).

Resolución

Primero; calculamos la pendiente con los puntos A(4;– 3) y B(7 ; 9).

$$m = \frac{9-(-3)}{7-4} = \frac{12}{3} = 4$$

Segundo; reemplazamos la pendiente "m" y el punto conocido A(4 ; -3) en la ecuación punto pendiente, así:

$y =- (-3) = 4 \,.\, (x - 4)$ $\quad$ $y + 3 = 4x - 16$

$0 = 4x - 16 - y - 3$ $\quad$ $0 = 4x - y - 19$

$\boxed{4x - y - 19 = 0}$ *forma general*

Si reemplazamos como el punto conocido a B(7; 9) la ecuación resulta la misma.

$\boxed{4x - y - 19 = 0}$

PROPIEDADES

I. Dada la ecuación de una recta: Ax + By + C=, su pendiente "m" se calcula como sigue:

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}}$$

Ejemplo:
Calcule la pendiente de la recta cuya ecuación es:
3x - 4y -12 =0
Resolución:

$$3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{(-4)}$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}$$

II. Si un punto (a;b) pertenece a una recta "L" de ecuación: $\boxed{Ax + By + C = 0}$, entonces debe satisfacer su ecuación, es decir:

(a;b) L: Ax+By+C=0
Aa + Bb + C=0
Ejemplo:
El punto (a;5) pertenece a la recta de ecuación:
2x - 3y - 12 =0. Calcule el valor de "a".

Resolución:
(a;5) L: 2x – 3y – 12 = 0 … 2a – 3(5) – 12=0
a=27/2

CAPÍTULO 13 Razones Trigonométricas de Ángulos de cualquier Magnitud

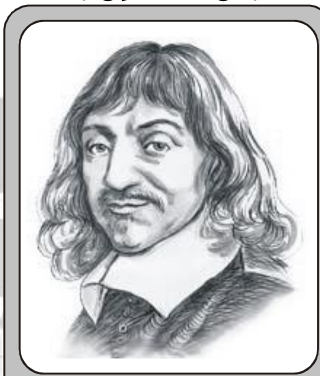
OBJETIVOS:

- ***El objetivo principal del capítulo, es calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo, así como reconocer los ángulos en posición normal.***
- ***Adaptar la teoría a determinadas situaciones geométricas.***

MOTIVACIÓN

RENÉ DESCARTES

(1596 - 1650)



René Descartes
(1596 – 1650)

René Descartes nació en Giras (Francia) alrededor del 31 de marzo de 1596, y murió en Estocolmo el 11 de febrero de 1650. A la edad de ocho años fue enviado a una escuela jesuitica, cuya disciplina y educación siempre destacaba, A causa de su salud delicada, le permitían permanecer hasta tarde en cama, costumbre que conservó durante toda su vida e incluso, en una visita a Pascal en 1647, la mencionó como principal benefactora para el buen estudio de la matemática.

Al dejar la escuela en 1612 Descartes fue a París y una vez allí, por medio de los jesuitas renovó su contacto con Mersenne, con quien consagró dos años al estudio de la matemática. En ese entonces, un hombre de buena posición social y económica entraba normalmente en el ejército o en la iglesia. Descartes optó por la primera opción y gracias a ello conoció a Isaac Beeckman, con quien trabó una calurosa amistad. Si bien el espíritu bélico no era compatible con él, pero la influencia de su familia y la tradición, lo llevarían a permanecer en esta actividad muchos años más. Sin embargo, ocupaba su ocio en estudios matemáticos.

Hacía 1626 se estableció en París donde se dedicó a la construcción de elementos ópticos hasta 1629, cuando influenciado por el Cardenal de Berulle viaja a Holanda y escribe para el periódico Le Monde una teoría física del universo, pero convencido de que ello le podría significar una enemistad con la Iglesia, decide finalmente abandonar la idea y recién se publicaría en 1664. Se dedicó entonces a componer un tratado de ciencia universal que finalmente fue publicado junto a dos apéndices en 1637. En 1641 publicó otro trabajo llamado Meditaciones que trataba su posición en la filosofía. Luego, en 1644, publica su Principia Philosaphiae, dedicado esencialmente a la física, en especial a las leyes de movimiento.

En 1647 recibió una pensión de la corte francesa en honor a sus descubrimientos, y dos años mas tarde viajó a Suecia -por invitación de la Reina- donde finalmente murió a causa de una inflamación en los pulmones.

Sin duda, la principal contribución de Descartes para con la ciencia matemática, fue su visión de que un punto cualquiera del plano geométrico podía representarse por medio de un par ordenado (x, y) -llamadas luego, en honor a él "coordenadas cartesianas" - que en definitiva representaban la distancia perpendicular desde los ejes del sistema hasta dicho punto. Esto fue el principal conector entre el lenguaje geométrico, casi experimental, y el lenguaje algebraico, ya que permitió relacionar una ecuación con una curva (en el plano geométrico) formada por todos los puntos cuyas coordenadas (x,y) fueran soluciones de la ecuación.

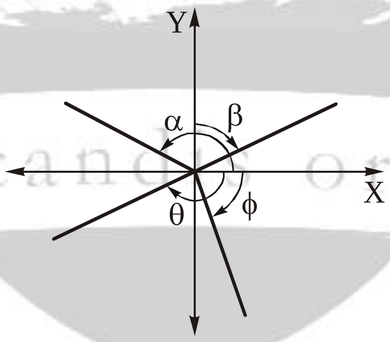
Asimismo, Descartes prestó especial atención a la teoría de las tangentes a las curvas y fue quien definió la recta tangente como una posición límite de la recta secante.

En uno de sus libros llamado Geometrie, Descartes expone un análisis del álgebra general sentando las bases de un idioma que luego resultaría universal. Es allí donde por primera vez denota con las primeras letras del alfabeto aquellas cantidades conocidas, y con las últimas las cantidades desconocidas, notación que ha prevalecido hasta la actualidad.

Hasta este momento sólo habiamos trabajado con las R.T de ángulos agudos, es decir cuya magnitud estaba entre cero y noventa grados. En este capítulo estudiaremos las R.T. de ángulos netamente trigonométricos; es decir ángulos cuya magnitud este entre – y +.

ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Llamada también en posición canónica o standar; es aquel ángulo trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen del sistema cartesiano, su lado inicial coincide con el semieje positivo de abscisas y su lado final se ubica en cualquier región del plano, siendo el que indica a que cuadrante pertenece el ángulo.



En el gráfico, por ejemplo β no es un ángulo canónico (note donde se inicia). Como α, θ y ϕ son ángulos canónicos; decimos: αIIC, θIIIC; ϕ IVC.

PROPIEDAD

Si θ es un ángulo en posición normal positivo y menor que una vuelta, entonces se cumple que:

Si $\theta \in$ IC	$\Rightarrow \quad 0° < \theta < 90°$
Si $\theta \in$ IIC	$\Rightarrow \quad 90° < \theta < 180°$
Si $\theta \in$ IIIC	$\Rightarrow \quad 180° < \theta < 270°$
Si $\theta \in$ IVC	$\Rightarrow \quad 270° < \theta < 360°$

Ejemplo:

Si: θIIIC, ¿en qué cuadrante está $\frac{2\theta}{3}$?

Resolución:

Si: θIIIC $\Rightarrow$ 180°<θ<270°

$$\frac{2}{3}\cdot 180° < \frac{2}{3}\theta < \frac{2}{3}\cdot 270°$$

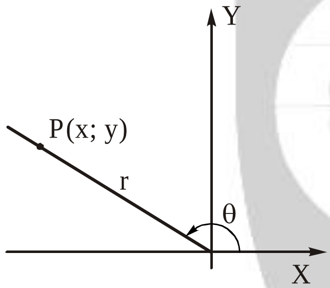
$$120° < \frac{2\theta}{3} < 180°$$

Como $\frac{2\theta}{3}$ está entre 120° y 180° entonces: $\frac{2\theta}{3} \in \text{IIC}$

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo canónico, tomamos un punto que pertenezca a su lado final.

Luego:



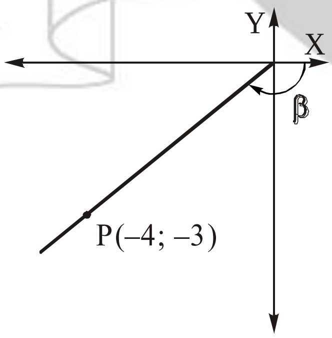
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$	$\csc\theta = \frac{r}{y}$
$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\sec\theta = \frac{r}{x}$
$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{y}$

Donde:

X: abscisa *Y*: ordenada *r*: radio vector

Además: $r^2 = x^2 + y^2$

Ejemplo:



Se observa del gráfico:

$x = -4; y = -3 \Rightarrow r^2 = (-4)^2 + (-3)^2$

$r = 5$

Luego: $\operatorname{sen}\beta = -\frac{3}{5}$; $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

Problemas de Ensayo

Accidentes Litorales

Oceanía cuenta con una gran diversidad de accidentes litorales, como por ejemplo.

- EL golfo de Carpentaria, Estrecho de Tasmania, Cook. Bahía Australiana.

3. Sistemas Hidrográficos

Sistemas Fluviales

La red red hidrográfica de mayor relevancia se encuentra en Australia donde destacan los siguientes ríos: Murray, con su afluente el Darling y el Fitzroy

Lagos

El lago más importante del continente es Eyre situado en Australia.

Mares

El Oceanía se encuentra el segundo mar más extenso de la Tierra: el Mar de Coral en la parte oriental de Australia. Otro mar importante es el mar de Tasmania.

4. Climatología

En términos generales los territorios situados en el norte de Australia y en la mayor parte de las islas que conforman la Melanesia, Micronesia y Polinesia tienen clima tropical, es decir, caluroso, húmedo y lluvioso, por encontrarse en zonas de baja latitud, pero en el extremo sur oriental de Australia y Nueva Zelanda impera un clima templado. La parte central y occidental de Australia tiene un clima árido o desértico.

5. Población y División Política

Oceanía tiene una población estimada cerca de 28 millones de habitantes con una densidad de 3,2 habitantes por km^2. Es el continente menos poblado y menos denso de la Tierra (sin considerar Antártida).

En Australia y Nueva Zelanda vive la población de raza blanca. En el resto del territorio, la población es nativa, a excepción de Hawai, en donde predomina la población blanca de los Estados Unidos.

Los 14 países de Oceanía tienen tendencias a la conformación de estados republicanos:

PAÍSES DE OCEANÍA

PAÍSES	SUPERFI. EN KM²	POBLACIÓN	*CAPITAL*	IDIOMA	MONEDA
Australia Estados Federados de Micronesia Fiji	7 682 300 702 18 274	20 141 000 107 000 876 000	Canberra Palikir Suva	Inglés Inglés Fijiano – Inglés	Dólar de Australia Dólar USA Dólar de Fiji
Islas Marianas del Norte Islas Marshall Islas Salomón	458 181 28 476	22 000 100 000 566 000	Saipán Majuro Honiara	Inglés Inglés y marsha Inglés	Dólar USA Dólar USA Dólar de las Is. S
Kiribati Nauru Nueva Zelanda	717 21 269 057	100 000 10 000 4 131 000	Bairiki Yaren Wellington	Inglés Nauruano e Ing. Inglés – Maorí	Dólar de Australia Dólar de Austral.
Palau Papua–Nueva Guinea Samoa Occidental	458 461 691 2 831	20 000 4 205 000 200 000	Koror Port Moresby Apia	Inglés Inglés Samoano e Ing.	Dólar USA Kina Tala
Tonga Tuvalu Vanuatu	748 25 14 763	100 000 13 000 200 000	Nukualofa Funafuti Port. Vila	Tongano e Ing. Inglés Bislama, Inglés y	Paanga Dólar de Tuvalu Vatu

educandis orbis

educandis orbis

educandis orbis