

Esta fuerza, llamada de contacto, que no debe confundirse con las fuerzas de acción y reacción a dos cuerpos introducidas en la tercera ley de Newton, resulta de la combinación de multitud de interacciones intermoleculares en el material de la superficie, que son las que le dan rigidez. Puede entenderse mejor su origen considerando lo que ocurre cuando el objeto en cuestión se apoya sobre una superficie elástica tal como se ilustra en la figura 3.7.

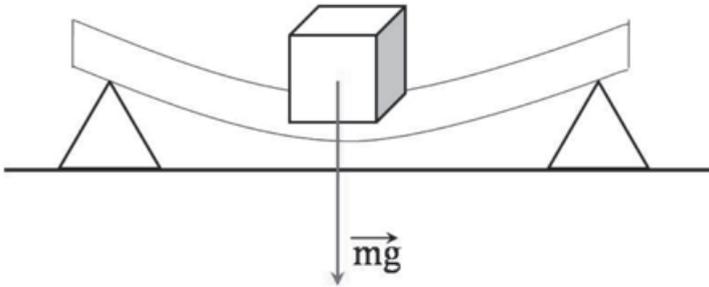


Fig. 3.7. Deformación inducida por un cuerpo sobre una superficie sólida en razón de su peso.

Su peso deforma la superficie y esa deformación genera una fuerza elástica, resultado de sumar múltiples interacciones intermoleculares, que tiende a recuperar la forma plana, que es la de equilibrio interno de la superficie. La nueva posición de equilibrio se alcanza cuando la fuerza elástica de recuperación iguala al peso del cuerpo sobre la superficie. Pues bien, esta fuerza elástica es lo que llamamos, en general, fuerza de contacto y queda claro que **es siempre igual a la fuerza efectiva (el peso, en este caso) y normal a la superficie de contacto** (en caso de existir una componente tangencial, el cuerpo deslizaría sobre la superficie). En el caso límite en el que el peso tienda a cero, la superficie permanece en su posición inicial y no genera ninguna fuerza de contacto. Por supuesto, cuando el peso (por unidad de superficie) es demasiado grande y supera el límite de rotura de la superficie de apoyo, ésta se rompe y el cuerpo cae libremente. Pues bien, aunque no seamos capaces de percibir la deformación de una superficie rígida sobre la que se apoya un objeto, siempre se da un fenómeno similar, de forma que la fuerza de contacto que genera es de la misma naturaleza que en el caso de la superficie deformable elásticamente.

Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo sólido insuficiente para romperlo o moverlo es porque este último desarrolla una fuerza de contacto que contrarresta la fuerza original. Este tipo de fuerzas **se aplican siempre en puntos de la superficie de contacto entre los dos cuerpos y tienen, en caso de estar por debajo del límite de rotura, una magnitud suficiente para contrarrestar las fuerzas efectivas, pero no más. Así, para la superficie**

sólida sobre la que está apoyado un cuerpo, la fuerza de contacto hacia arriba sobre el cuerpo es igual al peso de éste, sea grande o pequeño. Ya veremos que ésta es una idea básica para estudiar el equilibrio de un conjunto de cuerpos en contacto.

Un caso particular de esta situación es el de un cuerpo colgando de una cuerda. El peso del cuerpo tira de ésta hacia abajo, pero en la configuración de la figura 3.8, en la que el sistema cuerda-cuerpo está en reposo, tiene que haber una fuerza de contacto hacia arriba que la contrarreste, esta vez ejercida por la cuerda sobre el cuerpo; en caso contrario, el cuerpo se movería hacia abajo. De nuevo, esta fuerza es el resultado de las interacciones entre las moléculas de la cuerda que hacen que ésta se mantenga con una longitud constante; si la fuerza de contacto que tiene que ejercer para compensar el peso del cuerpo es demasiado grande, puede superarse el límite de rotura, en cuyo caso la cuerda se rompe.

Siempre que nos mantengamos por debajo de dicho límite, el peso es transmitido, a su vez, por la cuerda hasta el punto de inserción en el techo que ejerce una fuerza de contacto igual a dicho peso para mantener todo el sistema en reposo. Cuando el cuerpo se mueve libremente hacia abajo, la única fuerza actuante es la gravedad y la cuerda no ejerce acción ninguna sobre él. Para casos intermedios, en los que el cuerpo cae, pero con una aceleración menor que la de la gravedad, el peso es parcialmente contrarrestado por una fuerza que tira hacia arriba, por ejemplo por una goma elástica, e induce una disminución en la aceleración de caída.

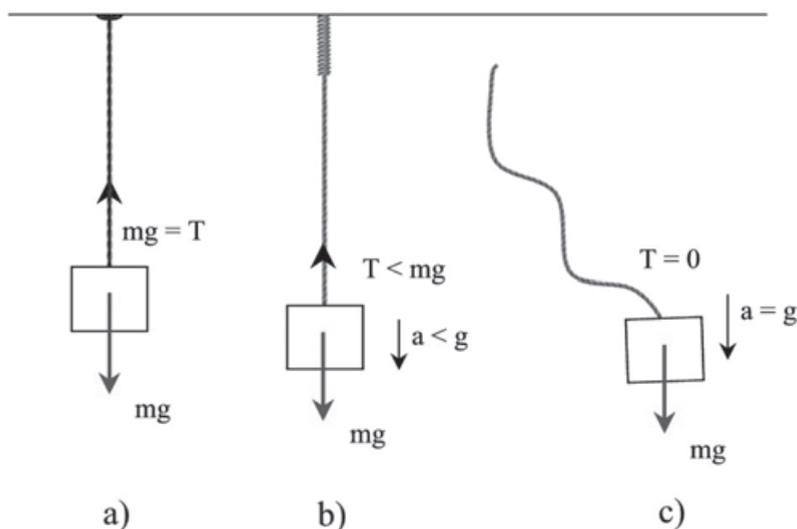


Fig. 3.8. Peso colgado de una cuerda. a) sujeto rígidamente al techo, b) sujeto al techo mediante una estructura elástica, c) suelta.

Ejemplo. Consideremos el caso sencillo de un par de cuerpos, como los de la figura 3.9, ligados por una cuerda que tomaremos, para simplificar, inextensible y de masa cero. Así, cuando la cuerda está tensa, en cada uno de sus dos extremos actúa una fuerza, que es la tensión.

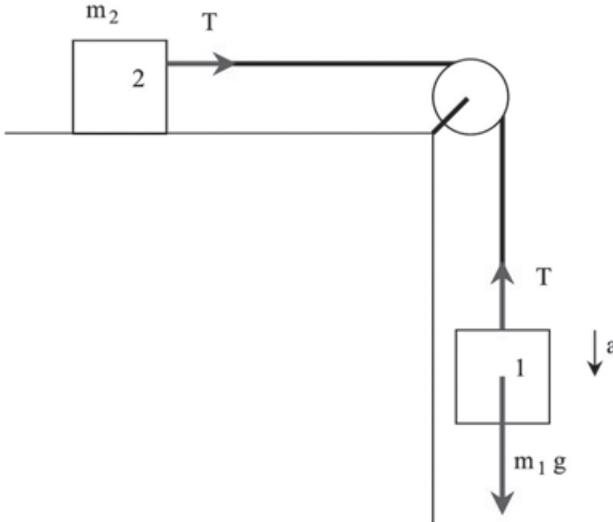


Fig. 3.9. Sistema de dos cuerpos ligados moviéndose.

Como la cuerda no se rompe, ni se estira, la tensión es transmitida a lo largo de todos sus puntos y es la misma en los dos extremos. Todo el sistema se mueve por la acción del peso del cuerpo 1, por lo que la fuerza externa total es m_1g , mientras que la masa total es $m_1 + m_2$. Así, en ausencia de rozamiento, la aceleración con la que se moverán los dos cuerpos (y la cuerda que los liga) resulta de aplicar la segunda ley de Newton:

$$F = m_1g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \quad (3.4)$$

Podemos ahora calcular la tensión, que es la fuerza de contacto T con la que la cuerda tira de ambos cuerpos (frenando el 1 y acelerando el 2). Concentrémonos, para empezar, en el movimiento del cuerpo 1: se mueve con la aceleración dada por la expresión (3.4), y sobre él actúan dos fuerzas, su propio peso y la tensión T , con sentidos contrarios. Por lo tanto, de la segunda ley de Newton se sigue que:

$$m_1 g - T = m_1 a = m_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

de donde se puede despejar T :

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Pero esta misma tensión es la que ejerce la cuerda sobre el segundo cuerpo, de forma que puede verificarse la coherencia de todo el esquema considerando el cuerpo número 2 y viendo que sobre él sólo actúa la tensión de la cuerda (su propio peso está cancelado exactamente por la fuerza de contacto de la superficie sólida). La aceleración con la que se moverá debe responder a la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{T}{m_2} = \frac{1}{m_2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

que coincide con el valor encontrado estudiando el sistema completo, como era de esperar dado que ambos cuerpos se mueven con la misma aceleración. Si, por ejemplo, el cuerpo 1 tiene una masa de 1 kg y el cuerpo 2 de 9 kg, la aceleración con la que se mueve el conjunto de ambos es $a = 0,1 g = 0,98 \text{ m/s}^2$, mientras que la tensión de la cuerda es $T = 8,82 \text{ N}$. Obsérvese que en el límite en el que m_2 tiende a infinito, la aceleración con que se mueve el sistema es cero y la tensión de la cuerda tiende al peso del cuerpo 1, es decir, el cuerpo 2 permanece inmóvil debido a su inercia infinita y el cuerpo 1 cuelga de la cuerda teniendo que ejercer ésta una fuerza hacia arriba igual al peso de dicho cuerpo. En el otro límite, cuando m_2 tiende a cero, la aceleración de caída es la de la gravedad y la tensión es cero. Corresponde al caso de que la cuerda cuelgue libremente del cuerpo que está cayendo sin arrastrar ninguna otra masa.

3.3 La fuerza centrífuga

Otro caso importante de fuerza de contacto es la llamada fuerza centrífuga. Ya sabemos que para que un cuerpo describa una trayectoria curva, por ejemplo una circunferencia, hay que ejercer sobre él una fuerza centrípeta, dirigida hacia el centro de curvatura, que es la responsable de que no siga un movimiento rectilíneo y uniforme.

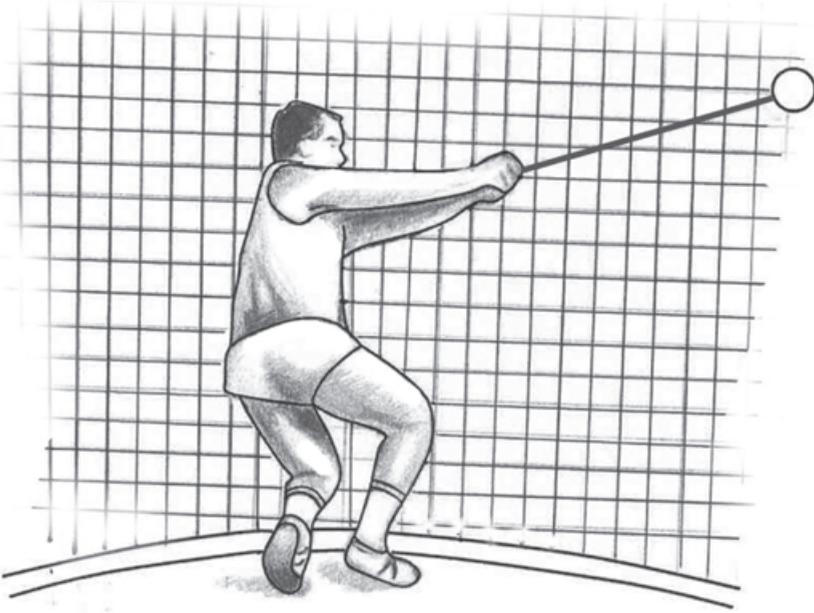


Fig. 3.10. Lanzador de martillo.

Esta fuerza puede ser ejercida por una cuerda fijada al objeto que gira, en el caso de un lanzador de martillo, por ejemplo, tal como puede apreciarse en la figura 3.10. La bola sobre la que se ejerce la fuerza centrípeta debe ejercer sobre la cuerda que tira de ella una fuerza de contacto igual y cambiada de signo, es decir, hacia fuera, que se llama fuerza centrífuga. Pero su carácter de fuerza de contacto, derivada de las interacciones que mantienen pegada la bola a la cuerda, se manifiesta en el hecho de que cuando cesa la fuerza centrípeta, por ejemplo al cortar la cuerda o soltarla en el caso del lanzador, la bola sigue un movimiento rectilíneo en dirección tangente a la trayectoria y no en sentido contrario al centro de curvatura.

La fuerza efectiva que se aplica para forzar una determinada trayectoria es la centrípeta, mientras que la centrífuga no es independiente, sino que aparece como fuerza de contacto igual y de sentido contrario a la centrípeta y no se aplica sobre el cuerpo que gira, sino que es éste el que la ejerce sobre el dispositivo que le hace girar. En el caso de una persona en una centrífuga de entrenamiento, en la disposición de la figura 1.18, la fuerza centrípeta se ejerce sobre la espalda de la persona por el respaldo del asiento que gira y es esta fuerza la que hace que describa una trayectoria circular. Ahora bien, el hecho de que la espalda permanezca pegada al respaldo implica que la espalda ejerce sobre éste una fuerza igual y de sentido contrario, que es la fuerza centrífuga. Este mismo fenómeno ocurre cuando un automóvil gira

y las personas que van dentro se aprietan contra la pared situada en el lado contrario al centro de curvatura. El cuerpo de la persona seguiría en línea recta si no hubiera ninguna interacción y gira porque la pared del coche (o la fricción con el asiento) ejercen una fuerza centrípeta sobre él, generándose entonces la correspondiente fuerza de contacto, centrífuga, del cuerpo sobre la pared.

Ejercicio. Una atracción de feria consiste en una cápsula colgada al extremo de una varilla (o una cadena tensa). El otro extremo está fijo a un eje vertical que puede girar sobre sí mismo arrastrando a la varilla, la cápsula y la persona situada dentro de ella, tal y como se indica en la figura 3.11.

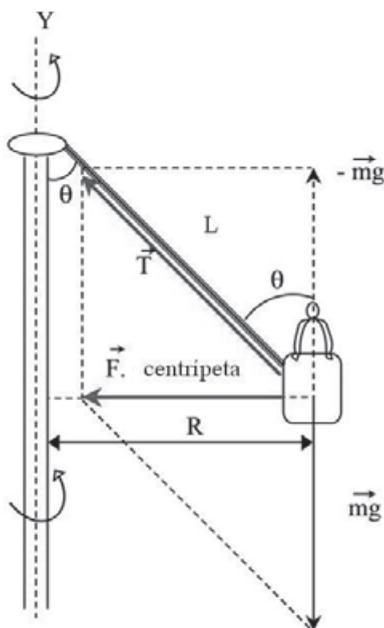


Fig. 3.11. Persona en una cabina sujeta por un brazo articulado fijo a un eje en rotación.

Al girar, la varilla pivota sobre el extremo fijo al eje Y se separa hasta alcanzar una posición de equilibrio que es distinta en función de la frecuencia de giro. Calcularemos la velocidad angular ω necesaria para que la varilla se eleve hasta formar un ángulo de 60° con la vertical.

Veamos cuál es el juego de fuerzas en presencia. Sobre el cuerpo de la persona actúan su propio peso y la fuerza de contacto ejercida por la cápsula en la dirección de la varilla que mantiene a ésta sujeta al eje de giro. La componente vertical de esta fuerza de contacto debe compensar al peso e impedir que se mueva hacia abajo, mientras que la componente horizontal es la fuerza centrípeta transmitida por la cápsula en rotación responsable del movimiento circular uniforme alrededor del eje vertical:

$$T \cos \theta = mg \quad (3.5)$$

$$T \sin \theta = m\omega^2 R \quad (3.6)$$

Dividiendo, ahora, la segunda ecuación por la primera, obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 L \sin \theta}{g}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L \cos \theta}$$

Así, si la longitud de la varilla es de 5 m, la velocidad angular necesaria para mantenerla formando un ángulo de 60° es:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{5 \times \frac{1}{2}}} = 1,98 \text{ rad/s}$$

que equivale a una frecuencia de giro de $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,32$ revoluciones por segundo o a 19 revoluciones por minuto.

Como se ha visto, al concentrarnos en las fuerzas reales sobre la persona no aparece la fuerza centrífuga, que es una fuerza de contacto ejercida sobre la cápsula.

Como veremos en la sección dedicada a las centrífugas de experimentación, si nos situamos en el sistema de referencia en rotación, la fuerza centrífuga se manifiesta también aun cuando no exista un soporte rígido ligado al cuerpo. Estas fuerzas, que no son reales pero aparecen cuando describimos el movimiento en un sistema de referencia no inercial, en el que no se cumplen las leyes de Newton tal y como han sido formuladas, se llaman ficticias.

3.4 Fuerzas de rozamiento

3.4.1 Movimiento de un cuerpo sobre una superficie sólida

Cuando un cuerpo desliza sobre una superficie sólida se produce una fuerza de rozamiento derivada de las múltiples interacciones entre las moléculas de la superficie y del cuerpo. De nuevo, la composición de todas estas interacciones, de origen electromagnético, resulta en una fuerza simple que **nunca puede ser mayor que la fuerza efectiva externa que se aplica al cuerpo para moverlo**. Cuando empujamos un ladrillo que está sobre una superficie sólida con una fuerza pequeña, el ladrillo no se mueve porque la fuerza de rozamiento la

compensa exactamente. La fuerza de rozamiento no puede ser más grande porque entonces el ladrillo se movería en dirección contraria a la fuerza que estamos aplicando. Cuando la fuerza que aplicamos es superior a la fuerza máxima de rozamiento, el ladrillo empieza a desplazarse, aunque con una aceleración menor que la que tendría si no hubiera rozamiento porque hay una compensación parcial de fuerzas.

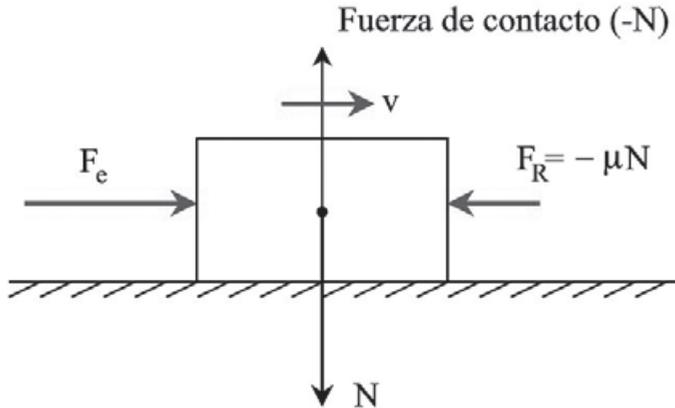


Fig. 3.12. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que desliza sobre una superficie sólida por la acción de una fuerza externa F_e .

Las características de la **fuerza máxima de rozamiento o fricción** son las siguientes:

- **Va siempre en sentido contrario a la velocidad del cuerpo y, por consiguiente, lo frena.**
- **Depende de la fuerza con la que ambas superficies se mantienen en contacto.** Lógicamente cuanto mayor sea esta fuerza, menor es la distancia entre moléculas y más grande es la fuerza de fricción.
- **Depende de la naturaleza de dichas superficies.**

La expresión que resume estas propiedades de forma más sencilla es la siguiente:

$$\vec{F}_R = -\mu N \vec{u} \quad (3.7)$$

donde \vec{u} es el vector unitario paralelo a la velocidad, N es la fuerza normal a ambas superficies que las mantiene unidas, normalmente la componente vertical del peso del cuerpo que desliza sobre una superficie horizontal, y μ es un coeficiente que depende de la naturaleza de las superficies, pequeño para superficies pulidas y grande para superficies rugosas. Además, el hecho de que sea más fácil mantener un cuerpo deslizando sobre una superficie, una vez

que está ya en movimiento, que ponerlo a deslizar desde el reposo implica que dicho coeficiente tiene valores distintos en ambas circunstancias. Por lo tanto, distinguiremos el coeficiente estático μ_0 y el dinámico, μ , para el cuerpo en movimiento, de forma que **se cumple la condición:** $\mu_0 > \mu$. De la ecuación (3.7) se sigue que **dicho coeficiente no tiene dimensiones.**

En realidad, el coeficiente dinámico μ depende de la velocidad pero normalmente se aproxima por un valor promedio constante.

Tabla 3.1. Algunos valores del coeficiente de rozamiento	
Superficies en contacto	μ_0
Cabeza del fémur con la cadera y líquido sinovial	$\sim 0,003$
Cera de esquí sobre nieve seca	$\sim 0,04$
Cera de esquí sobre nieve húmeda	$\sim 0,1$
Superficies con lubricante industrial	$\sim 0,1$
Madera sobre madera	$0,25 \sim 0,50$
Madera sobre ladrillo	$0,30 \sim 0,40$
Goma sobre sólido	$1 \sim 4$

Ejemplo. Consideremos un cuerpo de masa m sobre una superficie inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal, según la figura 3.13.

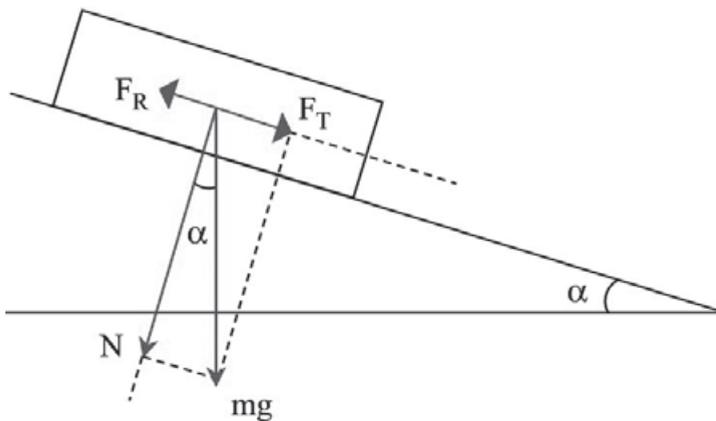


Fig. 3.13. Cuerpo en equilibrio sobre una pendiente debido al rozamiento.

La componente normal a ambas superficies es:

$$N = mg \cos \alpha$$

mientras que la componente del peso que tira paralelamente a la superficie es:

$$F_T = mg \operatorname{sen} \alpha$$

Mientras el cuerpo está en reposo, la fuerza máxima de rozamiento será igual a $\mu_0 N$ y no se moverá hasta que la fuerza que tira del cuerpo la supere. Si partimos de la posición horizontal y vamos aumentando el ángulo de inclinación, el cuerpo empezará a moverse cuando se llegue a un valor de α tal que:

$$\mu_0 \times mg \cos \alpha = F_T = mg \sin \alpha$$

Es decir, el ángulo mínimo para el que se iniciará el movimiento es tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_0$$

Una vez que el cuerpo está en movimiento, la aceleración con la que se mueve se obtendrá aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - \mu \times mg \cos \alpha = ma$$

$$a = (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)g = \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \mu \right) g \cos \alpha = (\mu_0 - \mu) g \cos \alpha$$

Para el caso de la plataforma de un camión volquete y una caja de madera deslizando por ella, el coeficiente estático puede ser del orden de 0,6, con lo que el ángulo a partir del cual la caja comienza a deslizar es:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,6; \quad \alpha \approx 31^\circ$$

Si el coeficiente dinámico promedio μ es 0,5, la aceleración con la que la caja desliza para dicho ángulo será de $0,84 \text{ m/s}^2$.

Un procedimiento eficaz, por lo tanto, de estimar experimentalmente el coeficiente de rozamiento estático es medir el ángulo de inclinación a partir del cual un cuerpo desliza sobre una superficie. Es lo que se ha hecho con animales sobre superficies duras y pulidas, aunque sólo es posible realizar el experimento con crías de las distintas especies, ya que los animales adultos saltan o se escapan mucho antes de que se alcance el ángulo de deslizamiento.

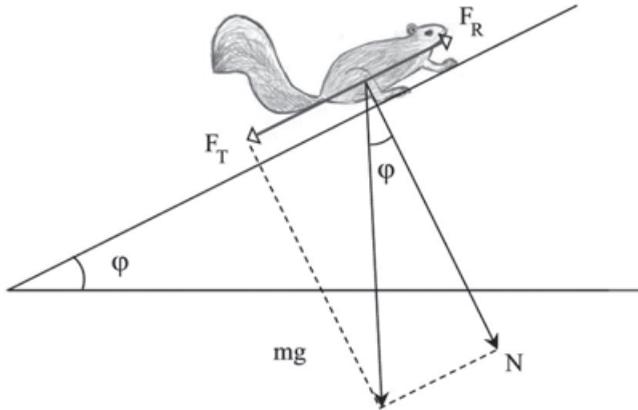


Fig. 3.14. Ardilla sobre una superficie inclinada. La fuerza de rozamiento, F_R , es igual a la componente normal del peso, N , multiplicada por el coeficiente de rozamiento.

Las palmas de las manos y las plantas de los pies de los primates son rugosas y tienen un coeficiente de rozamiento notablemente alto, de forma que una cría de lémur (*Microcebus*) es capaz de mantenerse sin deslizarse hasta un ángulo de inclinación de unos 72° , lo que implica que μ_0 es del orden de 3. Una persona sobre sus pies y manos desliza normalmente antes de llegar a los 45° , lo que implica que μ_0 es menor que 1. Por el contrario, una cría de ardilla (*Sciurus*) comienza a deslizarse sobre una superficie dura cuando el ángulo llega a los 35° ($\mu_0 \approx 0,7$), aunque si pudiera clavar sus uñas para trepar podría hacerlo sobre una superficie vertical.

Los lubricantes tienen como función alisar las irregularidades microscópicas de las superficies, metiéndose en los intersticios, y crear una lámina entre las superficies que facilita el deslizamiento. Disminuyen, por lo tanto, el coeficiente de rozamiento.

El roce entre las superficies de los huesos en una articulación, por ejemplo entre la cabeza del fémur y el alveolo semiesférico situado en la cadera en el que se aloja, el acetábulo, sería grande y el movimiento muy penoso si no existieran mecanismos que disminuyen enormemente el coeficiente de rozamiento. Así, sobre las superficies articulares (*epífisis*) se sitúa un cartílago hialino muy liso que facilita el deslizamiento, al tiempo que la articulación se lubrica con el líquido sinovial. Éste está compuesto esencialmente de agua (un 94 por ciento) pero tiene también pequeñas cantidades de albúmina, globulina y otras proteínas y es capaz de rebajar el coeficiente de rozamiento dinámico hasta un valor del orden de 0,003 haciendo que las pérdidas por rozamiento sean ínfimas y que las superficies óseas no sufran con el roce continuo durante la locomoción u otra forma de movimiento.

Ejemplo. Volvamos a la figura 3.9, en la que un objeto de masa m_1 arrastraba con su peso a otro objeto de masa m_2 deslizando sobre una superficie horizontal. Añadamos ahora la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

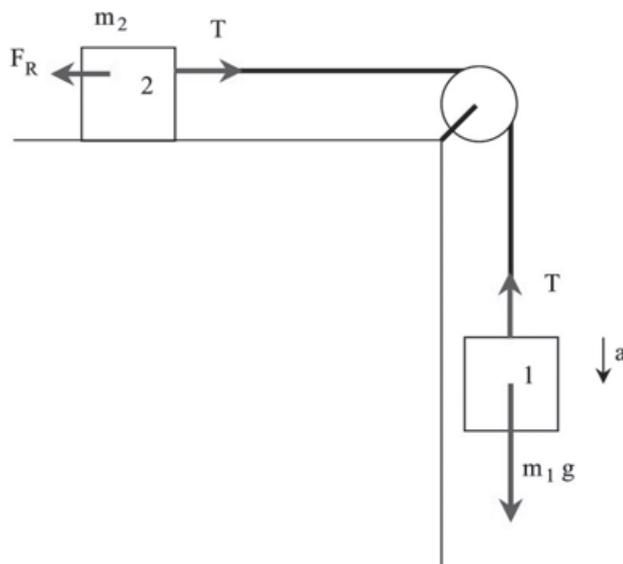


Fig. 3.15. Sistema de dos cuerpos ligados con rozamiento sobre la superficie de deslizamiento.

Para que el sistema de los dos cuerpos se ponga en movimiento es necesario que la fuerza m_1g sea superior a la fuerza de rozamiento estático $\mu_0 m_2g$. Es decir, debe cumplirse que:

$$m_1 \geq \mu_0 m_2$$

Si, por ejemplo, la masa m_2 es de 9 kg y el coeficiente de rozamiento estático es del orden de 0,8, la masa m_1 necesaria para mover al sistema tiene que ser superior a 7,2 kg. Una vez que las dos masas están en movimiento, la aceleración con la que se mueven viene dada por:

$$m_1g - \mu m_2g = (m_1 + m_2)a$$

de donde se deduce que:

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

Para el caso de una masa m_1 mínima, de 7,2 kg, suponiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico sea de 0,7, la aceleración será de unos 0,54 m/s². La tensión de la cuerda puede calcularse analizando, por ejemplo, el movimiento de la masa m_1 :

$$m_1 g - T = m_1 a$$

y, por lo tanto,

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \mu) g$$

que, para el caso que estamos considerando resulta ser de unos 67 N. Nótese que todas las expresiones obtenidas en este ejemplo se reducen a las de la sección 3.2 haciendo cero el coeficiente de rozamiento.

3.4.2 Movimiento de un cuerpo en un fluido

Cuando un cuerpo sólido se mueve en un fluido, por ejemplo aire o agua, bajo la acción de una fuerza externa, se produce una interacción entre el cuerpo y el fluido. Esta interacción es el resultado de multitud de interacciones entre átomos y moléculas, todas de carácter electromagnético, de una enorme complejidad pero cuyo resultado neto es disipar parte de la energía de movimiento del cuerpo y frenarlo. Se trata, por lo tanto, de una fuerza derivada que se añade a las que puedan ya estar actuando sobre él. No es posible deducir, a partir de las interacciones intermoleculares, una expresión para dicha fuerza, pero puede aproximarse su dependencia con las variables que intervienen en el problema a partir de los conocimientos adquiridos en mecánica de fluidos.

La fuerza de rozamiento, o de fricción, va siempre en dirección contraria al movimiento del cuerpo (a su velocidad) y contribuye a frenarlo. Además, es tanto más grande cuanto mayor es la velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido y se anula cuando no existe dicho movimiento. Como veremos en el capítulo 14, existe una cantidad sin dimensiones, llamada número de Reynolds, que permite comparar la relación entre la inercia del cuerpo que se mueve y la fuerza debida a la fricción con el fluido. El número de Reynolds se define de la siguiente forma:

$$N_R = \frac{\rho v R}{\eta} \quad (3.8)$$

donde ρ es la densidad del fluido, v es la velocidad con la que se mueve el cuerpo, R es una dimensión lineal característica de su tamaño y η es un parámetro llamado viscosidad del fluido cuya definición precisa se verá en el capítulo 14. Para el agua, por ejemplo, los valores de ρ y η son tales que:

$$N_R = 10^6 \times vR$$

donde v y R se expresan en unidades del SI.

Cuando el número de Reynolds es pequeño, pongamos menor que 1, la fuerza debida a la viscosidad del fluido es muy grande y la inercia del cuerpo en movimiento es irrelevante. En este límite es preciso hacer una fuerza constante para poder moverse y en cuanto cesa la fuerza cesa el movimiento por efecto de la fricción. El movimiento de los microorganismos movidos por su propia impulsión o por la fuerza de la gravedad se sitúa dentro del régimen de pequeños números de Reynolds: desde $N_R = 10^{-5}$ para una bacteria hasta $N_R = 10^{-1}$ para un ciliado. En el caso de macromoléculas, núcleos, fragmentos de ADN, etc., moviéndose en un medio viscoso como en las centrifugas de experimentación en bioquímica, el número de Reynolds es todavía más pequeño. **En todos estos casos de número de Reynolds menor que 1 se verá que la fuerza de fricción puede aproximarse por una expresión proporcional a la velocidad.**

El movimiento de la mayoría de los animales acuáticos se sitúa, sin embargo, dentro del régimen de números de Reynolds grandes, desde $N_R = 10^8$ para una ballena hasta $N_R = 10^4$ para los grandes peces o mamíferos marinos, $N_R = 10^5$ para un buceador o $N_R = 10^2$ para un pez pequeño. Y lo mismo ocurre con todos los animales saltadores o voladores. En este caso, **la inercia es más importante que la fuerza de fricción y se verá también que ésta es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad.**

Fuerza proporcional a la velocidad

La fuerza de rozamiento de un cuerpo moviéndose en un fluido puede aproximarse, en caso de que el número de Reynolds asociado a su movimiento sea menor que 1, con una expresión del tipo:

$$\vec{F}_R = -\beta\vec{v} \quad (3.9)$$

donde β es un parámetro que depende de la forma del cuerpo y la viscosidad del fluido y \vec{v} es la velocidad relativa entre ambos.

Así, si \vec{F}_e es la fuerza efectiva, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo excluyendo el rozamiento, la fuerza total será igual a la efectiva más la de rozamiento y la segunda ley de Newton se escribirá del siguiente modo:

$$\vec{F}_e - \beta\vec{v} = m\vec{a} \quad (3.10)$$

Empezaremos por considerar un movimiento rectilíneo, en cuyo caso sólo interviene una dimensión. La ecuación (3.10) toma la forma:

$$F_e - \beta v = ma \quad (3.11)$$

Para el caso de que F_e sea constante, por ejemplo la fuerza de la gravedad terrestre, la ecuación anterior puede resolverse exactamente. De esta expresión se sigue que, **para cada fuerza F_e , hay una velocidad máxima, o velocidad límite, que no se puede sobrepasar.** En efecto, cuando se parte del reposo, la aceleración que adquiere el cuerpo es la que correspondería a la fuerza F_e sin rozamiento, pero según va aumentando la velocidad, el término $-\beta v$ se va haciendo más grande y la aceleración va disminuyendo. Si sólo existiera la fuerza efectiva, el cuerpo se movería con aceleración constante, pero el efecto de frenado del rozamiento se traduce en que la aceleración se hace cada vez más pequeña. Cuando la velocidad a la que se llega es lo suficientemente grande como para que el término de rozamiento compense exactamente la fuerza efectiva, la aceleración del movimiento se hace cero y la velocidad no puede aumentar. Se alcanza así lo que se llama **velocidad límite, que es la máxima posible para la fuerza efectiva, el cuerpo y el fluido de que se trate. Una vez alcanzada, la aceleración es siempre cero y la velocidad no puede aumentar más.** Para el caso de microorganismos, células o fragmentos de células o de macromoléculas en un medio acuático, esta velocidad límite es tan pequeña que se llega a ella de forma inmediata y el movimiento bajo la acción de una fuerza efectiva constante es uniforme. La velocidad límite v_L es, por lo tanto, el valor de la velocidad que hace que la aceleración en la expresión (3.11) sea cero:

$$v_L = \frac{F_e}{\beta} \quad (3.12)$$

La consecuencia más importante es que, **cuando existe fricción con un fluido, hay que hacer una fuerza continua para mantener una velocidad uniforme igual a la velocidad límite asociada a dicha fuerza. No se produce, en este caso, un movimiento uniformemente acelerado, sino que hay aceleración sólo de forma transitoria hasta llegar a la velocidad límite.**

Para cuerpos esféricos, el coeficiente β tiene la forma (fórmula de Stokes):

$$\beta = 6\pi R\eta \quad (3.13)$$

donde R es el radio de la esfera y η la viscosidad introducida en la ecuación (3.8). Para cuerpos con otras formas, el coeficiente adimensional (6π en el caso de la esfera) es distinto.

La viscosidad del agua es $\eta \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, la del plasma sanguíneo es $\eta \approx 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ y la del aire es $\eta \approx 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Así, en el caso de un glóbulo rojo, cuyo radio es del orden de $2 \times 10^{-6} \text{ m}$, el parámetro β , cuando se mueve en plasma sanguíneo, es:

$$\beta = 6\pi \times 2 \times 10^{-6} \times 1,8 \times 10^{-3} = 0,68 \times 10^{-7} \text{ kg/m}$$

Observación. Corrección por el empuje de Arquímedes. Cuando un cuerpo cae en un fluido, además de la fuerza de gravedad y el rozamiento, actúa sobre él el empuje de Arquímedes hacia arriba, igual al peso de una cantidad de fluido que ocupa el volumen del cuerpo, es decir, $m_f g$, donde m_f es dicha masa de fluido. La fuerza efectiva total será, por lo tanto, $(m - m_f)g$, con lo que la única modificación que hay que hacer para tener en cuenta el empuje de Arquímedes es poner $m - m_f$ en todas las expresiones en lugar de la masa. Para el caso del movimiento en aire, la masa de aire que ocupa el volumen de un cuerpo denso es tan pequeña que la corrección es irrelevante y no es preciso tenerla en cuenta, pero para el movimiento en agua u otro líquido, la corrección es importante, hasta el punto de que para cuerpos menos densos que el líquido, la fuerza efectiva es vertical hacia arriba, lo que les hace ascender hasta que llegan a la superficie y se quedan flotando con una parte fuera del líquido y otra dentro dependiendo de la relación entre las dos densidades.

Un cuerpo esférico cayendo bajo su propio peso en un fluido tendrá como velocidad límite:

$$v_L = \frac{(m - m_f)g}{6\pi R\eta} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_f)g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta} \quad (3.14)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo y ρ_f es la densidad del fluido.

En el caso de un glóbulo rojo, cuyo radio es del orden de $2 \times 10^{-6} \text{ m}$ y su densidad $\rho = 1,3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, la velocidad límite en plasma sanguíneo, cuya densidad es $\rho_f = 1,06 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, será:

$$v_L = \frac{2 \times (2 \times 10^{-6})^2 (1,3 - 1,06) \times 10^3 \times 9,8}{9 \times 1,8 \times 10^{-3}} = 1,16 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

Esta velocidad, también llamada de sedimentación, es minúscula y se alcanza prácticamente de forma inmediata, con lo que el movimiento en el medio fluido bajo la acción de su propio peso es uniforme. El tiempo de sedimentación en un solo centímetro de plasma para el glóbulo rojo será:

$$t = \frac{0,01}{1,16 \times 10^{-6}} = 8.600 \text{ s} = 2 \text{ h } 23 \text{ min}$$

El número de Reynolds asociado al movimiento del glóbulo rojo es:

$$N_R = \frac{1,06 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \times 1,16 \times 10^{-6}}{1,8 \times 10^{-3}} = 1,4 \times 10^{-6} \ll 1$$

que justifica la aproximación proporcional a la velocidad. La distancia que recorre hasta llegar a la velocidad límite es menor que el tamaño de un átomo. Es decir, en caso de cuerpos tan pequeños, con números de Reynolds muy bajos, la aceleración inducida por la aplicación de una fuerza constante es irrelevante y hay que mantener dicha fuerza para moverse con un movimiento uniforme prácticamente desde el principio.

Ejemplo. Consideremos ahora el movimiento de un espermatozoide en un medio acuoso. Su tamaño es del orden de $5 \times 10^{-6} \text{ m}$ y se mueve, gracias al impulso que se da con su flagelo, a una velocidad de $40 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ (lo que implica que puede avanzar unos 14 cm en una hora). El número de Reynolds será:

$$N_R = \frac{10^3 \times 5 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-6}}{10^{-3}} = 2 \times 10^{-4} \ll 1$$

y la fuerza que debe desarrollar para moverse a esta velocidad es:

$$F \approx 6\pi R\mu v_L = 6\pi \times 5 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-6} = 3,8 \times 10^{-12} \text{ N}$$

Fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad

Para el caso de movimientos en fluidos caracterizados por números de Reynolds mayores que 1, la fuerza de rozamiento se puede aproximar con una expresión de la forma:

$$\vec{F}_R = -\alpha v^2 \vec{u}_T \quad (3.15)$$

donde \vec{u}_T es el vector unitario en dirección de la velocidad y α un parámetro que depende de la forma del cuerpo, de su tamaño y de la densidad del fluido y que, con base en consideraciones dimensionales, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{1}{2} C_A \rho_f S \quad (3.16)$$

donde ρ_f es la densidad del fluido, S la sección transversal del cuerpo y C_A una constante sin dimensiones, llamada coeficiente de arrastre, cuyo valor preciso es muy complicado deducir. Para el rango de velocidades en el que

la aproximación proporcional al cuadrado de la velocidad es la apropiada, C_A vale entre 0,5 y 1. No obstante, para cuerpos muy irregulares y con angulosidades C_A puede ser superior a 1 y para cuerpos con una forma aerodinámica puede ser inferior a 0,5.

Restringiéndonos también al caso de una dimensión y fuerza efectiva constante, para un movimiento con velocidad positiva la ecuación de Newton que nos da la aceleración es:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F_e - \alpha v^2 \quad (3.17)$$

Como en el caso anterior, la fuerza de rozamiento aumenta con la velocidad, por lo que la aceleración va disminuyendo. En el límite, la fuerza de rozamiento llega a compensar exactamente la fuerza efectiva, lo que resulta en una aceleración cero y un movimiento uniforme a partir de ese momento. Existe, por lo tanto, una velocidad límite que viene dada por la ecuación (3.17) cuando $a = 0$:

$$v_L = \sqrt{\frac{F_e}{\alpha}} \quad (3.18)$$

Para un cuerpo cayendo en aire por su propio peso podemos calcular la velocidad límite poniendo la densidad del aire, $\rho_f \approx 1,25 \text{ kg/m}^3$, y sustituyendo la fuerza efectiva por mg (en el caso de que la densidad del cuerpo sea comparable con la del aire habría, de nuevo, que tener en cuenta el empuje de Arquímedes). En la tabla 3.2 pueden verse algunas velocidades límite para objetos esféricos e irregulares cayendo en el aire, donde el rango de velocidades corresponde a tomar valores para el coeficiente de arrastre C_A comprendidos entre 0,5 y 1. En la última columna se da el número de Reynolds, comprobándose que, en todos los casos, es muy superior a 1.

Tabla 3.2. Velocidades límite en aire para algunos objetos				
Objeto	Masa	Superficie frontal	v_L	N_R
Gota de lluvia	$4 \times 10^{-6} \text{ kg}$	$3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$	4,6-6,5 m/s	4×10^2
Gota de granizo	$4 \times 10^{-3} \text{ kg}$	$3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	14-20 m/s	10^4
Balón de fútbol	0,43 kg	0,038 m ²	13-19 m/s	10^5
Águila en caída libre	20 kg	0,1 m ²	56-79 m/s	10^6
Persona en caída vertical	75 kg	0,6 m ²	44-63 m/s	10^6
Bomba	500 kg	0,2 m ²	200-280 m/s	4×10^6

El valor experimental de la velocidad límite para una persona cayendo en el aire a la altura del mar se sitúa alrededor de los 55 m/s (200 km/h), que cae de lleno en el intervalo calculado. Para un águila en picado, la velocidad límite se aproxima a los 79 m/s (280 km/h), lo que implica tomar $C_A \approx 0,5$.

Cuando una persona cae con un paracaídas deportivo abierto, la velocidad límite es de tan sólo unos 3 m/s (o unos 10 km/h). La fuerza F_e sobre una persona cayendo en aire es la misma esté el paracaídas abierto o cerrado; lo que varía de un caso a otro es la fricción con el aire, mucho mayor con el paracaídas abierto debido a su mayor superficie y coeficiente de arrastre, lo que se traduce en un parámetro α más grande y una velocidad límite menor.

3.4.3 La centrifuga como instrumento de análisis

La centrifugación es un método muy extendido en los laboratorios de Biología para separar y analizar soluciones y suspensiones en un líquido de macromoléculas, células o componentes celulares. Permite determinar los componentes de un cierto material biológico sin que éstos resulten dañados en el proceso, así como purificar mezclas aislando cada uno de los componentes. El principio en el que se basa es la distinta velocidad límite que adquiere una partícula en un medio viscoso en función de su masa y de su forma.

En efecto, consideremos un conjunto de partículas en un líquido sometidas simplemente a la acción de gravedad. Tenderán a sedimentar, cayendo hacia el fondo de la vasija que contiene a la solución, pero la velocidad de sedimentación será distinta para cada clase de partícula. Como estamos considerando el movimiento de cuerpos con dimensiones y velocidades muy pequeñas moviéndose en un fluido viscoso, los números de Reynolds asociados serán también pequeños, por lo que podemos aproximar la fuerza de rozamiento con un término proporcional a la velocidad. Para este caso, recordando la expresión (3.12), la velocidad límite de caída será:

$$v_L = \frac{F_e}{\beta} = \frac{(m - m_f)g}{\beta}$$

donde m es la masa de la partícula, m_f es la masa del líquido contenido en el volumen que ocupa la partícula y β es el coeficiente de rozamiento. Para una partícula de forma aproximadamente esférica β viene dada por la fórmula de Stokes, (3.13), y la velocidad límite resulta (ecuación (3.14)):

$$v_L = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta}$$

La simple sedimentación diferencial podría ser ya un procedimiento de separación identificando las distintas especies según fueran llegando al fondo o siguiendo el proceso de sedimentación por medios ópticos, aunque para cuerpos de dimensiones subcelulares ese proceso sería muy lento. Las centrífugas son aparatos que permiten acelerar el proceso y repetirlo modificando las condiciones iniciales al generar, mediante giros alrededor de un eje, aceleraciones que pueden ser mucho mayores que la de la gravedad. Una pequeña centrífuga de mesa con un rotor que gire a 3.000 revoluciones por minuto y tenga un brazo de unos 5 cm puede generar aceleraciones del orden de 500 g, mientras que existen centrífugas capaces de llegar hasta las 500.000 g.

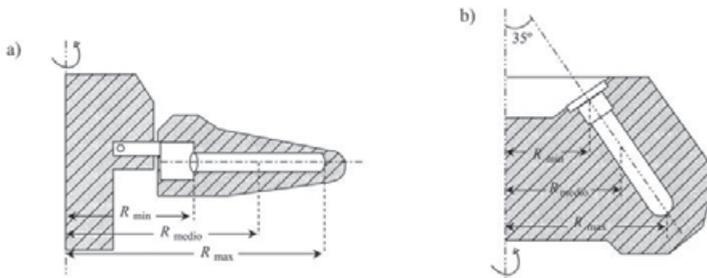


Fig. 3.16. a) Centrífuga con rotación en el plano horizontal.
b) Centrífuga con rotación inclinada un ángulo de 35° con la vertical.

Una centrífuga es un dispositivo como el de la figura 3.16a en el que un rotor gira en el plano horizontal con uno o varios tubos sujetos a lo largo de su circunferencia que contienen la solución formada por el líquido solvente y el soluto que se quiere analizar. Si nos fijamos en una de las partículas, resulta que no está sujeta a ninguna fuerza salvo la de rozamiento y es el líquido el que está obligado a seguir la trayectoria que marca el movimiento del tubo. Si no existiera rozamiento, la trayectoria, respecto de la mesa sobre la que se apoya la centrífuga, sería una línea recta, pero respecto del líquido y el tubo que lo contiene, se está moviendo hacia el fondo del tubo con una aceleración igual en módulo, y contraria en sentido, a la aceleración centrípeta (ver la figura 3.17). A esta aceleración respecto del líquido en movimiento y contraria a la centrípeta es a la que hemos llamado aceleración centrífuga.

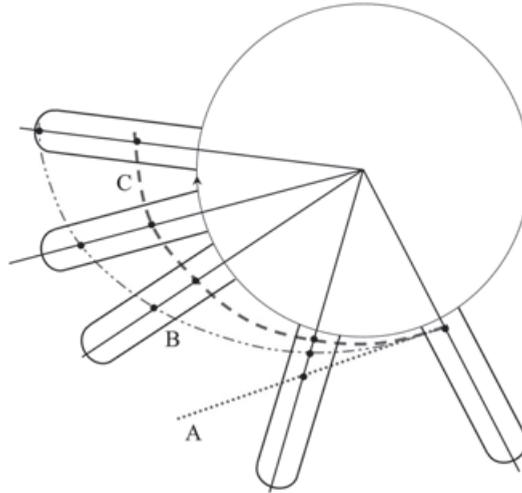


Fig. 3.17. Trayectoria de una partícula contenida en un recipiente que gira. Caso A: sin rozamiento; caso B: con rozamiento moderado de la partícula en el fluido del recipiente; caso C: con más rozamiento.

Nótese que el sistema de referencia ligado al conjunto de líquido y tubo en rotación no es inercial, por lo que, en ese sistema, no se cumplen las leyes de Newton tal y como han sido enunciadas en el capítulo precedente. La trayectoria seguida por la partícula no es rectilínea, como correspondería a un cuerpo libre, sino curva, lo que implica que debe actuar sobre ella una fuerza que es, precisamente, la fuerza centrífuga. **A este tipo de fuerzas, que no son reales en sentido estricto pero aparecen cuando nos situamos en un sistema de referencia no inercial, se les llama fuerzas ficticias.** Así, a todos los efectos, y respecto de un observador ligado al líquido, la partícula se movería como si hubiera una fuerza tirando hacia el fondo del tubo y generando una aceleración igual a la aceleración centrífuga. **Si no hubiera rozamiento, se produciría una sedimentación a gran velocidad e igual para todas las partículas.** La presencia de rozamiento cambia la situación, ya que las trayectorias respecto de la mesa en la que está apoyada la centrífuga no son rectas, sino que se curvan y el grado de curvatura depende de la fuerza de fricción, distinta para cada clase de partícula. La sedimentación es ahora diferencial.

Normalmente la velocidad de sedimentación en la gravedad terrestre es minúscula debido al pequeño tamaño de los fragmentos que sedimentan y a la gran fricción que sufren, tal y como hemos visto anteriormente en el caso de un glóbulo rojo. La centrífuga sirve, por tanto, para crear un campo de fuerzas muy superior al gravitatorio y acelerar la separación de los distintos corpúsculos en función de su tamaño.

Por ejemplo, para una frecuencia de rotación de 18.000 revoluciones por minuto y a una distancia de 9 cm del eje de giro, la aceleración centrífuga generada es:

$$a = \omega^2 R = \left(2\pi \frac{18.000}{60} \right)^2 \times 0,09 = 3,2 \times 10^5 \text{ m/s}^2 \approx 32.600 \text{ g}$$

Se llama campo centrífugo relativo (RCF, de Relative Centrifuge Field) a la aceleración obtenida en un punto de la centrífuga en unidades de g. En este caso, el RCF sería de 32.600. **El efecto de la centrífuga es, por tanto, equivalente a crear un campo gravitatorio muy grande en el que estudiar la sedimentación diferencial de diferentes corpúsculos en un líquido bajo la acción de dicho campo.** De esta forma se acortan considerablemente los tiempos de sedimentación.

Las técnicas de separación por centrifugación más usuales son:

1. Por velocidad de sedimentación partiendo de una mezcla de partículas o macromoléculas homogéneamente distribuidas en un medio viscoso. Bajo la influencia del RCF, cada partícula (células, trozos de célula, núcleos, mitocondrias, ribosomas, macromoléculas, etc.) sedimenta con una velocidad característica, depositándose en el fondo del tubo primero las más grandes, aunque la muestra de estas últimas así obtenida siempre estará contaminada por partículas más pequeñas que ya estaban presentes en esa zona al inicio de la centrifugación. Por el contrario, en la parte más alta del tubo puede obtenerse una muestra muy pura de las partículas más ligeras, que son las que sedimentan más lentamente, como puede verse en la figura 3.18.

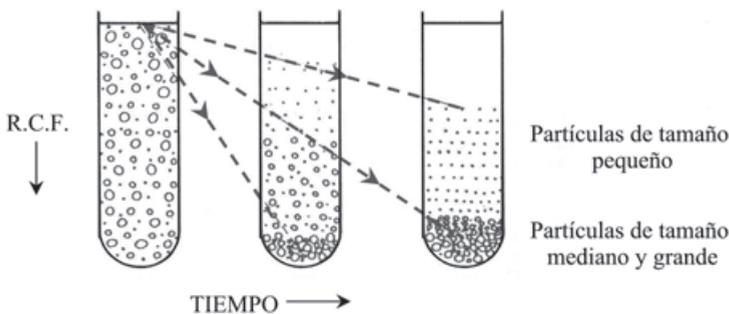


Fig. 3.18. Sedimentación diferencial a partir de una mezcla homogénea de tres especies de partículas en un medio de densidad uniforme.

2. Sedimentación en un gradiente de densidad. En este caso se prepara un medio con densidad variable, creciente hacia el fondo del tubo, de forma que

la densidad máxima es siempre menor que la de las partículas en suspensión para que se produzca la sedimentación. Se parte de la mezcla en la parte superior del tubo y, de nuevo, la diferente velocidad de sedimentación hace que las partículas se vayan diferenciando en capas que luego pueden ser separadas y analizadas.

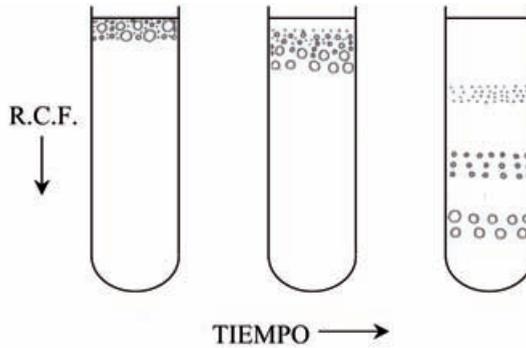


Fig. 3.19. Sedimentación diferencial en un medio de densidad variable (siempre menor que la densidad de las partículas). La separación se efectúa por la distinta velocidad de sedimentación.

3. Centrifugación isopícnica, que consiste en preparar un gradiente de densidades tal que cubra todas las densidades de la mezcla a analizar. Bajo la acción del RCF, las distintas partículas se van moviendo hasta llegar a la zona en la que su densidad iguala a la del medio líquido, en cuyo caso la velocidad límite es cero. La situación de equilibrio es, por lo tanto, una separación en zonas por densidad. Partículas de distinto tamaño pero de la misma densidad acabarán por coincidir en la misma zona, aunque se desplazan a la zona de equilibrio con distinta velocidad.

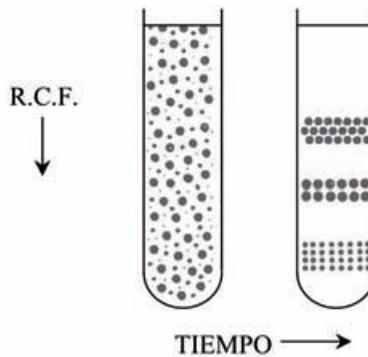


Fig. 3.20. Sedimentación isopícnica. Las distintas especies acaban situándose en zonas del fluido de densidad igual a la de las partículas.

Veamos ahora brevemente los parámetros básicos del proceso de centrifugación para el primer caso de densidad uniforme. La fuerza efectiva sobre una

partícula de masa m en un medio que gira con velocidad angular ω a una distancia r del eje de giro será:

$$F = m_{ef} \omega^2 r$$

donde m_{ef} tiene ya en cuenta el empuje de Arquímedes y será, por tanto, la masa de la partícula menos la masa del líquido que ocupa el mismo volumen de la partícula:

$$m_{ef} = m - m_f = m \left(1 - \frac{m_f}{m}\right) = m \left(1 - \frac{V \times \rho_f}{V \times \rho}\right) = m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

donde V es el volumen que ocupa la partícula y ρ_f es la densidad del fluido solvente. A la velocidad límite de sedimentación se llegará cuando la fuerza de rozamiento iguale a la fuerza efectiva, es decir:

$$m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \omega^2 r - \beta v_L = 0$$

Se llama coeficiente de sedimentación, s , a la velocidad de sedimentación dividida por la aceleración, es decir:

$$s = \frac{v_L}{\omega^2 r} = \frac{m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}{\beta} \quad (3.19)$$

El coeficiente de sedimentación tiene dimensiones de tiempo (velocidad partido por aceleración) y su unidad es el Svedberg, que es igual a 10^{-13} segundos.

De la ecuación (3.19) se sigue que el coeficiente de sedimentación es una característica de cada corpúsculo y del medio líquido en el que se mueve. Medir dicho coeficiente equivale, en consecuencia, a identificarlo a través de sus propiedades de sedimentación en un medio viscoso.

Ejemplo. El coeficiente de sedimentación de un ribosoma. Consideremos un ribosoma de *E. coli*. Dada su forma globular le aplicaremos las expresiones válidas para una esfera cuyo diámetro es del orden de $1,8 \times 10^{-8}$ m y cuya masa es igual a $5,0 \times 10^{-21}$ kg. Para el movimiento de este corpúsculo en agua, el coeficiente β será:

$$\beta = 6\pi R\mu = 6\pi \times 0,9 \times 10^{-8} \times 10^{-3} = 1,7 \times 10^{-10} \text{ kg/s}$$

y el coeficiente de sedimentación, tomando una densidad del ribosoma de $1,35 \text{ g/cm}^3$.

$$s = \frac{m(1 - \frac{\rho_f}{\rho})}{\beta} = \frac{5 \times 10^{-21} \times (1 - \frac{1}{1,35})}{1,7 \times 10^{-10}} = 0,76 \times 10^{-11} \text{ s} = 76 \text{ Svedberg}$$

La velocidad a la que se moverá este orgánulo en agua dependerá de la aceleración generada en la centrífuga. De la ecuación (3.19) se sigue que:

$$v_L = s \times a_{\text{centrífuga}}$$

y si queremos que esa velocidad sea del orden de un centímetro por hora, de forma que podamos separarlo de otros componentes celulares tras unas pocas horas de centrifugación, la aceleración necesaria será:

$$a_{\text{centrífuga}} = \frac{v_L}{s} = \frac{10^{-2}}{3.600} \times \frac{1}{76 \times 10^{-13}} = 360.000 \text{ m/s}^2 = 36.700 \text{ g}$$

lo que demuestra la necesidad de enormes aceleraciones y frecuencias en las centrífugas. Si esa aceleración quiere conseguirse a una distancia de 10 cm del eje de giro, la velocidad angular del rotor será:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\text{centrífuga}}}{r}} = \sqrt{\frac{360.000}{0,10}} = 1.900 \text{ rad / s}$$

y la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 300 \text{ rev/s} = 18.000 \text{ rev/min}$$

De la misma forma que un ribosoma de *E. Coli* tiene un coeficiente de sedimentación en agua del orden de 76 Svedberg, otros componentes celulares o moleculares tienen coeficientes de sedimentación característicos. Por ejemplo, el de una molécula de hemoglobina es del orden de 7 Svedberg, el del ARNm es de 12 Svedberg y el de un virus de la polio es de 120 Svedberg. Si consideramos este último caso, su velocidad en la misma centrífuga del ejemplo anterior será:

$$v_L = s \times a_{\text{centrífuga}} = 120 \times 10^{-13} \times 360.000 = 4,3 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$v_L = 4,3 \times 10^{-6} \times 100 \times 3.600 = 1,55 \text{ cm/h}$$

es decir, si al principio ambos componentes, ribosomas y virus, estaban mezclados, en la centrífuga que estamos considerando los virus se separarán de los ribosomas a razón de medio centímetro por hora.

Para determinar la naturaleza de una macromolécula o componente celular lo básico es, por lo tanto, medir su coeficiente de sedimentación. Este parámetro puede obtenerse a partir de la distancia recorrida por la molécula o el orgánulo de que se trate en función del tiempo, ya que:

$$s = \frac{v_L}{\omega^2 r} = \frac{1}{\omega^2 r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d(\ln r)}{dt} \quad (3.20)$$

y, por lo tanto, dibujando en un gráfico el logaritmo neperiano de la distancia al eje de giro que va alcanzando una partícula en función del tiempo, la pendiente de la recta aproximada que se obtiene es el producto de ω^2 , que es una característica de la centrífuga, por el coeficiente de sedimentación.

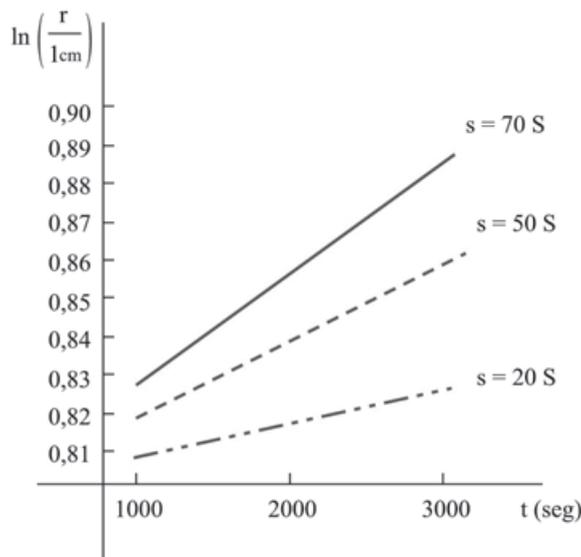


Fig. 3.21. Determinación experimental de los coeficientes de sedimentación. Cada especie de corpúsculo (célula, proteína, fragmento de membrana, orgánulo, etc.) está caracterizada por un coeficiente de sedimentación específico.

Observación. El movimiento de los corpúsculos en la centrífuga. El movimiento de las partículas en el líquido hacia el fondo del tubo no es uniforme, ya que la velocidad límite es proporcional a la aceleración centrífuga y ésta va aumentando según aumenta la distancia al eje de giro. Será un movimiento acelerado cuya naturaleza puede determinarse a partir de la ecuación (3.20):

$$d(\ln r) = s\omega^2 dt$$

$$r = r_0 e^{s\omega^2 t} \quad (3.21)$$

donde r_0 es la posición en el momento inicial. Es decir, las partículas en las centrífugas se desplazan hacia el fondo de los tubos con un alejamiento del eje de giro que crece exponencialmente con el tiempo. Para tiempos no muy grandes, el exponente $s\omega^2 t$ puede ser mucho menor que 1, en cuyo caso la exponencial en (3.21) puede aproximarse por los dos primeros términos de su desarrollo en serie:

$$r \approx r_0(1 + s\omega^2 t) = r_0 + r_0 s\omega^2 t = r_0 + v_L t$$

donde v_L es la velocidad límite en el punto inicial r_0 y el movimiento es uniforme. Para el caso del ribosoma en la centrífuga del párrafo anterior, tendremos:

$$s\omega^2 t = 76 \times 10^{-13} \times (1.900)^2 t = 2,7 \times 10^{-5} t$$

que es menor que 1 para valores de t de hasta 3 y 4 horas.

3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1 Sea un sistema de dos masas m_1 y m_2 separadas entre sí por una distancia D . Encontrar, sobre la línea que las une, la distancia d entre la masa m_2 y el punto en el cual la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo cualquiera es nula debido a que las atracciones ejercidas por las dos masas se compensan exactamente (punto de Lagrange). Aplicarlo al caso del sistema Sol-Júpiter y Tierra-Luna.

Datos:

$$\frac{m_{\text{Sol}}}{m_{\text{Júpiter}}} = 1.000; \quad \frac{m_{\text{Tierra}}}{m_{\text{Luna}}} = 83; \quad D_{\text{Sol-Júpiter}} = 780 \text{ Mkm}; \quad D_{\text{Tierra-Luna}} = 390.000 \text{ km}$$

Sol.:

$$d = \frac{D}{1 + \sqrt{m_1 / m_2}}; \quad \text{Sol - Júpiter : } d = 0,03D = 23 \text{ Mkm}; \quad \text{Tierra - Luna : } d = 0,10D = 39.000 \text{ km}$$

Ejercicio 3.2 Un cometa perteneciente a la nube de Oort se encuentra girando alrededor del Sol en una trayectoria circular de 20.000 UA de radio. ¿Cuál será su periodo de rotación? ¿Y a qué velocidad se mueve? (la Unidad Astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol y es igual a 150 Mkm)

$$\text{Sol.: } T_{\text{cometa}} = 2,8 \times 10^6 \text{ años}; \quad v = 214 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3.3 Una persona se encuentra en el interior de una rueda de 10 m de radio que gira verticalmente tal y como ilustra la figura 3.22. ¿A qué velocidad y frecuencia tiene que girar la rueda para que en el punto más alto la persona tenga sensación de ingravidez?

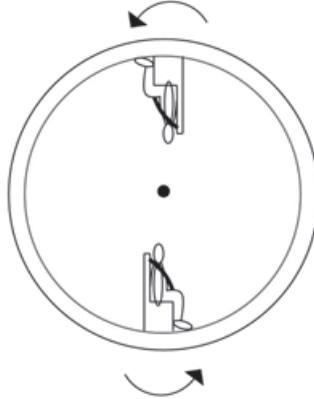


Fig. 3.22. Rueda giratoria en el plano vertical.

Sol.: $v = 9,9 \text{ m/s}$; $f = 9,45 \text{ rev/min}$

Ejercicio 3.4 Una persona cuya masa es 80 kg se encuentra en un ascensor. Determinar la fuerza que ejerce el piso sobre la persona cuando:

1. El ascensor asciende con velocidad constante
2. El ascensor desciende con velocidad constante
3. El ascensor asciende con una aceleración constante de 3 m/s^2
4. El ascensor desciende con una aceleración constante de 3 m/s^2
5. El ascensor cae libremente

Sol.: 1) 800 N; 2) 800 N; 3) 1.040 N; 4) 560 N; 5) 0 N

Ejercicio 3.5 En el dispositivo de la figura 3.23, calcular la masa m que mantiene en equilibrio la masa $M = 100 \text{ kg}$. Calcular las fuerzas de contacto del techo en los puntos A y B.

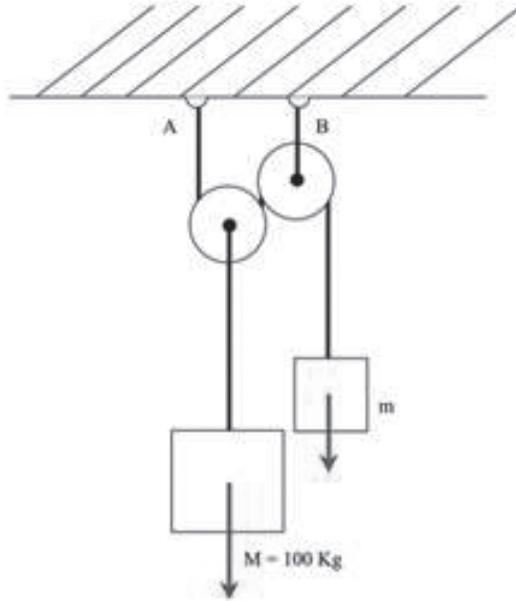


Fig. 3.23. Conjunto de dos poleas fijas al techo y dos masas en equilibrio.

Sol.: $m = 50 \text{ kg}$; $F_A = 490 \text{ N}$; $F_B = 980 \text{ N}$

Ejercicio 3.6 Un bloque de hierro de 7 kg de masa desliza sobre una mesa horizontal arrastrada por el peso de otra masa de 2 kg que cuelga verticalmente de una cuerda unida al bloque y pasa por una polea sin masa ni rozamiento apreciable, según la disposición de la figura 3.24. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque que desliza y la mesa es $\mu = 0,15$, hallar la tensión de la cuerda.

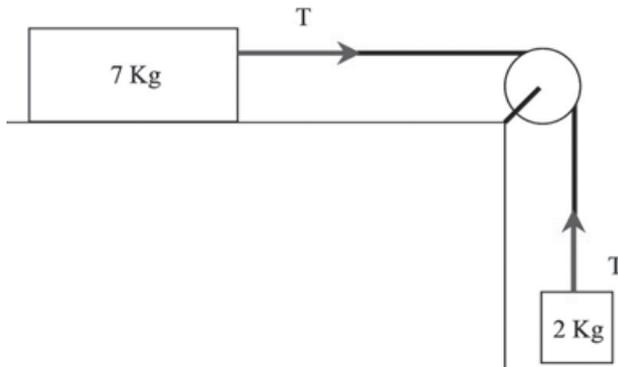


Fig. 3.24. Sistema de dos masas unidas, una de las cuales desliza sobre una superficie horizontal con rozamiento por efecto del peso de la otra.

Sol.: $T = 17,5 \text{ N}$

Ejercicio 3.7 *Considérese una masa m que desliza sobre el suelo con un coeficiente de rozamiento dinámico μ . Se arrastra la masa con ayuda de un tirante que forma un ángulo con la horizontal tal como muestra la figura 3.25. Para el caso de movimiento uniforme, dibujar las fuerzas que actúan sobre la masa m y calcular la fuerza T con la que hay que tirar para mantener el movimiento.*

Hacer lo mismo pero para el caso en el que se empuja la masa, en vez de tirar de ella, y demostrar que empujando es preciso siempre hacer más fuerza que tirando. Argumentar cualitativamente la razón de esta diferencia.

Aplicarlo a una masa de 50 kg, un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,7$ y un ángulo $\alpha = 30^\circ$.

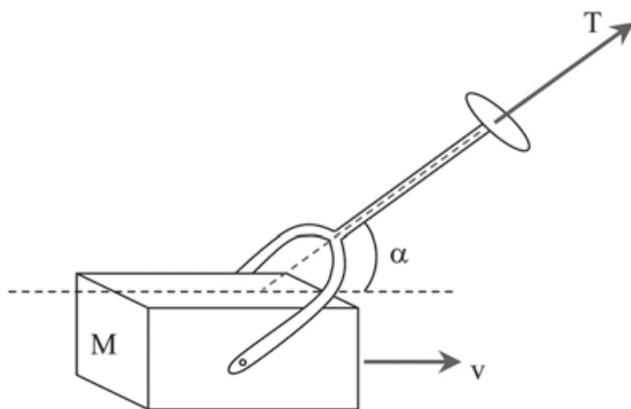


Fig. 3.25. Masa que desliza sobre el suelo, con rozamiento, por la acción de un tirante que forma un cierto ángulo con la horizontal.

$$\text{Sol.: Tirar: } T = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}; \quad T = 282 \text{ N}$$

$$\text{Empujar: } T = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha}; \quad T = 665 \text{ N}$$

Ejercicio 3.8 *Calcular el diámetro que debe tener un paracaídas circular para que una persona de 80 kg de peso llegue al suelo con una velocidad de 3 m/s. Tomar el valor $C_A = 1$ para el coeficiente de arrastre.*

$$\text{Sol.: } d = 2R = 13,3 \text{ m}$$

Ejercicio 3.9 *Calcular la velocidad límite de caída en aire de una gota de agua de 1 mm de radio tomando la fuerza de fricción proporcional al*

cuadrado de la velocidad y un coeficiente de arrastre C_A igual a 0,5. Calcular el número de Reynolds asociado a este movimiento ($\mu_{\text{aire}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$).

Sol.: $v_L = 6,46 \text{ m/s}$; $N_R = 450$

Ejercicio 3.10 Calcular la velocidad límite de caída de la gota de agua del ejercicio anterior en la atmósfera de Marte.

Datos: densidad de la atmósfera en Marte = $0,015 \text{ kg/m}^3$; gravedad = $0,38 \times g$

Sol.: $v_L = 36,4 \text{ m/s}$

Ejercicio 3.11 Calcular la velocidad de caída de una gota de lluvia de 10^{-2} mm de radio en aire suponiendo que es aplicable la ley de Stokes. Verificar también que el número de Reynolds asociado es menor que 1. Calcular a partir de qué radio esta aproximación ya no es válida ($\rho_{\text{aire}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$; $\mu_{\text{aire}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$).

Sol.: $v_L = 1,2 \text{ cm/s}$; $N_R = 0,0083$; $R_{\text{máx}} = 4,9 \times 10^{-2} \text{ mm}$

Ejercicio 3.12 En una centrífuga que gira con una frecuencia de 40.000 rev/min depositamos hemoglobina en agua a una distancia de 10 cm del eje de rotación. Calcular el tiempo necesario para que la hemoglobina se desplace 1 cm. Verificar que el coeficiente de sedimentación es de 7 Svedberg, tal y como se afirma en el texto. (La molécula de hemoglobina es globular, con un radio del orden de 3 nm y una densidad de $1,34 \text{ g/cm}^3$).

Sol.: $\Delta t \approx 8.300 \text{ s} \approx 2 \text{ h } 18 \text{ min}$

Ejercicio 3.13 Calcular la frecuencia que debe tener una centrífuga para que un glóbulo rojo situado a 6 cm del eje de giro se desplace 2 cm en agua al cabo de 1 minuto de funcionamiento. (El glóbulo rojo tiene un radio de $2 \mu\text{m}$ y una densidad de $1,3 \text{ g/cm}^3$)

Sol.: $f = 1.400 \text{ rev/min}$

3.6 Referencias

Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics, with illustrative examples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973

- Bennet-Clark, H. C. & Alder, G. M. "The effect of air resistance on the jumping performance of insects". *J. Exp. Biol.* **82** (1979) 105
- Elert, G. *Centripetal Force*. The Physics Hypertextbook, 2002
- Goodwin, T. W. (ed.). *Instrumentation in Biochemistry*. Academic Press, 1966
- Hanrahan, T. & Carpenter, C. "Taking the plunge". *Scientific American*, Nov., 2001
- Krauss, L. M. *The Fifth Essence*. Basic Books Inc, 1989
- McCall, J. S. & Potter, B. J. *Ultracentrifugation*. Baillière Tindall, 1973
- Purcell, E. M. "Life at Low Reynolds Number". *American Journal of Physics* **45** (1977) 3
- Rickwood, D. *Centrifugation: A practical approach*. IRL Press, 1984
- Schmidt-Nielsen, K. *Scaling. Why is animal size so important?* Cambridge University Press, 1984

Capítulo 4. Bioestática y locomoción

4.1 Momento angular

4.1.1 Definición

Introduciremos en este capítulo una nueva variable cinemática, llamada momento angular, relacionada con las rotaciones, que se conserva en ciertas condiciones muy frecuentes en el mundo físico. Definiremos, en primer lugar, el momento angular respecto de un punto O para una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} del siguiente modo:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.1)$$

Donde \vec{r} es el vector posición de la partícula respecto del punto en cuestión y el símbolo “ \times ” entre dos vectores representa el producto vectorial.

Por lo tanto, **el momento angular de una partícula es siempre perpendicular a su velocidad y a su vector posición**. Si la trayectoria es plana, podemos escoger el origen de coordenadas en el plano que la contiene y el momento angular será siempre perpendicular a dicho plano.

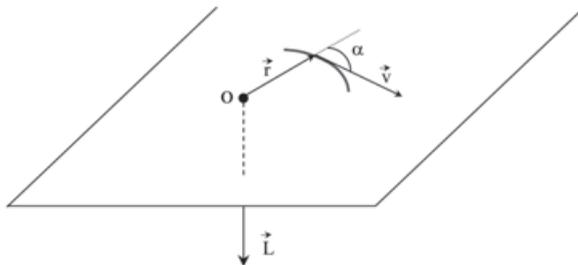


Fig. 4.1. Momento angular \vec{L} de una partícula cuya posición está caracterizada por el vector posición \vec{r} y se mueve con una velocidad \vec{v} , respecto del punto O . El momento angular es perpendicular al plano que contiene \vec{r} y \vec{v} .

Las dimensiones del momento angular vienen dadas por la expresión:

$$[L] = ML^2T^{-1}$$

y sus unidades serán $kg \times m^2 s^{-1}$.

Si se calcula el momento angular respecto de un punto de la recta que contiene al vector velocidad, entonces el momento angular respecto de dicho punto es cero al ser el vector posición paralelo o antiparalelo a la velocidad.

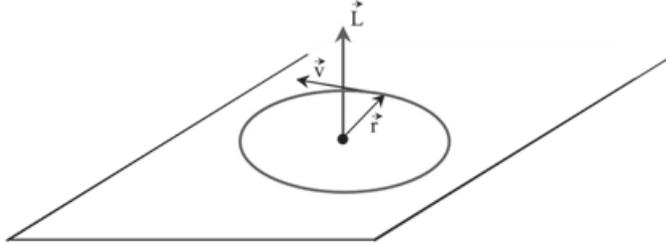


Fig. 4.2. Movimiento circular: dirección y sentido del momento angular.

Para el caso de un movimiento circular contenido en el plano horizontal, a lo largo de una circunferencia de radio R , escogeremos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el momento angular será un vector hacia arriba si el movimiento tiene lugar en el sentido contrario al de las agujas de un reloj y hacia abajo si el movimiento tiene lugar en el sentido de las agujas de un reloj, como puede apreciarse en la figura 4.2. A lo largo de la trayectoria circular, el radio vector es siempre perpendicular a la velocidad, por lo que el módulo del producto vectorial será simplemente el producto de ambos módulos:

$$L = mRv = mR^2\omega \quad (4.2)$$

Si el movimiento es circular uniforme, v y ω son constantes, por lo que el módulo del momento angular es también constante.

Para un conjunto de partículas, el momento angular total se define como la suma de los momentos angulares de cada una de ellas respecto de un mismo punto O :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Y para un cuerpo continuo, la definición es la generalización de la expresión anterior:

$$\vec{L} = \int_V dm \vec{r} \times \vec{v}$$

y tomando $dm = \rho dV = \rho d^3\vec{r}$, donde ρ es la densidad, obtenemos:

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v} d^3\vec{r}$$

extendiéndose la integral a todo el volumen del cuerpo.

4.1.2 Momento de inercia

Consideremos un cuerpo o conjunto de partículas moviéndose alrededor de un eje, que escogeremos como eje Z , con velocidad angular constante. Fijando el origen de coordenadas en un punto O cualquiera del eje y centrándonos en una de las partículas, vemos que el movimiento de ésta es circular uniforme alrededor del eje en cuestión con una velocidad angular ω tal que:

$$v = R\omega = r\omega \sin\varphi$$

tal y como vemos en la figura 4.3.

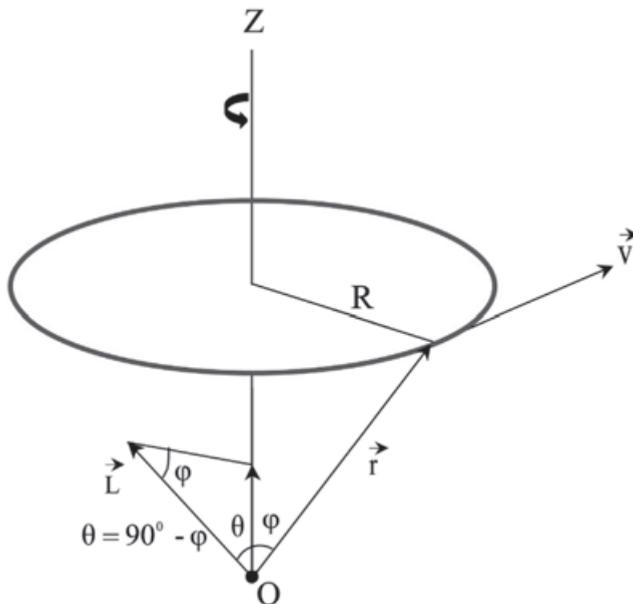


Fig. 4.3. Movimiento de rotación alrededor de un eje

En cada instante, el momento angular respecto del origen será un vector perpendicular al plano que forman r y v y, por lo tanto, formando un ángulo $\theta = 90^\circ - \varphi$ con el eje Z . Cuando la partícula se mueve, el momento angular va girando alrededor del eje Z formando un cono de ángulo θ . La única componente del momento angular que se mantiene constante a lo largo del tiempo es la componente z , mientras que las componentes perpendiculares

al eje Z se cancelan a lo largo de un giro completo. **Llamaremos momento angular respecto de un eje a su componente a lo largo de dicho eje.** En el caso que nos ocupa:

$$L_z = L \operatorname{sen} \varphi = mrv \operatorname{sen} \varphi = mRv = mR^2 \omega$$

siendo R la distancia en perpendicular desde la partícula al eje. Nótese que **el momento angular así definido no depende del punto respecto del cual se ha calculado, siempre que esté contenido en el eje de giro, sino sólo de la distancia en perpendicular entre éste y la partícula.** Para un sistema rígido de muchas partículas girando alrededor de un eje, todas ellas se mueven con la misma velocidad angular, por lo que:

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$$

y para un cuerpo continuo:

$$L_z = \omega \int dm R^2 = \omega \int \rho R^2 d^3 \vec{r}$$

En todos los casos, la componente del momento angular total a lo largo del eje de giro es igual a la velocidad angular multiplicada por una cantidad, que llamaremos momento de inercia respecto de dicho eje:

$$L_z = I \omega \quad (4.3)$$

siendo:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad (4.4)$$

Las dimensiones del momento de inercia son:

$$[I] = ML^2$$

Para el caso de una sola partícula, la suma en la expresión (4.4) es un solo sumando, mientras que si se trata de un cuerpo continuo, la suma es una integral. **El momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje es una cantidad intrínseca, que no depende de su estado de movimiento, sino sólo de su forma, de su densidad y del eje de giro.** La expresión (4.3) es similar a la que define el momento de una partícula, $\rho_z = mv_z$, pero para los giros alrededor de un eje. El momento o cantidad de movimiento se sustituye por el momento angular, la masa por el momento de inercia, y la velocidad lineal por la velocidad angular.

Ejemplo. Calculemos el momento de inercia de una varilla homogénea, de masa M y longitud L respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos y es perpendicular a la línea de la varilla. Sea λ la densidad lineal, definida de forma tal que la masa contenida en un elemento infinitesimal de longitud dx es $dm = \lambda dx$. En una varilla homogénea la densidad lineal es la misma en todos sus puntos, por lo que $M = \lambda L$ e:

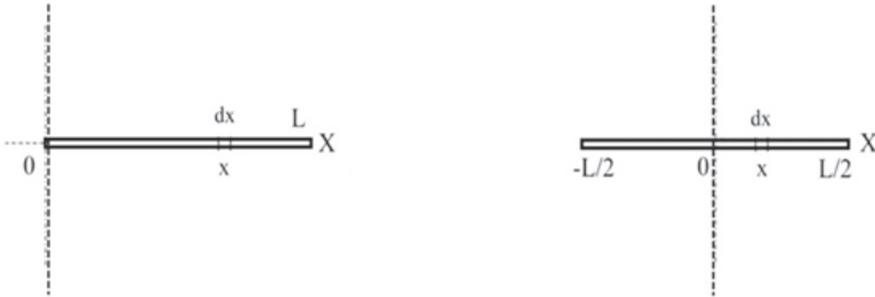


Fig. 4.4. Varilla homogénea de longitud L y giro alrededor de un eje perpendicular a la línea que la contiene, a) que pasa por uno de sus extremos, b) que pasa por su centro de masas.

$$I = \int_0^L x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

Ejemplo. Podemos calcular, de forma análoga al caso anterior, el momento de inercia de la varilla homogénea respecto de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a la línea que contiene a la varilla:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \lambda \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{1}{12} \lambda L^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

El momento de inercia de la barra respecto del eje que pasa por su centro de masas es menor que el de la misma barra respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos. Como veremos más adelante, el momento de inercia mide la resistencia al giro de un cuerpo, y esta relación traduce el hecho de que es más fácil hacer girar la barra alrededor de un eje que pasa por su centro que alrededor de uno que pase por uno de sus extremos.

Ejemplo. Una puerta de espesor despreciable respecto de sus otras dos dimensiones puede considerarse como una superposición de varillas, todas de la misma longitud, por lo que su momento de inercia respecto de un eje que pasa por uno de sus bordes será simplemente $I = \frac{1}{3} ML^2$, donde L es la longitud del borde de la puerta perpendicular al eje de giro.

4.1.3 Conservación del momento angular y momento de una fuerza

Veamos ahora en qué condiciones el momento angular de un sistema dinámico es una constante del movimiento. Para ello, como para cualquier otra variable cinemática, tendremos que analizar su variación con el tiempo. Empecemos para el caso de una sola partícula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times (m\vec{a}) \quad (4.5)$$

El primer término del último miembro de la expresión (4.5) es cero debido a que contiene el producto vectorial de un vector por sí mismo. El resultado final es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.6)$$

Al segundo miembro de la igualdad (4.6) le llamaremos momento de la fuerza \vec{F} respecto del punto O :

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.7)$$

El momento de una fuerza respecto de un punto es, por lo tanto, un vector normal al plano que forman la fuerza y el punto, dirigido según la regla del sacacorchos que ya vimos en el primer capítulo: si ponemos el plano en posición horizontal, el momento está dirigido hacia arriba si la fuerza marca un giro alrededor del punto en sentido contrario a las agujas de un reloj y está dirigido hacia abajo si el giro marcado lo es en el sentido de las agujas de un reloj. El módulo del momento es igual a $rF \sin \alpha$, es decir, igual a Fd , donde d es la distancia en perpendicular desde el punto a la recta de acción de la fuerza (véase la figura 4.5).

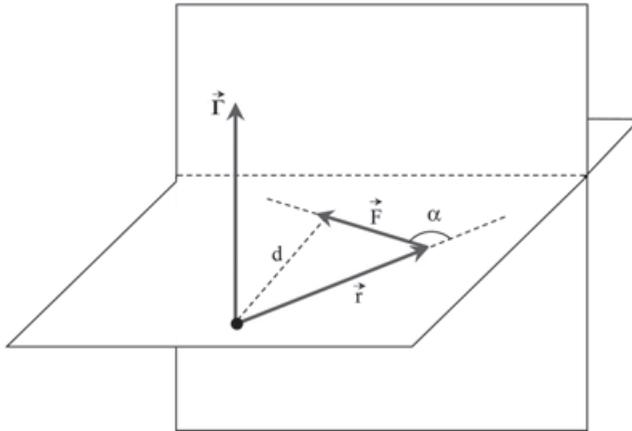


Fig. 4.5. Momento de una fuerza contenida en el plano horizontal.

En lo sucesivo entenderemos siempre que se ha especificado el punto respecto del que estamos calculando momentos angulares y momentos de fuerzas. Las dimensiones del momento de una fuerza son, de la expresión (4.7):

$$[\Gamma] = ML^2T^{-2}$$

Ejemplo. *Calcularemos el momento del peso de un cuerpo de masa igual a 5 kg sujeto en la mano de una persona respecto de los puntos de giro de la muñeca, el codo y el hombro cuando el brazo está extendido en un ángulo de 45° respecto de la vertical.*

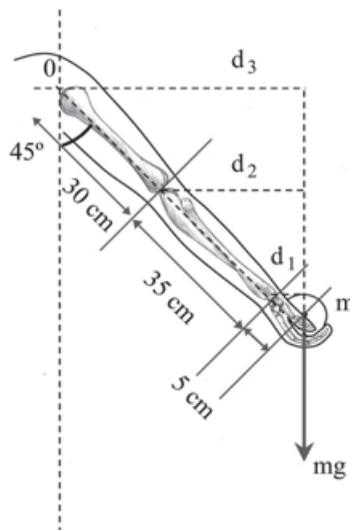


Fig. 4.6. Brazo sujetando un peso en un ángulo de 45° con la vertical.

Las distancias a lo largo del brazo entre el centro del peso y los puntos de giro de la muñeca, el codo y el hombro son, aproximadamente, $l_1 = 5 \text{ cm}$, $l_2 = 40 \text{ cm}$, $l_3 = 70 \text{ cm}$. Las distancias en perpendicular entre esos puntos y la línea de acción de la fuerza (vertical) serán:

$$d_i = l_i \operatorname{sen}45^\circ = \frac{l_i}{\sqrt{2}}$$

es decir, $d_1 = 3,5 \text{ cm}$, $d_2 = 28,3 \text{ cm}$, $d_3 = 49,5 \text{ cm}$. Los momentos de la fuerza serán:

$$\Gamma_i = mgd_i$$

Y, por lo tanto, $\Gamma_1 = 1,7 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$, $\Gamma_2 = 13,9 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$, $\Gamma_3 = 24,3 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$.

De la ecuación (4.6) se sigue que el momento angular se conserva (su derivada respecto del tiempo es cero) cuando el segundo miembro (el momento de la fuerza) es cero, lo que ocurre en dos situaciones posibles:

1. La fuerza es cero.
2. La fuerza no es cero, pero su momento sí lo es.

Así pues, **el momento angular se conserva si la partícula es libre, o bien si la fuerza a la que está sometida tiene siempre la dirección de \vec{r} , en cuyo caso el momento de la fuerza es cero.** A este tipo de fuerzas, que van siempre en la dirección del radio vector (paralelas o antiparalelas al mismo), se les llama centrales y tienen la propiedad de que los cuerpos a ellas sometidos describen trayectorias que conservan el momento angular. La fuerza de la gravedad es central y, por lo tanto, las órbitas de los cuerpos celestes son tales que conservan el momento angular.

4.1.4 Consecuencias de la conservación del momento angular

Partimos de la expresión:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad (4.8)$$

donde \vec{L} y $\vec{\Gamma}$ son el momento angular y el momento de las fuerzas, respectivamente. Si este último es cero, entonces $\vec{L} = \text{constante}$ y, para el caso de un cuerpo girando alrededor de un eje:

$$I\omega = \text{constante}$$

Supongamos el caso de una persona girando sin rozamiento sobre el suelo (como por ejemplo la patinadora sobre hielo de la figura 4.7).

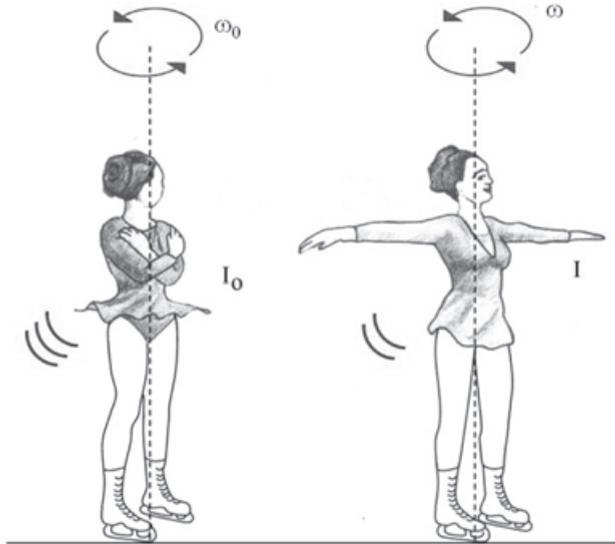


Fig. 4.7. Patinadora cambiando la velocidad de giro por el procedimiento de extender o recoger los brazos, lo que produce un cambio en su momento de inercia respecto al eje de giro.

Como no hay fuerzas externas que actúen sobre ella (su peso es cancelado exactamente por la fuerza de contacto del suelo), el momento angular es constante y, si no altera la disposición de su cuerpo, el momento de inercia no varía, lo que implica que gira con velocidad angular constante. Sin embargo, cuando abre sus brazos o cambia la distribución de masas de su cuerpo, el momento de inercia cambia y la constancia del momento angular implica que la velocidad angular tiene que cambiar. Si el momento de inercia y la velocidad angular iniciales son I_0 y ω_0 , respectivamente, e I y ω las mismas magnitudes tras el cambio de disposición corporal, tendremos:

$$I_0\omega_0 = I\omega \tag{4.9}$$

Ejemplo. Supongamos, para fijar las ideas, que la patinadora tiene los brazos recogidos a lo largo del cuerpo y está girando con una frecuencia de 5 revoluciones por segundo, es decir, ω_0 será de $5 \times 2\pi = 31,4$ radianes por segundo. El momento de inercia del cuerpo, excepto los brazos, lo aproximaremos por el de un cilindro de 1,60 metros de altura y una base circular de unos 10 cm de radio. El volumen de un tal cilindro será:

$$V = \pi R^2 h \approx 0,050 \text{ m}^3$$

lo que, teniendo en cuenta que la densidad del cuerpo humano es prácticamente la del agua, da una masa de unos 50 kg. El momento de inercia de un cilindro alrededor de su eje de simetría es igual a $\frac{1}{2}MR^2$, siendo R el radio de la base (ver el ejercicio 2 de este capítulo). Aproximaremos la contribución de los brazos como si fuera la de dos cuerpos puntuales de 3 kg cada uno situados en el centro de masas de cada brazo. En posición recogida, se encuentran a una distancia de unos 15 cm del eje de giro, por lo que el momento de inercia total será:

$$I_0 = \frac{1}{2} \times 50 \times 0,1^2 + 2 \times 3 \times 0,15^2 = 0,385 \text{ kg} \times \text{m}^2$$

Al extender los brazos aumenta su momento de inercia. Haciendo la aproximación de que el centro de masas de cada uno de los brazos pasa a estar a unos 40 cm del eje de giro, el momento de inercia en esta nueva postura será:

$$I = \frac{1}{2} \times 50 \times 0,1^2 + 2 \times 3 \times 0,4^2 = 1,21 \text{ kg} \times \text{m}^2$$

y de la ecuación (4.9) se deduce que ahora la velocidad de rotación habrá disminuido hasta un valor:

$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{0,385}{1,21} \times 31,4 = 10,0 \text{ rad/s}$$

es decir, girará a $\frac{10}{2\pi} = 1,6$ revoluciones por segundo, un tercio de la frecuencia que tenía con los brazos recogidos. La simple extensión de los brazos aumenta el momento de inercia y la conservación del momento angular exige que disminuya la velocidad de rotación. Si la patinadora vuelve a plegar los brazos, la velocidad angular aumenta. El procedimiento para modificar la velocidad de rotación en el caso de los patinadores, bailarines o trapecistas se basa, por lo tanto, en la conservación del momento angular.

Cuando el momento de inercia de un cuerpo no cambia y consideramos el giro alrededor de un eje, entonces la ecuación que da la relación entre momento angular y momento de las fuerzas se escribe:

$$\Gamma = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad (4.10)$$

donde α es la aceleración angular alrededor del eje de giro y la expresión que resulta es en todo similar a la segunda ley de Newton (ecuación (2.1)), sólo que

la fuerza se sustituye por el momento de la fuerza, la masa por el momento de inercia y la aceleración por la aceleración angular. En el caso de rotaciones, la expresión que resulta útil para estudiar la naturaleza del movimiento es, precisamente, la (4.10).

Si la fuerza externa sobre un cuerpo es la de la gravedad, tendremos que la fuerza externa sobre cada partícula de masa m_i que forma parte del cuerpo es:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -m_i g \vec{u}_z$$

y el momento total de la fuerza sobre el cuerpo puede escribirse de una forma compacta:

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \left(-g \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u}_z = -g M \vec{r}_{CM} \times \vec{u}_z = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_T^{(e)} \quad (4.11)$$

Siendo:

$$\vec{F}_T^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)} = -Mg \vec{u}_z$$

El momento total es, así, igual al momento de la fuerza gravitatoria actuando sobre una partícula cuya masa fuera igual a la masa total del cuerpo situada en su centro de masas.

4.1.5 El gato y los saltos de trampolín

La conservación del momento angular para el caso en que el momento de las fuerzas externas sea cero parece violarse en el caso de los giros que efectúan los saltadores de trampolín cuando están en el aire o los de un gato que siempre cae de pie aun cuando se le haya dejado caer con los pies por alto. Si tomamos el centro de masas del cuerpo como punto respecto del cual calcular momentos, el momento de la fuerza de la gravedad, que es la única que actúa, es cero y no podría haber aceleración angular alrededor de ningún eje que pasara por dicho punto, de acuerdo con las expresiones (4.10) y (4.11). Sin embargo, hay aceleraciones en ambos casos, aunque no una real violación de la conservación del momento angular porque no se trata de cuerpos rígidos, sino que pueden alterar su conformación y, por lo tanto, su momento de inercia, lo que implica variación en la velocidad angular.

Empecemos con un saltador desde un trampolín que impulsa el cuerpo hacia adelante (de frente) o hacia atrás (de espaldas). Las fuerzas de los pies sobre el trampolín, antes de abandonarlo, imprimen un giro al cuerpo con una

velocidad angular asociada a un momento angular que va a lo largo del eje de giro: perpendicular al cuerpo hacia la izquierda del saltador, en el caso de salto hacia adelante, o hacia la derecha, en el caso de salto hacia atrás, según la configuración de la figura 4.8. Una vez en el aire, la velocidad de rotación no se puede alterar si el momento de inercia permanece constante.

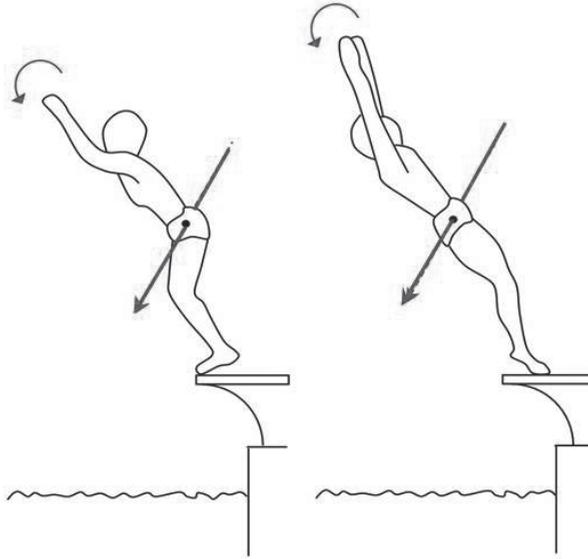


Fig. 4.8. Saltador de trampolín iniciando el giro alrededor de un eje normal al eje del cuerpo hacia delante y hacia atrás.

Así, si el saltador mantiene su cuerpo rígido, normalmente completa una vuelta y media antes de zambullirse (salto mortal), pero puede plegar el tronco, los brazos y las piernas para disminuir su momento de inercia alrededor del eje de giro, con lo que aumentará su velocidad angular y podrá completar dos vueltas y media (doble salto mortal) o más, según puede verse en la figura 4.9, de modo similar a las maniobras de la patinadora vistas anteriormente. Cuando el saltador va a zambullirse en el agua puede estirar completamente su cuerpo, con lo que aumenta su momento de inercia de nuevo, hasta en un factor cinco respecto de la posición completamente plegada, con lo que la velocidad angular disminuye en ese mismo factor y nos da la impresión de que llega al agua prácticamente sin giro.

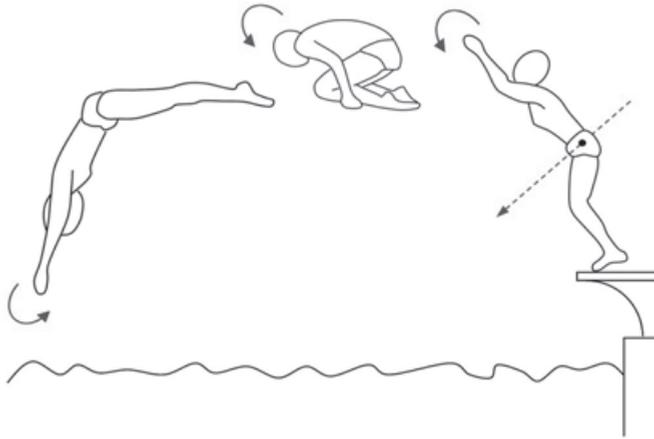


Fig. 4.9. El saltador aumenta la velocidad de giro hacia delante recogiendo el cuerpo y disminuyendo, así, su momento de inercia respecto al eje de giro.

Pero el saltador puede hacer algo más. Mediante movimientos de los brazos y del tronco puede imprimir una rotación alrededor del eje que va de la cabeza a los pies, el llamado giro en tirabuzón, al que está asociado un momento angular dirigido en esa dirección. Si el momento angular inicial iba en la dirección del eje de giro del salto mortal, y el giro alrededor de este eje no se altera, es imposible iniciar el movimiento en tirabuzón. Pero lo que importa es la conservación del momento total, que se puede mantener constante e igual a su valor inicial si se modifica el eje del giro hacia adelante, de forma que la suma del momento angular asociado a este movimiento más el asociado al giro en tirabuzón sea igual, en módulo y dirección, al momento angular con que inició el vuelo. Cuando quiere detener el giro en tirabuzón, el saltador tiene que restablecer la coincidencia entre el eje de giro y el del momento angular inicial, es decir, perpendicular a la dirección de salida del trampolín.

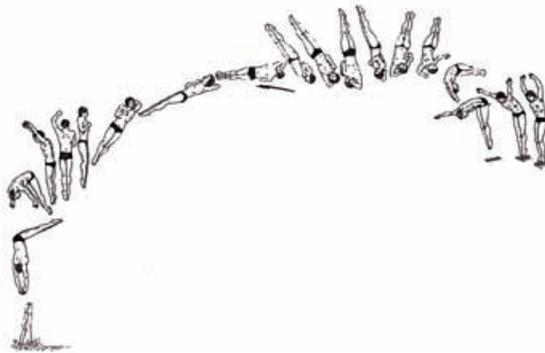


Fig. 4.10. Salto que se inicia como mortal hacia delante al que se imprime un giro en tirabuzón en su parte intermedia. Al final, cesa este último giro y se recupera la rotación pura hacia delante (Frohlich, 1980).

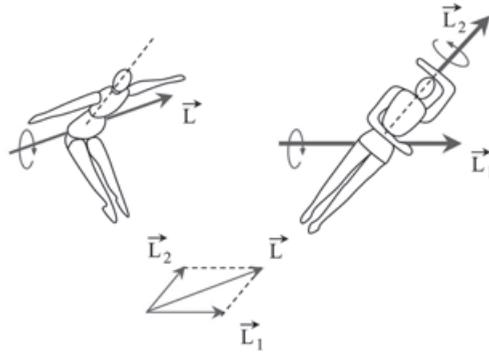


Fig. 4.11. El momento angular se conserva en el salto, lo que implica que, cuando el saltador gira en tirabuzón, el eje de giro hacia delante debe cambiar de forma que la composición de los momentos angulares asociados a los dos giros sea igual al momento angular inicial.

A veces se argumenta que es imposible que pueda realizarse un giro en tirabuzón si en el instante del despegue el saltador no lo ha iniciado ya, gracias a la interacción de los pies con el trampolín. Pero la evidencia empírica, con estudios dinámicos de saltos, ha demostrado que esto no es así, y que el saltador puede iniciar dicho giro en cualquier instante, aun cuando el momento angular con que despegue vaya en la dirección perpendicular a la dirección de inicio del salto, con tal de que altere la dirección del eje del salto mortal de forma que la suma de los dos momentos angulares conserve el valor inicial. Sin embargo, en el salto hacia atrás es más difícil maniobrar, por lo que normalmente el saltador inicia el movimiento en tirabuzón ya desde el trampolín, imprimiendo un giro alrededor del eje longitudinal del cuerpo en los últimos apoyos sobre la tabla.

Más complicado es entender que pueda girar en el aire un gato cayendo de espaldas con momento angular cero (se le deja caer, por ejemplo, con las patas hacia arriba y sin imprimir ningún giro en el momento de la caída). Si el cuerpo del gato se mantuviera rígido, no habría manera de producir el giro, pero éste es posible porque las distintas partes del cuerpo giran a lo largo de ejes distintos, de forma que el vector momento angular total sigue siendo cero a lo largo de toda la caída.

Este fenómeno puede verse con más claridad con ayuda de un modelo en el que el cuerpo está compuesto por dos cilindros unidos por sus extremos y que pueden formar un cierto ángulo entre ellos mientras giran.

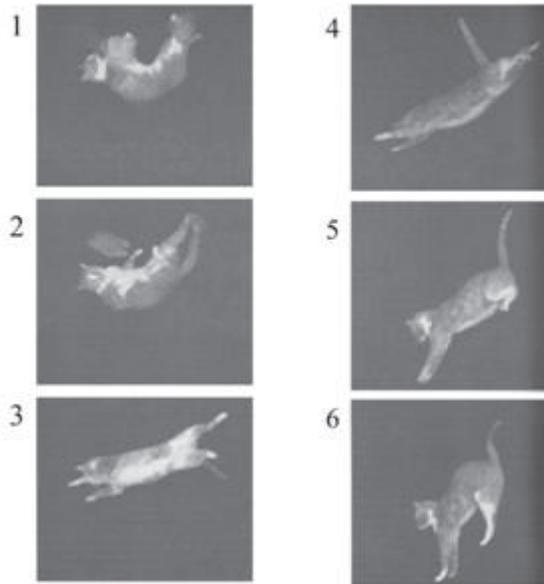


Fig. 4.12. Gato, al que se deja caer con momento angular inicial igual a cero, volteándose mediante giros combinados según se explica en el texto. La caída dura 0,5 segundos y a lo largo de ella recorre 1,2 metros (Frohlich, 1980).

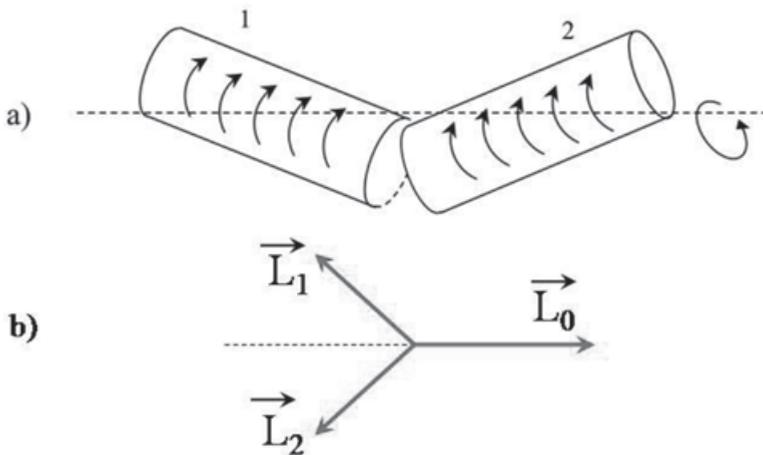


Fig. 4.13. Modelo de rotación de las dos mitades del tronco de un animal sobre sus ejes de simetría y rotación global, en sentido contrario, alrededor del eje horizontal. Esquema de momentos angulares con resultante cero.

Si los dos cilindros giran hacia la derecha alrededor de cada uno de sus ejes de simetría, según se ve en la figura 4.13, la suma de sus dos momentos angulares puede compensarse exactamente con el momento angular asociado al giro en dirección contraria del conjunto de los dos cilindros alrededor del

eje horizontal, que es el eje del cuerpo al inicio de la caída. Así, este último movimiento es posible gracias a los giros alrededor de otros ejes de las dos mitades del cuerpo, manteniéndose el momento angular igual a cero en todo instante.

4.1.6 Equilibrio

Ya hemos demostrado en el capítulo anterior que si la suma de las fuerzas externas sobre un objeto es cero, entonces la aceleración de su centro de masas es cero, por lo que si estaba en reposo sigue, como un todo, en reposo. Pero **un objeto puede girar alrededor de un eje aún cuando su centro de masas permanezca en reposo**. Es el caso de una barra sobre la que actúen dos fuerzas iguales y de sentido contrario pero aplicadas en sus dos extremos.

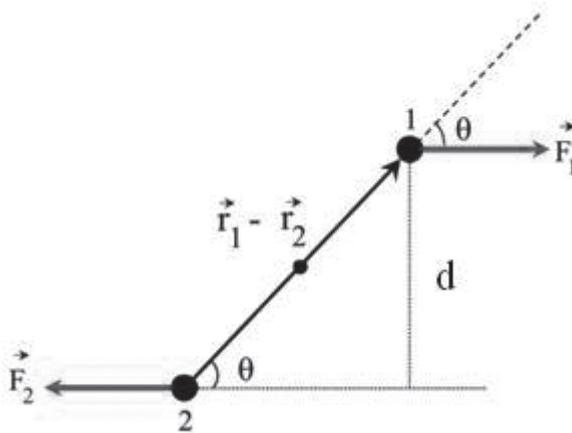


Fig. 4.14. Barra rígida a la que se aplica un par de fuerzas.

La barra girará, entonces, aun cuando su centro de masas (el punto medio si es homogénea) permanezca inmóvil. La razón es que el momento total de las fuerzas externas es distinto de cero y, si el objeto no cambia de forma, su momento de inercia es constante y debe generarse una aceleración angular (véase ecuación (4.10)) que implica que la velocidad angular varía con el tiempo. Es decir, si la barra estaba en reposo, empieza a girar y no está en equilibrio. **Se llama par de fuerzas, precisamente, al momento de dos fuerzas iguales y de sentido contrario actuando a lo largo de rectas distintas sobre un cuerpo rígido**, tal y como se puede ver en la figura 4.14. El par en este caso tendrá la siguiente forma:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

es decir, es un vector perpendicular al plano que contiene a las dos fuerzas, dirigido hacia adentro en el caso de la figura, y cuyo módulo es:

$$\Gamma = \left| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right| F_1 \text{ sen} \theta = dF_1 \tag{4.12}$$

donde d es la distancia en perpendicular entre las dos rectas. Así, **cuando las fuerzas actúan a lo largo de la misma recta, d es cero, lo que implica que el par es cero y no hay giro.** Nótese que el par de fuerzas es independiente del punto escogido como origen para calcular momentos.

De lo dicho anteriormente se deduce que, **para que exista equilibrio estático, deben cumplirse estas dos condiciones:**

1. **La suma total de las fuerzas externas es cero**, lo que asegura que el centro de masas permanece en reposo y no hay movimiento de traslación:

$$\sum \vec{F}^{(e)} = 0$$

2. **La suma total de los momentos de las fuerzas externas es cero**, lo que asegura que no hay movimientos de rotación:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}^{(e)} = 0$$

El caso más sencillo y evidente es un objeto paralelepédico sobre una superficie sólida, como se muestra en la figura 4.15.

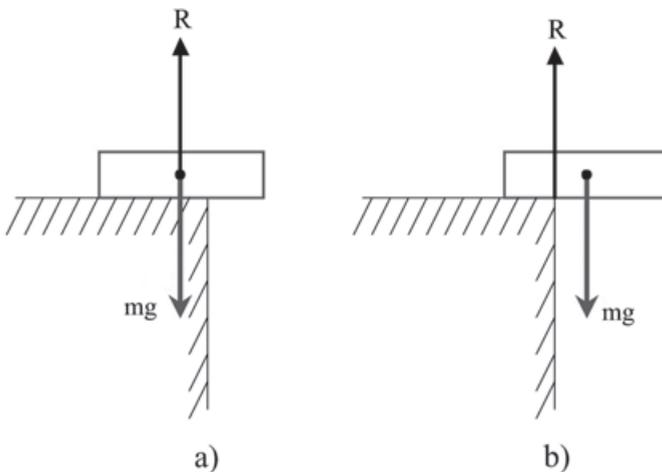


Fig. 4.15. Paralelepípedo sobre una superficie, a) en equilibrio, b) fuera del equilibrio.

La fuerza de la gravedad sobre todas sus componentes produce un efecto equivalente a una sola partícula situada en su centro de masas sobre la que actuaría la fuerza correspondiente a todo el cuerpo. La superficie sólida opone una fuerza de contacto igual en módulo y dirigida hacia arriba, de forma que el cuerpo como un todo permanece inmóvil. Si la vertical del centro de masas está sobre algún punto de la superficie sólida, la fuerza de contacto \vec{R} puede aplicarse en ese mismo punto y entonces también el par de fuerzas asociado al peso y a la fuerza de contacto es cero: no hay giro y el cuerpo está en equilibrio.

Consideremos ahora, sin embargo, el caso en que la vertical del centro de masas esté fuera de la superficie sólida, en la disposición de la figura 4.15.b. Ocurre entonces que la fuerza de contacto \vec{R} se aplica sobre el punto de la superficie más cercano al centro de masas, por lo que no puede estar dirigida a lo largo de la vertical de este último punto. La consecuencia es que el momento total de las dos fuerzas no es cero y se produce un giro. El cuerpo no está en equilibrio. En este caso, el momento total, o par de fuerzas, es un vector normal al plano de la figura, dirigido hacia adentro y con un módulo igual al módulo de la fuerza multiplicado por la distancia entre las rectas a lo largo de las cuales se aplican las dos fuerzas.

Ejemplo. Supongamos tres ladrillos paralelepípicos, homogéneos e iguales. Estudiemos la configuración de equilibrio en la que el borde de cada uno está separado una distancia igual del borde del ladrillo que tiene debajo, según puede verse en la figura 4.16.

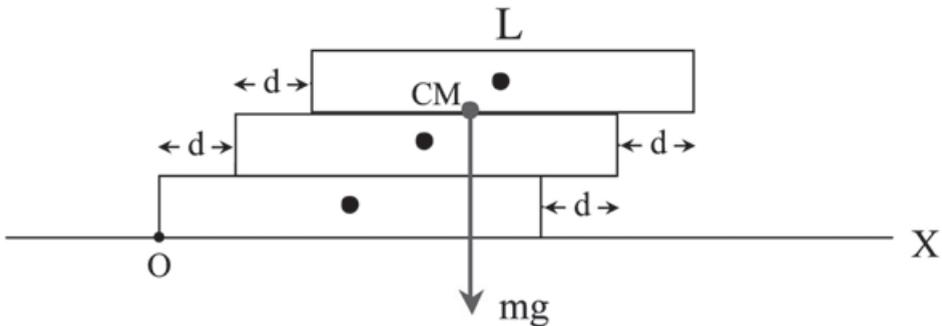


Fig. 4.16. Ladrillos apilados con desplazamientos relativos iguales.

Para que el de más arriba se mantenga en equilibrio sobre el siguiente, basta con que $d < \frac{L}{2}$. El centro de masas del conjunto de estos dos ladrillos estará, respecto del origen de coordenadas, en la posición:

$$x_{CM} = \frac{\left(\frac{L}{2} + 2d\right)M + \left(\frac{L}{2} + d\right)M}{2M} = \frac{L + 3d}{2}$$

y para que estos dos ladrillos se mantengan en equilibrio sobre el tercero es preciso que el centro de masas del conjunto de los dos caiga sobre la superficie de este último, es decir:

$$\frac{L + 3d}{2} < L \Rightarrow d < \frac{L}{3}$$

Las propiedades del equilibrio permiten determinar experimentalmente la posición del centro de masas de un cuerpo irregular. En efecto, coloquemos el cuerpo colgando de un hilo, como en la figura 4.17, en una posición tal que esté en equilibrio.

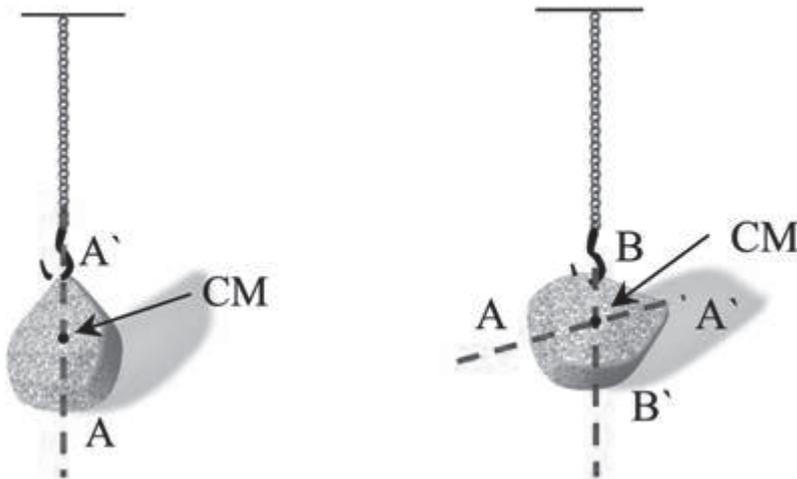


Fig. 4.17. Determinación experimental del centro de masas de un cuerpo irregular suspendido de una cuerda con ayuda de dos posiciones de equilibrio.

Sucede, entonces, que la fuerza de contacto de la cuerda sobre el cuerpo debe estar alineada con el peso aplicado en el centro de masas, tal como muestra la figura 4.17, ya que de otra forma habría un par de fuerzas y el cuerpo giraría. A partir de la posición de equilibrio sabemos, por lo tanto, que el centro de masas está contenido en la línea vertical AA' que pasa por el punto de contacto. Si ahora repetimos la maniobra, pero colgando de otro punto, el centro de masas estará contenido en la nueva recta BB', también vertical y que pasa por el nuevo punto de contacto. Pues bien, el punto de intersección de ambas rectas es el centro de masas del cuerpo porque es el único común a las dos. Se tiene noticia de que este procedimiento fue utilizado ya en 1679

por Giovanni A. Borelli, un discípulo de Galileo, para determinar la posición del centro de masas del cuerpo humano.

4.1.7 El equilibrio en personas y animales

Tomemos, para empezar, el caso de una persona. **Si se mantiene rígida la articulación del pie con el tobillo, el equilibrio se consigue cuando la vertical del centro de masas de la persona cae sobre la superficie limitada por los dos pies.**

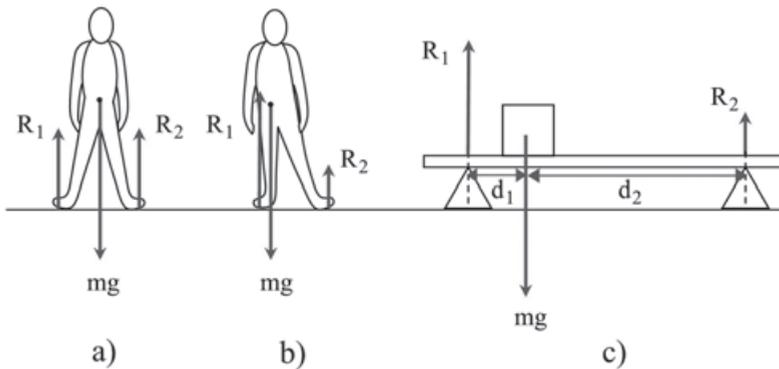


Fig. 4.18. Cuerpo humano apoyado sobre los dos pies, a) con una distribución simétrica del peso, b) ladeado hacia la derecha. c) Esquema equivalente de fuerzas.

En efecto, las fuerzas que actúan en este caso son el peso de la persona y las fuerzas de contacto en los dos pies. Podemos razonar sobre la figura humana directamente o sobre el esquema equivalente de la figura 4.18.c. Si tomamos como punto respecto del que calcular los momentos de las fuerzas uno cualquiera sobre la línea vertical que contiene al centro de masas, el momento de la fuerza debida al peso de la persona es cero y las condiciones de equilibrio son:

$$R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$R_1 d_1 - R_2 d_2 = 0$$

de donde

$$R_1 = \frac{d_2}{d_1} R_2 \quad (4.13)$$

Siendo d_1 y d_2 las distancias entre las rectas que contienen R_1 y R_2 y el centro de masas, respectivamente.

La suma de las fuerzas de contacto es siempre igual al peso, pero el valor de cada una de ellas depende de la posición del centro de masas respecto de los pies. Si éste cae exactamente en el centro, las fuerzas de contacto son iguales y tendremos la misma sensación de pesantez en cada pie. Si nos desplazamos lateralmente de forma que el centro de masas cae cerca de uno de los pies, por ejemplo el 1, la distancia d_1 se hace menor que la d_2 y, de acuerdo con la ecuación (4.13), la fuerza de contacto sobre ese pie es mayor que sobre el otro: la sensación es muy distinta en cada pie. En el límite de este desplazamiento lateral, cuando la vertical del centro de masas caiga sobre el pie, la fuerza de contacto R_1 es igual al peso mientras que la R_2 se hace cero, no sentimos pesantez alguna sobre el pie 2 y podemos levantarlo manteniendo el equilibrio. Si seguimos el desplazamiento hasta que el centro de masas cae al otro lado del pie 1, no hay forma de compensar los momentos de las fuerzas y se pierde el equilibrio.

Nos hemos referido en el párrafo precedente al desplazamiento lateral del centro de masas; veamos ahora lo que ocurre respecto de la situación adelantada o retrasada del mismo. El centro de masas de una persona en posición erguida está en un punto cuya vertical cae unos 3 centímetros por delante de los tobillos. Si éstos no se mantuvieran rígidos gracias a la fuerza de los músculos que se insertan en el talón a través del tendón de Aquiles, nos caeríamos hacia adelante debido al par de fuerzas creado entre las fuerzas de contacto y el peso.

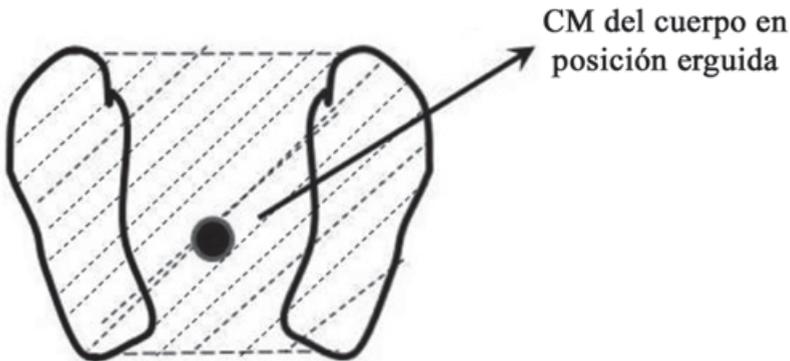


Fig. 4.19. Superficie de sustentación de los pies.

Más adelante estudiaremos este tipo de composición de fuerzas musculares, pero basta, por ahora, con comprender que si esa articulación se mantiene rígida, la fuerza de contacto se aplica en cualquier punto de la planta de los pies, y no sólo en el talón, de forma que se puede compensar el momento de la fuerza asociada al peso y mantener el equilibrio. Cuando desplazamos el tronco hacia adelante, el centro de masas del cuerpo se adelanta y podemos

perder el equilibrio si su vertical cae fuera de la superficie limitada por los pies. Para evitar esto, de forma automática las caderas tienden a retrasarse para mantener al centro de masas dentro de dicha superficie. Si, por ejemplo, nos ponemos en posición vertical con los talones y las nalgas pegados a la pared, estamos impidiéndonos retrasar la parte de las caderas respecto de los pies. Si, en esa posición, intentamos llevar el tronco hacia adelante sin doblar las rodillas, vemos que perdemos el equilibrio inmediatamente.

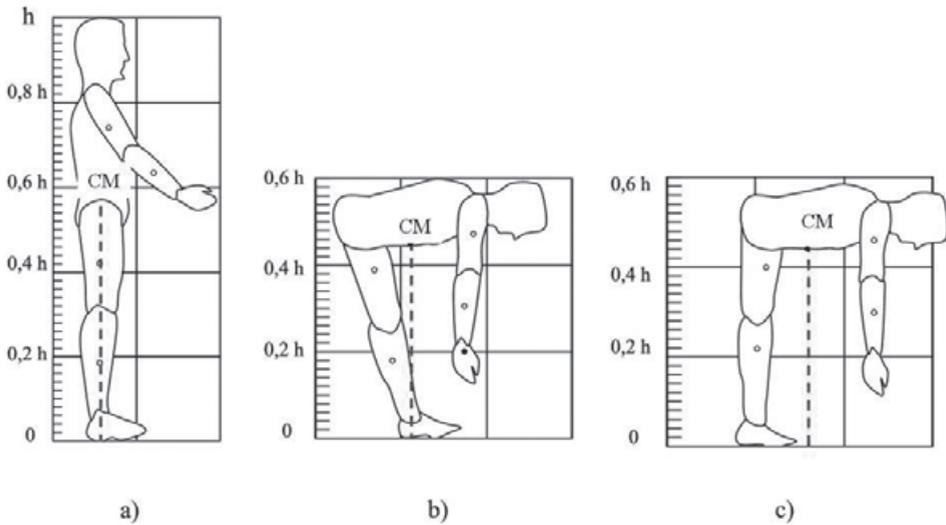


Fig. 4.20. a) Persona erguida. b) Al inclinarse con las piernas rectas, retrasa instintivamente las caderas para que el centro de masas caiga sobre la superficie de sustentación. c) Si se inclinara con las piernas rectas sin retrasar la cadera, el centro de masas caería fuera de la superficie de sustentación y la persona perdería el equilibrio.

Mantener el equilibrio mientras nos movemos es difícil y requiere un control neurológico complejo y evolucionado, como demuestra el hecho de que a un niño le cuesta un año dominar los mecanismos de coordinación nerviosa y muscular necesarios para mantenerse en pie y caminar. Y está claro que han tenido que ir apareciendo tras un largo proceso evolutivo. Así, el equilibrio de los gusanos es bastante sencillo y también el de los artrópodos, mientras que es más difícil en los animales cuadrúpedos y todavía más en los bípedos.

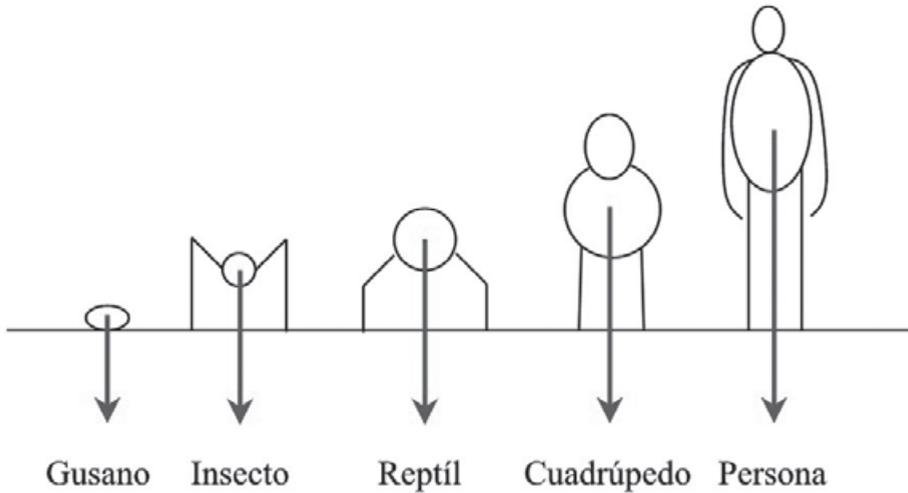


Fig. 4.21. Equilibrio estático de distintas categorías de animales.

Los humanos y las aves mantienen el equilibrio apoyándose únicamente en dos extremidades, lo cual es sólo posible porque la superficie de sustentación cubierta por dichas extremidades es bastante grande. Los primates y los osos pueden también mantener una posición bípeda por la misma razón, pero para la mayoría de los animales la superficie de contacto de las extremidades con el suelo es demasiado pequeña como para que puedan mantenerse en equilibrio a dos patas de forma estable.

Un caballo o una vaca, por ejemplo, mantienen permanentemente la situación de equilibrio mientras caminan, ya que sólo levantan una pata en cada instante y las otras tres delimitan una superficie dentro de la cual cae el centro de masas del animal. Así, pueden pararse con una de las patas en el aire sin gran dificultad, mientras que es más difícil para una persona mantener el centro de gravedad sobre la superficie del único pie de apoyo mientras camina, lo que implica un ligero bamboleo lateral. Cuando un cuadrúpedo corre a gran velocidad, sólo una o dos de sus patas están en contacto con el suelo, por lo que la situación es de desequilibrio, y el cuerpo tiende a caer hasta que las patas que estaban en el aire tocan el suelo y recuperan la estabilidad. Se trata de un fenómeno similar al que ocurre cuando una persona corre.

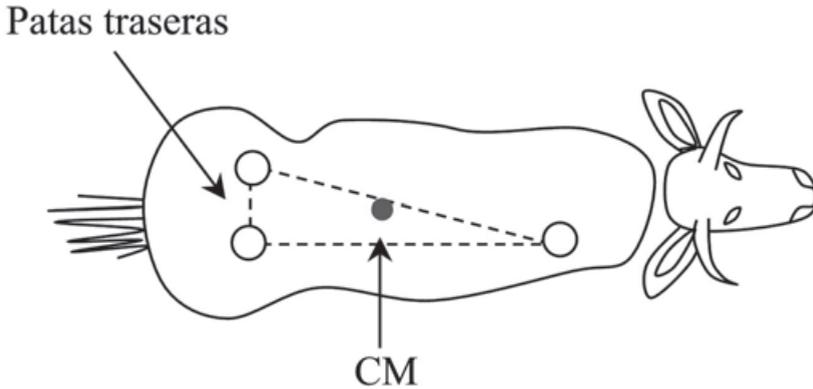


Fig. 4.22. Un cuadrúpedo en marcha lenta se apoya sobre tres patas de forma que su centro de masas cae dentro de la superficie de sustentación.



Fig. 4.23. Persona en carrera.

La posición de carrera es tal que el centro de masas cae fuera de la superficie de sustentación y se crea necesariamente un par entre el peso y la fuerza de contacto del pie con el suelo que hace que el cuerpo bascule, aunque la basculación sólo dura hasta que el otro pie se apoya en el suelo. Al avanzar el tronco y adelantarse la pierna contraria, se repite la misma situación y así mientras dura la carrera. Durante el movimiento rápido se van sucediendo, por tanto, periodos de inestabilidad transitoria.

Los animales de pies pequeños, como los artrópodos, tendrían muchas dificultades para mantener el equilibrio con sólo dos patas en el suelo debido a que la superficie que delimitan es prácticamente una recta. Además, al ser muy ligeros, cualquier soplo de viento o irregularidad del terreno haría que la vertical de su centro de masas cayera fuera de la superficie de sustentación. Como consecuencia de estas limitaciones, los insectos siempre mantienen tres de sus seis patas sobre el suelo formando un trípedo. En realidad organizan sus seis patas en dos trípedos, uno de los cuales está siempre en contacto con el suelo proporcionando una amplia superficie triangular sobre la que cae el

centro de masas. Además, para aumentar la estabilidad, las patas no caen verticalmente desde el tórax, sino que se doblan hacia afuera.

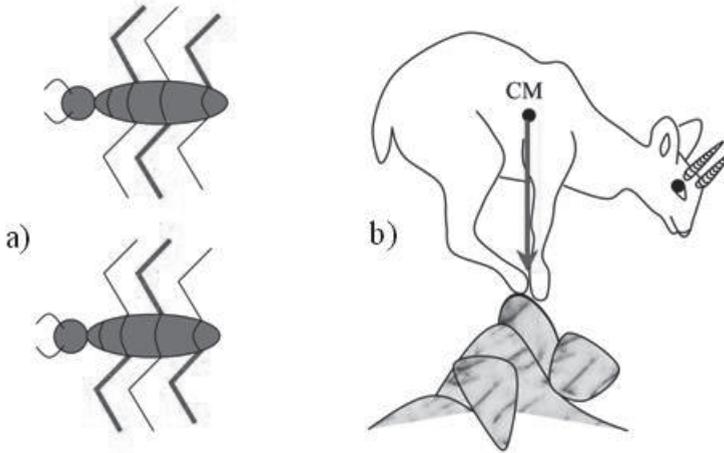


Fig. 4.24. a) Marcha de un insecto. El trípedo formado por las tres patas en línea gruesa es el que está en contacto con el suelo.

b) Un cáprido en equilibrio sobre una diminuta superficie de sustentación.

Hay animales, como las cabras, que tienen un sistema muscular y neurológico de equilibrio muy perfeccionado, lo que les permite mantener la vertical del centro de masas justo sobre la pequeña superficie que forman sus extremidades cuando están muy juntas. De ahí sus conocidas habilidades como equilibristas. En concreto, el oreótrago saltador (*Oreotragus oreotragus*), que vive en las montañas de África oriental, puede saltar y caer juntando sus pezuñas en el espacio de apenas una moneda y mantener el equilibrio en estas circunstancias, una habilidad extremadamente valiosa en un entorno agreste y rocoso.

4.1.8 La palanca

Una palanca es un sistema formado por una varilla rígida apoyada en un pivote sobre la que actúan dos fuerzas, a las que normalmente se les asigna el carácter de peso y fuerza externa necesaria para contrarrestarlo, con momentos de signo contrario respecto del punto de contacto entre pivote y varilla. Cuando los momentos se cancelan exactamente, el sistema está en equilibrio. Dependiendo de la posición relativa entre los puntos de aplicación de las fuerzas y el punto de apoyo se distinguen tres casos de palanca:

1. En la palanca de primer género el punto de apoyo está entre los puntos en los que se aplican las dos fuerzas.

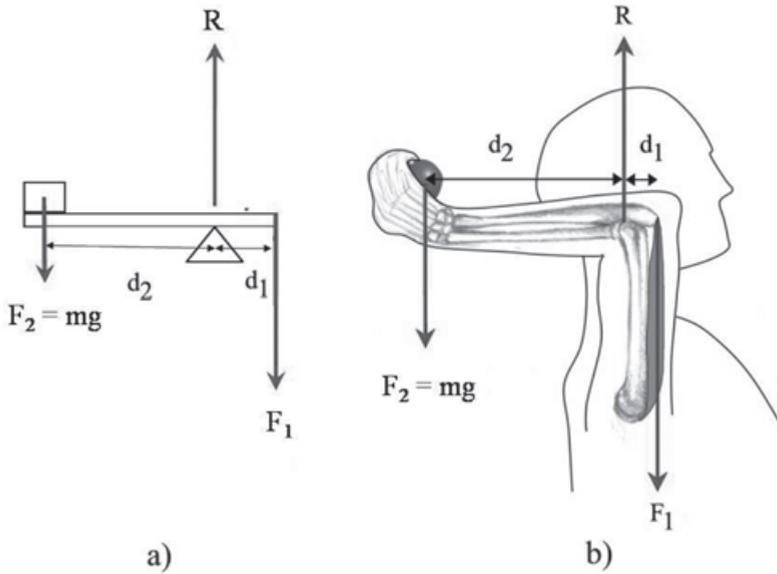


Fig. 4.25. a) Palanca de primer género. b) Extensión del brazo por la acción del tríceps que tira del extremo del cúbito.

En el equilibrio, las sumas de fuerzas y de momentos deben anularse. Tomaremos los momentos de las fuerzas respecto del punto de apoyo, $F_2 = mg$ es el peso de un objeto situado en uno de los extremos, F_1 es la fuerza vertical hacia abajo que hay que hacer para mantenerlo en equilibrio, y R es la fuerza de contacto sobre la varilla en el punto de apoyo sobre el pivote, según la disposición de la figura 4.25.a. No prejujaremos en este ejercicio y en los que siguen el signo de R , sino que saldrá como resultado de los cálculos:

$$R - F_1 - mg = 0$$

$$F_1 d_1 - mg d_2 = 0$$

$$F_1 = mg \frac{d_2}{d_1}$$

Si d_2 es mayor que d_1 , hay que hacer una fuerza superior al peso del cuerpo para mantener el equilibrio o moverlo hacia arriba, pero, a cambio, se puede generar un desplazamiento mayor de dicho peso. Es el caso de la extensión del brazo por medio del tríceps braquial contra un peso situado en la mano (ver la figura 4.25.b). Si, por el contrario, d_2 es menor que d_1 la fuerza necesaria para mantener el equilibrio o mover el peso es menor, pero también lo es el desplazamiento producido.

2. En la palanca de segundo género, el peso está entre el punto de apoyo y la fuerza, en este caso vertical hacia arriba. La expresión que da la fuerza es la misma que en el caso anterior, y como d_l es siempre mayor que d_f , se sigue que la fuerza F_l es menor que el peso del cuerpo, pero el desplazamiento generado es pequeño.

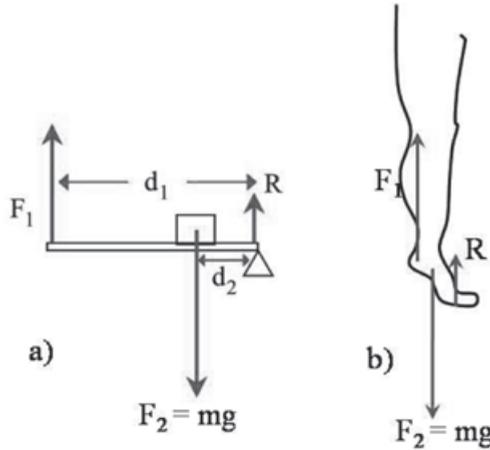


Fig. 4.26. a) Palanca de segundo género. b) Extensión plantar del cuerpo.

Un ejemplo de palanca de segundo género es la extensión plantar del pie (ver la figura 4.26.b).

3. En la palanca de tercer género es la fuerza aplicada la que se encuentra entre el punto de apoyo y el peso. La fuerza que hay que hacer es, en este caso, mayor que el peso debido a que d_l es siempre menor que d_f pero se genera una gran movilidad.

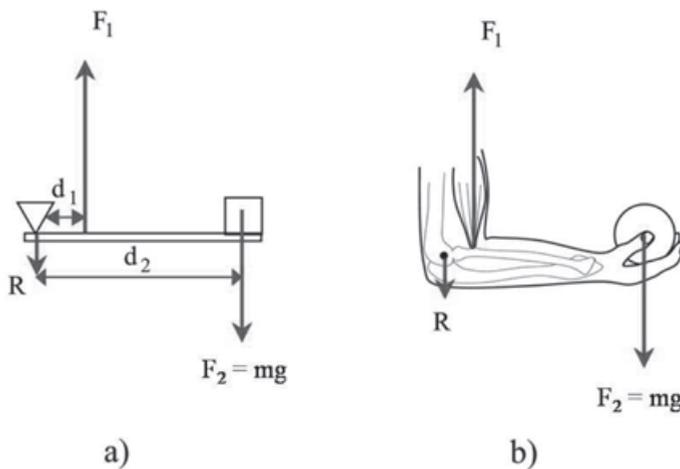


Fig. 4.27. a) Palanca de tercer género. b) Flexión del brazo por la acción del bíceps braquial sobre el radio.

Un ejemplo es la flexión del brazo por medio del bíceps braquial, tal como se muestra en la figura 4.27.b, que veremos con detalle más adelante.

4.1.9 Equilibrio estable e inestable

Cuando se aparta ligeramente un cuerpo de su posición de equilibrio, el momento de las fuerzas que actúan sobre él hace que se mueva, pero dependiendo del sentido del movimiento, **el cuerpo puede volver a su posición de equilibrio inicial o puede alejarse de ella. En el primer caso, se dice que el equilibrio es estable y en el segundo, inestable.** Un lápiz en posición vertical está en equilibrio inestable porque al desviarlo ligeramente el centro de masas caerá fuera de la base de sustentación, debido a la pequeñez de ésta, y el movimiento así iniciado alejará al lápiz de la posición inicial.

Un objeto con una mayor base de sustentación, por el contrario, es tal que el momento generado tiende a restaurar el equilibrio. Hay también dispositivos que, debido a su peculiar estructura de masas, tienen una gran estabilidad a pesar de su pequeña superficie de sustentación, como el juguete de la figura 4.28, en el que el centro de masas se sitúa por debajo del punto de apoyo y el momento que se genera al separarlo de la posición de equilibrio tiende a restaurar dicha posición.

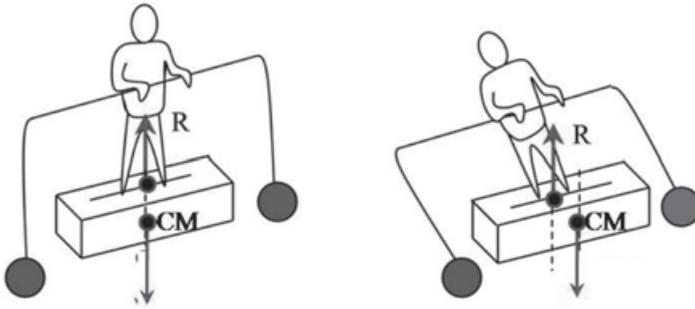


Fig. 4.28. Juguete con un centro de masas situado por debajo del punto de apoyo, lo que asegura su estabilidad.

En las personas, la posición del tronco erguido no es la más adecuada para mantener el equilibrio sobre las caderas con facilidad. El centro de masas de la cabeza, el tronco y extremidades superiores está situado en el pecho, a unos 35 cm por encima de las caderas y es necesario un sistema muscular y neurológico complicado que regule continuamente la posición de la columna.

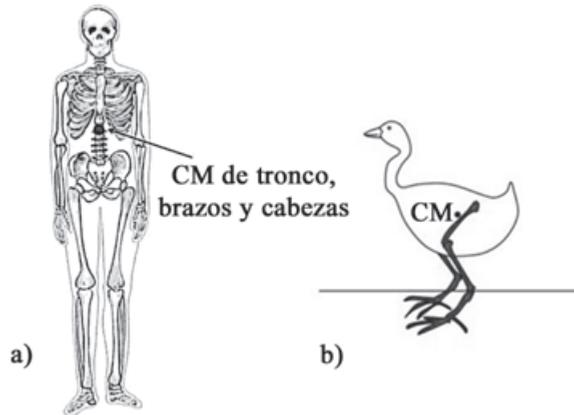


Fig. 4.29. a) El centro de masas del tronco, cabeza y brazos de una persona está por encima del punto de apoyo del tronco sobre las extremidades inferiores. b) El centro de masas del cuerpo de un ave está por debajo del punto de apoyo del tronco sobre las extremidades inferiores.

Por el contrario, las aves, que se mantienen también sobre dos extremidades, han evolucionado durante más de cien millones de años y poseen una distribución de masas que hace más fácil su equilibrio. En efecto, el centro de gravedad del cuerpo, cabeza y alas está situado por debajo de las caderas, de forma que “cuelga” de éstas, en lugar de estar apoyado desde encima, como en el caso de los humanos. El equilibrio de las aves es, por lo tanto, más sencillo de mantener y requiere de menos sofisticación neurológica.

4.2 Bioestática

4.2.1 Las extremidades superiores

Consideraremos en este capítulo las condiciones que deben cumplirse para que los cuerpos humanos o de otros animales, o algunas de sus partes, se mantengan en equilibrio bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Los principios que deben aplicarse son los generales del equilibrio desarrollados anteriormente, pero **lo característico en la bioestática es la necesidad de determinar los puntos y ángulos de inserción de los distintos músculos generadores de fuerza en los segmentos óseos.**

Empezaremos por un caso sencillo. Veamos el conjunto de fuerzas que es necesario poner en juego para mantener un brazo horizontal.

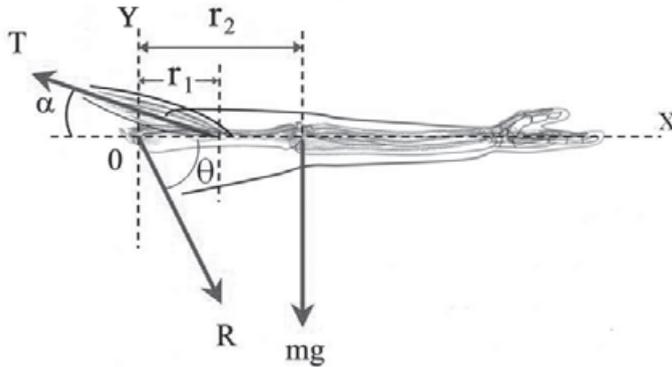


Fig. 4.30. Brazo en posición horizontal por la acción del músculo deltoides que tira del húmero con una fuerza T.

En este caso, el brazo se mantiene rígido y sobre él actúa la gravedad, que, como sabemos, puede considerarse aplicada sobre su centro de masas. Por otro lado, el músculo deltoides parte de la clavícula y escápula y se inserta en el húmero formando un cierto ángulo y tirando de él para mantenerlo en posición horizontal. La cabeza del húmero, por su parte, se inserta en la escápula y genera una fuerza de contacto de ésta. **Es importante, en todos los ejercicios de bioestática, identificar la parte del cuerpo cuyo equilibrio se quiere estudiar y tener en cuenta únicamente las fuerzas que actúan sobre dicha parte.** En este caso, las fuerzas sobre el brazo son: su peso, aplicado en el centro de gravedad, la tensión del deltoides, aplicada en el punto de inserción, y la fuerza de contacto de la escápula, aplicada sobre la cabeza del húmero. Llamando T a la fuerza ejercida por el deltoides y R a la fuerza de contacto, las condiciones de equilibrio son:

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{R} - mg\vec{u}_y = 0$$

$$\sum \vec{\Gamma} = \vec{r}_1 \times \vec{T} + \vec{r}_2 \times (-mg\vec{u}_y) = 0$$

donde hemos tomado los momentos de las fuerzas respecto del extremo del húmero sobre el que pivotaría el brazo en caso de girar y escogido como eje Y la dirección vertical con sentido positivo hacia arriba. Escribiendo ahora las ecuaciones precedentes en componentes, resulta:

$$\sum F_x = -T \cos \alpha + R_x = 0$$

$$\sum F_y = T \operatorname{sen} \alpha - mg + R_y = 0$$

$$\sum \Gamma_z = r_1 T \operatorname{sen} \alpha - r_2 mg \operatorname{sen} 90^\circ = 0$$

Puesto que \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y $\vec{g}u_y$ son vectores contenidos en el plano XY , el momento de las fuerzas estará dirigido según el eje Z ; de ahí que la ecuación para el momento total de la fuerza se reduzca a la componente z . Justamente, de esta tercera ecuación podemos encontrar la fuerza con la que el deltoides tiene que tirar. Tomando la masa del brazo, $m = 3,5 \text{ kg}$, su longitud igual a 75 cm , la distancia del centro de masas al punto fijo, $r_2 = 30 \text{ cm}$, el punto de inserción del húmero, $r_1 = 14 \text{ cm}$ y el ángulo de inserción, $\alpha = 15^\circ$, tenemos que:

$$T = \frac{0,30 \times 3,5 \times 9,8}{0,14 \times \operatorname{sen} 15^\circ} = 284 \text{ N}$$

Obsérvese que para sostener el brazo con una fuerza en vertical hacia arriba aplicada al centro de masas, bastaría con que ésta fuera de $3,5 \times 9,8 = 34 \text{ N}$. El hecho de que el deltoides tenga que hacer una fuerza ocho veces mayor se debe a la distancia y ángulo de inserción, determinados por la necesidad que tiene el músculo de apoyarse en el resto de la estructura ósea. Las componentes de la fuerza de contacto pueden obtenerse ahora a partir de las dos primeras ecuaciones:

$$R_x = T \cos \alpha \approx 274 \text{ N}$$

$$R_y = -T \operatorname{sen} \alpha + mg \approx -39 \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x} = -0,14$$

Dicha fuerza está, por lo tanto, dirigida hacia abajo, con un ángulo de inclinación $\theta = -8^\circ$.

Consideremos ahora el caso en el que se pone un objeto de masa M en la mano, lo que implica que su centro estará a unos 70 cm del extremo del húmero. Podemos rehacer el cálculo para una posición de equilibrio horizontal de forma muy simple.

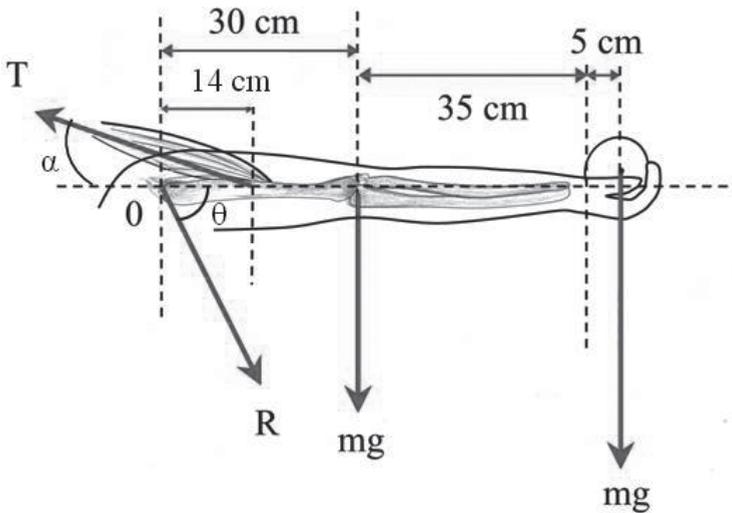


Fig. 4.31. Brazo en posición horizontal con un peso en la mano.

$$T = \frac{0,30 \times 3,5 \times 9,8 + 0,70 \times M \times 9,8}{0,14 \times \text{sen}15^\circ} = 284 + 189 \times M \text{ N}$$

Es decir, para una masa de unos 5 kg, la fuerza que tiene que hacer el deltoides es de 1.229 N, de nuevo muy superior a la que sería necesaria para mantener brazo y peso con una fuerza vertical hacia arriba aplicada en el centro de masas del sistema. Las componentes de la fuerza de contacto son, por su parte:

$$R_x \approx 1.187 \text{ N}$$

$$R_y \approx -235 \text{ N}$$

Veamos ahora la fuerza que tiene que hacer el bíceps para mantener horizontal el antebrazo con un peso en la mano, estando el húmero en posición vertical. El bíceps es el músculo flexor de la articulación del codo y puede actuar contrayéndose y moviendo el antebrazo para levantar un peso.

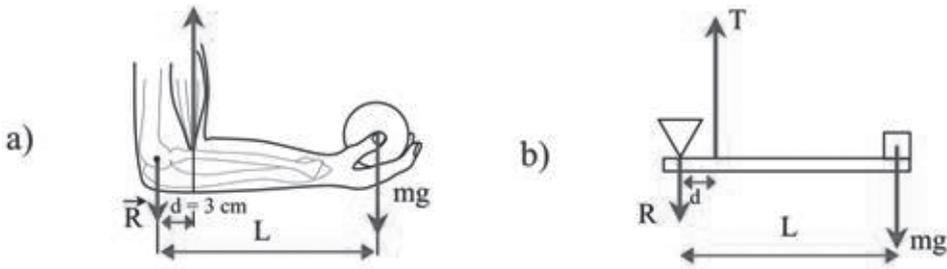


Fig. 4.32. a) Brazo en ángulo recto sujetando un peso gracias a la fuerza generada por el bíceps. b) Esquema de fuerzas en presencia.

El bíceps está sujeto a la escápula, en el hombro, y se inserta en el radio, mientras que el tríceps, que es el antagonista del bíceps, se inserta en el cúbito y, cuando se contrae, extiende el antebrazo. El punto de inserción del bíceps es muy próximo a la articulación del codo, apenas 3 cm, por lo que el ángulo de inserción es casi recto. Nótese que en la aproximación en que este ángulo sea exactamente de 90°, la fuerza de contacto, en el codo, es vertical hacia abajo, ya que no sería posible conseguir cancelar las fuerzas si tuviera una componente horizontal. Tomando momentos respecto del punto de articulación y suponiendo que la masa del antebrazo es mucho menor que la del cuerpo que se está sujetando, las ecuaciones de equilibrio son las de la palanca de tercer género:

$$R + T - Mg = 0$$

$$Td - MgL = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos la tensión que debe mantener el bíceps:

$$T = Mg \frac{L}{d} \tag{4.14}$$

Y como $L \gg d$, la fuerza con que el bíceps debe tirar del radio es mucho mayor que la del peso sujeto en la mano. Para las personas, L es del orden de unos 35 cm y d de unos 3 cm, por lo que:

$$T \approx 12Mg$$

Como ya sabemos, la fuerza que puede desarrollar un músculo por unidad de sección es aproximadamente la misma para todos los animales. Así, la tensión máxima está dada por su sección y, a partir del valor de ésta, puede calcularse el peso máximo que puede sostener, es decir, invirtiendo la ecuación (4.14):

$$Mg = T \frac{d}{L} \quad (4.15)$$

Una persona sin entrenamiento especial puede tener un bíceps cuya sección máxima sea un círculo de unos 8 cm de diámetro, lo que implica un área de unos 50 cm². Como la fuerza máxima por unidad de sección desarrollada por los músculos esqueléticos de los vertebrados es del orden de 30 N/cm², un bíceps de este tamaño puede tirar del radio con una fuerza de unos 1.500 N, de donde:

$$Mg \approx 1.500 \times \frac{3}{35} = 129N$$

lo que permite sujetar un objeto de unos 13 kg. Una persona con entrenamiento específico puede llegar hasta los 7.000 N de fuerza en sus bíceps, esencialmente aumentando su sección hasta duplicar el diámetro de un bíceps normal (piénsese en el diámetro de brazos y muslos de deportistas como los levantadores de peso o los esquiadores de descenso). Para este supuesto, la fuerza máxima que se puede desarrollar es de unos 600 N, es decir, se puede mantener en contracción isométrica hasta un peso del orden de 60 kg.

La ecuación (4.15) expresa también la relación entre la fuerza máxima que puede desarrollar un miembro para mover o sujetar pesos y su longitud L . Cuanto mayor sea ésta, más pequeño es el cociente d/L y menor es la fuerza. Así, **los animales con extremidades largas suelen ser débiles aunque sean muy veloces. Por el contrario, los animales que necesitan manejar pesos, como la mayoría de los felinos, que deben abatir y transportar a sus presas, no pueden tener miembros muy largos.** L es más bien pequeña y T más bien grande o, en otras palabras, sus patas son más bien cortas y fuertes.

4.2.2 La cadera y las piernas

Consideremos, en primer lugar, el equilibrio de una persona en el plano frontal, es decir, respecto de giros laterales. Como ya vimos antes, cuando una persona está erguida, en reposo, descansando simétricamente sobre los dos pies, la vertical del centro de gravedad cae sobre un punto equidistante de ambos pies y la fuerza de contacto del suelo es la misma en cada uno de los dos e igual a la mitad del peso del cuerpo. Cuando hay un desplazamiento lateral, la vertical del peso también se desplaza lateralmente y, en el límite, el cuerpo se apoya sobre uno de los pies. Supongamos que una persona levanta el pie izquierdo y se apoya únicamente en el derecho. El centro de masas del conjunto del tronco, cabeza, extremidades superiores y pierna izquierda, es decir, todo el cuerpo menos la pierna derecha, está ligeramente desplazado

una distancia d a la izquierda del eje de simetría del cuerpo (es decir, a la derecha en la figura 4.33, ya que se ve a la persona de frente).

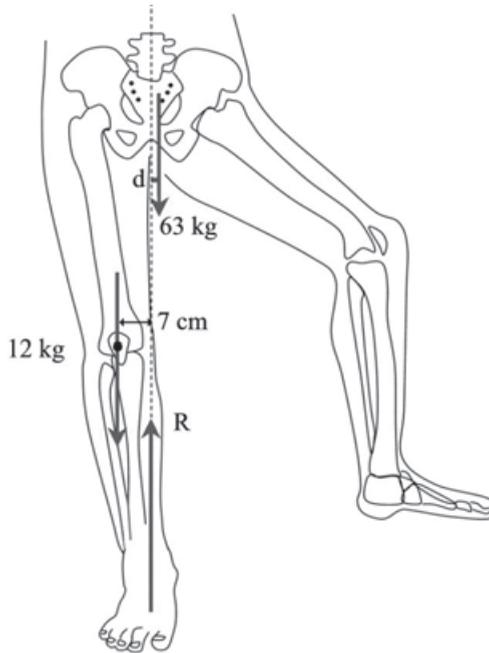


Fig. 4.33. Equilibrio del cuerpo humano sobre un pie. La masa del tronco, brazos, cabeza y pierna izquierda es de 63 kg, mientras que la masa de la pierna derecha es de 12 kg.

Estudiamos el equilibrio del cuerpo en conjunto, por lo que la única fuerza de contacto, ejercida por una superficie sólida externa, es la del suelo sobre el pie derecho, que se aplica en la superficie de apoyo y va dirigida hacia arriba. Supongamos que la persona pesa 75 kg, que cada una de sus piernas pesa 12 kg y que al apoyarse sobre el pie derecho, el centro de masas de la pierna derecha se encuentra a 7 cm a la derecha de la vertical del eje de simetría del cuerpo. Las condiciones de equilibrio para que el cuerpo no pivote sobre el pie son:

$$\sum F = -63g - 12g + R = 0$$

$$\sum \Gamma = 12 \times 0,07 - 63 \times d = 0$$

de donde:

$$R = 75g = 735N$$

$$d \approx 1,3 \text{ cm}$$

La fuerza de contacto del suelo, R , resulta igual, en módulo, al peso total del cuerpo, como era de esperar.

Consideremos ahora las condiciones de equilibrio sobre la pierna derecha de la parte superior del cuerpo, que puede pivotar sobre el punto de contacto entre la cadera y la cabeza del fémur a causa de la asimetría de la posición y la tendencia a girar hacia la izquierda (hacia la derecha en la figura 4.34) debido a que el pie de ese lado no está apoyado en el suelo. Consideremos, por lo tanto, el juego de fuerzas que actúan sobre esta parte del cuerpo (todo menos la pierna derecha). Por un lado, está su peso, cuya línea de acción hemos visto que se encuentra $1,3\text{ cm}$ desplazada a la izquierda del eje de simetría. Para evitar el giro lateral, el glúteo mayor, que une el fémur y los huesos que forman la cadera, tira de ésta hacia el trocánter mayor, que es la protuberancia más externa del fémur, con una fuerza T que forma un ángulo con la horizontal que los estudios anatómicos y de rayos X han mostrado ser de unos 60° respecto a la horizontal.

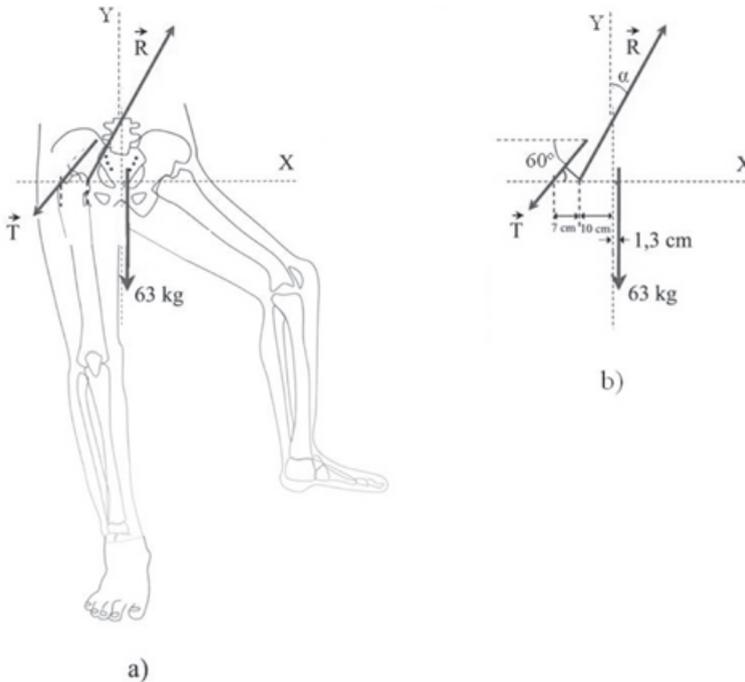


Fig. 4.34. a) Equilibrio del cuerpo apoyado sobre la pierna derecha.
b) Juego de fuerzas que impiden la rotación sobre la cabeza del fémur.

El equilibrio se mantiene, finalmente, gracias a la fuerza de contacto, R , entre la cabeza del fémur y el alveolo semiesférico en el que ésta encaja, llamado acetábulo, en la conjunción de los tres huesos de la cadera (ilion, isquion y pubis).

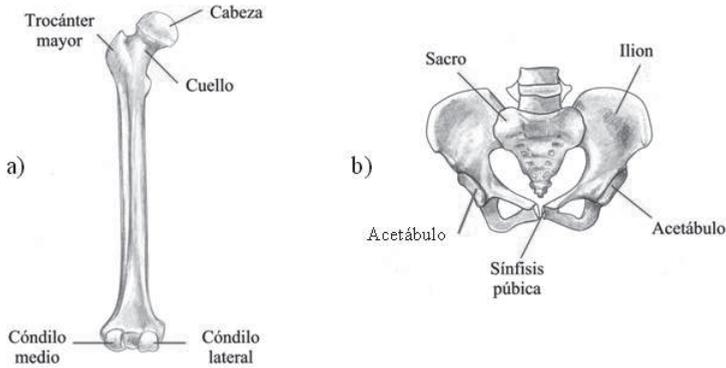


Fig. 4.35. a) Fémur. b) Cadera.

El punto de aplicación y la dirección de esta fuerza se conocen aproximadamente a partir de la estructura ósea de la cabeza del fémur, cuyo crecimiento y conformación dependen de la dirección e intensidad de las fuerzas que necesita soportar. En concreto, el punto de aplicación está a unos 10 cm en horizontal del eje de simetría y a unos 7 cm en horizontal del trocánter mayor, según puede verse en la figura 4.34.b. Escribiremos ahora las condiciones de equilibrio, calculando los momentos respecto del punto en el que se aplica la fuerza de contacto, que sería el centro de giro:

$$\sum F_x = -T \cos 60^\circ + R_x = 0$$

$$\sum F_y = -T \operatorname{sen}60^\circ + R_y - 63g = 0$$

$$\sum \Gamma_z = T \times 0,07 \operatorname{sen}60^\circ - 63g \times 0,113 = 0$$

De la última ecuación se sigue que la fuerza con que hay que tirar del pubis es:

$$T = 1151 \text{ N}$$

y la fuerza de contacto es:

$$R_x = 575 \text{ N} \tag{4.16}$$

$$R_y = 1.614 \text{ N} \tag{4.17}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 1.713 \text{ N} \tag{4.18}$$

La fuerza de contacto que soporta la cabeza del fémur es muy grande, más del doble del peso del cuerpo, según puede verse en la expresión (4.18), debido a que debe compensar el peso que gravita sobre dicho punto y la fuerza muscular para mantener el equilibrio, estando ambas dirigidas hacia abajo; de ahí la gran componente vertical positiva de R . Cuando el cuerpo está reposando en posición simétrica sobre ambos pies, desde el punto de vista del equilibrio en el plano frontal, no se necesita ninguna fuerza muscular y la fuerza de contacto sobre cada uno de los fémures es simplemente la mitad del peso del cuerpo menos las piernas, en este caso 250 N , casi siete veces menos que cuando se apoya sobre un solo pie. La diferencia entre las fuerzas que tiene que soportar la cabeza del fémur cuando se está apoyado sobre los dos pies y cuando, al caminar, sólo hay un pie de apoyo, es enorme, aunque puede absorberla perfectamente, así como las fuerzas todavía mayores que se generan durante la carrera.

Observación. *La fuerza de contacto que tiene que soportar la cabeza del fémur (igual y de sentido contrario a la R de las ecuaciones (4.16-17)) apunta hacia abajo formando un ángulo α con la vertical tal que:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_x}{R_y} = 0,36$$

es decir, de unos 20° . Pues bien, observaciones detalladas con rayos X han permitido concluir que la dirección de esta fuerza coincide exactamente con la del cuello del fémur. Los ejes de la trabécula esponjosa que forman el cuello y la cabeza del fémur son la prolongación de la línea de aplicación de la fuerza, como se ve en la figura 4.36, lo que sugiere que el crecimiento de este hueso está dirigido, al menos parcialmente, por la fuerza que se aplica sobre él.

La cabeza del fémur está protegida por una cubierta llamada epífisis, sujeta rígidamente a la estructura ósea. A lo largo del crecimiento de una persona, la dirección de la fuerza sobre el fémur cambia ligeramente, lo que implica un cambio en la dirección del cuello y también en la epífisis, siempre perpendicular a dicha fuerza, ya que, en caso contrario, habría una componente tangencial que tendería a hacer deslizar el acetábulo sobre la cabeza del fémur.

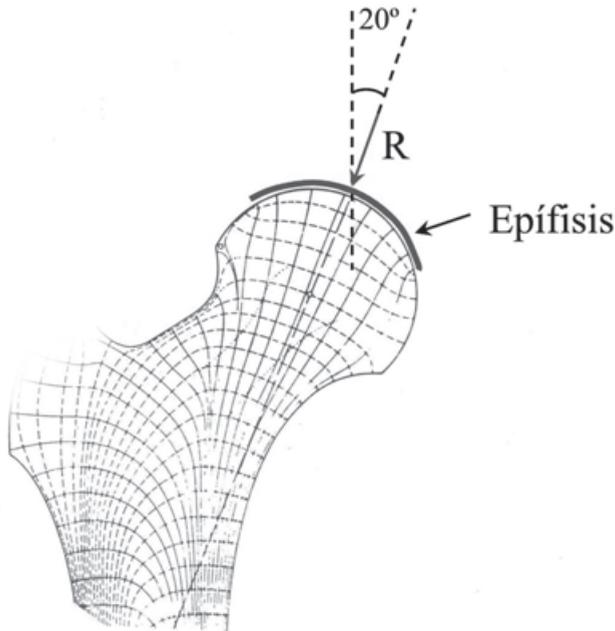


Fig. 4.36. Ejes de la trabécula del cuello del fémur, dirección de la fuerza de contacto con el acetábulo y epífisis de la cabeza del fémur.

En el caso de que los músculos que unen el trocánter mayor y la cadera resulten inutilizados, la única forma de mantener el equilibrio al andar es que el centro de gravedad del cuerpo menos la pierna de apoyo caiga en vertical sobre ésta, ya que, entonces, la simple fuerza de contacto en la cabeza del fémur basta para contrarrestar el peso. La persona afectada por esta enfermedad muestra lo que se conoce como paso antálgico, que es una peculiar forma de caminar en la que hay una inclinación hacia el lado del músculo paralizado, para conseguir que todo el peso caiga en vertical sobre la cabeza del fémur. La consecuencia es que la epífisis tiende a desplazarse hacia la posición horizontal para quedar perpendicular a la fuerza de contacto y el cuello del fémur tiende a crecer verticalmente y no con la inclinación normal de 20° , lo que, a su vez, implica que la longitud total de ese fémur es superior a la del otro, por lo que la pelvis está permanentemente inclinada y repercute en deformaciones de la columna.

4.2.3 El tronco y la columna

Veamos ahora la columna vertebral y el equilibrio respecto de giros frontales. La columna no es una estructura rígida ni rectilínea, sino que está formada por un conjunto de segmentos, las vértebras, dotadas de la capacidad de cierto movimiento relativo y dispuestas a lo largo de una línea que presenta

tramos curvos. Sin embargo, a los efectos de estudiar su equilibrio, podemos considerarla como una estructura rígida y aproximadamente rectilínea con un ensanchamiento en su parte inferior, el sacro, cuyas dos protuberancias laterales se encastran en el hueso de la cadera formando una articulación en bisagra que permite el movimiento hacia adelante y hacia atrás (ver la figura 4.35.b).

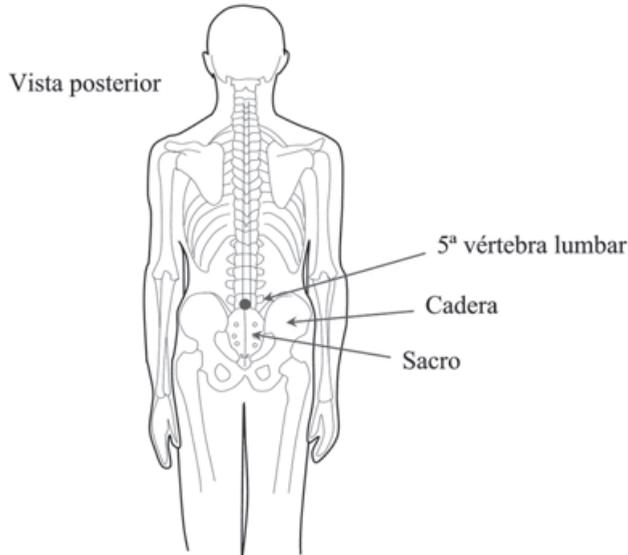


Fig. 4.37. Articulación de la columna vertebral con la cadera.

Cuando una persona se inclina hacia adelante, el peso del tronco y la cabeza, y la carga que pueda soportar con los brazos, la harían girar si no fuera porque los músculos de la espalda, principalmente los músculos sacroespinales, tiran de la columna desde la cadera. Dichos músculos se insertan, en su parte inferior, entre el ilion y la parte inferior del sacro y, en su parte superior, a las apófisis espinosas de las vertebrae lumbares y torácicas. En promedio, su acción puede aproximarse por un único músculo que se inserta en un punto situado aproximadamente a unos $2/3$ de su longitud, con un ángulo de unos 10° con el eje de la columna. El centro de gravedad del tronco, los brazos y la cabeza, cuya masa total es m , se sitúa también alrededor de ese punto, mientras que la carga M que se sujeta con las manos se aplica a lo largo de la línea vertical que pasa por los hombros. El conjunto de fuerzas que actúan sobre la columna cuando el cuerpo se inclina un ángulo α con la vertical puede verse en la figura 4.38. En el Ejercicio 4.17 se resuelven las condiciones de equilibrio.

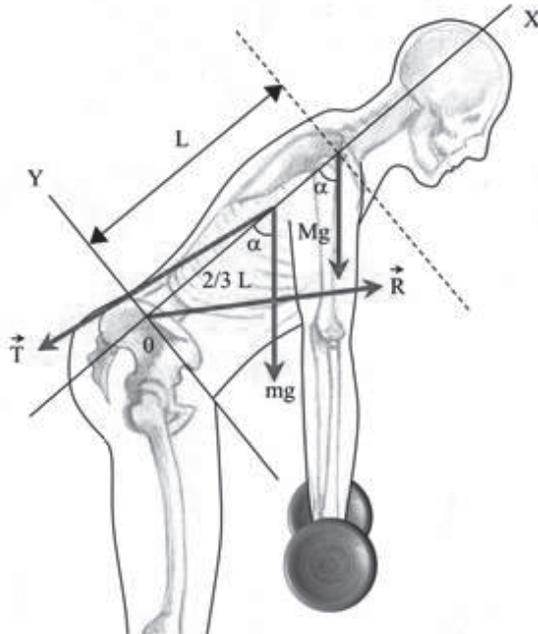


Fig. 4.38. Equilibrio de un cuerpo inclinado sujetando un peso.

Como puede verse en la solución de dicho Ejercicio, la fuerza de contacto está dirigida casi en la dirección de la columna y su valor es también muy grande. Tanto la tensión que mantienen los músculos de la espalda como la fuerza de contacto que soporta el sacro contra la cadera serían, por lo tanto, suficientes para sostener un peso de unos 370 kg. Toda esta fuerza es también la que soporta la última vértebra, la quinta lumbar, sobre el sacro, disminuyendo en las otras vértebras a medida que su posición es más elevada. De ahí la frecuencia de las lesiones sobre la quinta lumbar como consecuencia de levantar o cargar pesos con la espalda flexionada.

4.3 La locomoción en los animales

4.3.1 La marcha y la carrera

Estudiaremos en esta sección el desplazamiento de distintos animales terrestres. El movimiento se debe al impulso de las extremidades sobre el suelo en dirección contraria a la marcha sólo posible gracias a la existencia de rozamiento entre las dos superficies (suelo y extremidad). Si la marcha es regular, a velocidad constante, se compone de una serie de pasos de la misma longitud y frecuencia. **Entendemos por longitud de paso la distancia entre dos puntos de apoyo sucesivos de una misma extremidad. Para una persona andando, la longitud de paso (SL, de *stride length*) es el doble de la**

distancia que hay entre los dos pies cuando están ambos en contacto con el suelo, es decir, dos zancadas. Cuando se camina, la longitud de paso es de unos 1,80 m, mientras que un corredor de 100 metros tiene una longitud de paso de unos 4,40 m, que corresponde a una zancada de 2,20 m. Entendemos por frecuencia de paso el número de pasos por segundo, que, para una persona, es la mitad del número de apoyos de ambos pies por segundo. Un corredor de 100 m da $\frac{100}{2,20} \approx 46$ zancadas, que equivale a 23 pasos. Si completa la carrera en 10 s, entonces la frecuencia de paso es de 2,3 pasos por segundo.

Llamamos factor de trabajo de un pie a la fracción del tiempo en que ese pie está en contacto con el suelo en relación con la duración del paso. Para una persona caminando a velocidad constante, el factor de trabajo es del orden de 0,6, lo que quiere decir que durante el 60 % del tiempo de paso el pie está en contacto con el suelo. Por lo tanto, sumados los tiempos en que alguno de los dos pies está en contacto con el suelo resulta 1,2, o 120 % de la duración de un paso. Este resultado quiere decir que durante un 20 % de la marcha los dos pies están en contacto con el suelo. Por el contrario, cuando una persona corre, su factor de trabajo es del orden de 0,3, lo que implica que durante el 40 % del tiempo ambos pies están en el aire (que resulta de restar al 100 % de la duración de un paso el 60 % en el que alguno de los pies está en contacto con el suelo, suponiendo que, en carrera, nunca lo están los dos simultáneamente). En general, **llamamos carrera a una sucesión de pasos con factores de trabajo inferiores a 0,5 (hay un intervalo de tiempo en el que ambos pies están en el aire) y marcha cuando el factor de trabajo es superior a 0,5 (hay un intervalo de tiempo en el que ambos pies están sobre el suelo).**

Un animal que corre y, por lo tanto, pasa por momentos en los que todas las extremidades están en el aire, no está en equilibrio, como tampoco lo está cuando una sola de ellas está en contacto con el suelo, sea marchando o corriendo. Las desviaciones del equilibrio se van corrigiendo mediante apoyos sucesivos de las extremidades, pero si el animal mueve lentamente sus músculos, como en el caso de la tortuga, puede no tener tiempo de recobrar el equilibrio antes de caerse, por lo que éste necesita preservarse en todos los instantes de la marcha. Una persona o un ave, que tienen los pies grandes, se mantienen en equilibrio sobre dos extremidades y, con algo más de esfuerzo, también sobre una, pero los animales de pies pequeños necesitan, para estar en equilibrio, tener al menos tres de ellos sobre el suelo formando un triángulo que contenga la vertical del centro de gravedad. Así, un animal lento se desplaza moviendo una sola extremidad a la vez y dejando que las otras tres mantengan el equilibrio, tal y como puede verse en la figura 4.39.

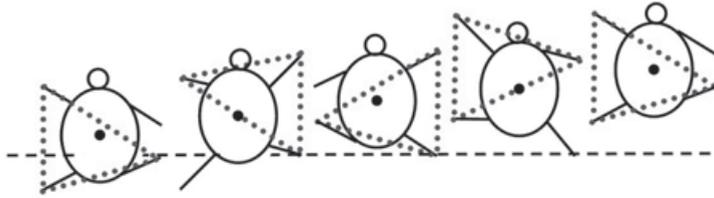


Fig. 4.39. Desplazamiento de un cuadrúpedo manteniendo su centro de gravedad siempre sobre la superficie de sustentación. Alexander (1982).

Un movimiento así implica que cada pie esté en contacto con el suelo al menos las tres cuartas partes de la duración del paso, es decir, el factor de trabajo debe ser de 0,75 como mínimo. Cuanto mayor sea este factor más lenta es la marcha pero también el equilibrio es más estable. Los insectos, como ya indicamos en la sección 4.1.8, tienen siempre tres de sus seis patas sobre el suelo para asegurar el equilibrio, lo que implica que el factor de trabajo es superior a 0,5, mientras que para las tortugas es del orden de 0,8.

4.3.2 La marcha y la carrera en los humanos

Marcha

Veamos la marcha de los humanos con un modelo muy sencillo, llamado de péndulo invertido, en el que se considera que las piernas permanecen rectas mientras caminan, algo bastante próximo a la realidad. **El centro de masas de la persona y cualquier punto del tronco o la cabeza describen arcos de circunferencia de radio igual a la longitud de la pierna, subiendo y bajando**, tal y como se aprecia en la figura 4.40.

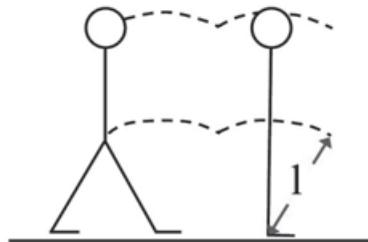


Fig. 4.40. Esquema de la marcha de una persona.

Cuando una de las piernas está en posición vertical, tal como se esquematiza en la figura 4.41, el centro de masas se está moviendo con una aceleración centrípeta, dirigida hacia el punto de apoyo del pie, igual a $\frac{v^2}{l}$, donde v es la velocidad de desplazamiento y l es la longitud de la pierna. Al no estar el pie pegado ni

enganchado al suelo, el caminante no puede tirar de él e imprimirse un aceleración hacia abajo distinta de la gravedad. Por lo tanto, la aceleración centrípeta no puede ser en ningún caso superior a la gravedad, de donde se sigue que:

$$\frac{v^2}{l} \leq g$$

$$v \leq \sqrt{l \times g} \quad (4.19)$$

Tomando ahora una longitud de pierna de 85 cm, resulta que la velocidad máxima a la que se puede caminar es de unos 2,9 m/s, que es una marcha bastante rápida (unos 10,4 km/h). Los marchadores de competición llegan hasta los 4 m/s utilizando una técnica que, mediante movimientos exagerados de la cadera acompañados con el movimiento de las piernas, nivela el desplazamiento de la parte superior del cuerpo, con arcos menos pronunciados, lo que implica que el radio de curvatura efectivo de dichos arcos es superior a la longitud de la pierna y, en consecuencia, de acuerdo con la expresión (4.19), la velocidad máxima es también superior.

Transición marcha-carrera

Si una persona quiere moverse más rápido no puede ya caminar, sino que tiene que romper a correr. La velocidad de transición de la marcha a la carrera es en los adultos de unos 2 m/s, próxima a la velocidad máxima deducida en la ecuación (4.19). Los niños, con una longitud de pierna menor, deben empezar a correr a velocidades menores. Una consecuencia de la existencia de este límite a la velocidad de marcha es que en un medio con gravedad distinta, la velocidad de transición también es distinta. Así, en la Luna, con una aceleración de la gravedad de 1,6 m/s², la velocidad límite es tan sólo de 1,2 m/s, lo que explica el llamativo movimiento a saltos de los astronautas sobre la Luna incluso a velocidades muy moderadas.

La transición marcha-carrera y la velocidad óptima durante la marcha vienen determinadas por una cantidad sin dimensiones llamada número de Froude, que se define como:

$$N_{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \quad (4.20)$$

De las ecuaciones (4.19) y (4.20) se obtiene que, durante la marcha, $N_{Fr} < 1$. En realidad, la transición suele darse, en la mayoría de los animales, para $N_{Fr} \approx 0,7 \sim 0,8$, lo que puede entenderse con el modelo del péndulo invertido a que hemos hecho referencia anteriormente.

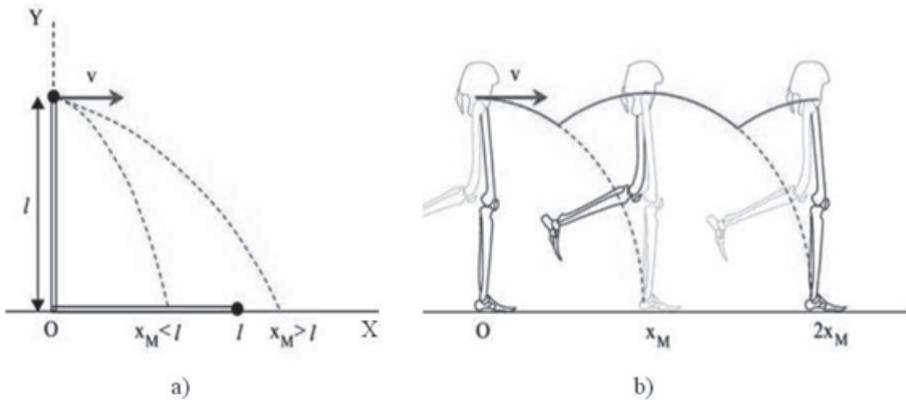


Fig. 4.41. a) Péndulo invertido. Dependiendo de la velocidad, el extremo superior de la extremidad caerá a una distancia inferior o superior a su propia longitud. En este último caso, la base del péndulo (el pie) debe desprenderse del suelo y estaría en situación de carrera. b) La longitud de zancada es del orden del doble del alcance en caída libre del extremo superior de la extremidad.

En efecto, consideremos el punto de inserción en la cadera de la extremidad, que está a una altura sobre la horizontal, l , igual a su longitud. Ese punto se mueve a una velocidad v y está unido al pie por una varilla (la extremidad) de longitud fija. Si su movimiento en el campo gravitatorio es tal que la distancia en horizontal del punto de caída a la posición que ocupaba el pie inicialmente es igual o menor a la longitud de la extremidad, entonces el extremo inferior de ésta no necesita desprenderse del suelo, tal como se muestra en la figura 4.41.a. Si, por el contrario, la velocidad v es tan grande que dicha distancia es superior a la longitud de la extremidad, entonces ésta debe despegar del suelo antes de que la otra se apoye, pasándose al régimen de carrera. Recordando la ecuación (1.14), que nos da la trayectoria parabólica de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre, y sustituyendo los valores $y_0 = l$, $v_{ox} = v$, $v_{oy} = 0$, tendremos:

$$y = l - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2}$$

y el alcance máximo x_M será la abscisa del punto de la trayectoria con $y = 0$, es decir:

$$x_M = \sqrt{\frac{2lv^2}{g}}$$

La transición marcha carrera tendrá lugar cuando $x_M = l$, es decir:

$$\sqrt{\frac{2lv^2}{g}} \approx l$$

$$N_{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$$

que es el resultado observado para la mayoría de los animales. En el caso de los humanos, ese valor corresponde a los 2 m/s aproximadamente.

La longitud de paso λ será igual al doble del alcance máximo x_M , como puede verse en la figura 4.41.b. Se tiene, por lo tanto, la siguiente relación:

$$\lambda \approx 2x_M$$

$$\frac{\lambda}{l} \approx 2 \frac{x_M}{l} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{v^2}{gl}} = 2\sqrt{2} \times N_{Fr}$$

Experimentalmente se observa una relación de proporcionalidad aproximada entre la longitud de paso, medida en unidades de la longitud de la extremidad, y el número de Froude, con una constante de proporcionalidad del orden de 2,5, muy cerca de la obtenida en la expresión anterior. Como el número de Froude que marca la transición entre carrera y marcha es del orden de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, el cociente $\frac{\lambda}{l}$ resulta ser del orden de 2 en dicha transición, tal y como se ha observado experimentalmente en multitud de animales (ver la figura 4.42).

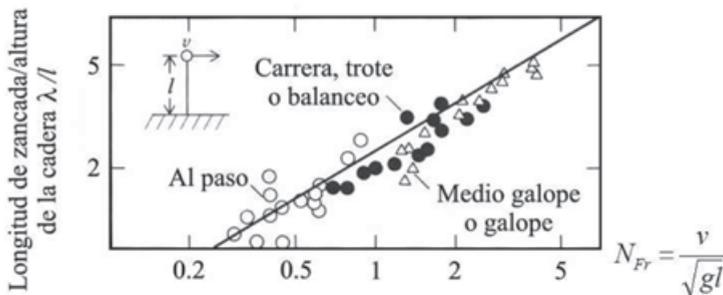


Fig. 4.42. Razón entre la longitud de zancada y la altura de la cadera en función del número de Froude. Alexander (1977).

El cociente $\frac{\lambda}{l}$ puede estimarse para los dinosaurios a partir de las huellas encontradas (longitud de paso) y los esqueletos fosilizados (longitud de la

extremidad), resultando que, salvo en los más pequeños, su valor se encuentra siempre por debajo de 2, lo que sugiere que marchaban en lugar de correr. A esta misma conclusión se llega mediante razonamientos basados en la energética del movimiento. En realidad, es posible medir el cociente $\frac{\lambda}{l}$ a partir únicamente de las huellas dejadas por los dinosaurios, ya que la longitud de paso se mide directamente como la distancia entre huellas sucesivas del mismo pie y se observa empíricamente que la altura de la cadera es proporcional al tamaño longitudinal de la huella del pie, con un factor del orden de 4. Es decir:

$$l \approx 4H \tag{4.21}$$

siendo H la longitud del pie. Algunos autores proponen coeficientes algo distintos, por ejemplo $l = 4,6H$ para los dinosaurios pequeños ($H < 0,25m$) y $l = 5,7H$ para los grandes ($H > 0,25m$). Una vez obtenido el cociente a partir de las huellas, es posible calcular su velocidad de desplazamiento:

$$v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{gl} \frac{\lambda}{l} = \frac{\sqrt{2}}{4} g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \lambda \tag{4.22}$$

La expresión precedente reproduce bastante bien las relaciones entre velocidad, longitud de paso y altura de las caderas en experimentos con animales. Sin embargo, estos experimentos muestran empíricamente que es posible aproximar mejor los resultados con una expresión parecida en la que el coeficiente constante se sustituye por una función sencilla de $\frac{\lambda}{l}$, en particular la siguiente:

$$v = 0,25 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{0,67} g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \lambda = 0,25 g^{\frac{1}{2}} l^{-1,17} \lambda^{1,67} \tag{4.23}$$

Nótese que $0,25 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{0,67}$ toma un valor que no se diferencia mucho de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ en la transición marcha-carrera. La velocidad de marcha más cómoda es menor que la de transición con la carrera, alcanzándose en la mayoría de los animales cuando el número de Froude vale 0,3-0,5, es decir, unos 0,9 m/s-1,4 m/s en el caso de los humanos, que es un intervalo que cubre desde la velocidad normal de paseo hasta una velocidad de marcha bastante exigente.

Despejando ahora la velocidad de (4.20):

$$v = N_{Fr} \times \sqrt{gl}$$

podemos estimar la velocidad de transición marcha-carrera y la velocidad óptima de marcha en el caso de aceleraciones de la gravedad distintas de la terrestre, por ejemplo en otros planetas. También pueden simularse condiciones de gravedad distintas a la terrestre en los momentos de aceleración ascendente o descendente en vuelos de avión, obteniéndose resultados experimentales que se ajustan a las predicciones, como puede verse en la figura 4.43.

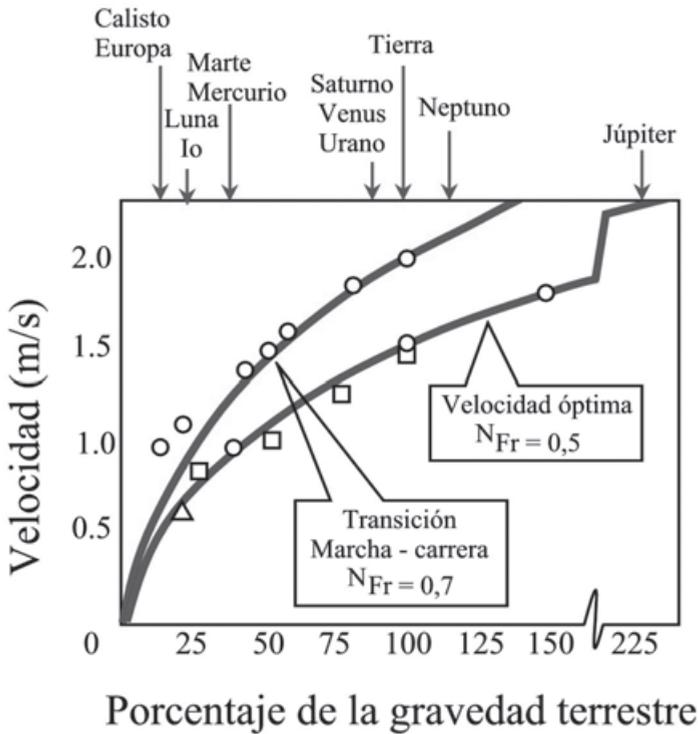


Fig. 4.43. Las curvas representan las predicciones de velocidad óptima y de transición marcha-carrera para los números de Froude que se indican. Los puntos (círculos, cuadrados y triángulo) son medidas experimentales en vuelos en los que se simulan condiciones de gravedad variable. El caso de la marcha sobre la superficie terrestre corresponde al cien por cien de G. Minetti (2001).

4.3.3 El desplazamiento sobre superficies verticales

Muchos animales pueden trepar también a lo largo de superficies verticales, por ejemplo el tronco de un árbol. Para mantenerse en equilibrio en esa posición, el peso debe ser compensado por la fuerza de fricción de las

extremidades con la superficie, debido a su carácter rugoso, como en los pies y manos de los primates, o a la existencia de uñas que se clavan en la madera generando una fuerza intensa similar a la fricción. Algunas lagartijas, salamangas e insectos pueden desplazarse por superficies verticales pulidas e incluso mantenerse sobre techos en posición invertida gracias a que sus pies poseen propiedades adhesivas.

Pero la compensación del peso con la fuerza de rozamiento de una sola pareja de extremidades no es suficiente para mantener el equilibrio en posición vertical, ya que, como puede verse en la figura 4.44, el animal giraría y se caería hacia atrás debido al momento no nulo de estas dos fuerzas.

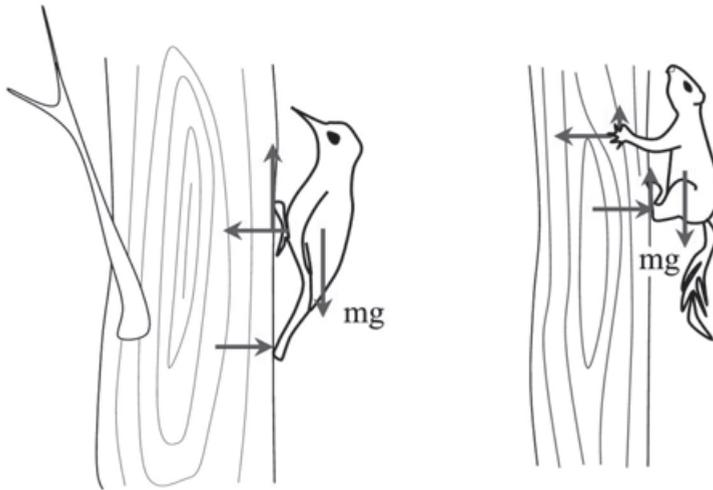


Fig. 4.44. a) Pájaro en equilibrio en posición vertical. b) Ardilla en equilibrio en posición vertical.

Veamos las fuerzas que actúan sobre una ardilla o un primate que trepa por un árbol. El peso se aplica a lo largo de una línea que pasa por su centro de gravedad, mientras que la fuerza de rozamiento entre las extremidades inferiores y el tronco se aplica en los puntos de contacto, por lo que hay un momento distinto de cero que provocaría un giro y la caída hacia atrás. Por eso el animal se agarra con las extremidades superiores al tronco, con las uñas o gracias a la superficie rugosa de las manos, y tira de él generando una fuerza de contacto del árbol sobre el animal que va en sentido contrario y se aplica al punto de contacto de dichas extremidades con el tronco. Por supuesto, si la fuerza se ejerce sólo por fricción con la superficie de la mano y no clavando las uñas, los brazos tienen que ser suficientemente largos en comparación con el diámetro del tronco como para que las fuerzas de contacto más las de

rozamiento tengan una resultante que tire del animal hacia el árbol. Al tiempo, se empuja con las extremidades inferiores generando, de nuevo, una fuerza de contacto en sentido contrario. El par de ambas fuerzas de contacto va en sentido contrario al anterior y puede compensarlo exactamente alcanzándose así el equilibrio.

Los pájaros trepadores pueden mantenerse en equilibrio en posición vertical mediante un juego de fuerzas similar, tirando del tronco con las uñas de sus patas y empujando al tiempo con su cola.

4.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 *Calcular el momento de inercia de una varilla cuya densidad lineal es del tipo $f = \lambda x$ (bate de béisbol) respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro de masas.*

$$\text{Sol.: } I = \frac{1}{18} ML^2$$

Ejercicio 4.2 *Calcular el momento de inercia de un disco circular homogéneo de radio R respecto del eje perpendicular al plano que lo contiene que pasa por su centro. Podemos considerar el disco como una superposición de anillos circulares de radio r y anchura dr .*

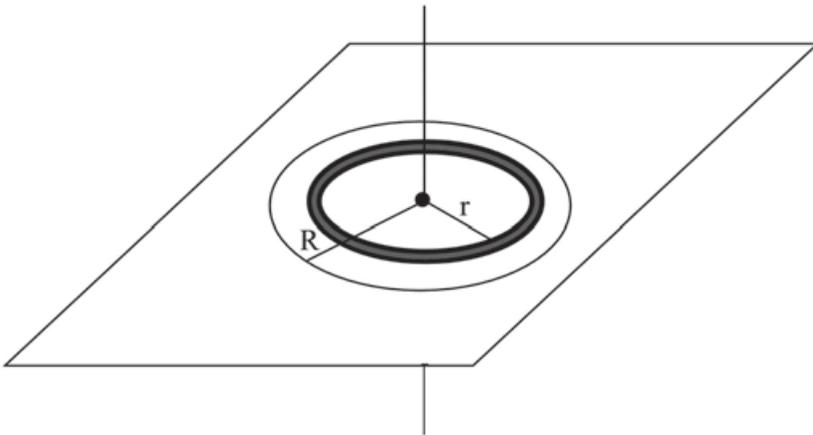


Fig. 4.45. Cálculo del momento de inercia de un disco alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.

La masa de uno de los anillos será:

$$dm = \sigma \times 2\pi r dr$$

donde σ es la densidad superficial. La masa total del disco será:

$$M = \int_0^R dm = 2\pi\sigma \int_0^R r dr = \pi\sigma R^2$$

Como todos los puntos del anillo están a la misma distancia del eje, el valor de su momento de inercia es inmediato:

$$I = \int dm \times r^2$$

y basta ahora integrar en r desde 0 hasta el radio R del disco para obtener el momento de inercia.

$$\text{Sol.: } \frac{1}{2}MR^2$$

Como esta expresión no depende del espesor, es aplicable también a un cilindro de cualquier altura y cuya base tenga el mismo radio R .

Ejercicio 4.3 Calcular el momento de inercia de una esfera de radio R (procédase del mismo modo que en el caso anterior sólo que ahora se empieza por coronas esféricas de espesor diferencial con centro en el centro de la esfera).

$$\text{Sol.: } I = \frac{2}{5}MR^2$$

Ejercicio 4.4 Calcular el momento de inercia de una moneda (que se aproximará como un círculo plano) cuando se la hace girar sobre una mesa, es decir, respecto de un eje contenido en el plano de la moneda que pasa por su centro.

$$\text{Sol.: } I = \frac{1}{4}MR^2$$

Ejercicio 4.5 Se hace girar una moneda de dos euros (1,25 cm de radio y 4 gr de masa) alrededor de un eje contenido en el plano de la moneda y que pasa por su centro. Para ello, partiendo del reposo, se aplica un par de fuerzas con los dedos durante 0,1 segundos y como resultado empieza a girar con una frecuencia de 10 revoluciones por segundo. Calcular la fuerza aplicada sobre los bordes de la moneda.

$$\text{Sol.: } F = 0,39 \text{ N}$$

Ejercicio 4.6 Se empuja una puerta para hacerla girar alrededor del eje que coincide con su arista más larga aplicando una fuerza F constante sobre

la arista contraria y perpendicular al plano de la puerta durante un tiempo t a partir del reposo. Calcular la velocidad angular que adquiere al cabo de dicho tiempo. Si la masa de la puerta es de 20 kg, su anchura $L=1\text{ m}$ y le aplicamos una fuerza de 200 N durante una décima de segundo, ¿cuál es la velocidad angular resultante y el tiempo necesario para completar un giro de 90° ?

$$\text{Sol.: } \omega = \alpha t = \frac{3F}{ML}t = 3 \text{ rad/s}; t = 0,5 \text{ s}$$

Ejercicio 4.7 El ala de un insecto se puede aproximar por un rectángulo de 0,1 g de masa y 1 cm de longitud. El momento de inercia del ala respecto de un eje de giro que pasa por el lado de inserción en el tronco es igual al de la puerta que gira sobre uno de sus lados ya calculado en este capítulo. Calcular el momento de la fuerza muscular necesaria para imprimir al ala una aceleración angular $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$. Si el músculo que bate el ala tira desde un punto situado a 1 mm del borde del ala con un ángulo de inserción de 30° , calcular la fuerza que ejerce.

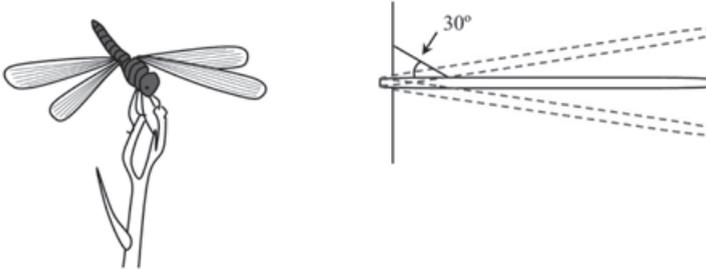


Fig. 4.46. Insecto con alas rectangulares que giran alrededor de uno de sus bordes.

$$\text{Sol.: } \Gamma = 0,33 \times 10^{-6} \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{ s}^{-2}; F = 0,00067 \text{ N}$$

Ejercicio 4.8 Un saltador de trampolín salta a la piscina de forma que, en el despegue, su centro de masas está a una altura de 1 m sobre la tabla que, a su vez, está a 3 m sobre la superficie del agua. Su velocidad inicial forma un ángulo de 45° con la horizontal y su módulo es tal que el punto más alto de la trayectoria del centro de masas está 0,5 m por encima de la altura de partida. Calcular la velocidad inicial y el tiempo que tarda el centro de masas en llegar al agua.

$$\text{Sol.: } v_0 = 4,43 \text{ m/s}; t = 1,28 \text{ s}$$

Si se mantuviera estirado durante todo el recorrido caería de cabeza después de haber realizado medio giro. Calcular la velocidad angular alrededor de su eje de giro (perpendicular al plano de la trayectoria y pasando por el centro de masas del saltador).

Sol.: $\omega_0 = 2,45 \text{ rad/s}$

Ejercicio 4.9 Si quiere realizar un salto mortal, es decir, caer de cabeza después de un giro y medio, su velocidad angular debe triplicarse, para lo cual debe disminuir su momento de inercia en un factor 3. Aproximaremos la forma del saltador por un cilindro de altura $h_0 = 1,80 \text{ m}$ y radio de la base $R_0 = 0,12 \text{ cm}$ (verificar que la masa del saltador es de 80 kg). El momento de inercia de un cilindro homogéneo alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por su centro de masas es $I = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$.

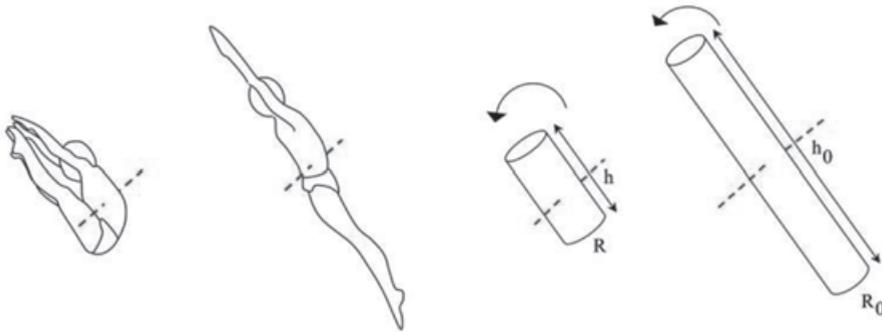


Fig. 4.47. Saltador de trampolín que se pliega para disminuir su momento de inercia y aumentar su velocidad de giro. Los cilindros que representan las dos posiciones sirven para hacer cálculos aproximados de manera simple.

Nótese que, en el límite $R \rightarrow 0$, el cilindro tiende a una varilla, mientras que en el límite $h \rightarrow 0$, tiende a un círculo que gira alrededor de uno de sus diámetros. En ambos límites, el momento de inercia que se obtiene coincide con los que ya hemos calculado para esos casos particulares.

Para disminuir su momento de inercia el saltador se pliega por la cintura y adopta la forma de un cilindro de altura $h = \frac{h_0}{2} = 0,90 \text{ m}$. Encontrar el radio de su base R para que la masa sea la misma en ambas configuraciones y verificar que con los nuevos valores de h y R el momento de inercia, en posición plegada, es aproximadamente un tercio del que tenía en posición extendida.

Sol.: $R = 0,17 \text{ m}$; $\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{3}$

Ejercicio 4.10 Sea una barra rígida homogénea apoyada en uno de sus extremos a una pared y en el otro al suelo formando un ángulo θ con la horizontal. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento estático de la barra

con ambas superficies es igual a μ_0 , se puede calcular el ángulo a partir del cual la barra desliza y cae hasta la posición horizontal. En efecto, sobre la barra actúan las siguientes fuerzas: el peso, aplicado en su centro, las dos fuerzas de contacto, normales a las dos superficies de apoyo y aplicadas en los extremos, y las fuerzas de rozamiento, aplicadas también en los extremos y en dirección contraria al movimiento de ambos puntos inducido por el peso. En la figura 4.48 puede verse la disposición de todas las fuerzas.

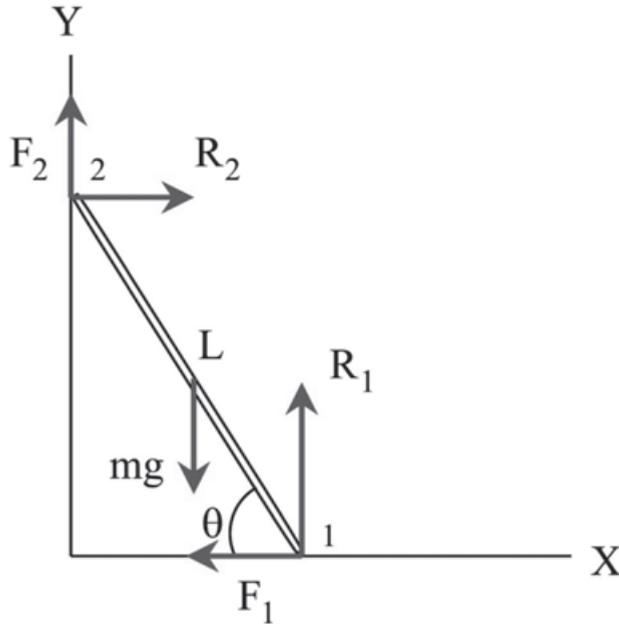


Fig. 4.48. Barra en equilibrio por el rozamiento de sus extremos sobre una pared y el suelo.

Tomando como origen para el cálculo de momentos el punto 2, las condiciones de equilibrio son:

$$F_2 + R_1 - mg = 0 \quad (4.24)$$

$$R_2 - F_1 = 0 \quad (4.25)$$

$$R_1 L \cos \theta - F_1 L \sin \theta - mg \frac{L}{2} \cos \theta = 0 \quad (4.26)$$

Las fuerzas de rozamiento F_i tienen un valor máximo igual al coeficiente μ_0 multiplicado por las fuerzas normales que mantienen en contacto los extremos de la barra con la pared y el suelo, fuerzas que son iguales en módulo a las fuerzas de contacto R_i . Por lo tanto, en el caso límite de un

ángulo que sea el mínimo posible antes de que la barra deslice, las fuerzas de rozamiento tendrán su valor máximo, $F_i = \mu_o R_i$. Sustituyendo ahora en las ecuaciones (4.24-26), podemos despejar R_i y θ_m .

$$\begin{aligned} \text{Sol.: } R_1 &= \frac{mg}{1 + \mu_0^2} \\ R_2 &= \frac{\mu_0 mg}{1 + \mu_0^2} \\ \text{tg } \theta_m &= \frac{R_1 - \frac{1}{2}mg}{\mu_0 R_1} = \frac{1 - \mu_0^2}{2\mu_0} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Es decir, el ángulo a partir del cual la barra desliza es función únicamente del coeficiente de rozamiento y, por lo tanto, la expresión (4.27) proporciona un modo sencillo de medir dicho coeficiente entre dos materiales. Si, por ejemplo, la barra comienza a deslizar cuando $\theta_m = 45^\circ$, el coeficiente de rozamiento μ_o resulta ser 0,41. Nótese que cuando $\mu_o = \geq 1$ la barra se sujeta con cualquier ángulo ya que $\text{tg } \theta_m$ es negativo.

Ejercicio 4.11. Repetir el caso anterior pero ahora suponiendo que la barra es una escalera sobre la que hay una persona de masa m a una distancia $d = xL$ del punto de apoyo en la pared. Se supondrá que la escalera tiene una masa despreciable respecto de m . El ejercicio se resuelve de la misma forma, pero ahora el peso del sistema persona-escalera se aplica en el punto en el que está la persona.

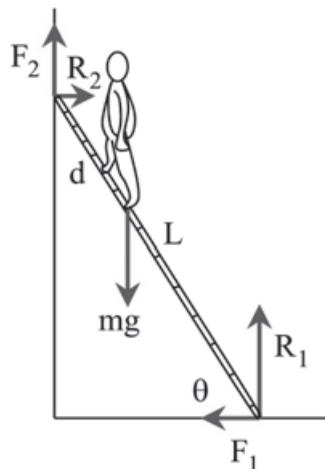


Fig. 4.49. Escalera en equilibrio por el rozamiento de sus extremos con una pared y el suelo. La persona está a una distancia d del punto de apoyo en la pared. La longitud de la escalera es L .

$$\text{Sol.: } \operatorname{tg} \theta_m = \frac{1 - x(1 + \mu_0^2)}{\mu_0}$$

Nótese que cuando $x = \frac{1}{2}$ se recupera el resultado del ejercicio anterior. Si, por ejemplo, el coeficiente de rozamiento es $\mu_0 = 0,5$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 2 - 2,5x$, lo que implica que para x pequeño (cerca del apoyo en la pared) la escalera tiene que estar empinada: para $x = 0,1$, $\operatorname{tg} \theta_m \approx 60^\circ$, mientras que la escalera se mantiene en cualquier ángulo siempre que $x \geq \frac{2}{2,5} = 0,8$. Si, por el contrario, $\mu_0 = 1,25$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 0,8 - 2,05x$. En este caso, la escalera se mantiene en equilibrio con cualquier ángulo siempre que $x \geq \frac{0,8}{2,05} = 0,39$ y si la persona quiere situarse a una distancia del apoyo en la pared tal que $x = 0,1$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 0,595$ y la escalera tendrá que apoyarse con un ángulo superior a unos 30° .

Ejercicio 4.12 Dos personas sujetan un cuerpo homogéneo con forma de paralelepípedo en una escalera con un ángulo de inclinación α . Encontrar la expresión general de las fuerzas F_1 y F_2 que hay que aplicar a los extremos más alto y más bajo, respectivamente, en función de la longitud del cuerpo L y de su altura d .

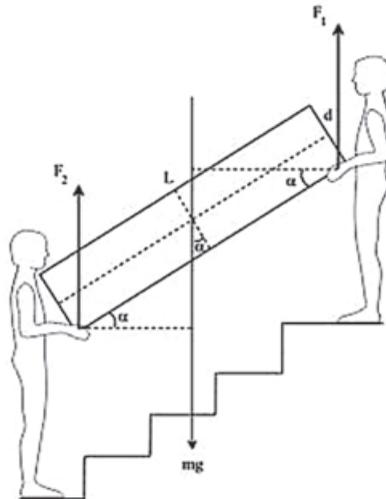


Fig. 4.50. Esquema de fuerzas de dos personas sujetando un objeto con forma de paralelepípedo y un ángulo de inclinación α respecto de la horizontal.

$$\text{Sol.: } F_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{L} \operatorname{tg} \alpha \right) mg ; \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{L} \operatorname{tg} \alpha \right) mg$$

Obsérvese que la fuerza que hace la persona que está en el escalón más bajo es siempre mayor que la que ejerce la que está en el escalón más alto. Obsérvese también que cuando $d = 0$ el cuerpo tiende a un tablón de espesor cero y, entonces, las dos fuerzas son iguales a la mitad del peso del cuerpo. Cuando $d > \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha}$ la fuerza F_1 se hace negativa. Explicar por qué. Aplicar las expresiones generales al caso en que $L = 1,20 \text{ m}$, $d = 0,20 \text{ m}$ y $\alpha = 45^\circ$.

$$\text{Sol.: } F_1 = 327 \text{ N} = (33 \text{ kg}) \times g ; \quad F_2 = 457 \text{ N} = (47 \text{ kg}) \times g$$

Ejercicio 4.13 Una persona de está de pie con la espalda y los talones pegados a la pared. La vertical de su centro de masas cae a 10 cm de la pared y la planta del pie tiene 30 cm de longitud. Se le pone encima de los brazos estirados un peso cuyo centro de masas se proyecta en vertical sobre un punto que está 40 cm por delante de la puntera de los pies. Supuesto que todas las articulaciones son rígidas, ¿cuál es el peso máximo que puede aguantar sin caer hacia adelante?

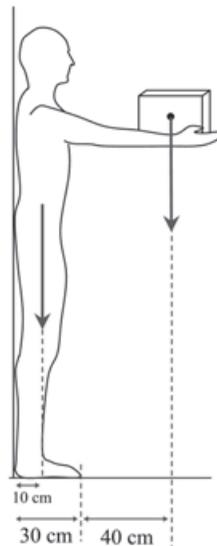


Fig. 4.51. Persona erguida con las articulaciones rígidas sujetando un cuerpo en sus manos.

$$\text{Sol.: } m = 35 \text{ kg}$$

Ejercicio 4.14 Consideremos un brazo plegado en ángulo recto contra una cierta fuerza, aplicada sobre la mano, según el esquema de la figura

4.52. En este caso el tríceps es el músculo que hace fuerza para extender el brazo, insertándose, por detrás del húmero, en el extremo del cúbito, de forma que al contraerse abre la articulación del codo.

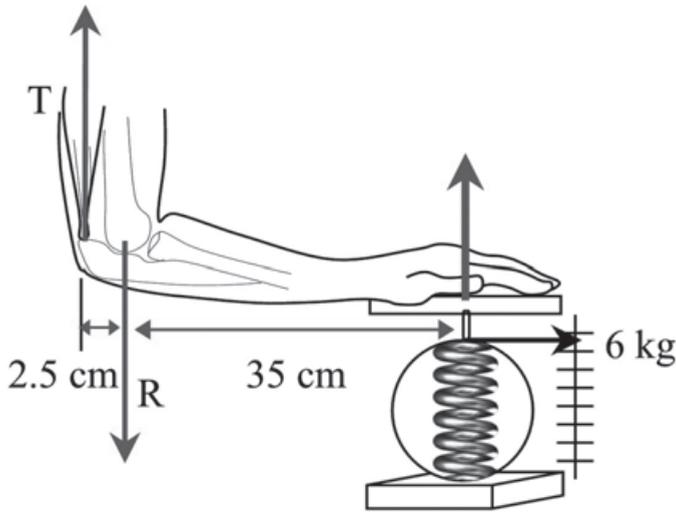


Figura 4.52 Brazo en ángulo recto empujando hacia abajo gracias a la acción del tríceps.

El punto de inserción se encuentra a unos 2,5 cm de la articulación y la dirección es prácticamente vertical. Si la balanza sobre la que se apoya la mano de la figura 4.52 marca 6 kg, la fuerza hacia arriba que está ejerciendo el muelle sobre la mano es de $6 \times 9,8 = 58,8$ N, aplicada en un punto que dista 35 cm del codo. Calcular la fuerza de contacto R del extremo del húmero sobre el antebrazo, necesariamente vertical, y la fuerza T que hace el tríceps hacia arriba.

Sol.: $T \approx 823$ N; $R \approx -912$ N

Ejercicio 4.15 Nos fijamos en el pie de una persona de 70 kg en reposo. Sobre él actúa la fuerza de contacto del suelo, igual a la mitad del peso del cuerpo y supondremos que está aplicada en un punto a 5 cm de la puntera; es decir, no reparte el peso en toda la superficie de los pies, sino que debe tirar del talón hacia arriba. La longitud total del pie es de 30 cm y los huesos de la pierna apoyan sobre los huesos tarsianos del pie en un punto situado a 25 cm de la puntera. Los músculos de la pierna, gastrocnemio y sóleo, que parten del fémur, la tibia y el peroné, tiran del hueso calcáneo, en el borde del talón, con un ángulo de inserción de 7° con la vertical. Si la altura a la que se sitúa el punto de contacto pierna-pie está a 5 cm de altura sobre la vertical, calcular la fuerza con que tira el grupo de músculos y la fuerza que ejercen los huesos de la pierna, tibia y peroné, sobre el pie en el punto de apoyo.

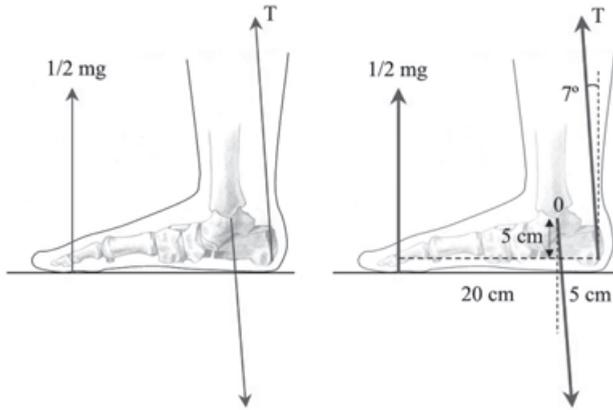


Fig. 4.53. Esquema de fuerzas sobre el pie cuando se apoya el cuerpo verticalmente sobre un punto situado a 5 cm de la puntera.

Sol.: $T = 1.576 \text{ N}$; $R_x = 192 \text{ N}$; $R_y = -1.907 \text{ N}$

Ejercicio 4.16 Repetir el ejercicio anterior pero suponiendo que la persona está en equilibrio con las piernas inclinadas un ángulo α con la vertical. Verificar que, para $\alpha = 0$, se recupera el resultado precedente y hacer el cálculo para $\alpha = 30^\circ$.

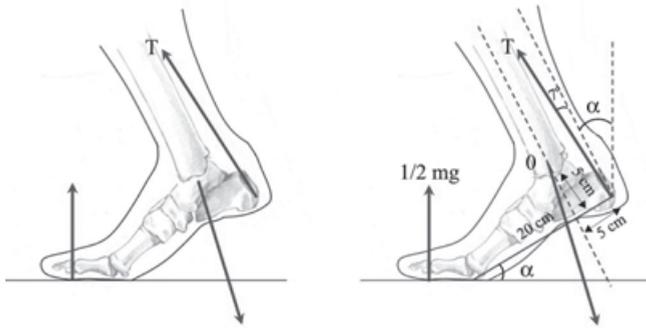


Fig. 4.54. Esquema de fuerzas sobre el pie cuando éste está formando un ángulo de 30° con la horizontal.

Sol.: $T = 1.382(\cos \alpha - 0,25 \text{ sen } \alpha)N$; $R_x = T \times \text{sen } (\alpha + 7^\circ)$;

$$R_y = -\frac{mg}{2} - T \times \cos(\alpha + 7^\circ)$$

$\alpha = 45^\circ$: $T = 836 \text{ N}$; $R_x = 659 \text{ N}$; $R_{ly} = -858 \text{ N}$

Ejercicio 4.17 Estudiamos el equilibrio de la columna vertebral y todo lo que ésta sustenta (tronco, cabeza y brazos) según el esquema de la figura 4.38 del texto de este capítulo. Escribir las ecuaciones del equilibrio tomando el momento de las fuerzas respecto del punto de apoyo, en el que se aplica la fuerza de contacto, y tomando como eje X la recta a lo largo de la columna y como eje Y el perpendicular a la columna. Calcular a partir de estas ecuaciones la fuerza muscular sobre la columna y las componentes de la fuerza de contacto R, tomando $m = 50$ kg, $M = 20$ kg y un ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ$.

$$\text{Sol.: } T = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}10^\circ} \left(m + \frac{3}{2}M \right) g = 3190 \text{ N}; \quad R_x \approx 3630$$

Ejercicio 4.18 La figura 4.55 muestra dos conjuntos de huellas correspondientes a un dinosaurio bípedo. El tamaño de las huellas se ha multiplicado por dos en relación con la longitud del paso que proporciona la escala del dibujo. La serie a) corresponde a una longitud de paso (SL) $P_a = 2,70$ m, mientras la serie b) corresponde a un paso superior, que se ha de estimar a partir del dibujo. Utilizando las expresiones (4.21) y (4.23), calcular la altura de la cadera, la velocidad de desplazamiento y el número de Froude en ambas series de huellas, y el tipo de locomoción.

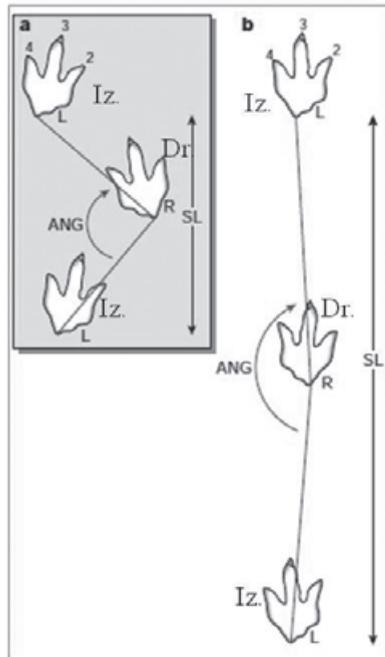


Fig. 4.55. Series de huellas de un dinosaurio bípedo.

Sol.: $l = 2 \text{ m}; v_a = 1,8 \text{ m/s};$

$v_b = 7,9 \text{ m/s}; N_{Fr}(a) = 0,4 \text{ (marcha)}; N_{Fr}(b) = 1,8 \text{ (carrera)}$

Ejercicio 4.19 Como todo el mundo sabe, el Principito (de Antoine de Saint-Exupéry) habita en el asteroide B612 y sus piernas tienen una longitud de 0,5 m aproximadamente. El asteroide tiene una densidad igual a la de la Tierra, $\rho = 5.518 \text{ kg/m}^3$, y un radio de 1 km. Calcular el tiempo mínimo que necesita el Principito para dar “la vuelta al mundo” andando. Recuérdese que la constante de la gravitación es $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

Sol.: $t = 90 \text{ horas}$

Ejercicio 4.20 Considérese un primate de masa m que se agarra con pies y manos a un árbol cuyo tronco circular tiene un radio R . El coeficiente de rozamiento estático de las plantas de pies y manos con el tronco del árbol es μ_0 . El juego de fuerzas que actúa sobre el animal está representado en la figura 4.56.

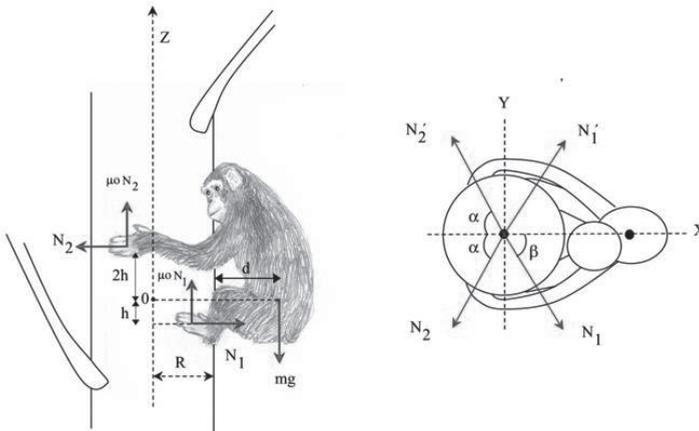


Fig. 4.56. Conjunto de fuerzas que actúan sobre un primate en equilibrio en un árbol. N_1 y N'_1 son las fuerzas de contacto sobre sus extremidades inferiores mientras que N_2 y N'_2 son las fuerzas de contacto sobre las anteriores. Tomamos como origen de posiciones el punto O situado en el eje del árbol, a la altura del centro de masas del primate.

Su expresión vectorial es la siguiente:

$$\vec{F}_1 = N_1 \cos \beta \vec{i} - N_1 \text{ sen} \beta \vec{j} + \mu_0 N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}'_1 = N_1 \cos \beta \vec{i} + N_1 \text{ sen} \beta \vec{j} + \mu_0 N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -N_2 \cos \alpha \vec{i} - N_2 \text{ sen} \alpha \vec{j} + \mu_0 N_2 \vec{k}$$

$$\vec{F}'_2 = -N_2 \cos \alpha \vec{i} + N_2 \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + \mu_0 N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_p = -mg \vec{k}$$

Escogemos para tomar momentos de las fuerzas un punto situado en el eje del árbol a la altura del centro de masas del primate. El apoyo de los pies está a una distancia en vertical por debajo de este punto y el de las manos por encima. Las coordenadas de los puntos de apoyo y del centro de masas del animal son:

$$\vec{r}_1 = R \cos \beta \vec{i} - R \operatorname{sen} \beta \vec{j} - h \vec{k}$$

$$\vec{r}'_1 = R \cos \beta \vec{i} - R \operatorname{sen} \beta \vec{j} - h \vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = -R \cos \alpha \vec{i} - R \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + 2h \vec{k}$$

$$\vec{r}'_2 = -R \cos \alpha \vec{i} + R \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + 2h \vec{k}$$

$$\vec{r}_p = -(R+0, 2) \vec{j}$$

Escribir las ecuaciones de equilibrio.

Sol.:

$$\sum F_x = 2N_1 \cos \beta - 2N_2 \cos \alpha = 0 \quad (4.28)$$

$$\sum F_z = 2\mu_0(N_1 + N_2) - mg = 0 \quad (4.29)$$

$$\sum \Gamma_y = -2\mu_0 R N_1 \cos \beta - 2h N_1 \cos \beta + 2\mu_0 R N_2 \cos \alpha - 4h N_2 \cos \alpha + mg(R+d) = 0 \quad (4.30)$$

Calcular ahora las fuerzas normales N_1 y N_2 y el coeficiente de rozamiento μ_0 resolviendo las ecuaciones (4.28-30):

$$\text{Sol.:} \quad N_1 = \frac{R+d}{6h \cos \beta} mg \quad (4.31)$$

$$N_2 = \frac{R+d}{6h \cos \alpha} mg \quad (4.32)$$

$$\mu_0 = \frac{3h \cos \alpha \cos \beta}{R+d \cos \alpha + \cos \beta} \quad (4.33)$$

Nótese que cuando el ángulo α es cero, la fuerza normal que se hace con las manos, N_2 , es mínima porque se está en la posición más favorable, con la fuerza de contacto empujando al animal contra el árbol. Por el contrario, cuando α tiende a 90° dicha fuerza normal tiende a infinito porque no se puede “abrazar” el tronco, ni siquiera parcialmente y no hay forma de sujetarse (estamos considerando que la fuerza de sujeción en vertical se debe únicamente al rozamiento entre las palmas de las manos y el árbol sin que se puedan hincar las uñas, como ocurre con otros animales) y generar una fuerza N_2 “tirando” de él.

Si particularizamos al caso $\beta = 0$, lo que quiere decir que los dos pies empujan justo en la parte más cercana de la circunferencia del árbol, y $R = h = d$, por ejemplo 20 cm, las expresiones (4.31-33) se simplifican a:

$$N_1 = \frac{mg}{3}$$

$$N_2 = \frac{mg}{3\cos\alpha}$$

$$\mu_0 = \frac{3 \cos\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$$

Para el caso óptimo, $\alpha = 0$, los resultados son $N_1 = N_2 = \frac{mg}{3}$ y el coeficiente de rozamiento, $\mu_0 = 0,75$, que es un valor típico de los mencionados en el capítulo precedente. En un caso menos favorable, $\alpha = 60^\circ$, los resultados son $N_1 = \frac{1}{3}mg$, $N_2 = \frac{2}{3}mg$ y $\mu_0 = 0,50$.

4.5 Referencias

- Aguilar Gutiérrez, M. *Biomecánica: La Física y la Biología*. CSIC, 2000
- Alexander, R. McN.: “Mechanics and scaling of terrestrial locomotion”. En *Scale effects in animal locomotion*, T. J. Pedley (ed.), Academic Press, 1977
- Alexander, R. McN.: *Locomotion of Animals*. Blackie, 1982
- Alexander, R. McN.: *Mechanics and Energetics of Animal Locomotion*. Chapman&Hall, 1977
- Alexander, R. McN.: “Estimates of the speed of Dinosaurs”. *Nature* **261** (1976) 129

- Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics, with illustrative Exemples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973
- Cavagna, G. A. *et al.*: "Walking on Mars". *Nature* **393** (1998) 636
- Day, J. J. *et al.*: "Dinosaur locomotion from a new trackway". *Nature* **415** (2002) 494
- Frohlich, C. "Física del salto mortal y del salto en tirabuzón". *Investigación y Ciencia* (Mayo, 1980) 90
- Minetti, A. E. "Biomechanics: Walking on other planets". *Nature* **409** (2001) 467
- McMahon, T. A. & Bonner, J. T. *Tamaño y Vida*. Labor, 1986
- Mochon, S. & McMahon, T. A. "Ballistic Walking". *J. Biomechanics* **13** (1980) 49
- Renous, S.: *Locomotion*. Dunod
- Thibodeau, G. A. & Patton, K. T. *Estructura y función del cuerpo humano*. Harcourt Brace, 1998
- Thulborn, T. *Dinosaur tracks*. Chapman & Hall, 1990
- Williams, M. & Lissner, H. R. *Biomechanics of Human Motion*. W. B. Saunders Co., 1962
- Wirhed, R.: *Habilidad atlética y anatomía del movimiento*. Edika-Med, 1989

Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica

5.1 Trabajo y energía cinética

Introduciremos en esta sección nuevas magnitudes, algunas de las cuales tienen la propiedad de ser constantes del movimiento en circunstancias muy comunes. Se trata del trabajo, la energía y la potencia, que formalizan y definen de forma cuantitativa nociones ya existentes en el lenguaje ordinario.

5.1.1 Trabajo y potencia

Trabajo

Cuando un cuerpo se desplaza por la acción de una fuerza, definiremos el trabajo infinitesimal realizado por esa fuerza a lo largo de un elemento diferencial de la trayectoria del siguiente modo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1)$$

donde el punto indica producto escalar de los vectores \vec{F} y \vec{r} . **El trabajo es, por lo tanto, una magnitud escalar igual al producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento y por el coseno del ángulo que forman ambos vectores.** O, lo que es lo mismo, igual al módulo del desplazamiento por la componente tangencial de la fuerza.

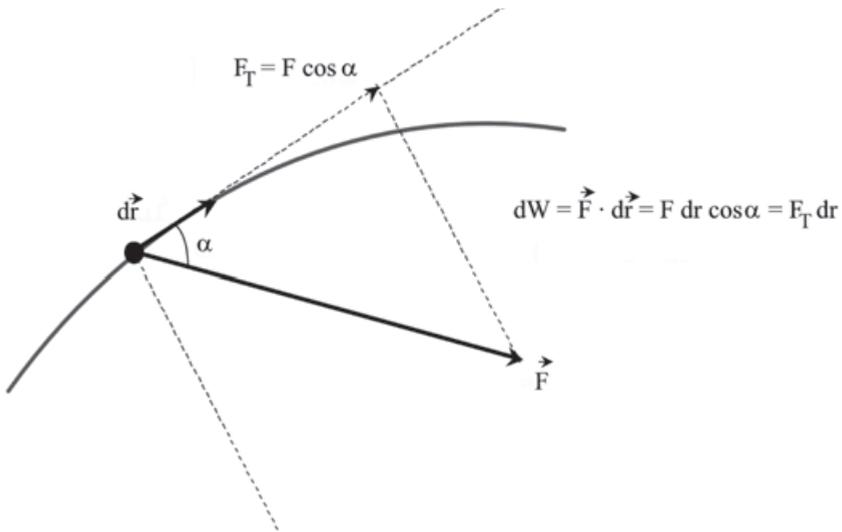


Fig. 5.1. Fuerza y trabajo a lo largo de una trayectoria.

El trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria finita será, simplemente, la integral de los trabajos correspondientes a cada elemento infinitesimal de la trayectoria:

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.2)$$

Cuando se aplica, por ejemplo, una fuerza vertical para elevar un peso, el trabajo es igual al módulo de la fuerza aplicada por la altura alcanzada. Si el cuerpo se eleva a velocidad constante, la fuerza que hay que aplicar es simplemente igual a su peso. Existe, por lo tanto, en este caso y en otros, relación entre la magnitud introducida en la expresión (5.1) y la noción de trabajo en la vida cotidiana.

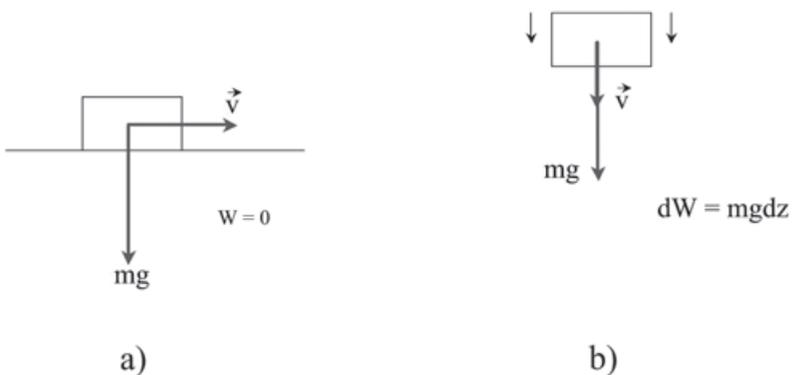


Fig. 5.2. Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo:
 a) cuando se mueve horizontalmente con velocidad uniforme,
 b) cuando se mueve verticalmente por la acción de dicha fuerza.

De la definición (5.1) se sigue que la fuerza centrípeta que impulsa a un móvil en un movimiento circular uniforme realiza un trabajo igual a cero debido a que es siempre perpendicular a la trayectoria, lo mismo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como puede verse en la figura 5.2.

Las dimensiones de la magnitud trabajo son las de fuerza multiplicada por distancia, es decir:

$$[W] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$$

y la unidad en el Sistema Internacional es el julio (J):

$$1J = 1N \times m = 1kg \times m^2s^{-2}$$

Ejemplo. El trabajo que hace la fuerza de la gravedad cuando hace deslizar un cuerpo sobre un plano inclinado es:

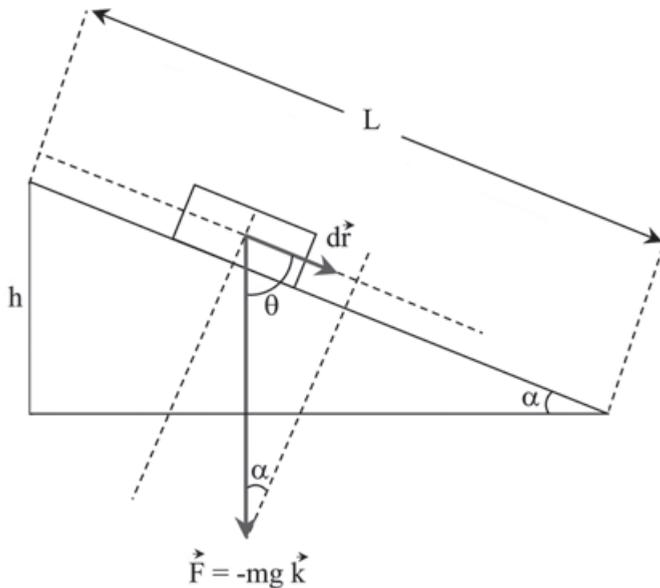


Fig. 5.3. Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo que desliza sobre un plano inclinado por la acción de dicha fuerza.

$$dW = mg \times |d\vec{r}| \times \cos \theta = mg \times ds \times \text{sen} \alpha$$

$$W = \int_0^L mg \times \text{sen} \alpha \times ds = mg \times \text{sen} \alpha \int_0^L ds = mg \times L \text{sen} \alpha = mgh$$

Por lo que el trabajo total depende únicamente de la altura y no del ángulo de inclinación. Si quisiéramos subir el peso desde el suelo a velocidad constante, en ausencia de rozamiento, la fuerza que hay que aplicar es exactamente igual a la componente tangencial del peso cambiada de signo y el trabajo que hay que hacer contra la gravedad es igual al que la gravedad hace para hacerlo deslizar hacia abajo: sólo depende de la altura a la que lo elevemos, independientemente del ángulo de la rampa, lo que resulta acorde con la experiencia cotidiana.

Para el caso de un objeto de 10 kg que se desliza a lo largo de una rampa con una diferencia de altura de 2 m, el trabajo que realiza la fuerza de la gravedad es:

$$W = 10 \times 9,8 \times 2 = 196 \text{ J}$$

que es igual al trabajo que tiene que hacer una fuerza externa para elevar esa masa, a velocidad constante, a la misma altura en contra de la gravedad.

Lo que sí varía es la longitud recorrida en un caso y en otro. Cuando la pendiente es grande hay que hacer mucha fuerza a lo largo de una distancia corta, mientras que cuando la pendiente es pequeña, la fuerza es menor, pero a lo largo de una distancia mayor, de forma que su producto es constante.

Para el caso $\alpha = 90^\circ$ la distancia recorrida es simplemente $s = h = 2 \text{ m}$, mientras que para $\alpha = 30^\circ$ la distancia recorrida es $s = 2 \times h = 4 \text{ m}$.

Potencia

Una misma cantidad de trabajo puede desarrollarse en periodos de tiempo diferentes. La magnitud que caracteriza el ritmo con el que se realiza una cierta cantidad de trabajo se llama potencia y se define como la cantidad de trabajo por unidad de tiempo. Como esta cantidad puede variar en cada instante a lo largo de la trayectoria, debemos definirla en términos diferenciales:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Las dimensiones de potencia son las de energía dividida por tiempo, siendo el vatio la unidad en el Sistema Internacional y W su símbolo:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

En entornos industriales se utiliza también el kilovatio ($1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$), el megavatio ($1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$) y el gigavatio ($1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$).

Otra unidad de potencia utilizada con frecuencia es el caballo de vapor (CV), introducida cuando la tracción animal era la principal fuente de trabajo mecánico y no existía un sistema coherente y preciso de unidades de medida. El caballo de vapor, definido como la potencia mecánica aproximada desarrollada por un caballo en los momentos de mayor esfuerzo sostenido, tiene un valor impreciso y depende de multitud de circunstancias, por lo que se ha traducido en términos de su equivalencia en vatios. El caballo de vapor (CV) introducido en Francia se definió como la potencia necesaria para elevar una masa de 75 kg un metro de altura en un segundo, por tanto $75 \times g = 735 \text{ W}$. Por el contrario, la misma unidad en Gran Bretaña (HP, de *horse power*) se fijó de forma algo distinta, por lo que su equivalencia es 746 W . Se trata de una potencia aproximadamente tres veces superior a la desarrollada por un ser humano promedio cuando realiza un ejercicio intenso y sostenido. Nosostros siempre utilizaremos las unidades del SI.

Un dispositivo que trabaje a una cierta potencia constante P desarrolla, en un intervalo de tiempo Δt , una cantidad de trabajo igual a $P \times \Delta t$. De ahí que se utilicen con frecuencia unidades de energía que son el producto de una potencia por un intervalo de tiempo. El más común es **el kilovatio hora, que es el trabajo realizado por un dispositivo de un kilovatio de potencia trabajando durante una hora**. De esta definición se sigue:

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3.600 \text{ s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

De la misma forma que para la potencia, se usa también en entornos industriales el megavatio hora o el gigavatio hora como unidades de trabajo.

En el capítulo 23 se verá que una unidad de energía adecuada para describir fenómenos a escala atómica o molecular es el electronvoltio (eV), cuyo valor es de $1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. En la tabla 5.1 se dan las equivalencias de estas y otras unidades de energía, como la caloría o el ergio, que se usarán a lo largo del libro o que son de uso común en ciertos contextos específicos.

Tabla 5.1. Algunas unidades de energía	
Unidad	Equivalencia en julios
ergio (erg)	10^{-7}
caloría (cal)	4,184
kilocaloría (kcal)	$4,184 \times 10^3$
kilovatio hora (kWh)	$3,6 \times 10^6$
electronvoltio (eV)	$1,60 \times 10^{-19}$
caballo de vapor-hora	$2,68 \times 10^5$

Observación. El kilovatio hora. De la equivalencia del kWh en julios puede obtenerse una idea de la cantidad de trabajo que supone. Veamos, por ejemplo, la masa m de un cuerpo que pueda ser elevado a una altura $h = 30$ m, equivalente a un edificio de unos 10 pisos, realizando un trabajo de 1 kWh:

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = m \times 9,8 \times 30$$

de donde, despejando m , queda:

$$m = 12.245 \text{ kg}$$

es decir, con la energía de 1kWh se puede elevar a esa altura un peso de unas 12 toneladas.

Trabajo y potencia musculares

Consideremos un músculo de sección S y longitud l que se contrae en un 20 a 30 por ciento de su longitud, que es una contracción normal y, según hemos visto en el capítulo 2, permite que desarrolle el máximo de la fuerza muscular al estar activos todos los puentes de miosina. Recordando que la fuerza muscular típica por unidad de sección es de 300.000 N/m^2 y suponiendo que el músculo se contrae en un 20 por ciento de su longitud, el trabajo realizado durante una sola contracción es:

$$W = F \times 0,2l \approx 3 \cdot 10^5 \times S \times 0,2l = 0,6 \times 10^5 \times V \quad (5.3)$$

donde $V = S \times l$ es el volumen del músculo, supuesto que sea aproximadamente cilíndrico, y el resultado se expresa en julios si el volumen se expresa en metros cúbicos. El trabajo máximo que puede desarrollar un músculo por unidad de masa en una sola contracción será, por lo tanto:

$$\frac{W}{m} \approx 0,6 \times 10^5 \frac{V}{m} = \frac{0,6 \times 10^5}{\rho} = 60 \text{ J/kg} \quad (5.4)$$

En esta expresión se ha sustituido la densidad del músculo, ρ , por su valor, aproximadamente igual al del agua, es decir 1000 kg/m^3 . Este cálculo sencillo nos dice que **un músculo de un kilogramo de peso (el bíceps de un humano adulto tiene una masa de ese orden) puede hacer con facilidad un trabajo de unos 60 J en una sola contracción**, es decir, levantar un objeto de unos 6 kg de masa a un metro de altura. El valor obtenido para el trabajo máximo por unidad de masa muscular en la expresión (5.4) se verifica experimentalmente para prácticamente todos los músculos esqueléticos de vertebrados. Pueden, no obstante, forzarse más y contraerse en una proporción mayor y, por lo

tanto, desarrollar más trabajo, hasta cerca de unos 200 J/kg como límite máximo.

Dado, por otra parte, que la fuerza máxima sólo se consigue a pequeñas velocidades de contracción, un músculo sólo puede desarrollar este trabajo en contracción muy lenta. Para el caso de contracción más rápida, por ejemplo la que realiza un músculo para saltar, la fuerza desarrollada es menor y la longitud de contracción debe mantenerse dentro del intervalo óptimo del 20 al 30 por ciento, por lo que el trabajo por unidad de masa muscular es del orden de los 60 J/kg calculados más arriba. Llamaremos, en lo que sigue, fuerza muscular específica y potencia muscular específica a la fuerza y potencia, respectivamente, por unidad de masa muscular.

Cuando un músculo se contrae para mover un hueso del esqueleto que, a su vez, desplaza un peso, la dirección del movimiento es la misma que la fuerza ejercida por el músculo y, por lo tanto, el trabajo es positivo. Pero un músculo no puede hacer fuerza en dirección contraria a la contracción, sino, en todo caso, resistirse a la extensión forzada por una fuerza externa o por la acción de un músculo antagonista; por ejemplo, el bíceps braquial se extiende al extender el brazo por la acción del tríceps al contraerse, según se vio en el capítulo 2, o por la acción de un peso, tal como puede verse en la figura 5.4. Así, cuando un músculo se alarga, la dirección del movimiento es contraria a la de la fuerza que puede hacer y su trabajo es negativo.

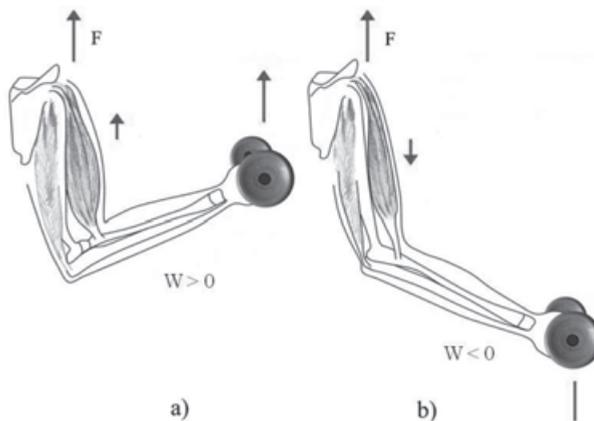


Fig. 5.4. a) Trabajo hecho por el bíceps braquial al contraerse. La dirección de la fuerza es paralela al movimiento del peso, por lo que el trabajo es positivo. b) Trabajo hecho por el bíceps braquial al hacer fuerza en sentido contrario al movimiento del peso. En este caso el trabajo es negativo.

Cuando un animal se mueve, o una persona pedalea, los músculos hacen trabajo positivo y negativo consecutivamente. Hacer trabajo positivo implica un cierto gasto de energía que puede medirse a través del consumo de oxígeno.

Hacer un trabajo negativo no es gratuito desde el punto de vista energético, ya que hay que mantener el tono muscular, pero es menos costoso que hacerlo positivo. **Se llama eficiencia metabólica al cociente entre la potencia mecánica desarrollada por un músculo y la potencia energética consumida. Para el caso de los mamíferos la eficiencia metabólica es del orden de 0,25**, con importantes variaciones según el ejercicio de que se trate y de las contribuciones relativas de trabajo positivo y negativo a lo largo del movimiento. Es decir, sólo un 25 por ciento de la energía consumida se transforma efectivamente en trabajo mecánico, mientras que el 75 por ciento restante se disipa en forma de calor en el organismo.

En cuanto a la velocidad con que se puede desarrollar el trabajo producido por la contracción de los músculos, es decir, la potencia muscular, ya en el capítulo 2 vimos que la fuerza es máxima a velocidad cero y tiende a cero a grandes velocidades de contracción que sólo son posibles sin carga. Por lo tanto, el producto de la fuerza por la velocidad se anulará cuando la fuerza es cero (a máxima velocidad) y cuando la velocidad es cero (a máxima fuerza) tal y como se representa en la figura 5.5.

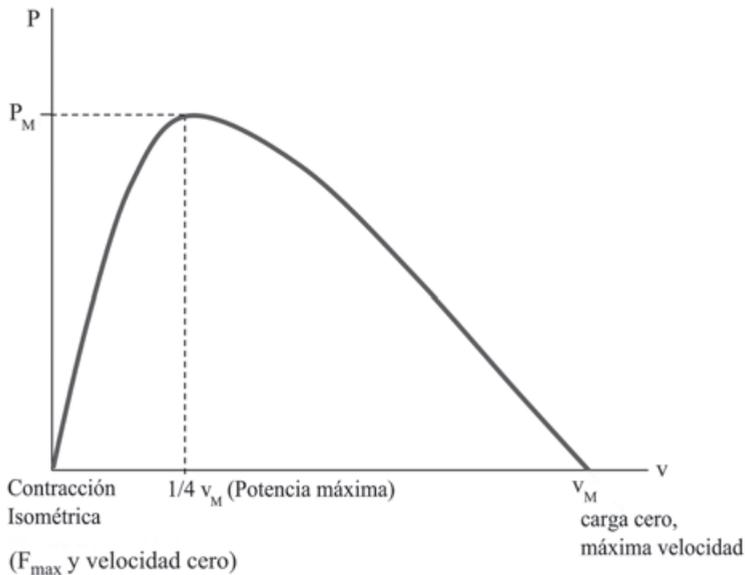


Fig. 5.5. Potencia muscular P en función de la velocidad de contracción. Cuando ésta es cero, la fuerza es máxima, pero no hay desplazamiento (ejercicio isométrico): el trabajo y la potencia son cero. Para la velocidad de contracción máxima la fuerza es cero y, de nuevo, el trabajo realizado se anula. La potencia máxima, P_M , se produce para una velocidad intermedia del orden de la cuarta parte de la velocidad máxima.

El máximo de la potencia muscular se alcanza, por lo tanto, a velocidades de contracción moderadas, entre el 15 y el 40 por ciento de la velocidad máxima.

Por ejemplo, la velocidad máxima de contracción del músculo rojo (fibras lentas) de la carpa es de unas 4,6 longitudes por segundo, pero durante la natación normal se contraen con una velocidad que es un 20 por ciento de la máxima (0,9 longitudes por segundo), justo cuando desarrollan la máxima potencia. **La potencia específica media de los músculos de los vertebrados se sitúa en los 60 W/kg** (véase en el Apéndice 1 de este capítulo una estimación teórica de este valor). Se han llegado a medir, sin embargo, en insectos y colibríes potencias musculares específicas cercanas a los 200 W/kg y nunca superiores.

5.1.2 Energía cinética

La segunda ley de Newton permite calcular el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de la trayectoria que sigue un móvil impulsado por dicha fuerza. En efecto:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$W = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left. \frac{1}{2} m v^2 \right|_A^B$$

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (5.5)$$

Aparece en esta última expresión una nueva magnitud cinemática, $\frac{1}{2} m v^2$, con las mismas dimensiones y unidades que el trabajo, que llamamos **energía cinética**, proporcional a la masa del móvil y al cuadrado de su velocidad. Por lo tanto, **el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria es igual al incremento en energía cinética entre esos dos puntos**. El trabajo se “gasta”, por así decir, en incrementar la energía cinética del cuerpo que se mueve.

Cuando el módulo de la velocidad final, v_B , es mayor que el de la inicial, v_A , hay una ganancia neta de energía cinética y el trabajo realizado por la fuerza es positivo. Es el caso del ejemplo de un objeto que cae por una pendiente impulsado por la fuerza de la gravedad: el trabajo hecho por dicha fuerza es positivo, como hemos visto, y el objeto se mueve más deprisa al final de la caída que al principio, lo que denota que ha aumentado su energía cinética. Si, por el contrario, impulsamos con un cierta velocidad el cuerpo hacia arriba, su velocidad irá disminuyendo a medida que gana en altura y, por lo tanto, habrá una pérdida neta de energía cinética, lo que demuestra que la gravedad ha

estado haciendo un trabajo negativo (frenando el móvil en lugar de acelerarlo), como puede verse en la figura 5.6.

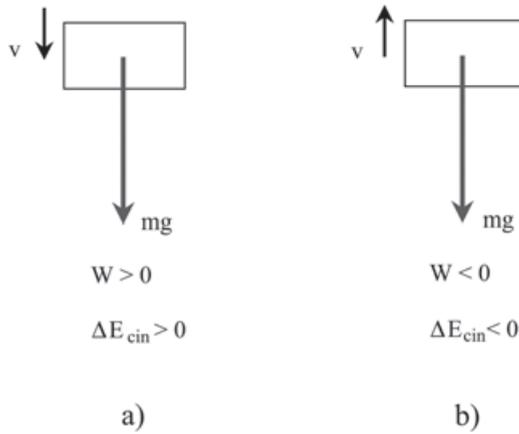


Fig. 5.6. a) Cuando un cuerpo cae por la acción de su propio peso, la fuerza de la gravedad hace un trabajo positivo y la energía cinética aumenta. b) Cuando un cuerpo se mueve en dirección contraria a la gravedad, ésta hace un trabajo negativo y la energía cinética disminuye.

5.1.3 Conservación de la energía

Energía potencial asociada a una fuerza constante

Para el caso en que la fuerza sea constante, podemos calcular el trabajo realizado entre dos puntos sin necesidad de conocer la trayectoria. En efecto:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (5.6)$$

Tomando como eje vertical el eje Z, para el caso de la gravedad $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, el trabajo según la expresión (5.6) resulta:

$$W = -mg(z_B - z_A) \quad (5.7)$$

y poniendo z_A igual a h y z_B igual a cero, obtenemos la expresión $W = mgh$, que ya habíamos obtenido para el deslizamiento sobre un plano inclinado desde una altura h . Igualando, ahora, la expresión general que nos da la relación del trabajo con la ganancia de energía cinética y la expresión (5.7), válida para el caso particular de la fuerza de la gravedad, resulta:

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(z_B - z_A)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) muestra la existencia de una nueva cantidad conservada, puesto que su valor en un punto A de la trayectoria tiene que ser el mismo que en otro punto cualquiera B. Esta cantidad conservada se llama energía, o energía total, y es la suma de la energía cinética y otro término, que depende de la posición del móvil, que llamamos energía potencial, en este caso gravitatoria.

Tanto la energía cinética como la potencial como cualquier otra forma de energía se expresan en las mismas unidades que el trabajo, es decir, julios en el Sistema Internacional o cualquiera otra de las unidades de la tabla 5.1.

La conservación de la energía permite conocer las variaciones de la velocidad (energía cinética) en función de la posición (energía potencial) sin necesidad de calcular la trayectoria. Por ejemplo, para una montaña rusa, no importa lo complicada que sea su geometría y considerando despreciable el rozamiento, podemos saber en todo momento la velocidad de la vagoneta en función de la altura con sólo calcular su energía total en el instante inicial.

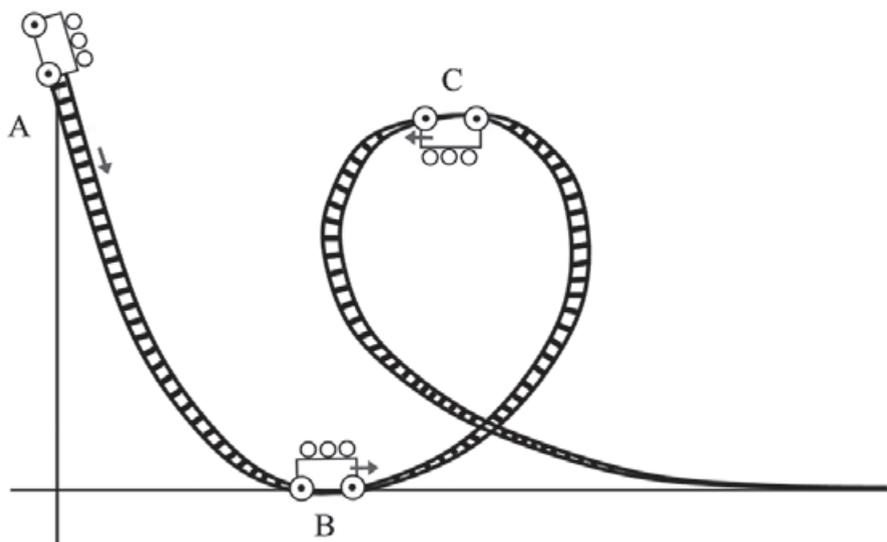


Fig. 5.7. Montaña rusa. En A, el carricoche (en reposo) sólo tiene energía potencial. En B ha transformado toda su energía potencial en cinética. En C ha vuelto a transformar la mayoría de su energía cinética en potencial, aunque le queda un remanente para seguir moviéndose.

Ejemplo. En una montaña rusa como la de la figura 5.7, un vagón de masa m parte del reposo en la posición A, a una altura de 30 m sobre el suelo. Tomaremos, por convenio, la energía potencial igual a cero a la altura del suelo. Por lo tanto, su energía total es:

$$E = 0 + m \times 9,8 \times 30 = 294 \times m$$

que resulta en julios si m está en kilogramos. Al llegar al punto más bajo B , la altura es cero y toda la energía potencial se ha transformado en cinética. La velocidad a la que se mueve en dicho punto vendrá dada por:

$$294 \times m = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$$

$$v_B \approx 24 \text{ m/s} \approx 86 \text{ km/h}$$

La velocidad a la que pasa por el máximo del segundo bucle, C , situado a 29 m del suelo será:

$$294 \times m = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g \times 29$$

$$v_C \approx 4,4 \text{ m/s} \approx 16 \text{ km/h}$$

Definición general de energía potencial

Más en general, hay fuerzas para las que, como ocurría en el caso de la gravedad terrestre, el trabajo realizado entre dos puntos sólo depende de dichos puntos y no del camino recorrido, es decir:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A) \quad (5.9)$$

donde la función escalar $U(\vec{r})$, que tiene dimensiones de energía, se llama energía potencial y depende únicamente de la posición como variable cinemática. Cuando la fuerza es tal que el trabajo que realiza entre dos puntos depende sólo de la posición final y de la inicial, independientemente de la trayectoria seguida, según expresa la ecuación (5.9), se dice que la fuerza deriva de un potencial, o que es conservativa, y la condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea de este tipo es que sus tres componentes cumplan con la condición:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

O, lo que es equivalente (ver la noción de gradiente en el Apéndice E):

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad (5.10)$$

Combinando ahora las expresiones (5.5) y (5.9), resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}mv_A^2 + U(\vec{r}_A) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Existe, por lo tanto, una variable cinemática, que llamamos energía, suma de la energía cinética más la energía potencial, que se conserva cuando las fuerzas en presencia son conservativas. La energía cinética depende únicamente de la velocidad y está asociada al movimiento del cuerpo, mientras que la energía potencial depende de la posición y se asocia a la capacidad de producir trabajo o transformarse en energía de movimiento debido a las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en ese punto. En el caso de la gravitación terrestre, de las ecuaciones (5.7) y (5.9) es claro que:

$$U = mgz \quad (5.12)$$

por lo que cuanto mayor sea la altura a la que se encuentra un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre, mayor es su energía potencial y la energía cinética en la que se puede convertir en caso de que disminuya su altura. La fuerza que deriva de esta energía potencial (5.12) será:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg \end{aligned}$$

que es, precisamente, la fuerza gravitatoria.

Nótese que esta expresión de la fuerza gravitatoria, y de la energía potencial asociada, son correctas para el caso aproximado de una fuerza constante

independiente de la altura y siempre perpendicular al suelo, es decir, para el caso de considerar alturas y movimientos cuya dimensión sea muy inferior al radio de la Tierra. Para el caso de movimientos en el campo gravitatorio terrestre cuya dimensión sea comparable o superior a dicho radio, hay que utilizar la expresión general de la gravitación y deducir de ahí la energía potencial correspondiente. Nosotros nos limitaremos al caso aproximado en el que la expresión (5.12) es válida.

Ahora bien, las fuerzas elementales (gravitación y electromagnetismo) son conservativas, por lo que para un sistema aislado, no importa lo complejas que sean sus interacciones internas, la energía total se conserva. De la condición que tienen que cumplir las fuerzas conservativas se sigue que éstas sólo pueden depender de la posición, de forma que la fuerza de rozamiento de un cuerpo moviéndose en un fluido, que depende de la velocidad, no es conservativa. En este caso, el cuerpo pierde energía continuamente disipándola al entorno. Sin embargo, **si consideramos el sistema formado por el cuerpo y el fluido, entonces todas sus fuerzas internas, incluidas las que dan lugar a la fricción, son, en su origen, conservativas y la energía total se conserva. Lo que ocurre es que hay una transferencia de energía de una parte de ese sistema (el cuerpo que se mueve) a otra parte (el fluido).**

La magnitud física, medible, que actúa sobre un cuerpo, es la fuerza, mientras que la energía potencial es una variable cuyo significado reside únicamente en la fuerza que genera. Así, dos energías potenciales de las que se derive una única fuerza son equivalentes, en particular, dos energías potenciales que difieran en una constante aditiva son equivalentes. A partir de la expresión de la energía potencial se puede derivar unívocamente la fuerza que genera, pero a partir de una fuerza no se puede deducir unívocamente la energía potencial de la que deriva porque siempre se pueden añadir constantes aditivas arbitrarias.

En el caso de la expresión (5.12), hemos fijado la constante conviniendo implícitamente que la energía potencial es cero cuando la altura a la que se encuentra el cuerpo es cero. Para alturas positivas, la energía potencial es positiva, mientras que para alturas negativas es negativa. Pero podríamos haber escogido una forma equivalente:

$$U = mgz - mgz_0$$

donde z_0 es una altura fija. Esta expresión genera la misma fuerza que la anterior, pero difiere de ella en una constante aditiva. Ahora convenimos en fijar el origen de energías en z_0 ($U(z_0) = 0$). Para alturas superiores, la energía potencial es positiva y para alturas inferiores es negativa. Fijar la constante

arbitraria en la definición de la energía potencial es, por tanto, equivalente a fijar el punto en el que la energía potencial se toma igual a cero. Por supuesto, una vez elegido un origen de energías potenciales en un problema, es preciso mantenerlo durante todo su desarrollo.

Conversión de energía cinética en potencial en el salto

Ya dijimos en el primer capítulo que la altura que podía alcanzar una persona en salto vertical era del orden de 60 cm (entendido como la altura a la que llega su centro de gravedad a partir de su situación en el momento del despegue).

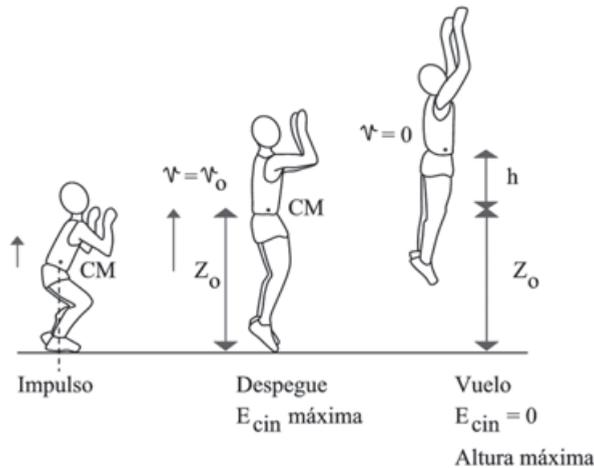


Fig. 5.8. Salto en vertical. La altura a la que se eleva en centro de masas como resultado de la velocidad de despegue es h .

Durante el impulso, la persona que salta imprime a su cuerpo una velocidad hacia arriba, de forma que posee, en el momento del despegue, una cierta energía cinética que se irá transformando en energía potencial según asciende hasta ser únicamente energía potencial en el punto de altura máxima. Si la masa de la persona es de 70 kg y alcanza una altura de 50 cm , la energía total será:

$$E = mgz = 70 \times 9,8 \times 0,5 = 343\text{ J}$$

que es también la energía cinética de salida y, por lo tanto, el trabajo que han debido hacer los músculos de las piernas es de 343 J . Teniendo en cuenta que para desarrollar un cierto trabajo muscular hay que gastar una cantidad de energía metabólica cuatro veces superior, la energía consumida en este salto vertical es de $343 \times 4 = 1.372\text{ J} \simeq 0,33\text{ kcal}$. Para alcanzar la altura de 50 cm , la velocidad de despegue tiene que ser:

$$v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,5} = 3,1 \text{ m/s}$$

y el tiempo de impulso es aproximadamente de medio segundo. Por lo tanto, la potencia media desarrollada durante el impulso hacia arriba ha sido:

$$P = \frac{343 \text{ J}}{0,5 \text{ s}} \approx 686 \text{ W}$$

que es una potencia equivalente a 0,9 caballos de vapor. En el salto intervienen las dos piernas, con un peso total de unos 24 kg, de los que aproximadamente un 40 por ciento corresponden a tejido muscular, lo que da una potencia específica durante el salto de unos 71 W/kg, que está en los márgenes calculados anteriormente, teniendo en cuenta que se ha tomado una longitud de extensión de 50 cm (ver la tabla 1.2 del capítulo 1), lo que implica que la contracción de los músculos saltadores ha sido superior al 20 por ciento considerado al deducir el valor de la potencia específica.

Un buen saltador de altura puede elevar su centro de gravedad con una sola pierna por encima de los 80-90 cm, debido a que sus músculos tienen una preparación especial y a que durante la carrera de ataque a la barra es capaz de transformar parte de la energía cinética asociada al movimiento horizontal en energía cinética de despegue a través de los tendones y otros ligamentos elásticos capaces de acumular energía y liberarla cuando se expanden, añadiéndose a la que se genera en el impulso vertical del salto. Aun así, el centro de masas llega a una altura del orden de 2,00-2,20 m suponiendo que, en el momento de despegar, estaba a 1,20-1,30 m del suelo. Y, sin embargo, la técnica de salto permite saltar alturas superiores pasando las distintas partes del cuerpo por encima del listón aun cuando el centro de gravedad esté permanentemente situado por debajo.

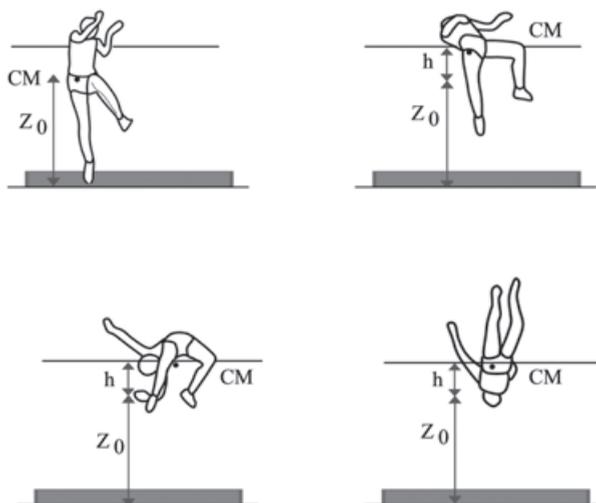


Fig. 5.9. El salto de altura y el movimiento del centro de masas; z_0 es la altura inicial del centro de masas y h la altura a la que éste se eleva como consecuencia del salto.

Cuando la cabeza y los hombros pasan, las piernas y la parte baja del tronco están a una altura inferior, con el centro de masas por debajo de la barra. En el momento en el que pasa la espalda, los brazos y las piernas se dirigen hacia abajo y así el centro de masas está en un punto exterior al cuerpo, también por debajo de la barra. Finalmente, las piernas y la parte inferior del tronco pasan cuando ya la cabeza y los hombros están cayendo.

Otro ejemplo interesante es el de los giros alrededor de la barra fija, en los que hay también conversión de energía cinética en potencial y viceversa, y aportes de energía muscular. En efecto, si el gimnasta está en posición vertical completamente estirado apoyándose en las manos sobre la barra, tal como representa la primera fase de la figura 5.10, su energía potencial es igual a mgz , siendo m su masa y z , la altura a la que se encuentra el centro de masas sobre el suelo. Cuando el gimnasta gira por efecto de la gravedad y pasa a estar colgado de la barra en posición vertical, ha perdido una energía igual a $mg\Delta z$, donde Δz es la diferencia de alturas entre las dos posiciones del centro de masas, y ganado una energía cinética equivalente. Si completara una vuelta y no hubiera rozamiento, entonces volvería a la posición inicial de energía potencial máxima y energía cinética cero, pero como hay pérdidas por rozamiento, no se puede elevar hasta la altura de partida. Pongamos que el rozamiento hace que el centro de gravedad, una vez completada la vuelta, quede 5 cm por debajo de la altura inicial.

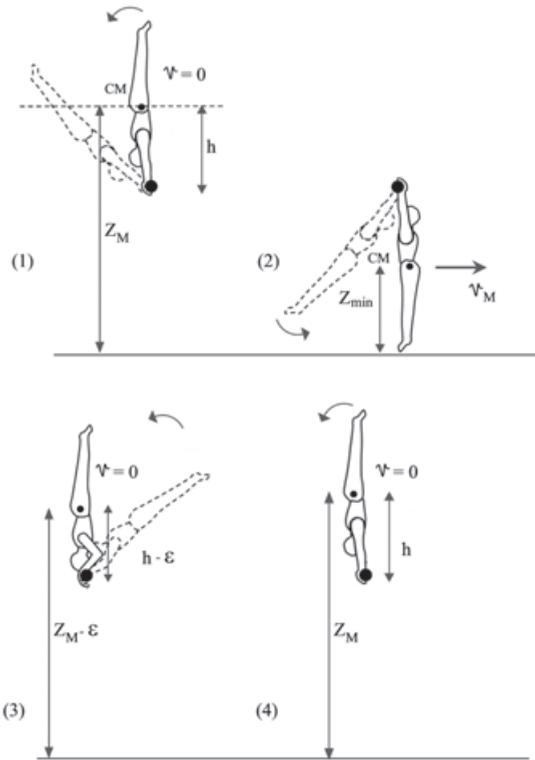


Fig. 5.10. Giro alrededor de una barra. La pérdida de energía por rozamiento se compensa con el impulso muscular para recuperar la posición vertical tras cada vuelta.

Si el gimnasta mantuviera la posición rígida, no completaría la vuelta. Lo que hace, sin embargo, es plegar los brazos ligeramente según va ascendiendo, de forma que, aun cuando el centro de masas esté 5 cm por debajo de la altura inicial después de haber descrito una espiral, se encuentre en la vertical aunque la distancia del centro de masas a la barra es ahora 5 cm menor que antes. En ese momento los músculos de los brazos empujan la barra, estirándose y haciendo un trabajo igual a la energía perdida hasta que el cuerpo está de nuevo completamente estirado en la posición de partida para iniciar un nuevo ciclo.

5.1.4 Curvas de energía potencial en una dimensión

Propiedades de las trayectorias

Existen energías potenciales que dependen de una sola coordenada y, por lo tanto, las fuerzas que de ellas se derivan sólo tienen una componente distinta de cero. Si la velocidad inicial es cero o está contenida en el eje asociado a esa variable, entonces el movimiento es unidimensional. Empezaremos

estudiando el caso del movimiento a lo largo del eje Z para un cuerpo que se mueve por efecto de la fuerza gravitatoria terrestre que, como sabemos, deriva de una energía potencial $U = mgz$.

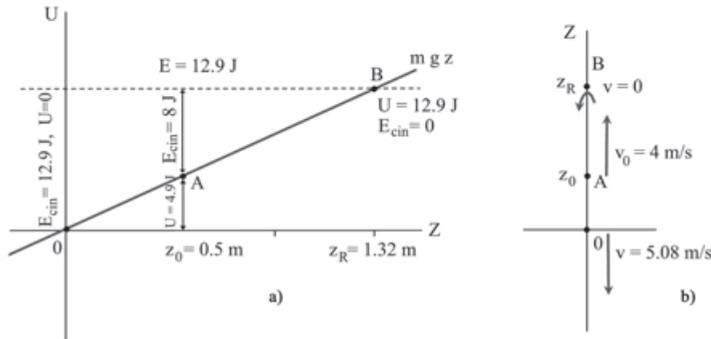


Fig. 5.11. Energía gravitatoria asociada a la gravedad terrestre y descripción cualitativa del movimiento de un cuerpo con energía total igual a 12,9 J y posición inicial A. En la figura de la izquierda se puede apreciar la energía cinética y potencial del cuerpo en función de la posición en los puntos A, B y O, mientras que en la de la derecha se representa su trayectoria real a lo largo del eje Z .

La energía total de una partícula moviéndose a lo largo del eje Z en dicho potencial será:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

El valor de la energía viene determinado por las condiciones iniciales (posición y velocidad) y permanece constante en el tiempo. En la figura 5.11 puede verse que, en cualquier punto de la trayectoria, la energía consta de dos partes, la energía potencial en ese punto y la energía cinética. Pero esta última es siempre mayor o igual que cero, de forma que debe cumplirse en todo momento:

$$E \geq mgz$$

Por lo tanto, **los puntos del eje Z en los que la energía total sea menor que la energía potencial son inalcanzables** para la partícula, es decir, son puntos que están por encima de la altura máxima alcanzable dadas las condiciones iniciales del movimiento. El punto Z_R , en el que se cumple la igualdad $E = mgz_R$, es un punto de retorno debido a que la energía cinética es igual a cero. Corresponde a la altura máxima que alcanza el cuerpo cuando se desplaza a lo largo del eje Z justo en el instante en el que la velocidad se hace cero y vuelve a caer.

Supongamos que lanzamos un cuerpo de 1 kg hacia arriba desde la altura de 0,5 m con una velocidad inicial de 4 m/s. Las energías cinética y potencial en el momento inicial, en el que el cuerpo está en la posición A, son:

$$E_{cin}(t=0) = \frac{1}{2}mv^2 = 8 J$$

$$U(t=0) = mgz = 4,9 J$$

y, por lo tanto, la energía total es 12,9 J, que habrá de conservarse durante todo el movimiento. El cuerpo se desplaza hacia arriba en la figura 5.11.b (hacia la derecha en el figura 5.11.a) y va ganando energía potencial al tiempo que pierde energía cinética. El punto de retorno, B, que es el de máxima altura, se alcanzará cuando toda la energía se haya convertido en potencial y la energía cinética sea cero, es decir:

$$z_R = \frac{E}{mg} = \frac{12,9}{9,8} = 1,32 m$$

A partir de ese punto, el móvil se mueve con velocidad negativa ganando energía cinética y perdiendo energía potencial según pierde altura. Cuando llega otra vez al punto A, pero moviéndose hacia abajo, la energía potencial es igual a la inicial y, en consecuencia, la energía cinética es también igual a la inicial, es decir, se mueve a 4 m/s pero hacia abajo. A partir de ahí sigue bajando, ganando más energía cinética y perdiendo energía potencial. Así, cuando llega al punto C, a la altura $z = 0$, la energía potencial es cero y, en consecuencia, la energía cinética tiene que ser 12,9 J, lo que corresponde a una velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 5,08 m/s$$

A lo largo de la trayectoria la energía potencial se transforma en cinética y viceversa, con la condición de que su suma sea siempre la misma. Una central hidroeléctrica transforma la energía potencial del agua situada en la parte alta del embalse, a una cierta altura, en energía cinética de esa misma agua cuando cae hasta la base de la presa, y esta energía cinética se transforma después en nuevas formas de energía cinética o potencial, por ejemplo en corriente eléctrica.

Las mismas nociones son válidas para una forma cualquiera de energía potencial. Consideremos, por ejemplo, la de la figura 5.12.

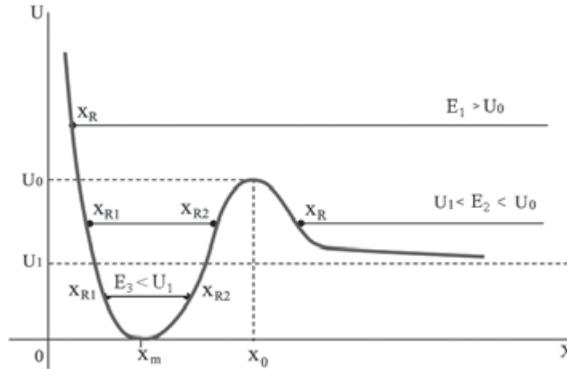


Fig. 5.12. Curva de energía potencial. La fuerza que deriva de esta energía potencial es repulsiva de 0 a x_m , atractiva entre x_m y x_o y repulsiva, de nuevo, para $x > x_o$. Están dibujados los puntos de retorno para diversos valores de la energía y estados iniciales. U_1 es la energía potencial para $x \rightarrow \infty$.

Supongamos que la partícula está infinitamente alejada del origen y viene desde la derecha, lo que implica que su energía total, E_1 , tiene que ser superior a U_1 . La energía cinética en el infinito era $E_1 - U_1$ y, a medida que avance hacia la izquierda, irá ganando energía potencial y perdiendo energía cinética hasta llegar a la posición x_o , en que, suponiendo que $E_1 > U_0$ (lo que corresponde a la línea horizontal más alta en la figura) pasará con una energía cinética $E_1 - U_0$. A partir de ese momento, volverá a ganar velocidad según pierda energía potencial, llegará al mínimo en el que toda la energía es cinética y lo sobrepasará ganando energía potencial hasta llegar a un punto, x_R , en el que la energía cinética es cero, lo que significa que se ha anulado el módulo de la velocidad (hasta ese momento negativa) y cambia su sentido para moverse hacia la derecha con velocidad positiva. El punto x_R es el punto de retorno y se calcula sabiendo que en él toda la energía es potencial:

$$E_1 = U(x_R)$$

La partícula, finalmente, acabará moviéndose indefinidamente hacia la derecha recuperando los valores de energía cinética y potencial del inicio.

Supongamos ahora que la partícula tiene una energía total, E_2 , tal que:

$$U_0 > E_2 > U_1$$

En este caso, el movimiento dependerá de la posición inicial. Si en un cierto instante, la partícula se encuentra a la derecha de x_o , el movimiento será de nuevo infinito con un sólo punto de retorno x_R en el que “rebota” al agotar toda su energía cinética y transformarla en potencial. Si, por el contrario, se ubica a la izquierda de x_o , entonces la partícula sólo puede moverse entre dos puntos de retorno x_{R1} y x_{R2} . El movimiento es finito y transcurre cambiando

continuamente energía potencial, que es máxima en los puntos de retorno por energía cinética, que es máxima en el mínimo de la energía potencial. Los puntos de retorno se obtendrán también a partir de la ecuación:

$$E_2 = U(x_R)$$

que para este valor de la energía tendrá tres soluciones.

Por último, si la energía E_3 es menor que U_1 , la partícula sólo puede existir en la zona del mínimo moviéndose entre los dos puntos de retorno solución de la ecuación:

$$E_3 = U(x_R)$$

que tendrá, para este rango de valores de la energía, dos soluciones. Nótese que es imposible la existencia, en este potencial, de una partícula con energía total menor que cero, ya que eso implicaría una energía cinética negativa.

La fuerza y la energía potencial

Para el caso de una dimensión, sabemos que:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

que es la primera componente de la ecuación general:

$$\vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r})$$

para el caso en que U sólo dependa de la variable x . Por lo tanto, la fuerza es positiva para pendientes negativas de la energía potencial y negativa para pendientes positivas. En la figura 5.13 se ha indicado la dirección de la fuerza en los distintos tramos de la coordenada x . La fuerza, por lo tanto, va siempre hacia los mínimos de la energía potencial y en sentido contrario a los máximos. En esos puntos, máximos y mínimos, la pendiente es cero y, en consecuencia, la fuerza es también cero o, lo que es lo mismo, son puntos de equilibrio.

Pero el equilibrio en los mínimos de la energía potencial es estable porque si una perturbación externa separa ligeramente al sistema de la posición de equilibrio, las fuerzas que se derivan de la energía potencial van en dirección al mínimo y tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en los máximos, cualquier desviación aleja al sistema de esa posición y, por lo tanto, están en equilibrio inestable. Así, **todo mínimo en la energía potencial representa una posición de equilibrio estable, mientras que todo máximo**

representa una posición de equilibrio inestable. Por otra parte, en las zonas en las que la energía potencial crece con x , la fuerza es negativa, mientras que es positiva en las zonas en las que decrece con x , lo que hace que la fuerza tienda a llevar a los cuerpos hacia los mínimos de la energía potencial.

Enlace molecular

Los átomos en una molécula, y las moléculas entre sí, interactúan debido a que están constituidos por electrones y núcleos cargados eléctricamente. Las fuerzas resultantes son atractivas o repulsivas dependiendo de la distancia y derivan de una energía potencial cuya forma es similar a la de la figura 5.13.

Cuando los átomos están tan cerca que sus cortezas electrónicas empiezan a “tocarse”, la interacción es fuertemente repulsiva, lo que implica que para distancias próximas a cero la energía potencial tiene que tener una pendiente fuertemente negativa. Cuando la distancia entre los átomos tiende a infinito, la fuerza tiende a cero y la energía potencial tiene que tender a una constante, que se suele tomar igual a cero por convenio, aunque ya sabemos que su valor es indiferente y lo único importante son los gradientes, asociados a las fuerzas. **A distancias algo superiores a la de “contacto”, la interacción es siempre atractiva** debido al juego de fuerzas entre las partículas cargadas de ambos átomos y a las deformaciones que inducen dichas fuerzas, lo que se traduce en que la forma de la energía potencial es la que se representa en la figura 5.13.

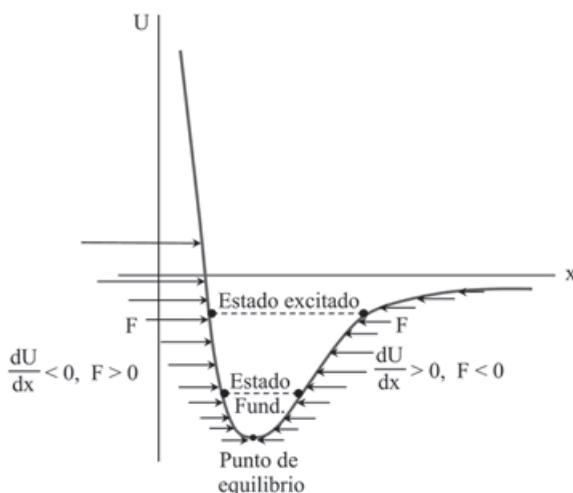


Fig. 5.13. Energía potencial típica de la interacción entre dos átomos. Cuando la energía es negativa nos encontramos ante un estado ligado de los dos átomos, es decir, una molécula. Las flechas indican la dirección e intensidad de la fuerza.

En el contexto de la Física Clásica, los átomos pueden estar en cualquier estado de energía. En particular, si se encontraran en reposo a la distancia que corresponde al mínimo de la energía potencial, la energía cinética sería cero, y estarían en equilibrio estable, ligados formando una molécula. Pero esta situación no es posible en el mundo subatómico, regido por las leyes de la Mecánica Cuántica, como veremos en el capítulo 23. Así que el estado más estable, llamado también estado fundamental, tiene una energía negativa pero siempre superior al mínimo de la energía potencial. La posición de los átomos varía, entonces, oscilando entre los dos puntos de retorno, aunque siguen estando ligados en una molécula: los átomos vibran alrededor de la posición de equilibrio.

La energía total puede aumentar debido a aportes externos de energía, por ejemplo a choques con otras moléculas, en cuyo caso los átomos oscilan con una amplitud mayor en estados llamados excitados. Sólo si la energía que se transmite a la molécula es tan grande que se hace mayor que cero, los átomos ya no permanecen ligados y se separan indefinidamente. La energía que hay que dar a cada molécula para que se rompa se llama energía de disociación y su determinación nos indica la profundidad del mínimo de la energía potencial. Está claro que cuanto más profundo sea éste, más estable será la molécula y más difícil disociarla. Para una molécula de cloruro sódico (NaCl), la distancia de equilibrio entre los centros de los iones de sodio y cloro es de aproximadamente $0,236 \text{ nm} = 2,36 \times 10^{-10} \text{ m} = 2,36 \text{ \AA}$ y la profundidad del “pozo” de energía potencial es de unos $9,2 \times 10^{-19} \text{ J} = 5,7 \text{ eV}$.

5.2 La energía y los seres vivos

5.2.1 La tasa metabólica

La ley de conservación de la energía es un principio determinante en el comportamiento de cualquier sistema físico. La energía no es un concepto sencillo, como la masa de un cuerpo, la carga eléctrica o el número de partículas. Es algo mucho más abstracto, suma de dos variables llamadas energía cinética y energía potencial, cuya única particularidad reseñable es que se conserva a lo largo de la evolución de un sistema aislado. Las posiciones y velocidades de las partículas que lo componen variarán de acuerdo con las fuerzas en presencia, pero la combinación de posiciones y velocidades que define la energía tendrá un valor constante.

Ya hemos visto la transformación de energía cinética en energía potencial mecánica, pero como veremos más adelante, el calor es una forma de energía

cinética y la energía química es una forma de energía potencial electromagnética asociada a las posiciones de los átomos en las moléculas y de los electrones en los átomos. **Los seres vivos están continuamente procesando energía e intercambiándola con el medio. Con los alimentos incorporan a su organismo la energía potencial contenida en las moléculas de los nutrientes, transformándola en energía cinética de locomoción y de movimiento de sus órganos internos, en calor y en la energía potencial contenida en las moléculas que sintetiza.**

Así, para vivir, los seres vivos necesitan consumir energía de forma sostenida a un ritmo que depende de varios factores, esencialmente el tamaño del organismo y el tipo de actividad que necesite desarrollar. El modo más completo y más frecuente de estimar la energía consumida en los animales es a través del oxígeno gastado en la respiración. En efecto, todas las reacciones de las que se obtiene energía provienen de la oxidación (“combustión”) de determinados compuestos orgánicos, fundamentalmente de hidratos de carbono y grasas. Cada reacción de oxidación desprende una cantidad de energía distinta, pero ocurre que **la cantidad de energía producida por unidad de volumen de oxígeno es prácticamente constante, del orden de 20.000 J por litro de oxígeno consumido.** El metabolismo de la glucosa produce una cantidad ligeramente mayor y el de las grasas ligeramente menor, pero la cifra consignada es un promedio bastante preciso.

Llamamos tasa metabólica a la energía por unidad de tiempo consumida por un ser vivo y tiene, por lo tanto, dimensiones de potencia. La tasa metabólica basal, P_B , es la mínima cantidad de energía por unidad de tiempo necesaria para mantener la actividad vital. La noción de tasa metabólica basal es confusa desde el punto de vista experimental, ya que implica que, por debajo de ese valor, es imposible que un organismo se mantenga vivo. La dificultad para definir un umbral de este tipo y la dependencia de los factores externos en la tasa metabólica mínima aconsejan utilizar la tasa metabólica en reposo, medible en condiciones ambientales que se definirán con detalle en el capítulo 7, en lugar de la tasa metabólica basal. Sin embargo, el término basal es utilizado de forma generalizada, por lo que, en este texto, ambas expresiones (basal y en reposo) se utilizarán de forma equivalente. **La tasa metabólica basal de una persona de unos 70 kg de peso es de unos 80 W**, de los que 40 W se destinan al funcionamiento del cerebro, 15 W al corazón y el resto a los otros órganos internos. Esto quiere decir que en un día, el gasto energético mínimo será:

$$P_B = 80 \text{ W} \times (24 \times 3.600) \text{ segundos/día} = 6,9 \times 10^6 \text{ J/día} = 1,65 \times 10^6 \text{ cal/día} = 1.650 \text{ kcal/día.}$$

donde se ha expresado la energía en calorías y kilocalorías con la equivalencia de $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ ya especificada en la tabla 5.1. Así pues, una persona necesita para mantenerse en vida consumir un mínimo de 1.650 kilocalorías por día. Mantener el tono postural en posición erguida ya requiere un gasto energético suplementario, y para desarrollar una actividad vital con esfuerzos físicos ligeros, es necesario asegurar un gasto energético medio, o tasa metabólica media, P_m , de unas 2.500 kcal/día , es decir:

$$P_m = \frac{2,5 \times 10^6 \times 4,18 \text{ J}}{24 \times 3.600 \text{ s}} \approx 120 \text{ W}$$

que es un promedio entre la tasa metabólica en reposo y la tasa metabólica asociada a los esfuerzos moderados. El gasto medio de energía es, por lo tanto, algo superior al de una bombilla (de 100 W). Más adelante veremos cómo varía la tasa metabólica con el tamaño de un animal. Podemos ahora estimar la cantidad de oxígeno que necesitamos consumir para generar esa energía a lo largo de un día:

$$\frac{120 \text{ W} \times (24 \times 3.600) \text{ s} / \text{día}}{20.000 \text{ J} / \text{O}_2} \simeq 500 \text{ lO}_2 / \text{día} \approx 0,36 \text{ lO}_2 / \text{min}$$

Consumimos, por lo tanto, unos 500 litros de oxígeno al día, lo que implica que, como hay un 20 por ciento de oxígeno en el aire, usamos diariamente $2,5 \text{ m}^3$ de aire “fresco” en nuestra actividad normal.

La tasa metabólica varía mucho en función de la actividad que se esté desarrollando, desde los 80 W mínimos hasta puntas de actividad física muy violenta en que puede sobrepasar los 1.500 W .

Tabla 5.2. Tasa metabólica (para una persona de unos 70 kg) asociada a algunas actividades			
Actividad	Tasa met. (W)	Tasa met. (kcal/min)	Consumo de O₂ (l/min)
Sueño	80	1,2	0,24
Paseo lento	250	3,6	0,75
Pedalear o nadar despacio	500	7,2	1,5
Jugar al fútbol	620	8,9	1,9
Nadar rápido	750	11	2,2
Pedalear a 40 km/h	1.800	26	5,4

5.2.2 Energética de la locomoción

Locomoción por inercia

La energía mecánica que un animal puede generar es sólo una fracción de la energía total consumida. Como ya hemos visto, **los músculos transforman energía química en movimiento, pero con un rendimiento bastante reducido, del orden del 25 por ciento**. Es decir, de cada julio gastado en el tejido muscular, sólo un cuarto se convierte en trabajo mecánico; el resto acaba por eliminarse en forma de calor. Pero, además, hay que dedicar parte de la energía disponible a otras funciones, por lo que ese porcentaje es el máximo alcanzable, siendo normalmente mucho menor la parte de la energía total consumida que se convierte en movimiento. **La potencia mecánica desarrollada es siempre menor que la potencia metabólica consumida**, siempre por debajo del 25 %. Por ejemplo, cuando se pedalea a velocidad moderada el trabajo mecánico desarrollado es del orden de 100 W , de forma que la tasa metabólica es de unos 500 W ($4 \times 100\text{ W} + 100\text{ W}$, estos últimos asociados a la tasa metabólica en reposo) y se puede mantener el esfuerzo durante horas. Cuanto más intenso sea el ejercicio, más grande puede ser el rendimiento mecánico, pero durante menos tiempo se puede resistir. Desarrollar una potencia mecánica de 400 W , es decir, una tasa metabólica superior a 1.700 W , sólo es posible durante algunas decenas de minutos y sólo está al alcance de algunas personas especialmente dotadas y entrenadas. El máximo de potencia mecánica que una persona puede producir es unos 1.500 W en *sprint*, aproximadamente dos caballos de vapor, lo que requiere un gigantesco consumo metabólico de unos 6.000 W (nada menos que $1,4\text{ kcal}$ por segundo), pero no puede mantenerse más allá de unos pocos segundos.

Veamos ahora lo que se conoce como el modelo de locomoción por inercia introducido por A. V. Hill. Cuando un animal se desplaza a velocidad uniforme sobre una superficie horizontal, si no hubiera rozamiento no debería realizar ningún trabajo para moverse, ya que la energía cinética es constante. Es lo que ocurriría con un móvil deslizando sin ninguna fricción. Sin embargo, los animales necesitan mover las patas para desplazarse y este movimiento exige gastar energía.

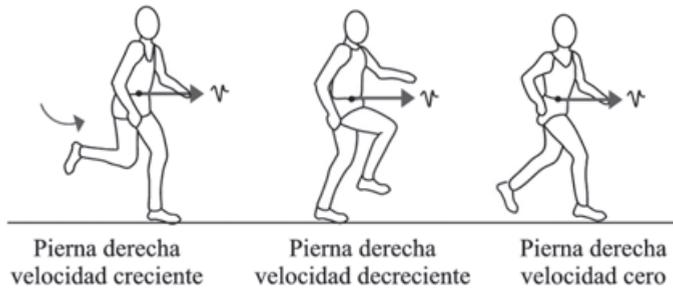


Fig. 5.14. Modelo de locomoción por inercia.

Si el cuerpo se mueve a velocidad constante respecto del suelo, cada pie está en reposo mientras mantiene el contacto con el suelo. Para seguir desplazándose a la misma velocidad, en cada zancada el animal necesita levantar el pie, acelerar la extremidad correspondiente hasta alcanzar la velocidad de marcha, rebasar la posición del cuerpo y luego frenarla hasta llegar de nuevo al reposo en el siguiente contacto con el suelo. Así, un grupo de músculos ha de acelerar la extremidad desde el reposo hasta una energía cinética del orden de $\frac{1}{2}m_e v^2$, donde m_e es la masa de la extremidad y v la velocidad de desplazamiento, mientras que otro grupo tiene que decelerarla desde ese mismo valor de la energía cinética hasta cero. En cada zancada, por lo tanto, los músculos desarrollan un trabajo mecánico igual a dos veces la energía cinética máxima de cada extremidad. Si l_c es la distancia de contracción y F_m es la fuerza muscular, tendremos:

$$F_m \times l_c = 2 \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F_m \times l_c}{m_e}} \quad (5.13)$$

En esta expresión se ve que el numerador de la fracción bajo el signo de la raíz cuadrada es proporcional a la fuerza muscular puesta en juego por las extremidades locomotoras, que es, a su vez, proporcional a la sección de los músculos, tal y como vimos en el capítulo 2, y a la distancia de contracción, que es una fracción de la longitud de la extremidad. Teniendo en cuenta ambos factores, resulta que dicho numerador es proporcional al volumen de los músculos implicados en el movimiento. El denominador, por su parte, es simplemente la masa de la extremidad, proporcional también a su volumen. Así, **si dos animales tuvieran distinto tamaño pero las mismas proporciones geométricas y la misma fracción de masa muscular en las extremidades, se moverían con la misma velocidad.** Esta conclusión es chocante, pero se

verifica aproximadamente en animales de similar forma corporal y distinto tamaño, como gacelas o canguros. Ya veremos en el siguiente capítulo las correcciones que es preciso hacer para describir de una forma más precisa la relación entre velocidad de desplazamiento y masa corporal.

En consecuencia, en una primera aproximación, el tamaño, a igualdad de forma, no importa, pero proporciones distintas sí que permiten velocidades de cruceo distintas. De la expresión (5.13) se sigue que para alcanzar grandes velocidades conviene que las extremidades sean lo más largas (l_c grande) y lo más ligeras posible (m_e pequeña), y todos los animales veloces tienen, en efecto, patas largas y finas. Claro que patas largas y finas implican poca sección muscular y, por lo tanto, poca fuerza F_m . Así, **la configuración óptima sería extremidades muy largas y ligeras, con los músculos que las mueven ubicados en el tronco o en una zona poco móvil a fin de no gastar energía en su balanceo.** Y eso es precisamente lo que ocurre con animales especialmente adaptados a la carrera, como los caballos, ciervos, galgos o avestruces, cuyas patas, largas y finas, son movidas por potentes grupos musculares situados tan cerca del tronco como es posible mecánicamente, a fin de minimizar su oscilación.

Se ha comparado con frecuencia la eficiencia energética de la locomoción bípeda y la cuadrúpeda. El movimiento sobre dos extremidades es menos fluido que sobre cuatro, gastándose, por consiguiente, más energía en las sucesivas aceleraciones y deceleraciones del cuerpo en cada paso, mientras que sobre cuatro extremidades habría menos consumo de energía al ser el movimiento más uniforme. Se ha especulado con el hecho de que la posición erguida de los humanos es poco eficaz desde el punto de vista de la locomoción, pero está compensada con creces por las ventajas adquiridas al liberar las manos para transportar bebés y comida, o manipular herramientas. Por otra parte, la locomoción bípeda requiere extremidades más largas, con pasos más amplios y menor frecuencia de paso, lo que implica una mayor fracción de fibras lentas, que son menos costosas energéticamente, pero, al tiempo, la masa muscular relativa de las extremidades locomotoras en relación con el cuerpo es más grande que en los cuadrúpedos para poder sostener la misma masa corporal.

Los datos experimentales muestran que, en conjunto, el coste energético de ambas formas de moverse es prácticamente equivalente. Así, primates como el chimpancé consumen la misma cantidad de oxígeno cuando se mueven a la misma velocidad sobre dos o sobre cuatro extremidades. Y lo mismo ocurre cuando se compara el gasto metabólico por unidad de longitud recorrida de perros y pavos del mismo tamaño.

El modelo inercial es interesante porque permite obtener conclusiones cualitativas válidas, pero tiene muchas limitaciones debido a que no tiene en cuenta muchos otros factores, por ejemplo el movimiento de balanceo, tanto lateral como vertical, del centro de masas del animal mientras corre, lo que implica que el gasto real de energía sea mayor. En el capítulo siguiente se hará una evaluación más precisa del coste energético asociado a la locomoción.

Manteniéndonos todavía dentro del modelo inercial, el trabajo realizado por los músculos de una pierna cuando una persona se mueve es igual a $m_e v^2$ en cada zancada. Si τ es el tiempo que se tarda en dar una zancada, la potencia P_D que es preciso desarrollar para desplazarse a una velocidad v es:

$$P_D = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{m_e v^2}{\tau}$$

y si L_z es la longitud de cada zancada, se cumple que $L_z = v\tau$, de donde:

$$P_D = \frac{m_e v^3}{L_z}$$

Tomemos, por ejemplo, el caso de un paseante que camina a una velocidad de 1 m/s ($3,6 \text{ km/h}$) con una longitud de zancada típica de $0,9 \text{ m}$. Si pesa unos 70 kg , entonces la masa de cada pierna es del orden de 11 kg y la potencia mecánica desarrollada será:

$$P_D = \frac{11 \times 1}{0,9} = 12,2 \text{ W}$$

lo que implica que los músculos de las piernas consumen cuatro veces más, unos 50 W para poder afrontar el esfuerzo que se les exige, aunque, como ya hemos dicho, la energía consumida en el movimiento es superior debido a los factores no tenidos en cuenta en el modelo. A la energía gastada en los músculos locomotores hay que añadir la necesaria para mantener todas las funciones vitales durante la locomoción, más la asociada al aumento de la temperatura corporal y de los ritmos cardíaco y respiratorio, hasta completar un total de más de 250 W , de acuerdo con la tabla 5.2.

Cuando se corre a una velocidad de 3 m/s (unos 11 km/h), bastante elevada para una persona sin entrenamiento, la longitud de zancada asciende hasta $1,8 \text{ m}$ aproximadamente y la potencia mecánica es:

$$P_D = \frac{11 \times 27}{1,8} = 165 \text{ W}$$

A esta velocidad, la potencia consumida por los músculos locomotores es ya de unos $4 \times 165 = 660 \text{ W}$ y la mayor parte de la tasa metabólica se dedica a generar movimiento. Esta potencia mecánica de unos 160 W es la máxima que se puede desarrollar durante periodos prolongados, del orden de horas. A mayores velocidades, la potencia mecánica crece mucho (con el cubo de la velocidad) y sólo puede mantenerse durante periodos de tiempo muy cortos.

La potencia muscular específica máxima desarrollada por la mayoría de los vertebrados es de unos 60 W/kg para las fibras lentas (consúltese el Apéndice 1 de este capítulo para ver una deducción de esta cifra a partir de la fórmula de Hill). En cada pierna, aproximadamente el 40 por ciento de la masa es músculo, por lo que el límite de la potencia mecánica de una persona, sin ningún otro mecanismo adicional, sería de:

$$60 \times 11 \times \frac{40}{100} \simeq 260 \text{ W}$$

que es el máximo que una persona sin entrenamiento específico puede desarrollar durante un tiempo del orden de media hora. Esa potencia equivale, con una longitud de zancada de $2,1 \text{ m}$, a moverse a unos $3,7 \text{ m/s}$ ($13,5 \text{ km/h}$). En realidad es posible alcanzar velocidades superiores gracias a otros factores: a) una fracción más grande de fibras rápidas, que son capaces de alcanzar potencias más altas durante tiempos muy breves; b) mediante un entrenamiento específico que aumente la fracción de masa muscular en las piernas; c) los glúteos sólo forman parte parcialmente de la estructura móvil de las piernas aunque contribuyen a moverlas, con lo que la masa muscular activa es superior. Las velocidades alcanzadas por los grandes velocistas son sólo posibles, durante algunos segundos, gracias a la puesta en marcha del metabolismo anaerobio en las fibras rápidas y a la contribución de energía elástica en tendones y ligamentos que hace menos costoso el movimiento de oscilación de las piernas.

Observación. La potencia mecánica desarrollada por los ciclistas. Ya dijimos anteriormente que hay atletas de condiciones físicas excepcionales que pueden llegar a generar una potencia mecánica del orden de 400 W durante tiempos del orden de una hora. Eddy Merckx, por ejemplo, fue capaz de desarrollar una potencia mecánica media de 455 W durante una hora en un ensayo de laboratorio realizado sobre bicicleta estática en 1975. Por su parte, Miguel Indurain, cuando batió el record de la hora en 1994, generó una potencia media de casi 510 W , aunque, debido a su peso, la potencia por kilogramo de masa corporal fue semejante a la desarrollada por los otros grandes campeones del ciclismo.

En las etapas contrarreloj de montaña, los grandes especialistas alcanzan un promedio de 6 W/kg a 7 W/kg, lo que resulta, según el peso de cada uno, en una potencia mecánica total comprendida entre 400 W y 450 W. De esa cifra, una fracción muy importante corresponde al gasto energético necesario para elevar el cuerpo y la bicicleta contra la fuerza de la gravedad. En efecto, si consideramos un recorrido de 21,5 km con una pendiente media del 7,5 por ciento (que son los parámetros que corresponden a la subida del Mont Ventoux), la diferencia de nivel, Δz , que es preciso cubrir es:

$$\Delta z = 21.500 \times \frac{7,5}{100} = 1.610 \text{ m}$$

Un ciclista de 65 kg sobre una bicicleta de 8 kg debe gastar, por tanto, una energía E, sólo para cubrir ese desnivel contra la fuerza de la gravedad:

$$E = mg\Delta z = 73 \times 9,8 \times 1.610 = 1.151.800 \text{ J}$$

La velocidad con que los campeones recorren una etapa de estas características es algo superior a los 20 km/h, por lo que en el caso que estamos considerando, el ciclista tardaría en completar la etapa alrededor de una hora, con lo que la potencia que es necesario desarrollar para contrarrestar la gravedad resulta ser:

$$P = \frac{1.151.800}{3.600} = 320 \text{ W}$$

que, como se ve, es una fracción considerable de la potencia total generada. El resto se gasta en el movimiento de las piernas y en contrarrestar la fuerza del rozamiento con el aire y de las ruedas de la bicicleta con la carretera, es decir, energía mecánica de traslación.

A estas velocidades (de algo más de 20 km/h) el gasto energético que hay que hacer para vencer el rozamiento con el aire es del orden de 45 W. Como vimos en el capítulo 3, la fuerza de rozamiento con el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, lo que implica que la potencia necesaria para contrarrestarlo es proporcional al cubo de la velocidad. Así, en una contrarreloj llana larga, la velocidad media es del orden del doble que en una cronoescalada, por lo que la potencia consumida para vencer el rozamiento es del orden de $45 \times 2^3 = 360 \text{ W}$, mientras que no es necesario ahora gastar ninguna energía para elevar el cuerpo contra la gravedad terrestre. Se ve, por tanto, que en una cronoescalada el grueso de la energía consumida se “gasta” en ascender contra la fuerza de la gravedad, mientras que en

una etapa contra el reloj llana se “gasta” sobre todo en contrarrestar el rozamiento con el aire. Una potencia mecánica de 400 W implica un consumo metabólico del orden de $4 \times 400 \text{ W} = 1.600 \text{ W}$ para mover los músculos de las piernas más unos 200 W para atender al resto de las funciones vitales, incluido el movimiento del diafragma, corazón, etc., lo que da como resultado los aproximadamente 1.800 W de la tabla 5.2.

Como se ve también en esa tabla, el consumo de oxígeno asociado a ese nivel de ejercicio es de unos 5.400 ml O_2/min , oscilando en los ciclistas de élite entre los 5.000 y los 5.500 ml O_2/min , y superando esta cifra en casos excepcionales, como Miguel Indurain, al que se le ha llegado a medir un consumo de 6.400 ml O_2/min . El consumo por unidad de masa corporal para estos casos de ejercicio al máximo nivel de exigencia varía entre los 70 y los 80 ml $O_2/(\text{kg} \times \text{min})$. Este ritmo puede llegar a superarse en pruebas de atletismo y esquí de fondo, habiéndose llegado a medir en 1982 hasta 93 ml $O_2/(\text{kg} \times \text{min})$ para un esquiador de fondo escandinavo, lo que supone, hasta la fecha, el récord mundial de consumo sostenido de oxígeno.

Pérdida de energía por rozamiento

Hemos dicho que **las pérdidas de energía por rozamiento son pequeñas a velocidades no muy elevadas**. Hagamos una estimación de las mismas. En el movimiento de las piernas hay un gasto energético por rozamiento en las articulaciones, especialmente en las de las caderas. Gracias al líquido sinovial se disminuye enormemente el coeficiente de rozamiento entre las superficies de los huesos en contacto, consiguiéndose una eficiencia mecánica muy grande. El coeficiente de rozamiento dinámico es del orden de 0,003, mientras que la fuerza normal que soporta cada articulación, para una persona en equilibrio de unos 70 kg, cada una de cuyas piernas pesa unos 11 kg, es:

$$F_N = \left(\frac{1}{2} \times 70 - 11\right) \times 9,8 = 235 \text{ N}$$

y la fuerza de rozamiento es:

$$F_R = 0,003 \times 235 = 0,705 \text{ N}$$

Si en una zancada, los huesos de la articulación se desplazan uno respecto del otro unos 3 centímetros, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en cada zancada y articulación es:

$$W_R = 0,705 \times 0,03 = 0,021 \text{ J}$$