En coordenadas, tendremos:

$$\vec{V} =: \vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{V} = \left(a_xb_y - a_yb_z\right)\vec{k} + \left(a_zb_x - a_xb_z\right)\vec{j} + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\vec{i}$$

es decir:

$$V_x =: a_yb_z - a_zb_y \qquad \text{(E.26)}$$

$$V_y =: a_zb_x - a_xb_z \qquad \text{(E.27)}$$

$$V_z =: a_xb_y - a_yb_x \qquad \text{(E.28)}$$

Existe una forma compacta de recordar las expresiones (E.26-28) utilizando la noción de determinante de una matriz cuadrada 3 × 3. En efecto, puede escribirse el producto vectorial de dos vectores en la forma:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

Ejemplo. *El producto vectorial* $\vec{V} = \vec{a}\times\vec{b}$ *de los dos mismos vectores del ejemplo anterior es:*

$$V_x = 2\times\sqrt{3} - 0\times 1 = 2\sqrt{3} \qquad \text{(E.29)}$$

$$V_y = 0\times 0 - 0\times\sqrt{3} = 0 \qquad \text{(E.30)}$$

$$V_z = 0\times 1 - 2\times 0 = 0 \qquad \text{(E.31)}$$

es decir, $\vec{V} = 2\sqrt{3}\vec{i}$

6.3 Operadores diferenciales sobre vectores

Existen magnitudes escalares, como la densidad, la masa o la energía, y otras vectoriales, como las fuerzas o los campos eléctricos o gravitatorios, que pueden depender de la posición y del tiempo. Para cada punto del espacio e instante de tiempo toman un valor. En este apartado consideraremos únicamente la dependencia espacial, suponiendo que no hay dependencia explícita del tiempo o que los cálculos se hacen a tiempo fijo. La dependencia espacial de una magnitud escalar A o una vectorial $\vec{a}$ se expresa de la siguiente forma:

$$A = F(\vec{r}) = F(x, y, z) \tag{E.32}$$

$$\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(x, y, z) \tag{E.33}$$

siendo la ecuación vectorial (E.33) equivalente a tres ecuaciones:

$$a_x = f_x(x, y, z)$$

$$a_y = f_y(x, y, z)$$

$$a_z = f_z(x, y, z)$$

Las funciones F, f_x, f_y, f_z contienen la dependencia de las magnitudes A y $\vec{a}$ con la posición. En lo sucesivo, para no introducir demasiados términos distintos, utilizaremos la misma letra para designar la magnitud y la función que da su dependencia en función de $\vec{r}$. Es decir:

$$A = A(x, y, z)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$$

6.3.1 Gradiente

Consideremos una cantidad escalar $A = A(x, y. z)$. Llamamos gradiente de esa cantidad a un vector $\vec{V} = gradA$, cuyas componentes son:

$$V_x = \left(gradA\right)_x = \frac{\partial A}{\partial x} \tag{E.34}$$

$$V_y = \left(gradA\right)_y = \frac{\partial A}{\partial y} \tag{E.35}$$

$$V_z = \left(gradA\right)_z = \frac{\partial A}{\partial z} \tag{E.36}$$

donde el símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ es la derivada parcial respecto a x.

En una dimensión, el gradiente es simplemente la derivada de la función:

$$gradA = \frac{dA}{dx}$$

por lo que coincide con la pendiente de la curva que representa la función A en función de x.

A veces, se caracteriza el operador gradiente mediante el símbolo $\vec{\nabla}$ (nabla), de forma que:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{E.37}$$

es decir:

$$gradA = \vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

que coincide con la definición de operador gradiente. Nótese que el operador *grad* se aplica a un escalar y el resultado de la aplicación es un vector.

Ejemplo. *Sea la función escalar:*

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La componente x *del gradiente será:*

$$\left(gradA\right)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

y lo mismo para las otras dos componentes. Agrupándolas todas, tendremos:

$$gradA = \vec{\nabla}A = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

Ejemplo. *Sea la función escalar:*

$$A = \frac{xyz}{r} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Procediendo ahora de la misma forma, calculamos la componente x del gradiente:

$$\left(gradA\right)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{yz}{r} - \frac{x^2yz}{r^3}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, y agrupando, queda:

$$gradA = \vec{\nabla} A = \frac{1}{r}\left(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k} - xyz\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.3.2 Divergencia

El operador divergencia se aplica a un vector y el resultado de su aplicación es un escalar. La definición de divergencia de un vector $\vec{V}$ es la siguiente:

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} \qquad \text{(E.38)}$$

es decir, podemos calcular la divergencia de un vector calculando formalmente el producto escalar del operador $\vec{\nabla}$ por el vector en cuestión.

Ejemplo. *Sea el vector* $\vec{V} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + ye^{-2x}\vec{k}$. *Su divergencia será:*

$$div\vec{V} = 2x + x + 0 = 3x$$

Cuando el vector del que queremos calcular la divergencia es el gradiente de una cierta cantidad escalar *A*, la divergencia resulta ser:

$$div(gradA) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \qquad \text{(E.39)}$$

y en términos del operador $\vec{\nabla}$:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}A = \vec{\nabla}^2 A \qquad \text{(E.40)}$$

donde al operador $\vec{\nabla}^2$ se le llama laplaciano y se suele caracterizar con el símbolo Δ (delta mayúscula):

$$\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(E.41)}$$

Ejemplo. *Consideremos la cantidad escalar:*

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

cuyo gradiente calculamos anteriormente:

$$gradA = \vec{\nabla} A = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k}$$

Calculemos ahora la derivada respecto de x de la primera componente de este vector:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}-x\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{r^5}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, resulta que la divergencia del gradiente de A será:

$$div\left(gradA\right)=\Delta A=-\frac{3}{r^3}+3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+3\frac{r^2}{r^5}=0$$

6.3.3 Rotacional

El rotacional es un operador que se aplica a un vector y el resultado de la aplicación es otro vector. En términos del operador $\vec{\nabla}$, se define así:

$$rot\vec{V}=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad \text{(E.42)}$$

Ejemplo. *Sea el vector* $\vec{V}=\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{i}+z\vec{k}$. *Su rotacional será:*

$$rot\vec{V}=0\times\vec{i}+2z\vec{j}-2y\vec{k}=2z\vec{j}-2y\vec{k}$$

Cuando el vector $\vec{V}$ es el gradiente de una cierta magnitud escalar *A*, el rotacional resulta ser cero. En efecto:

$$rot(gradA)=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}A\right)=\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right)A=0$$

dado que el producto vectorial de un vector por sí mismo es siempre igual a cero. Puede verificarse directamente, a partir de la expresión de las componentes de un gradiente, que el rotacional de un gradiente es siempre cero.

Ejemplo. *Consideremos la función escalar:*

$$A=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

cuyo gradiente encontramos anteriormente. Calculemos la componente x del rotacional del gradiente de A:

$$\left[rot(gradA)\right]_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{r^3}\right)=\frac{3zy}{r^5}-\frac{3yz}{r^5}=0$$

y lo mismo ocurre con las otras dos componentes.

Apéndice F. Algunas fórmulas matemáticas útiles

7.1 Trigonometría

7.1.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo, como el de la figura F.1.

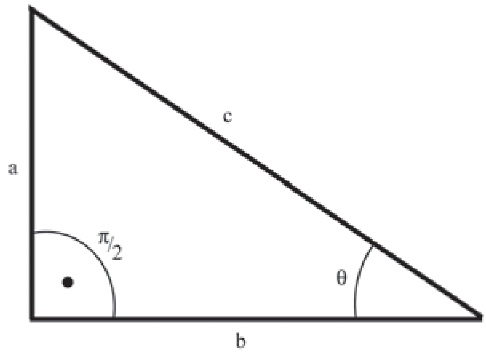

Fig. F.1. Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que la relación de los lados con el ángulo es: a: cateto opuesto al ángulo θ. b: cateto contiguo al ángulo θ. c: hipotenusa.

Seno

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{F.1}$$

Coseno

$$\cos\theta = \frac{\text{catetocontiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{F.2}$$

Tangente

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{catetocontiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \tag{F.3}$$

Secante

$$\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} \tag{F.4}$$

Cosecante

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen}\theta} \tag{F.5}$$

Cotangente

$$\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \tag{F.6}$$

Funciones trigonométricas de ángulos sencillos

a) Triángulo rectángulo de catetos iguales

Dado que α y β son iguales y que $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, implica que

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}(45^0)$$

a)

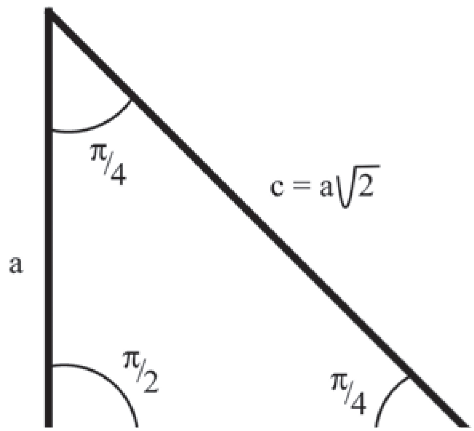

Fig. F.2. a) Triángulo rectángulo de catetos iguales. b) Triángulo equilátero.

Según el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = a\sqrt{2}$$

por tanto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \tag{F.7}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \tag{F.8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{a}{a} = 1 \tag{F.9}$$

b) Triángulo equilátero

Dado que la suma de los tres ángulos es igual a π y que los tres son iguales, cada uno de ellos vale $\frac{\pi}{3}(60^0)$. En el vértice B el ángulo se divide en dos iguales, que valen, por tanto, $\frac{\pi}{6}(30^0)$ cada uno de ellos. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BCD, se obtiene que:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2^2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}60^0 = \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^0 = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{F.10}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}30^0 = \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^0 = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \tag{F.11}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg}60^0 = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \tag{F.12}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}30^0 = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{F.13}$$

Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad

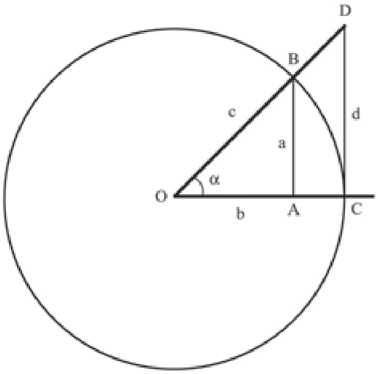

Fig. F.3. Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad.

En la figura F.3 vemos que la hipotenusa *c* del triángulo OAB, recto en A, es igual al radio, igual a la unidad.

Por tanto, el seno de α es igual al segmento *a* y el coseno es igual al segmento *b*. La tangente de α es igual a la longitud *a* dividida por la longitud *b*, que es igual al segmento *d* dividido por el segmento OC, de longitud unidad y, por tanto, igual al segmento *d*. Esta última propiedad se deduce del hecho de que el triángulo OCD es recto en C. Por tanto:

$$\mathrm{sen}\alpha = a$$

$$\cos\alpha = b$$

$$\mathrm{tg}\alpha = d$$

Ángulo negativo, complementario y suplementario

Aplicando lo anterior a los ángulos de la figura F.4.a, se obtiene:

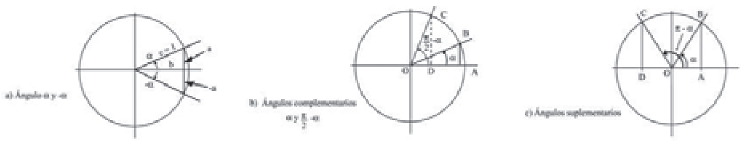

Fig. F.4. Esquemas para la obtención de las funciones trigonométricas de ángulos relacionados.

$$\mathrm{sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}\alpha \qquad \text{(F.14)}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{(F.15)}$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha \qquad \text{(F.16)}$$

Dos ángulos se denominan complementarios si su suma es igual a $\pi/2(90^{o})$

Se deduce de la construcción de la figura F.4.b que se verifican las relaciones:

$$\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{(F.17)}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{sen}\alpha \qquad \text{(F.18)}$$

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha \qquad \text{(F.19)}$$

Dos ángulos se denominan suplementarios si su suma es igual a $\pi(180^{0})$. De la figura F.4.c:

$$\mathrm{sen}(\pi - \alpha) = \mathrm{sen}\alpha \qquad \text{(F.20)}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{(F.21)}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\alpha \qquad \text{(F.22)}$$

7.1.2 Fórmulas trigonométricas

Del teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo de la figura F.1:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(F.23)}$$

Dividiendo por c^2, resulta:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{(F.24)}$$

Funciones trigonométricas de la suma algebraica de ángulos

Puede demostrarse que para cualquier pareja de ángulos α y β,

$$\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\ \mathrm{sen}\beta \qquad \text{(F.25)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \mathrm{sen}\alpha\ \mathrm{sen}\beta \qquad \text{(F.26)}$$

$$\text{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}g\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta} \tag{F.27}$$

Cuando $\alpha = \beta$ se sigue que:

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha \tag{F.28}$$

$$\cos 2\,\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\,\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{F.29}$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \tag{F.30}$$

Suma algebraica de funciones trigonométricas

Asímismo para cualquier pareja de ángulos α y β,

$$\text{sen}\,\alpha \pm \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)\right] \tag{F.31}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] \tag{F.32}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\text{sen}\left[\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right] \tag{F.33}$$

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta} \tag{F.34}$$

Ley de los senos y de los cosenos

La ley de los senos indica que se cumplen las siguientes relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, como el de la figura F.5:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c} \tag{F.35}$$

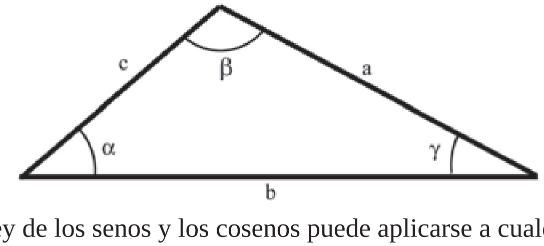

Fig. F.5. La ley de los senos y los cosenos puede aplicarse a cualquier triángulo.

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{F.36}$$

Ambas leyes se cumplen en cualquier triángulo.

7.2 Áreas y volúmenes

7.2.1 Áreas de figuras planas

Paralelogramo de base *b* y altura *h*:

$$S^v\ (\text{paralelogramo}) = bh$$

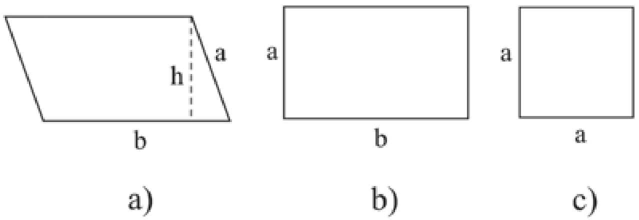

Fig. F.6. a) Paralelogramo. b) Rectángulo. c) Cuadrado.

Casos particulares: El rectángulo de lados *a* y *b* es un paralelogramo en el que, si tomamos como base el lado *b*, la altura es igual al lado *a*. Por lo tanto:

$$S^v\ (rectángulo) = ab$$

El cuadrado es un caso particular de rectángulo con los cuatro lados iguales. Si la longitud de uno de éstos es *a*, entonces:

$$S^v\ (cuadrado) = a^2$$

Triángulo de base *b* y altura *h*:

$$S^v\ (triángulo) = \frac{1}{2}bh$$

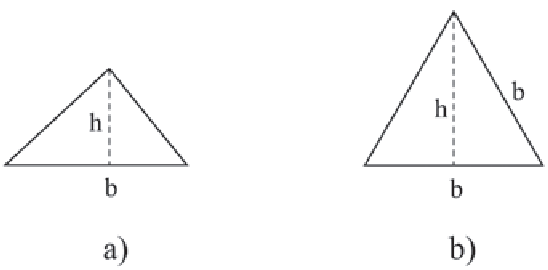

Fig. F.7. a) Triángulo. b) Triángulo equilátero.

Casos particulares: para un triángulo equilátero de lado *b*, el área es:

$$S^v\,(equilátero) = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Trapecio de lados paralelos *a* y *b*, y altura *h*:

$$S^v\,(trapecio) = \frac{a+b}{2}h$$

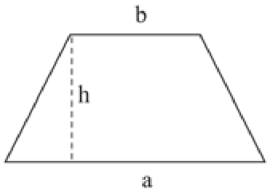

Fig. F.8. Trapecio.

Elipse de semieje mayor *a* y semieje menor *b*:

$$S(elipse) = \pi ab$$

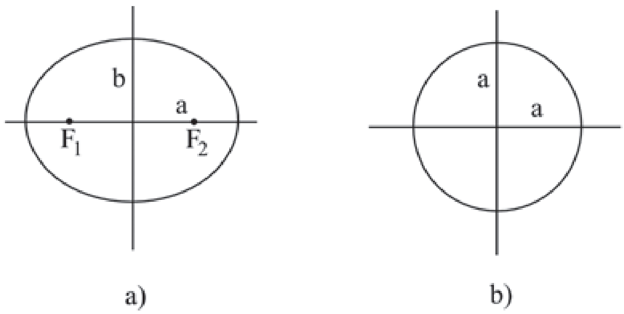

Fig. F.9. a) Elipse. Los puntos F_1 y F_2 son los focos. b) Círculo.

Caso particular: el círculo es una elipse que tiene los dos semiejes iguales, *b* = *a*:

$$S\,(círculo) = \pi a^2$$

7.2.2 Superficies y volúmenes de cuerpos tridimensionales

Paralelepípedo cuya base es un rectángulo de lados *a* y *b*, siendo dos de las cuatro caras laterales rectángulos de lados *a* y *c* los otros dos, paralelogramos de base *b* y altura *h*:

$$S\,(paralelepípedo) = 2(ab+ac+bh)$$

$$V\,(paralelepípedo) = abh$$

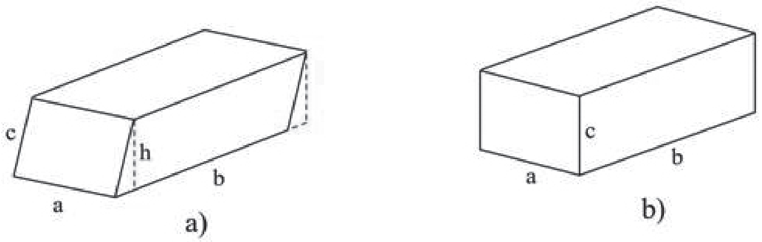

Fig. F.10. (a) Paralelepípedo inclinado. (b) Paralelepípedo recto.

Caso particular: un paralelepípedo recto es tal que la altura h es igual al lado c, por lo que:

$$S\,(paralelepípedo) = 2\left(ab + ac + bc\right)$$

$$V\,(paralelepípedo\ recto) = abc$$

Un cubo es un paralelepípedo recto tal que los tres lados son iguales. Si la longitud de unos de ellos es a:

$$S(cubo) = 6a^2$$

$$V(cubo) = a^3$$

Cilindro cuya base es un círculo de radio R y cuya altura es h:

$$S(cilindro) = 2\pi Rh$$

$$V(cilindro) = \pi R^2 h$$

Esfera de radio R:

$$S(esfera) = 4\pi R^2$$

$$V(esfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Cono cuya base es un círculo de radio R y cuya altura es h:

$$S_{lateral}(cono) = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$S_{total}(cono) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

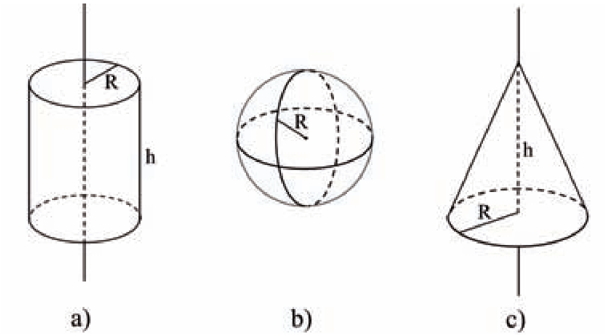

Fig. F.11. (a) Cilindro. (b) Esfera. (c) Cono.

7.3 Ecuaciones de curvas planas

7.3.1 Recta

La ecuación de una recta en el plano XY es:

$$y = mx + y_0$$

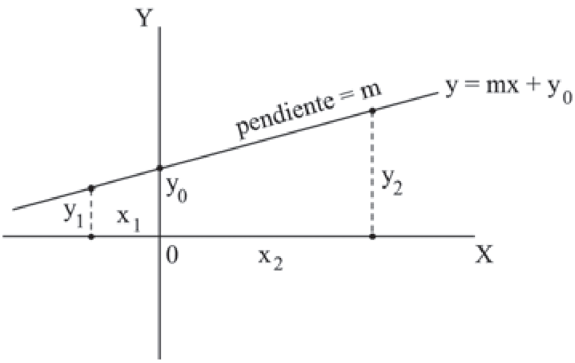

Fig. F.12. Ecuación de la recta.

El parámetro m es la pendiente de la recta, $\dfrac{dy}{dx} = m$, mientras que y_0 es la ordenada en el origen. Si lo que se sabe es que la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la ecuación de la curva se puede escribir en función de las coordenadas de estos puntos:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

7.3.2 Parábola

Una parábola se puede escribir, en general, de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

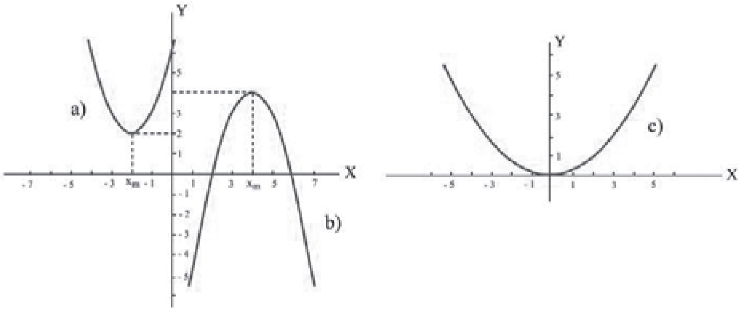

Fig. F.13. Parábolas. a) $y = x^2 + 4x + 6$, b) $y = -x^2 + 8x - 12$, c) $y = 0{,}2x^2$.

Si el coeficiente a es positivo, y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$ y, por lo tanto, los “cuernos” de la parábola están dirigidos hacia arriba, lo que corresponde a que la derivada segunda sea siempre positiva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$, es decir, que la pendiente en cada punto aumente cuando aumenta x. Si, por el contrario, a es negativo, entonces los “cuernos” están dirigidos hacia abajo y la derivada segunda es siempre negativa. La posición del máximo (o el mínimo) de la parábola estará en un punto x_M tal que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_M} = 2ax_M + b = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_M = -\frac{b}{2a}$$

$$y_M = y(x = x_M) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Si el máximo (o el mínimo) coincide con el origen de coordenadas, entonces $x_M = y_M = 0$, lo que implica $b = c = 0$, y la ecuación de la parábola queda reducida a:

$$y = ax^2$$

Los puntos en los que la parábola corta al eje x corresponden a los puntos en los que $y = 0$ y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas dos soluciones son las llamadas raíces del polinomio de segundo orden que caracteriza a la parábola:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si el radicando $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales y la parábola corta en dos puntos al eje X. Si es negativo, entonces no hay soluciones reales y la parábola no corta al eje X en ningún punto. Si es cero, entonces la parábola es tangente al eje X en un punto.

7.3.3 Elipse

Una elipse de semiejes *a* y *b* referida a un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de la elipse tiene como ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(F.37)}$$

Puede verse en la ecuación (F.37) que, en efecto, cuando $x = 0$, $y = \pm b$ y cuando $y = 0$, $x = \pm a$. A partir de esa expresión es posible despejar *y*:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Nótese que cuando $a = b$, obtenemos la ecuación de una circunferencia de radio *a*. Existen dos puntos singulares sobre la línea del semieje mayor llamados focos. Consideraremos el caso en que el semieje a es superior al semieje *b*, tal como se muestra en la figura F.9.a, de forma que los focos se encuentran sobre el eje *X*. Su posición es la siguiente:

$$x_F = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

y tienen la propiedad de que la suma de la distancias entre cualquier punto de la curva y los dos focos es una constante, igual a 2*a*. De nuevo, para el caso de la circunferencia, $a = b$, los focos coinciden con el centro y la distancia entre cualquier punto de la curva y el centro es igual a $\frac{2a}{2} = a$, el radio de la circunferencia.

7.4 Exponenciales y logaritmos

7.4.1 La función exponencial

La exponencial se define de la siguiente forma

$$f(x) = e^x$$

siendo e un número trascendente (con infinitas cifras decimales no recurrentes):

$$e = 2,71828\ldots$$

La función exponencial tiene la propiedad de que su derivada es igual al valor de la función en cualquier punto:

$$\frac{d\left(e^{x}\right)}{dx} = e^{x}$$

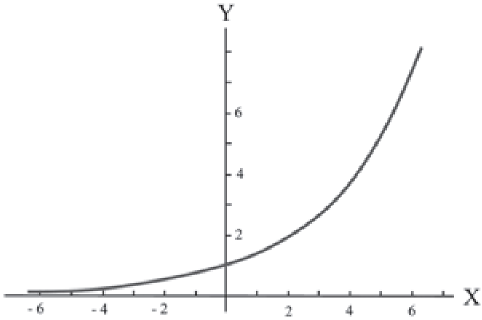

Fig. F.14. Función exponencial: $y = e^{\frac{1}{3}x} = 10^{0,145x}$.

La función exponencial crece con x más rápidamente que cualquier potencia de x, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \infty$$

para cualquier valor de n. El producto de exponenciales cumple la ecuación:

$$e^{x}e^{y} = e^{x+y}$$

Si λ es un número, entonces la función $e^{\lambda x}$ es tal que su derivada en cada punto es igual a la propia función multiplicada por λ:

$$\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

y, por lo tanto, cualquier función que varíe de forma proporcional al valor de la propia función, como ocurre en el caso de las desintegraciones nucleares (ver el capítulo 23), es una exponencial. Del hecho de que $e \simeq 10^{0,4343}$ se sigue que:

$$e^{x} \simeq 10^{0,4343x}$$

Otras expresiones de interés son:

$$e^{2,303x} = 10^x$$

$$e^{0,6931x} = 2^x$$

$$e^{-0,6931x} = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$e^x = 2^{1,443x}$$

7.4.2 El logaritmo neperiano

La función inversa de la exponencial es el llamado logaritmo natural o neperiano:

$$e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \tag{F.38}$$

de donde se sigue que:

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

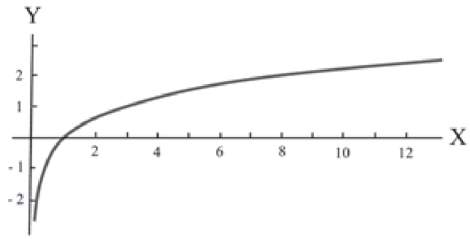

Fig. F.15. Función logaritmo: $y = \ln x = 2{,}303 \log x$

El logaritmo neperiano sólo está definido para valores positivos del argumento ($e^x = y$ es una cantidad siempre positiva). Algunas de sus propiedades son:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^a = a \ln x$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 2 = 0,69314\ldots$$

$$\ln 10 = 2,30258\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}(\ln x) = +\infty$$

7.4.3 El logaritmo decimal

Pueden definirse el logaritmo decimal de forma análoga al neperiano, mediante la expresión:

$$10^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y$$

La relación entre ambos logaritmos es sencilla:

$$\ln y = \ln 10^x = x\ln 10 \simeq 2,303 \times x = 2,303 \log y$$

y, por lo tanto, el logaritmo neperiano de una cantidad es siempre igual a 2,303... multiplicado por el logaritmo decimal de esa misma cantidad y las propiedades de ambos son análogas:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log x^a = a \log x$$

$$\log e = 0,43429\ldots$$

$$\log x \simeq 0,434 \ln x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 2 = 0,30103\ldots$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log x \simeq 0,4343 \ln x$$

$$\lim_{x\to 0}(\log x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log x\right) = +\infty$$

7.5 Sucesiones

7.5.1 Sucesión aritmética

Llamamos sucesión aritmética a una serie de números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tal que cada uno de ellos es igual al anterior más una cantidad constante que llamamos razón, r:

$$a_n = a_{n-1} + r = a_{n-2} + 2r = \cdots = a_0 + nr$$

La suma de los N + 1 primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \frac{a_0 + a_N}{2}(N+1) = a_0(N+1) + \frac{N(N+1)}{2}r$$

Ejemplo. *Los números naturales (más el cero), 0, 1, 2, 3,..., forman una sucesión aritmética de razón r = 1. El primer término será a_0 = 0 y el término n será a_n = n. La suma de los 100 primeros números naturales, por ejemplo, será:*

$$\sum_{n=0}^{100} n = \frac{100\times 101}{2} = 5.050 \qquad \text{(F.39)}$$

Los números pares forman otra sucesión aritmética de razón 2 en la que el primer valor es a_0 = 0 y el término general es a_n = 2n. La suma de los M + 1 primeros números pares (que son 0, 2, 4,..., 2 M) es:

$$\sum_{n=0}^{M} a_n = \frac{M(M+1)}{2}2 = M(M-1)$$

Si consideramos ahora M = 50, el último número de la serie será el 100 y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{50} (2n) = \frac{50\times 51}{2}2 = 51\times 50 = 2.550$$

Por su parte, los números impares forman también una sucesión geométrica de razón 2. Si tomamos como primer valor a_0 = 1, el término general será a_n = 1 + 2n. Si queremos sumar todos los impares hasta el 99 incluido, debemos tomar M = 49 y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{49}(2n+1)=1\times 50+\frac{49\times 50}{2}2=2.500$$

Nótese que la suma de los números pares, desde el 0 hasta el 100, más la de los números impares, desde el 1 hasta el 99, da la suma total (F.39) de los 100 primeros números naturales.

7.5.2 Sucesión geométrica

Llamamos sucesión geométrica a una serie de números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tal que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante que llamamos razón, *r*:

$$a_n = a_{n-1}\times r = a_{n-2}\times r^2 = \cdots = a_0\times r^n$$

Así, cuando se habla de que una magnitud crece en progresión geométrica se quiere decir que, en cada intervalo constante de tiempo, se multiplica por una cantidad fija que es la razón *r*. La suma de los N primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \frac{a_N\times r - a_0}{r-1} = a_0\frac{r^{N+1}-1}{r-1}$$

Cuando *N* tiende a infinito, la serie diverge y la suma se hace infinita para el caso de que $r\geq 1$, mientras que converge cuando $r<1$. En este último caso, $r^{N+1}\to 0$, con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{1-r}$$

Ejemplo. *Considérese una sucesión tal que la razón sea* $r=e^{\lambda}$ *y el primer término sea igual a* 1*. El término n-ésimo será:*

$$a_n = e^{n\lambda}$$

y la suma de la serie será:

$$\sum_{n=0}^{N} e^{n\lambda} = \frac{e^{\lambda(N+1)}-1}{e^{\lambda}-1} \qquad (F.40)$$

Cuando tomamos el límite $N\to\infty$*, si* $\lambda\geq 0$*, entonces la exponencial que aparece en el numerador del segundo miembro de la ecuación (I.4) tiende también a infinito, mientras que si* $\lambda<0$*, la suma queda:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\lambda} = \frac{1}{1-e^{-|\lambda|}}$$

Ejemplo. *Sea ahora la sucesión* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ *Se trata de una pro*

gresión geométrica de razón igual a $\frac{1}{2}$*. Por lo tanto:*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

y en el límite cuando $N \to \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \to 0$*, con lo que la suma infinita resulta:*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Glosario

Fundamentos físicos de los procesos biológicos es, como su nombre indica, un texto que desarrolla la fundamentación física de los procesos que se desarrollan en el seno de los organismos vivientes y en los intercambios de éstos con su entorno. Está concebido para servir como libro de texto para estudiantes de primeros cursos de las licenciaturas de ciencias de la vida y de la salud. El nivel de la exposición está graduado para que ésta pueda ser entendida aun cuando se carezca de cualquier conocimiento previo de Física, por lo que todas las nociones que es preciso manejar son definidas y analizadas progresivamente en el libro. El texto reúne un conjunto de conocimientos que se encuentran muy dispersos en la literatura disponible, de forma que pueda adaptarse a la distinta duración de los cursos en que aparecen estos contenidos, así como a las peculiaridades propias de cada universidad y titulación. La extensión del libro permite que el profesor seleccione los temas que considere más aconsejables para su programa. Pretende también este texto seguir siendo útil como libro de consulta a lo largo de todo el periodo de formación universitaria para aclarar las bases físicas de gran parte de la actividad de los seres vivos. El libro está organizado en 23 capítulos que estudian, entre otros temas, desde las leyes del movimiento y la fuerza en los seres vivos, el equilibrio y la locomoción, las leyes de escala, el balance energético y el metabolismo, los mecanismos de regulación térmica o la difusión de gases y líquidos en los seres vivos, hasta las propiedades de los biomateriales, el transporte a través de las membranas celulares, la propagación de los impulsos nerviosos, la física de la visión o los efectos biológicos de la radiación.

Se incluyen numerosos ejemplos junto con unos 250 ejercicios propuestos, orientados a facilitar el trabajo personal del estudiante. Está acompañado de más de 500 ilustraciones y 6 apéndices en los que se resumen las diversas fórmulas y técnicas matemáticas que se emplean en el texto.

Los autores, con una larga experiencia como profesores de la disciplina en la Universidad Autónoma de Madrid, han contado con la generosa y enriquecedora colaboración y sugerencias de los profesores de Biología y Medicina de su universidad.

Raúl Villar (Madrid,1948) es catedrático de Física de la Materia Condensada en la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector de 1994 a 2002. Ha enseñado Física en primer curso de Biología durante los últimos quince años, y Física para Humanistas durante seis años. También ha impartido durante varios años Termodinámica y Física Estadística. Como investigador, es especialista en las propiedades de sólidos a muy bajas temperaturas.

Cayetano López (Madrid, 1946) es catedrático de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector. Ha enseñado Física de los Procesos Biológicos en primer curso de la licenciatura de Ciencias Biológicas desde hace más de quince años. También ha enseñado Física Cuántica, Teoría Cuántica de Campos y Física de Partículas Elementales. Además de sus trabajos científicos es autor de multitud de artículos sobre diversos temas científicos y autor de dos libros de divulgación: *El Ogro Rehabilitado*, (El País-Aguilar, 1995) y *Universo sin fin* (Taurus, 1999).

Fernando Cussó (Madrid, 1952) es catedrático de Física Aplicada de la Universidad Autónoma de Madrid. Desde el año 1975 ha impartido docencia de Física en el primer curso de Biología, Química, Matemáticas y Física, siendo responsable de la adecuación de la enseñanza experimental en Física de los Procesos Biológicos. Ha impartido también las asignaturas de Electromagnetismo y Óptica. Su actividad investigadora se ha centrado en el campo de las propiedades ópticas de los materiales.

ECU®

EDITORIAL CLUB UNIVERSITARIO

www.ecu.fm