

En coordenadas, tendremos:

$$\vec{V} =: \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\vec{V} = (a_x b_y - a_y b_z) \vec{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}$$

es decir:

$$V_x =: a_y b_z - a_z b_y \quad (\text{E.26})$$

$$V_y =: a_z b_x - a_x b_z \quad (\text{E.27})$$

$$V_z =: a_x b_y - a_y b_x \quad (\text{E.28})$$

Existe una forma compacta de recordar las expresiones (E.26-28) utilizando la noción de determinante de una matriz cuadrada  $3 \times 3$ . En efecto, puede escribirse el producto vectorial de dos vectores en la forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

*Ejemplo.* El producto vectorial  $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b}$  de los dos mismos vectores del ejemplo anterior es:

$$V_x = 2 \times \sqrt{3} - 0 \times 1 = 2\sqrt{3} \quad (\text{E.29})$$

$$V_y = 0 \times 0 - 0 \times \sqrt{3} = 0 \quad (\text{E.30})$$

$$V_z = 0 \times 1 - 2 \times 0 = 0 \quad (\text{E.31})$$

es decir,  $\vec{V} = 2\sqrt{3}\vec{i}$

### 6.3 Operadores diferenciales sobre vectores

Existen magnitudes escalares, como la densidad, la masa o la energía, y otras vectoriales, como las fuerzas o los campos eléctricos o gravitatorios, que pueden depender de la posición y del tiempo. Para cada punto del espacio e instante de tiempo toman un valor. En este apartado consideraremos únicamente la dependencia espacial, suponiendo que no hay dependencia explícita del tiempo o que los cálculos se hacen a tiempo fijo. La dependencia espacial de una magnitud escalar  $A$  o una vectorial  $\vec{a}$  se expresa de la siguiente forma:

$$A = F(\vec{r}) = F(x, y, z) \quad (\text{E.32})$$

$$\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(x, y, z) \quad (\text{E.33})$$

siendo la ecuación vectorial (E.33) equivalente a tres ecuaciones:

$$a_x = f_x(x, y, z)$$

$$a_y = f_y(x, y, z)$$

$$a_z = f_z(x, y, z)$$

Las funciones  $F$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  contienen la dependencia de las magnitudes  $A$  y  $\vec{a}$  con la posición. En lo sucesivo, para no introducir demasiados términos distintos, utilizaremos la misma letra para designar la magnitud y la función que da su dependencia en función de  $\vec{r}$ . Es decir:

$$A = A(x, y, z)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$$

### 6.3.1 Gradiente

Consideremos una cantidad escalar  $A = A(x, y, z)$ . Llamamos gradiente de esa cantidad a un vector  $\vec{V} = \text{grad}A$ , cuyas componentes son:

$$V_x = (\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (\text{E.34})$$

$$V_y = (\text{grad}A)_y = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (\text{E.35})$$

$$V_z = (\text{grad}A)_z = \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{E.36})$$

donde el símbolo  $\frac{\partial}{\partial x}$  es la derivada parcial respecto a  $x$ .

En una dimensión, el gradiente es simplemente la derivada de la función:

$$\text{grad}A = \frac{dA}{dx}$$

por lo que coincide con la pendiente de la curva que representa la función  $A$  en función de  $x$ .

A veces, se caracteriza el operador gradiente mediante el símbolo  $\vec{\nabla}$  (nabla), de forma que:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{E.37})$$

es decir:

$$\text{grad}A = \vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k}$$

que coincide con la definición de operador gradiente. Nótese que el operador *grad* se aplica a un escalar y el resultado de la aplicación es un vector.

**Ejemplo.** Sea la función escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La componente *x* del gradiente será:

$$(\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

y lo mismo para las otras dos componentes. Agrupándolas todas, tendremos:

$$\text{grad}A = \vec{\nabla}A = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k} = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$$

**Ejemplo.** Sea la función escalar:

$$A = \frac{xyz}{r} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Procediendo ahora de la misma forma, calculamos la componente *x* del gradiente:

$$(\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ xyz (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{yz}{r} - \frac{x^2 yz}{r^3}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, y agrupando, queda:

$$\text{grad}A = \bar{\nabla}A = \frac{1}{r} \left( yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k} - xyz \frac{\bar{r}}{r^2} \right)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ .

### 6.3.2 Divergencia

El operador divergencia se aplica a un vector y el resultado de su aplicación es un escalar. La definición de divergencia de un vector  $\bar{V}$  es la siguiente:

$$\text{div}\bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \quad (\text{E.38})$$

es decir, podemos calcular la divergencia de un vector calculando formalmente el producto escalar del operador  $\bar{\nabla}$  por el vector en cuestión.

**Ejemplo.** Sea el vector  $\bar{V} = x^2\bar{i} + xy\bar{j} + ye^{-2x}\bar{k}$ . Su divergencia será:

$$\text{div}\bar{V} = 2x + x + 0 = 3x$$

Cuando el vector del que queremos calcular la divergencia es el gradiente de una cierta cantidad escalar  $A$ , la divergencia resulta ser:

$$\text{div}(\text{grad}A) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (\text{E.39})$$

y en términos del operador  $\bar{\nabla}$ :

$$\text{div}\bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}A = \bar{\nabla}^2 A \quad (\text{E.40})$$

donde al operador  $\bar{\nabla}^2$  se le llama laplaciano y se suele caracterizar con el símbolo  $\Delta$  (delta mayúscula):

$$\bar{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{E.41})$$

**Ejemplo.** Consideremos la cantidad escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

cuyo gradiente calculamos anteriormente:

$$\text{grad}A = \bar{\nabla}A = -\frac{x}{r^3}\bar{i} - \frac{y}{r^3}\bar{j} - \frac{z}{r^3}\bar{k}$$

Calculemos ahora la derivada respecto de  $x$  de la primera componente de este vector:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{r^3} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - x \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{r^5} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, resulta que la divergencia del gradiente de  $A$  será:

$$\text{div}(\text{grad}A) = \Delta A = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{r^2}{r^5} = 0$$

### 6.3.3 Rotacional

El rotacional es un operador que se aplica a un vector y el resultado de la aplicación es otro vector. En términos del operador  $\vec{\nabla}$ , se define así:

$$\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{E.42})$$

**Ejemplo.** Sea el vector  $\vec{V} = (x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + z\vec{k}$ . Su rotacional será:

$$\text{rot}\vec{V} = 0 \times \vec{i} + 2z\vec{j} - 2y\vec{k} = 2z\vec{j} - 2y\vec{k}$$

Cuando el vector  $\vec{V}$  es el gradiente de una cierta magnitud escalar  $A$ , el rotacional resulta ser cero. En efecto:

$$\text{rot}(\text{grad}A) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}A) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})A = 0$$

dado que el producto vectorial de un vector por sí mismo es siempre igual a cero. Puede verificarse directamente, a partir de la expresión de las componentes de un gradiente, que el rotacional de un gradiente es siempre cero.

**Ejemplo.** Consideremos la función escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

cuyo gradiente encontramos anteriormente. Calculemos la componente  $x$  del rotacional del gradiente de  $A$ :

$$[\text{rot}(\text{grad}A)]_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{y}{r^3} \right) = \frac{3zy}{r^5} - \frac{3yz}{r^5} = 0$$

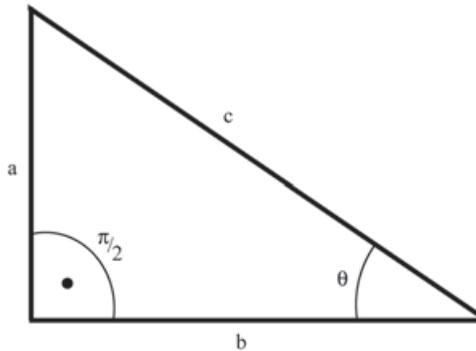
y lo mismo ocurre con las otras dos componentes.

# Apéndice F. Algunas fórmulas matemáticas útiles

## 7.1 Trigonometría

### 7.1.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo, como el de la figura F.1.



**Fig. F.1.** Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que la relación de los lados con el ángulo es: a: cateto opuesto al ángulo  $\theta$ . b: cateto contiguo al ángulo  $\theta$ . c: hipotenusa.

Seno

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad (\text{F.1})$$

Coseno

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{catetocontiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad (\text{F.2})$$

Tangente

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{catetocontiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad (\text{F.3})$$

Secante

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \quad (\text{F.4})$$

Cosecante

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \quad (\text{F.5})$$

Cotangente

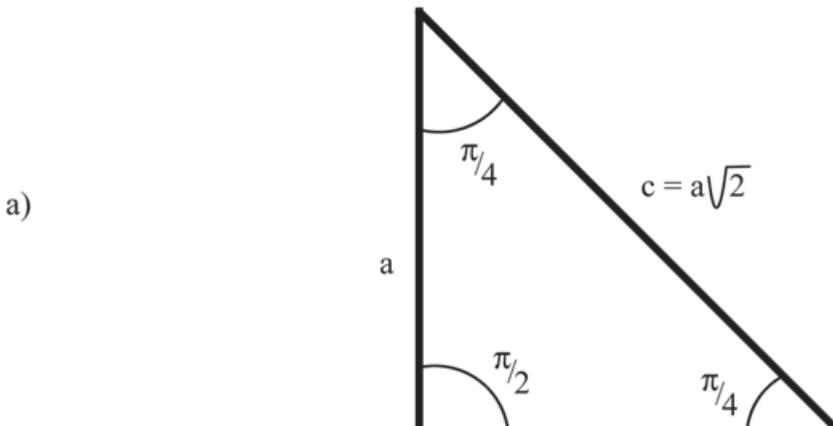
$$\operatorname{cot} \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (\text{F.6})$$

Funciones trigonométricas de ángulos sencillos

**a) Triángulo rectángulo de catetos iguales**

Dado que  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales y que  $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$ , implica que

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$$



**Fig. F.2.** a) Triángulo rectángulo de catetos iguales. b) Triángulo equilátero.

Según el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad c = a\sqrt{2}$$

por tanto:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad (\text{F.7})$$

$$\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad (\text{F.8})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a} = 1 \quad (\text{F.9})$$

**b) Triángulo equilátero**

Dado que la suma de los tres ángulos es igual a  $\pi$  y que los tres son iguales, cada uno de ellos vale  $\frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ). En el vértice B el ángulo se divide en dos iguales, que valen, por tanto,  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ) cada uno de ellos. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BCD, se obtiene que:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2^2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

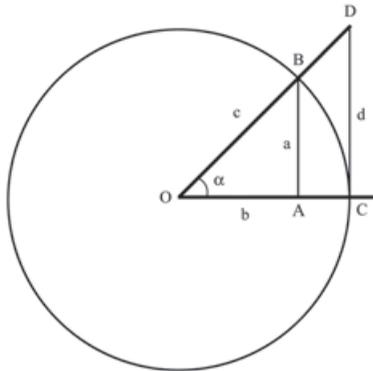
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{F.10})$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad (\text{F.11})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \quad (\text{F.12})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{F.13})$$

Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad



**Fig. F.3.** Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad.

En la figura F.3 vemos que la hipotenusa  $c$  del triángulo OAB, recto en A, es igual al radio, igual a la unidad.

Por tanto, el seno de  $\alpha$  es igual al segmento  $a$  y el coseno es igual al segmento  $b$ . La tangente de  $\alpha$  es igual a la longitud  $a$  dividida por la longitud  $b$ , que es igual al segmento  $d$  dividido por el segmento OC, de longitud unidad y, por tanto, igual al segmento  $d$ . Esta última propiedad se deduce del hecho de que el triángulo OCD es recto en C. Por tanto:

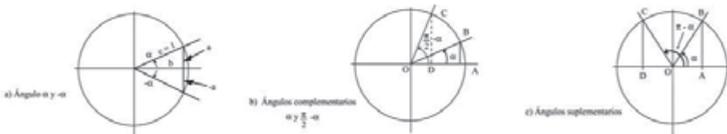
$$\text{sen } \alpha = a$$

$$\text{cos } \alpha = b$$

$$\text{tg } \alpha = d$$

**Ángulo negativo, complementario y suplementario**

Aplicando lo anterior a los ángulos de la figura F.4.a, se obtiene:



**Fig. F.4.** Esquemas para la obtención de las funciones trigonométricas de ángulos relacionados.

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.14})$$

$$\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.15})$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\text{F.16})$$

Dos ángulos se denominan complementarios si su suma es igual a  $\pi/2(90^\circ)$

Se deduce de la construcción de la figura F.4.b que se verifican las relaciones:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.17})$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.18})$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cot}\alpha \quad (\text{F.19})$$

Dos ángulos se denominan suplementarios si su suma es igual a  $\pi(180^\circ)$ . De la figura F.4.c:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.20})$$

$$\operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.21})$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\text{F.22})$$

### 7.1.2 Fórmulas trigonométricas

Del teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo de la figura F.1:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{F.23})$$

Dividiendo por  $c^2$ , resulta:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad (\text{F.24})$$

### *Funciones trigonométricas de la suma algebraica de ángulos*

Puede demostrarse que para cualquier pareja de ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\beta \pm \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{F.25})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos}\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{F.26})$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{F.27})$$

Cuando  $\alpha = \beta$  se sigue que:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (\text{F.28})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (\text{F.29})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\text{F.30})$$

### Suma algebraica de funciones trigonométricas

Asímismo para cualquier pareja de ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \right] \quad (\text{F.31})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \quad (\text{F.32})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right] \quad (\text{F.33})$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{F.34})$$

### Ley de los senos y de los cosenos

La ley de los senos indica que se cumplen las siguientes relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, como el de la figura F.5:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (\text{F.35})$$

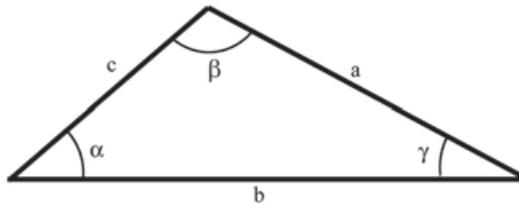


Fig. F.5. La ley de los senos y los cosenos puede aplicarse a cualquier triángulo.

**Ley de los cosenos**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{F.36}$$

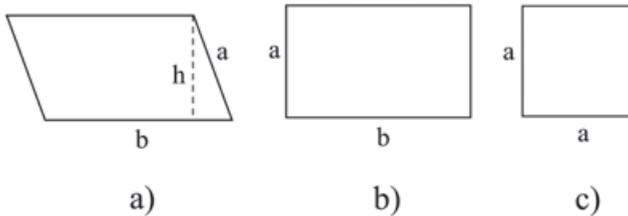
Ambas leyes se cumplen en cualquier triángulo.

**7.2 Áreas y volúmenes**

**7.2.1 Áreas de figuras planas**

Paralelogramo de base  $b$  y altura  $h$ :

$$S^v \text{ (paralelogramo)} = bh$$



**Fig. F.6.** a) Paralelogramo. b) Rectángulo. c) Cuadrado.

**Casos particulares:** El rectángulo de lados  $a$  y  $b$  es un paralelogramo en el que, si tomamos como base el lado  $b$ , la altura es igual al lado  $a$ . Por lo tanto:

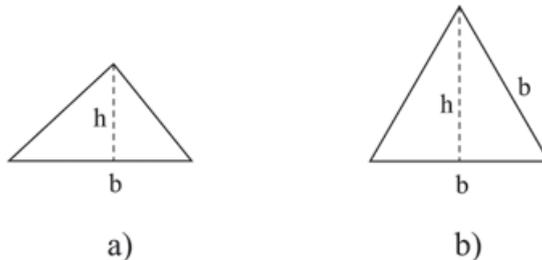
$$S^v \text{ (rectángulo)} = ab$$

El cuadrado es un caso particular de rectángulo con los cuatro lados iguales. Si la longitud de uno de éstos es  $a$ , entonces:

$$S^v \text{ (cuadrado)} = a^2$$

Triángulo de base  $b$  y altura  $h$ :

$$S^v \text{ (triángulo)} = \frac{1}{2}bh$$



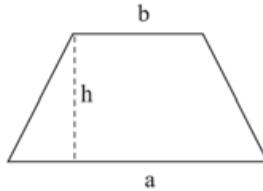
**Fig. F.7.** a) Triángulo. b) Triángulo equilátero.

Casos particulares: para un triángulo equilátero de lado  $b$ , el área es:

$$S^v (\text{equilátero}) = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

Trapezio de lados paralelos  $a$  y  $b$ , y altura  $h$ :

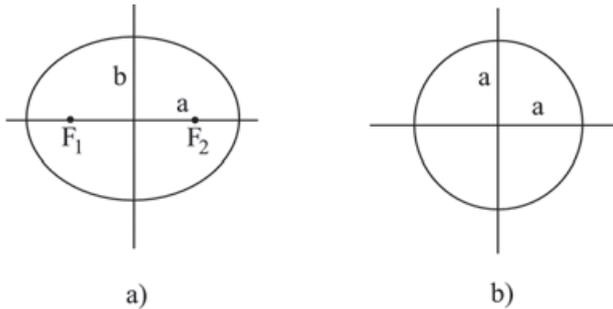
$$S^v (\text{trapezio}) = \frac{a+b}{2} h$$



**Fig. F.8.** Trapecio.

Elipse de semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ :

$$S(\text{elipse}) = \pi ab$$



**Fig. F.9.** a) Elipse. Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  son los focos. b) Círculo.

Caso particular: el círculo es una elipse que tiene los dos semiejes iguales,  $b = a$ :

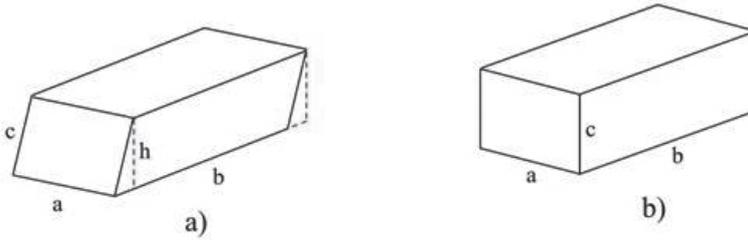
$$S (\text{círculo}) = \pi a^2$$

### 7.2.2 Superficies y volúmenes de cuerpos tridimensionales

Paralelepípedo cuya base es un rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , siendo dos de las cuatro caras laterales rectángulos de lados  $a$  y  $c$  los otros dos, paralelogramos de base  $b$  y altura  $h$ :

$$S (\text{paralelepípedo}) = 2(ab + ac + bh)$$

$$V (\text{paralelepípedo}) = abh$$



**Fig. F.10.** (a) Paralelepípedo inclinado. (b) Paralelepípedo recto.

Caso particular: un paralelepípedo recto es tal que la altura  $h$  es igual al lado  $c$ , por lo que:

$$S(\text{paralelepípedo}) = 2(ab + ac + bc)$$

$$V(\text{paralelepípedo recto}) = abc$$

Un cubo es un paralelepípedo recto tal que los tres lados son iguales. Si la longitud de unos de ellos es  $a$ :

$$S(\text{cubo}) = 6a^2$$

$$V(\text{cubo}) = a^3$$

Cilindro cuya base es un círculo de radio  $R$  y cuya altura es  $h$ :

$$S(\text{cilindro}) = 2\pi Rh$$

$$V(\text{cilindro}) = \pi R^2 h$$

Esfera de radio  $R$ :

$$S(\text{esfera}) = 4\pi R^2$$

$$V(\text{esfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Cono cuya base es un círculo de radio  $R$  y cuya altura es  $h$ :

$$S_{\text{lateral}}(\text{cono}) = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$S_{\text{total}}(\text{cono}) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

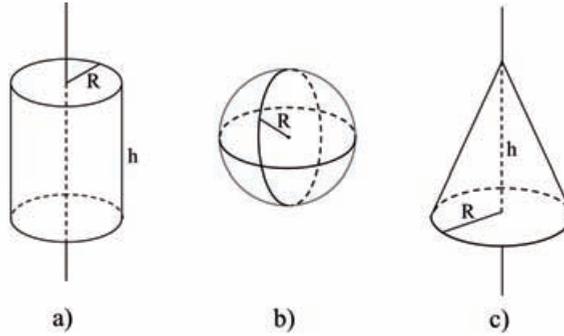


Fig. F.11. (a) Cilindro. (b) Esfera. (c) Cono.

## 7.3 Ecuaciones de curvas planas

### 7.3.1 Recta

La ecuación de una recta en el plano  $XY$  es:

$$y = mx + y_0$$

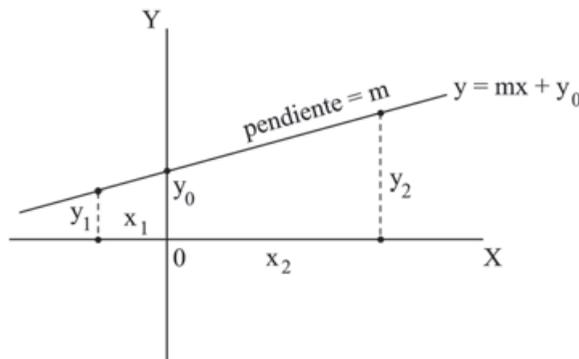


Fig. F.12. Ecuación de la recta.

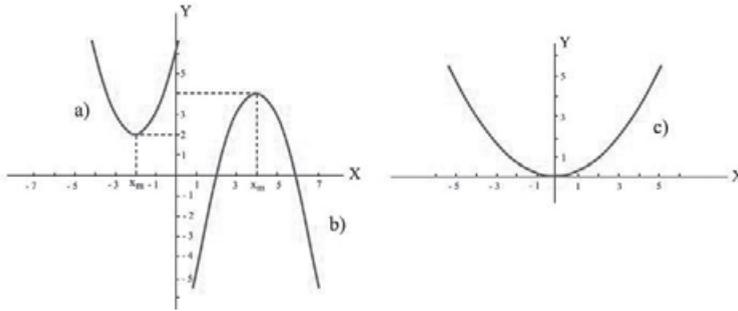
El parámetro  $m$  es la pendiente de la recta,  $\frac{dy}{dx} = m$ , mientras que  $y_0$  es la ordenada en el origen. Si lo que se sabe es que la recta pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , la ecuación de la curva se puede escribir en función de las coordenadas de estos puntos:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

### 7.3.2 Parábola

Una parábola se puede escribir, en general, de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$



**Fig. F.13.** Parábolas. a)  $y = x^2 + 4x + 6$ , b)  $y = -x^2 + 8x - 12$ , c)  $y = 0,2x^2$ .

Si el coeficiente  $a$  es positivo,  $y$  tiende a  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a  $\pm\infty$  y, por lo tanto, los “cuernos” de la parábola están dirigidos hacia arriba, lo que corresponde a que la derivada segunda sea siempre positiva,  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$ , es decir, que la pendiente en cada punto aumente cuando aumenta  $x$ . Si, por el contrario,  $a$  es negativo, entonces los “cuernos” están dirigidos hacia abajo y la derivada segunda es siempre negativa. La posición del máximo (o el mínimo) de la parábola estará en un punto  $x_M$  tal que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_M} = 2ax_M + b = 0 \Rightarrow x_M = -\frac{b}{2a}$$

$$y_M = y(x = x_M) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Si el máximo (o el mínimo) coincide con el origen de coordenadas, entonces  $x_M = y_M = 0$ , lo que implica  $b = c = 0$ , y la ecuación de la parábola queda reducida a:

$$y = ax^2$$

Los puntos en los que la parábola corta al eje  $x$  corresponden a los puntos en los que  $y = 0$  y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas dos soluciones son las llamadas raíces del polinomio de segundo orden que caracteriza a la parábola:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si el radicando  $b^2 - 4ac > 0$ , hay dos soluciones reales y la parábola corta en dos puntos al eje  $X$ . Si es negativo, entonces no hay soluciones reales y la parábola no corta al eje  $X$  en ningún punto. Si es cero, entonces la parábola es tangente al eje  $X$  en un punto.

### 7.3.3 Elipse

Una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  referida a un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de la elipse tiene como ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{F.37})$$

Puede verse en la ecuación (F.37) que, en efecto, cuando  $x = 0$ ,  $y = \pm b$  y cuando  $y = 0$ ,  $x = \pm a$ . A partir de esa expresión es posible despejar  $y$ :

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Nótese que cuando  $a = b$ , obtenemos la ecuación de una circunferencia de radio  $a$ . Existen dos puntos singulares sobre la línea del semieje mayor llamados focos. Consideraremos el caso en que el semieje  $a$  es superior al semieje  $b$ , tal como se muestra en la figura F.9.a, de forma que los focos se encuentran sobre el eje  $X$ . Su posición es la siguiente:

$$x_F = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

y tienen la propiedad de que la suma de las distancias entre cualquier punto de la curva y los dos focos es una constante, igual a  $2a$ . De nuevo, para el caso de la circunferencia,  $a = b$ , los focos coinciden con el centro y la distancia entre cualquier punto de la curva y el centro es igual a  $\frac{2a}{2} = a$ , el radio de la circunferencia.

## 7.4 Exponenciales y logaritmos

### 7.4.1 La función exponencial

La exponencial se define de la siguiente forma

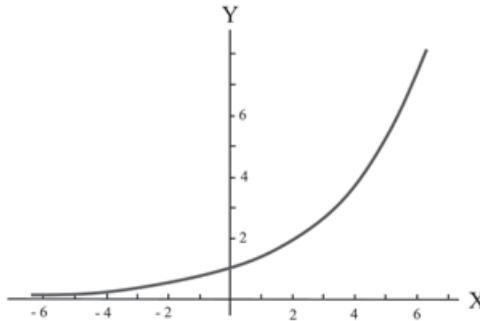
$$f(x) = e^x$$

siendo  $e$  un número trascendente (con infinitas cifras decimales no recurrentes):

$$e = 2,71828\dots$$

La función exponencial tiene la propiedad de que su derivada es igual al valor de la función en cualquier punto:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$



**Fig. F.14.** Función exponencial:  $y = e^{\frac{1}{3}x} = 10^{0,145x}$ .

La función exponencial crece con  $x$  más rápidamente que cualquier potencia de  $x$ , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier valor de  $n$ . El producto de exponenciales cumple la ecuación:

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Si  $\lambda$  es un número, entonces la función  $e^{\lambda x}$  es tal que su derivada en cada punto es igual a la propia función multiplicada por  $\lambda$ :

$$\frac{d(e^{\lambda x})}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

y, por lo tanto, cualquier función que varíe de forma proporcional al valor de la propia función, como ocurre en el caso de las desintegraciones nucleares (ver el capítulo 23), es una exponencial. Del hecho de que  $e \simeq 10^{0,4343}$  se sigue que:

$$e^x \simeq 10^{0,4343x}$$

Otras expresiones de interés son:

$$e^{2,303x} = 10^x$$

$$e^{0,6931x} = 2^x$$

$$e^{-0,6931x} = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$e^x = 2^{1,443x}$$

### 7.4.2 El logaritmo neperiano

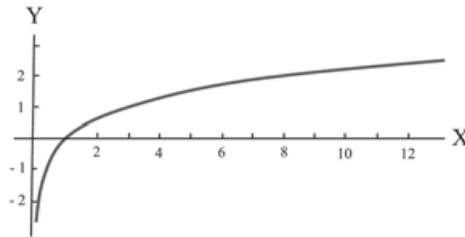
La función inversa de la exponencial es el llamado logaritmo natural o neperiano:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad (\text{F.38})$$

de donde se sigue que:

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$



**Fig. F.15.** Función logaritmo:  $y = \ln x = 2,303 \log x$

El logaritmo neperiano sólo está definido para valores positivos del argumento ( $e^x = y$  es una cantidad siempre positiva). Algunas de sus propiedades son:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^a = a \ln x$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 2 = 0,69314\dots$$

$$\ln 10 = 2,30258\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = +\infty$$

### 7.4.3 El logaritmo decimal

Pueden definirse el logaritmo decimal de forma análoga al neperiano, mediante la expresión:

$$10^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y$$

La relación entre ambos logaritmos es sencilla:

$$\ln y = \ln 10^x = x \ln 10 \simeq 2,303 \times x = 2,303 \log y$$

y, por lo tanto, el logaritmo neperiano de una cantidad es siempre igual a 2,303... multiplicado por el logaritmo decimal de esa misma cantidad y las propiedades de ambos son análogas:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log x^a = a \log x$$

$$\log e = 0,43429\dots$$

$$\log x \simeq 0,434 \ln x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 2 = 0,30103\dots$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log x \simeq 0,4343 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\log x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x) = +\infty$$

## 7.5 Sucesiones

### 7.5.1 Sucesión aritmética

Llamamos sucesión aritmética a una serie de números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , tal que cada uno de ellos es igual al anterior más una cantidad constante que llamamos razón,  $r$ :

$$a_n = a_{n-1} + r = a_{n-2} + 2r = \dots = a_0 + nr$$

La suma de los  $N + 1$  primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{a_0 + a_N}{2} (N + 1) = a_0 (N + 1) + \frac{N(N + 1)}{2} r$$

**Ejemplo.** Los números naturales (más el cero),  $0, 1, 2, 3, \dots$ , forman una sucesión aritmética de razón  $r = 1$ . El primer término será  $a_0 = 0$  y el término  $n$  será  $a_n = n$ . La suma de los 100 primeros números naturales, por ejemplo, será:

$$\sum_{n=0}^{100} n = \frac{100 \times 101}{2} = 5.050 \quad (\text{F.39})$$

Los números pares forman otra sucesión aritmética de razón 2 en la que el primer valor es  $a_0 = 0$  y el término general es  $a_n = 2n$ . La suma de los  $M + 1$  primeros números pares (que son  $0, 2, 4, \dots, 2M$ ) es:

$$\sum_{n=0}^M a_n = \frac{M(M + 1)}{2} 2 = M(M + 1)$$

Si consideramos ahora  $M = 50$ , el último número de la serie será el 100 y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{50} (2n) = \frac{50 \times 51}{2} 2 = 51 \times 50 = 2.550$$

Por su parte, los números impares forman también una sucesión geométrica de razón 2. Si tomamos como primer valor  $a_0 = 1$ , el término general será  $a_n = 1 + 2n$ . Si queremos sumar todos los impares hasta el 99 incluido, debemos tomar  $M = 49$  y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{49} (2n+1) = 1 \times 50 + \frac{49 \times 50}{2} = 2.500$$

*Nótese que la suma de los números pares, desde el 0 hasta el 100, más la de los números impares, desde el 1 hasta el 99, da la suma total (F.39) de los 100 primeros números naturales.*

### 7.5.2 Sucesión geométrica

Llamamos sucesión geométrica a una serie de números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , tal que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante que llamamos razón,  $r$ :

$$a_n = a_{n-1} \times r = a_{n-2} \times r^2 = \dots = a_0 \times r^n$$

Así, cuando se habla de que una magnitud crece en progresión geométrica se quiere decir que, en cada intervalo constante de tiempo, se multiplica por una cantidad fija que es la razón  $r$ . La suma de los  $N$  primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{a_N \times r - a_0}{r - 1} = a_0 \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1}$$

Cuando  $N$  tiende a infinito, la serie diverge y la suma se hace infinita para el caso de que  $r \geq 1$ , mientras que converge cuando  $r < 1$ . En este último caso,  $r^{N+1} \rightarrow 0$ , con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{1 - r}$$

**Ejemplo.** *Considérese una sucesión tal que la razón sea  $r = e^\lambda$  y el primer término sea igual a 1. El término  $n$ -ésimo será:*

$$a_n = e^{n\lambda}$$

*y la suma de la serie será:*

$$\sum_{n=0}^N e^{n\lambda} = \frac{e^{\lambda(N+1)} - 1}{e^\lambda - 1} \tag{F.40}$$

*Cuando tomamos el límite  $N \rightarrow \infty$ , si  $\lambda \geq 0$ , entonces la exponencial que aparece en el numerador del segundo miembro de la ecuación (I.4) tiende también a infinito, mientras que si  $\lambda < 0$ , la suma queda:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-|\lambda|}}$$

**Ejemplo.** Sea ahora la sucesión  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ . Se trata de una pro  
gresión geométrica de razón igual a  $\frac{1}{2}$ . Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

y en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \rightarrow 0$ , con lo que la suma infinita resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

# Glosario

Abductina, 52

Acción y reacción, 49

*Accipitridae*, 10

Aceleración, 11

angular, 30, 34, 156, 162

centrífuga, 133

centrípeta, 27, 30, 133

de la gravedad en otros astros, 105

de la gravedad, 11, 31, 41, 104, 190, 269

normal, 27, 34

Órganos de percepción de la, 33

promedio, 13

tangencial, 27

Acetábulo, 124, 182

Ácido láctico, 63

Ácido pirúvico, 63

*Acinonix jubatus*, 8

*Acrididae*, 15, 21

Actina, 56, 68

Adimensional, Magnitud, 270

Águila, 10, 43, 131

Alcance máximo, 24, 191

Alometría, 277

- Ameba, 268
- Amortiguador, 261
- Amplitud, 248
  - de las oscilaciones forzadas, 251
- Ampolla, 34
- Análisis dimensional, 268
- Ángulo de inserción, 177, 198, 204
- Antílope, 9
- Aorta, 83, 322, 330
- Apófisis espinosa, 186
- Araña, 51
- Arco, Longitud de, 8
- Ardeotis kori*, 303
- Ardilla, 195, 305, 313
- ARNm, 138
- Arquero, 19
- Arquímedes, Empuje de, 129, 137, 282
- Arrastre, Coeficiente de, 130, 143
- Arteria, 83, 112, 330
- Articulación, 20, 33, 52, 124, 166, 178, 186, 243
- Antrópodo, 20, 160, 168, 282
- Astronauta, 31, 46, 80, 110, 190
- Athous*, 19
- Átomo, 39, 233
- ATP, 63
- Ave, 10, 175, 295, 305, 314, 347, 351
  - paseriforme, 318
- Avestruz, 9, 239, 318
- Avogadro, Número de, 39
- Avutarda de Kori, 303

Axón, 75

Longitud del, 264

Bacteria, 127, 265

Balistocardiografía, 82

Ballena, 10, 127, 265, 292, 317

*Baluchitherium*, 266

Bergmann, Regla de, 313

Bíceps, 53, 173, 180, 217

Big Bang 39, 307

Bioestática, 175

Biomaterial, 288

Bípedo, 168

Borelli, 166

Bóvido, 298

Braquisaurio, 266

Buceador, 127

Caballo, 9, 169, 239, 264

Caballo de vapor (unidad), 215

Cabra, 171

Cadera, 168, 174, 180

Caída libre, 31, 87, 108, 131

Calamar, 73

Calcáneo, 204

Caloría (unidad), 215

Camello, 9

Campo Centrífugo Relativo, 135

Campo gravitatorio, 47, 120

Canales semicirculares, 33

- Canguro, 9, 16, 22
- Cantidad de movimiento, 69
- Capilar, 321
- Carpa, 66, 219
- Carrera y marcha, 192
- Catapulta, Mecanismo de, 20
- Cavendish, Balanza de, 104
- Cefalópodo, 77
- Célula
  - ciliada, 34
  - muscular, 68
  - Tamaño de una, 268
- Centrífuga
  - de entrenamiento, 31, 118
  - de experimentación, 146
- Centro de gravedad, 31, 94, 100, 203
- Centro de masas, 77
  - de una persona, 166
  - Determinación experimental del, 165
- Cerebro, 33, 281
  - Tamaño relativo del, 281
- Ciclóstomo, 38
- Ciervo, 239
- Cilindro, Área y volumen del, 273
- Cinetocilio, 35
- Circulación de la sangre, 329
  - en ingravidez, 111
- Clavícula, 176
- Cóclea, 36
- Colágeno, 54, 75

- Colibrí, 219, 303, 318, 332
- Columna vertebral, 185, 206
- Connochaetes*, 9
- Cono, Área y volumen del, 377
- Constante de recuperación, 245
- Constante del movimiento, 69, 152, 249
- Contracción muscular, 59
- Copérnico, Sistema heliocéntrico de, 106
- Coral, 282
- Corazón, 39, 83, 271
- Cresta ampular, 34
- Cuádriceps, 67, 287
- Cuervo, 318
- Cyprinius carpio*, 66
- Chimpancé, 239
- Choque, 70, 86
- Damaliscus*, 9
- Delfín, 10
- Deltoides, 176
- Densidad de los animales, 254
- Diástole, 83, 334
- Dinosaurio, 192, 206, 265, 282
- Discos Z, 56
- Dosidus gigas*, 76
- Eficiencia metabólica, 218
- Einstein, 102, 109
- Elateridae*, 19

- Electronvoltio (unidad), 215
- Elefante, 9, 266, 283, 293, 305, 316, 330, 339
- Endoesqueleto, 263
- Endolinfa, 34
- Energía, 211
  - cinética, 219
  - Conversación de la, 72, 220, 234, 312
  - elástica, 19, 241
  - metabólica, 226, 259
  - potencial, 220, 228, 232
  - química, 63, 235
- Epífisis, 124, 184
- Equilibrio, 162
  - en las personas, 166
- Ergio (unidad), 215
- Escápula, 179
- Escarabajo de resorte, 20
- Escherichia Coli*, 266
- Esfera, Área y volumen de la, 377
- Esfuerzo, 88
  - de rotura, 88, 283
  - máximo, 285
- Espermatozoide, 130
- Esqueleto, 20, 51, 281
- Esquiador, 255
- Estación Espacial Internacional, 110
- Estatocistos, 38
- Estatolitos, 38
- Estereocilio, 36
- Estrella, 306

- de neutrones, 105
- Exoesqueleto, 263
- Extensión plantar del pie, 173
  
- Factor de seguridad frente a impactos, 285
- Factor de trabajo, 188
- Falconidae*, 10
- Fase, 248
- Felino, 9, 180
- Fémur, 122, 182, 204
- Fibra muscular, 54
  - lenta y rápida, 63
- Filamentos, 57
- Foca, 10
- Fosforilación oxidativa, 63
- Fractal, Modelo, 320
- Frecuencia, 29
  - cardiaca, 330
  - de un oscilador, 250
- Froude, Número de, 190, 206, 271
- Fuerza, 45
  - centrífuga, 117
  - centrípeta, 110, 117, 213
  - conservativa, 224
  - de contacto, 114
  - de rozamiento, 120, 125, 130, 194, 224, 242
  - proporcional a la velocidad, 127, 132, 250
  - proporcional al cuadrado de la velocidad, 27, 130, 242, 258
  - de sustentación, 302
  - del oscilador armónico, 245

- derivada, 51, 102, 126
  - elástica, 102, 114
  - ficticia, 134
  - gravitatoria, 102, 140, 223, 229
  - muscular, 51, 184, 216, 238, 276, 292
  - muscular específica, 217
  - muscular y velocidad de contracción, 61, 66, 218
  - periódica sobre un oscilador, 252
  - relativa de un animal, 292
- 
- Gacela, 19
  - Gálago, 18, 22, 296, 308
  - Galgo, 9, 308
  - Galileo, 46
    - y las leyes de escala, 284
  - Gastrocnemio, 204
  - Gato, 40
    - Giros en caída del, 157
  - Gazella*, 9
  - Gigavatio (unidad), 215
  - Glóbulo rojo, 112, 129, 321, 329
    - Densidad y tamaño, 129
  - Glúteo mayor, 182
  - Glicocola, 20
  - Glucógeno, 63
  - Glucosa, 235
  - Gorrión, 318
  - Gramo (unidad), 47
  - Gravitación Universal
    - Constante de la, 104

- Grillo, 21
- Guepardo, 9
- Gulliver, 272, 279, 316
- Gusano, 54, 282
  
- Halcón, 10
- Halterofilia, 277
- Hemoglobina, 138, 144, 280, 329
- Hercio (unidad), 29, 250
- Hidrógeno, Átomo de, 78
- Hill
  - Fórmula de, 62, 241
  - Modelo de, 237
- Homeotermo, 317
- Hooke, Ley de, 246
- Hormiga, 292, 300
- Hueso, 54, 88, 184, 283
  - en ingravidez, 111
- Húmero, 176
  
- Ilion, 182, 186
- Impulso o impulsión, 69
- Ingravidez, 108
- Inhalación pulmonar, 327
- Insectívoro, 298
- Insecto, 20, 170, 198, 297
- Interacción
  - electromagnética, 101
  - gravitatoria, 102
- Isometría, 272

Isquion, 182

Julio (unidad), 213

Kepler, Johannes, Leyes de, 107

Kilogramo (unidad), 47

Kilovatio (unidad), 215

Kilovatio hora (unidad), 215

Kleiber, Max, 312

Ley de, 312, 319, 327, 339

Lagrange, Punto de, 140

Langosta, 38

Lanzamiento

de peso, 26,

de martillo, 42

Lémur, 124

Levantamiento de peso, 277

Leyes de escala, 263, 311

alométricas, 277,

isométricas, 272

Liebre, 9

Lignina, 267

Liliputiense, 272, 279, 316

Líquido sinovial, 243

Lobo, 9

Locomoción, 187

por inercia, 237

Loligo, 75

## Luna

Gravedad sobre su superficie, 190, 269

Máculas acústicas, 36

Magnitud cinemática, 69

Mamífero, 280, 290, 298, 314, 327, 337

marino, 127, 292

Marsupial, 333

Marte, 105, 144

Masa (inercial), 47

McMahon, Modelo de, 319

Medusa, 38, 77

Megavatio (unidad), 215

Metabolismo, 311

aerobio y anaerobio, 66

Metro (Unidad), 4

*Microcebus*, 124

Microorganismo, 127

Mioblasto, 68

Miofibrilla, 55

Mioglobina, 52

Miosina, 56

Mitocondria, 263, 318

Moho del fango, 2290

Molusco, 38

bivalvo, 52, 60

Momento, 69

Conservación del, 68

Momento angular,

Conservación del, 152

- respecto de un eje, 150
- Momento de inercia, 149
  - de un cilindro, 156
  - de un disco, 196
  - de una esfera, 197
  - de una moneda, 197
  - de una puerta, 151
  - de una varilla, 151
- Momento de una fuerza, 152
- Momento lineal, 69
- Mono antropomorfo, 282
- Montaña rusa, 221
- Motoneurona, 251
- Movimiento
  - bidimensional, 22
  - circular, 28, 110, 148
  - finito, 231
  - infinito, 231
  - parabólico, 22, 85
  - unidimensional, 3
  - uniforme, 12
  - uniforme y rectilíneo, 12, 46, 80
  - uniformemente acelerado, 22
- Muelle, 204, 247
- Murciélago, 278, 302, 325
- Musaraña, 283, 322, 335
- Músculo
  - antagonista, 52, 179, 217
  - cardíaco, 55
  - en ingravidez, 111

- esquelético, 54
- estriado, 56
- extensor, 52, 258
- flexor, 52, 178
- liso, 55
- Mycoplasma*, 265
  
- Neurona, 264
  - motora, 55
- Newton
  - Carro de, 97
  - Constante de, 103, 306
  - Fuerza de, 104
  - Leyes de, 59, 82, 134, 148
- Newton (unidad), 48
  
- Ñu, 9
  
- Órbita
  - de los cometas, 106
    - de los planetas, 106
    - terrestre, 106
- Oreotragus oreotragus*, 171
- Oscilaciones
  - amortiguadas, 250
  - forzadas, 250
- Oscilador armónico, 245
  - Periodo del, 249
- Ósmosis, 290
- Otoconios, 37

Otolitos, 37

Oxígeno

Concentración en sangre, 334

Consumo de, 217, 243, 299, 311, 316, 326

Palanca, 171

Paloma, 333

Pandeo, 288

Par de fuerzas, 162

Paracaídas, 90, 132, 143

Pascal (unidad), 60

Paso

antálgico, 185

Frecuencia de, 188

Longitud de, 187, 192, 206

Patinadora, 155

*Pectinidae*, 53

Pelvis, 185

Péndulo

Periodo del, 269

Péndulo invertido, Modelo del, 190

Periodo, 29

Periodo de gestación, 271

Peroné, 204

Peciolo, 321

Pez, 38, 66, 127

*Philaenus spumarius*, 19

Pingüino, 318

Pinzón, 318

*Pipistrellus pipistrellus*, 333

- Planck, 306
- Plasma sanguíneo, densidad y viscosidad, 129
- Poiquiloterma, 317
- Potencia, 214
  - metabólica, 237, 259, 299
  - muscular, 218
  - muscular específica, 241, 253
- Potencial
  - Curvas de, 231
- Precesión de los equinoccios, 108
- Presión
  - arterial, 322, 330
- Primate, 22, 124, 169, 195, 207, 239, 281
- Proceso semilunar, 20
- Propulsión a chorro, 73
- Pubis, 182
- Pulex*, 19
- Pulga, 16, 22, 295
- Pulsación, 248
- Punto de retorno, 229, 246
  
- Quitina, 54
  
- Rana, 18, 60, 97
- Ratón, 9, 61, 265, 288, 305, 316
- Rayleigh, Lord, 306
- RCF, 135
- Regla del sacacorchos, 2, 152, 362
- Rendimiento mecánico del metabolismo, 237
- Reptil, 38, 281, 300, 333

Resilina, 19, 254

Resonancia, 252

Reynolds, Número de, 126, 130, 271

Ribosoma, 137

Riñones, 8112, 325

Ritmo cardíaco, 280, 331

Ritmo metabólico, 311, 324

Roedor, 43, 279

Rotor, 133

Rotura por compresión, 88

Rozamiento

    Coficiente de, 121

    Coficientes estático y dinámico, 122, 199, 243

    de un sólido en un fluido, 128

    entre dos superficies sólidas, 121

Sístole, 83, 334

Sóleo, 204

Sacro, 186

Sacroespinal, Músculo, 186

Sáculo, 33, 111

Saltamontes, 15, 21, 60

Salto

    con pértiga, 256

    de altura, 17, 227

    de longitud, 86

    de trampolín, 157, 198

    en tirabuzón, 159

    en vertical, 15

    mortal, 158, 199

- Sarcómera, 56, 61
- Satélites artificiales, 110
- Schistocerca gregaria*, 21
- Sciurus*, 124
- Secuoya gigante, 267
- Sedimentación, 129
  - Coficiente de, 137
  - en un gradiente de densidad, 135
- Segundo (unidad), 5
- Selasphorus scintilla*, 332
- Semejanza
  - elástica, 286, 319
  - estática, 284, 290
  - geométrica, 277, 285
- Sinovial, Líquido, 122
- Siphonaptera*, 16
- Sistema aislado, 68
- Sistema circulatorio, 320, 329
- Sistema de referencia, 2
  - bien orientado, 2
  - inercial, 45
  - no inercial, 109
- Sistema Internacional de Unidades (SI), 4, 18
- Sistema respiratorio, 324
- Sorex cinereus*, 334
- Stokes, Ley de, 128, 132
- Suncus etruscus*, 331
- Supecficie
  - de sustentación, 167, 189
  - Regla de la, 312

Svedberg (unidad), 137

Tamaño de los organismos, 315

Tasa metabólica, 234, 313

basal, 234, 313

de campo, 312, 339

en reposo, 234, 313

específica, 316, 328, 336

máxima, 324

media, 236

Tendón, 54

de Aquiles, 167

Tensión

de una cuerda, 116

superficial, 263

*Tettigoniidae*, 21

Tibia, 88, 90, 204

Tiburón, 10

Tiempo

de circulación de la sangre, 324

fisiológico, 325

medio de vida, 325

metabólico, 325

Tierra, 61

Giro alrededor del Sol, 5, 30

Longitud del meridiano, 4

Masa de la, 50

Velocidad de escape, 31

Tigre, 308

Tiro bombeado y rasante, 25

- Tobillo, 88, 166
- Tortuga, 61, 66, 188, 282
- Tríceps, 53, 172, 179, 204, 217
- Trabécula esponjosa, 184
- Trabajo, 211
  - del corazón, 333
  - muscular, 225, 298
- Trampolín, 159
- Transición marcha-carrera, 190
  
- Trayectoria, 3, 6, 12, 23, 27, 85, 105
  - cinemática, 23
  - geométrica, 23
  - parabólica, 34, 85
- Trocánter mayor del fémur, 183
- Tronco de un árbol, 289
  
- Ungulado, 290
- Unidad Astronómica (UA), 107, 140
- Unidad motora, 45
- Unidades
  - de longitud, 4
  - de masa, 47
  - de tiempo, 5
  - Sistema Internacional, 5, 47
- Utrículo, 37, 111
  
- Vértebra, 54, 187
  - lumbar, 187
- Vatio (unidad), 214

## Vector

- posición, 2, 6, 28

- unitario, 26, 103

## Velocímetro,

## Velocidad, 6

- angular, 28, 35, 119, 137

- de contracción muscular, 251

- de despegue, 16, 297

- de desplazamiento de los animales, 8

- de escape, 31

- de sedimentación, 129

- de transición marcha-carrera, 190

- del flujo sanguíneo, 323

- instantánea, 7

- límite, 91, 128, 131, 190, 244

## Vestíbulo, 33

## Virus, 265

- de la polio, 138

## Viscosidad, 126, 323

## Zancada, 188, 191, 238

## Zorro, 9

*Fundamentos físicos de los procesos biológicos* es, como su nombre indica, un texto que desarrolla la fundamentación física de los procesos que se desarrollan en el seno de los organismos vivos y en los intercambios de éstos con su entorno. Está concebido para servir como libro de texto para estudiantes de primeros cursos de las licenciaturas de ciencias de la vida y de la salud. El nivel de la exposición está graduado para que ésta pueda ser entendida aun cuando se carezca de cualquier conocimiento previo de Física, por lo que todas las nociones que es preciso manejar son definidas y analizadas progresivamente en el libro. El texto reúne un conjunto de conocimientos que se encuentran muy dispersos en la literatura disponible, de forma que pueda adaptarse a la distinta duración de los cursos en que aparecen estos contenidos, así como a las peculiaridades propias de cada universidad y titulación. La extensión del libro permite que el profesor seleccione los temas que considere más aconsejables para su programa. Pretende también este texto seguir siendo útil como libro de consulta a lo largo de todo el periodo de formación universitaria para aclarar las bases físicas de gran parte de la actividad de los seres vivos. El libro está organizado en 23 capítulos que estudian, entre otros temas, desde las leyes del movimiento y la fuerza en los seres vivos, el equilibrio y la locomoción, las leyes de escala, el balance energético y el metabolismo, los mecanismos de regulación térmica o la difusión de gases y líquidos en los seres vivos, hasta las propiedades de los biomateriales, el transporte a través de las membranas celulares, la propagación de los impulsos nerviosos, la física de la visión o los efectos biológicos de la radiación.

Se incluyen numerosos ejemplos junto con unos 250 ejercicios propuestos, orientados a facilitar el trabajo personal del estudiante. Está acompañado de más de 500 ilustraciones y 6 apéndices en los que se resumen las diversas fórmulas y técnicas matemáticas que se emplean en el texto.

Los autores, con una larga experiencia como profesores de la disciplina en la Universidad Autónoma de Madrid, han contado con la generosa y enriquecedora colaboración y sugerencias de los profesores de Biología y Medicina de su universidad.

---

**Raúl Villar** (Madrid, 1948) es catedrático de Física de la Materia Condensada en la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector de 1994 a 2002. Ha enseñado Física en primer curso de Biología durante los últimos quince años, y Física para Humanistas durante seis años. También ha impartido durante varios años Termodinámica y Física Estadística. Como investigador, es especialista en las propiedades de sólidos a muy bajas temperaturas.

**Cayetano López** (Madrid, 1946) es catedrático de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector. Ha enseñado Física de los Procesos Biológicos en primer curso de la licenciatura de Ciencias Biológicas desde hace más de quince años. También ha enseñado Física Cuántica, Teoría Cuántica de Campos y Física de Partículas Elementales. Además de sus trabajos científicos es autor de multitud de artículos sobre diversos temas científicos y autor de dos libros de divulgación: *El Ogro Rehabilitado*, (El País-Aguilar, 1995) y *Universo sin fin* (Taurus, 1999).

**Fernando Cussó** (Madrid, 1952) es catedrático de Física Aplicada de la Universidad Autónoma de Madrid. Desde el año 1975 ha impartido docencia de Física en el primer curso de Biología, Química, Matemáticas y Física, siendo responsable de la adecuación de la enseñanza experimental en Física de los Procesos Biológicos. Ha impartido también las asignaturas de Electromagnetismo y Óptica. Su actividad investigadora se ha centrado en el campo de las propiedades ópticas de los materiales.