

# AAU

AMERICAN ANDRAGOGY  
UNIVERSITY





The background of the cover is a microscopic image of cells, possibly yeast or similar microorganisms, stained with a blue fluorescent dye. The cells are oval-shaped and show internal structures like nuclei and vacuoles. The overall color scheme is a gradient of blue, from dark in the corners to lighter in the center.

# FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LOS PROCESOS BIOLÓGICOS

---

**Raúl Villar**

**Cayetano López**

**Fernando Cussó**

# Fundamentos físicos de los procesos biológicos

## Vol. 1 - Biomecánica y leyes de escala

Raúl Villar Lázaro  
Cayetano López Martínez  
Fernando Cussó Pérez

Fundamentos físicos de los procesos biológicos

© Fernando Cussó Pérez  
Cayetano López Martínez  
Raúl Villar Lázaro

Fig. Cubierta: Células HeLa teñidas con Hoechst, observándose núcleos en interfase y una metafase.  
(Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología, UAM)

ISBN: 978-84-15941-38-5

e-book v.1.0

ISBN edición en Papel: 978-84-9948-509-6

Edita: Editorial Club Universitario. Telf.: 96 567 61 33  
C/. Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)  
[www.ecu.fm](http://www.ecu.fm)

Maqueta y diseño: Gamma. Telf.: 965 67 19 87  
C/. Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)  
[www.gamma.fm](http://www.gamma.fm)  
[gamma@gamma.fm](mailto:gamma@gamma.fm)

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información o sistema de reproducción, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

# Introducción

Este libro, *Fundamentos físicos de los procesos biológicos*, se ha concebido como una ayuda para los estudiantes de los primeros cursos de titulaciones cuyo objeto de estudio principal sean las Ciencias de la Vida, como la Biología, la Medicina, la Farmacia, la Veterinaria y otras, en las que sea necesario manejar algunas nociones básicas de la Física. No se supondrá, por lo tanto, la existencia de ningún conocimiento previo en esta materia, circunstancia frecuente en quienes inician estudios en Ciencias de la Vida. Lo único que se presupone es el conocimiento de las matemáticas elementales correspondientes al nivel de bachillerato. De todas formas, se recuerdan algunos conceptos y fórmulas importantes en el texto y en los apéndices.

El contenido del libro resulta de una modificación de un libro anterior, escrito por los mismos autores, llamado *Física de los procesos biológicos* y publicado en 2004 por Ariel. La modificación principal consiste en la eliminación de las partes más generales de la Física y un enfoque más centrado en las aplicaciones al mundo de la Biología, lo que se ha traducido en una reducción neta de contenidos y una más estricta selección de estos en lo que afecta a la explicación de ciertos fenómenos biológicos. Una gran parte del texto que ahora presentamos es similar al anterior, aunque se ha cambiado el contexto en que se introducen algunas nociones de Física con objeto de hacerlas más directamente aplicables a las Ciencias de la Vida. Al mismo tiempo, se han incorporado más ejercicios para mejor adaptarse a los cambios que se están produciendo en el perfil y desarrollo de los estudios universitarios.

Con todo, sigue siendo y se ha construido como un libro de Física en el que se introducen los conceptos y la metodología propios de esta ciencia, aunque se busca, en todo momento, aplicar los resultados obtenidos al ámbito de los seres vivos. El hecho, además, de que no se requieran conocimientos previos en esta materia por parte del lector implica que cada tema sea presentado desde su inicio, indicando lo que significa en el mundo físico en general, con aplicaciones y ejemplos, y con un énfasis especial en el ámbito de las Ciencias de la Vida, a fin de mejor entender sus leyes y familiarizar al lector con el modo de tratar y formular los problemas físicos.

El programa, igual que el del texto anterior, cubre todos los contenidos mínimos u obligatorios de los programas de las carreras mencionadas en el primer párrafo, a desarrollar en uno o dos semestres. Pero va más allá, tanto en el desarrollo de cada tema como en el catálogo de temas, incorporando otros contenidos que serán de interés en estados más avanzados del estudio de la relación entre Física y Ciencias de la Vida. Intentamos que sirva de referencia permanente para aclarar las nociones de Física que aparecen una y otra vez en determinadas ramas del estudio de los seres vivos.

Para el estudiante y el público en general, la Física y la Biología se presentan como disciplinas científicas muy distintas, incluso contradictorias o incompatibles en sus métodos. Y es cierto que hay diferencias en su objeto de estudio, en su metodología y también en su lenguaje. La Física se ocupa normalmente de sistemas simples que se pueden caracterizar con unos pocos parámetros, incidiendo siempre en los aspectos cuantitativos de las leyes que rigen su comportamiento, lo que implica un alto grado de formalización matemática y un método deductivo a partir de unos principios generales, lo que le confiere una gran potencia predictiva. Por supuesto, se llega a esos principios generales desde la observación y la experimentación de los fenómenos naturales, es decir, tienen una naturaleza empírica, muy distinta de la de los postulados puramente matemáticos. La Biología, por su parte, se ocupa de los sistemas más complejos que existen en el mundo físico, los seres vivos, cuyo comportamiento no puede caracterizarse únicamente con ayuda de unos pocos parámetros y cuya estructura no puede entenderse fuera del marco evolutivo, de la historia concreta de la vida sobre este planeta, sujeta a contingencias impredecibles que cristalizan en las formas de vida actualmente existentes. La Biología es más descriptiva, menos deductiva, y su lenguaje no es el lenguaje altamente formalizado de las matemáticas.

Y, sin embargo, los seres vivos forman parte del mundo físico y, por lo tanto, se ven afectados por las leyes generales que rigen el comportamiento de cualquier sistema físico, ya sea la gravedad, la tensión superficial, los intercambios de energía, la dinámica de los fluidos o las interacciones electromagnéticas. El funcionamiento de los seres vivos y de sus distintos órganos y tejidos, su estructura y su relación con el entorno, están condicionados por las leyes generales de la Física, lo que constituye el nivel más básico de relación entre Física y Ciencias de la Vida. Existe otro nivel, más instrumental, que se refiere a la utilización, en los laboratorios de prácticas y de investigación, así como en otros ámbitos de la actividad profesional relacionados con las Ciencias de la Vida, de equipos e instrumentos basados en fenómenos físicos, o surgidos de la actividad de investigación en Física, que permiten observar ciertas características de los seres vivos. Ambos aspectos, básico e instrumental, están presentes en el libro.

Desde luego, sería absurdo pretender que entenderemos a los seres vivos si conocemos bien los fenómenos físicos en los que se basa su actividad vital. Se trata de sistemas tan complejos y con una componente “histórica” tan fuerte que, en nuestro estado actual de conocimientos, solo es posible formular en términos físicos algunos aspectos de su actividad y estructura. Pero también sería absurdo pensar que podemos entenderlos haciendo abstracción del mundo físico en el que viven y evolucionan y cuyas leyes les afectan. Es de gran importancia comprender que se trata de sistemas que deben ajustarse a lo estipulado por las leyes de la Física, desde las que se refieren a los átomos y moléculas que los constituyen, hasta las que regulan el comportamiento térmico y dinámico de conjuntos de muchas partículas y extrema complejidad. Las leyes de la Física plantean límites a la actividad vital que deben ser tenidos en cuenta, de forma que el juego de la evolución biológica debe discurrir dentro de esos límites. Como veremos en muchos de los casos tratados en el texto, lo difícil es plantear de forma correcta la aplicación de una ley física general al caso particular de un organismo o una función biológica.

En todo caso, la finalidad de las dos ciencias es idéntica: entender e interpretar los fenómenos naturales en términos de hipótesis que puedan ser confrontadas con la observación o el experimento. Aunque, teniendo en cuenta que la complejidad de los seres vivos es superior a la de cualquier sistema inanimado, la aproximación usual en la Física se enfrenta con numerosas limitaciones y requiere adaptaciones a su nuevo objeto de estudio. Lo que no obsta para que, cuando se dilucida el fenómeno físico que subyace a una determinada función vital, se entienda esta de forma clara, así como el espectro de alternativas posibles permitidas por las leyes de la Física y la lógica del proceso evolutivo que ha conducido a esa solución específica.

A los autores, científicos cuya disciplina de origen es la Física, nos resulta especialmente grato dejar constancia de que, durante nuestra experiencia docente en la materia y la preparación de este texto, hemos adquirido conciencia de las contribuciones que la Física, a lo largo de su historia, debe a numerosos biólogos, fisiólogos y médicos, especialmente en el desarrollo de las teorías termodinámicas y la física de fluidos.

Como se ha indicado anteriormente, el presente texto resulta de la modificación de un libro anterior. Afrontar una revisión y reelaboración de una obra con objetivos similares sólo es concebible si se ha recibido la justa combinación de elogios y críticas relativas al primer texto que nos ha permitido concluir que el esfuerzo merece la pena. Así que, además de los agradecimientos que figuran en esa primera obra a las personas que nos ayudaron en



la tarea de componerla, los autores nos sentimos en la obligación de añadir aquí nuestro agradecimiento a los muchos colegas y amigos que han tenido la generosidad de hacernos partícipes de sus opiniones y sugerencias de modificación, lo que nos ha ayudado a identificar tanto aquellos contenidos que debían cambiarse como aquellos merecedores de mantenerse en este nuevo empeño. En particular, Jose Manuel Calleja, Juan Rojo y Elena Escudero, quienes han realizado una detallada lectura de la obra y cuyos comentarios han resultado especialmente esclarecedores. Sin olvidar a Carmen Gilabert y Álvaro Moreno, que han corrido con la siempre peliaguda tarea de crear las ilustraciones que ayudan a mejor entender el texto. Huelga decir que los responsables de posibles deficiencias somos únicamente los autores. Por último, deseamos expresar nuestro agradecimiento a los estudiantes de Física del grado en Biología de la Universidad Autónoma de Madrid, que son responsables de muchos de los elogios y críticas a los que nos hemos referido, y que han constituido la principal referencia para juzgar la adecuación de nuestra descripción de los fundamentos físicos de los procesos biológicos.

# Agradecimientos

Muchas son las personas que nos han ayudado en la tarea de componer este libro. Proponiéndonos temas o enfoques o leyendo capítulos o fragmentos y mejorándolos con sus sugerencias, como Magdalena Cañete, Ángeles Villanueva, Elena Escudero, José Manuel Calleja, Arkadi Levanyuk, Sebastián Vieira, Francisco Jaque, Gines Lifante y Cristina Bernis. O proporcionándonos fotografías, ilustraciones o referencias con las que completar el texto, como M. C. y A. V., ya citadas, Estrella Rausell, Rodolfo Miranda, Jorgina Satrustegui, Eduardo Elizalde, Tomás López, Isabel Jimeno, Nicolás Fernandez Baillo, Luis Munuera, José María Segura y José Manuel Suárez de Parga, así como el Servicio Interdepartamental de Investigación de la Universidad Autónoma de Madrid. Mención aparte merecen las personas que se han responsabilizado de las ilustraciones, una notable aportación sin la que el libro perdería una gran parte de su interés, sobre todo Carmen Gilabert, que ha debido plasmar gráficamente muchas de las ideas, y hasta los caprichos, de los autores, y Álvaro Moreno, así como E. E., ya citado, Carmen Morant y Eugenio Cantelar. Por último, es necesario agradecer a las numerosas promociones de alumnos de Biología que han debido cursar con nosotros la asignatura Física de los Procesos Biológicos en la UAM, por su paciencia, por sus sugerencias y por permitirnos hacernos una idea de cómo abordar esta disciplina. En realidad, hemos aprendido al mismo tiempo que ellos.



# Índice general abreviado

## **Volumen I. Biomecánica y leyes de escala**

- Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración
- Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales
- Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción
- Capítulo 4. Bioestática y locomoción
- Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica
- Capítulo 6. Leyes de escala en los seres vivos
- Capítulo 7. El metabolismo y las leyes de escala
- Apéndices A-F

## **Volumen II. Calor y dinámica de fluidos en los seres vivos**

- Capítulo 8. Temperatura, calor y trabajo
- Capítulo 9. El primer principio: balance energético de los seres vivos
- Capítulo 10. Procesos espontáneos: segundo principio de la termodinámica
- Capítulo 11. Transiciones de fase: la transpiración en los seres vivos
- Capítulo 12. Teoría cinética molecular de los gases: la difusión
- Capítulo 13. Fluidos ideales: la flotación
- Capítulo 14. El flujo viscoso: la circulación sanguínea y el vuelo
- Capítulo 15. Fenómenos de superficie y disoluciones
- Capítulo 16. Propiedades mecánicas de los biomateriales

## **Volumen III.- Bioelectromagnetismo, ondas y radiación**

- Capítulo 17. Fuerzas, campos y potenciales eléctricos
- Capítulo 18. Corriente eléctrica
- Capítulo 19. La membrana celular y el impulso nervioso
- Capítulo 20. Magnetismo y campos electromagnéticos
- Capítulo 21. Ondas: luz y sonido
- Capítulo 22. La visión y los instrumentos ópticos
- Capítulo 23. Átomos, núcleos y radiactividad



# Índice Volumen I.

## Biomecánica y leyes de escala

<b>Introducción</b> .....	iii
<b>Agradecimientos</b> .....	vii
<b>Índices</b> .....	ix
<b>Referencias generales</b> .....	xiii
<b>Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración</b> .....	1
1.1 Posición y trayectoria de un cuerpo .....	1
1.2 La velocidad .....	6
1.3 La aceleración .....	11
1.4 Ejercicios propuestos.....	39
1.5 Referencias .....	44
<b>Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales</b> .....	45
2.1 Las leyes de Newton .....	45
2.2 El origen de la fuerza en los animales.....	51
2.3 La conservación del momento.....	68
2.4 El centro de masas.....	77
2.5 Ejercicios propuestos.....	92
2.5 Referencias .....	98
<b>Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción</b> .....	101
3.1 La gravitación.....	102
3.2 Fuerzas de contacto .....	113
3.3 La fuerza centrífuga .....	117
3.4 Fuerzas de rozamiento.....	120
3.5 Ejercicios propuestos.....	140
3.6 Referencias .....	144

<b>Capítulo 4. Bioestática y locomoción.....</b>	<b>147</b>
4.1 Momento angular .....	147
4.2 Bioestática .....	175
4.3 La locomoción en los animales .....	187
4.4 Ejercicios propuestos .....	196
4.5 Referencias .....	209
<b>Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica.....</b>	<b>211</b>
5.1 Trabajo y energía cinética .....	211
5.2 La energía y los seres vivos.....	234
5.3 Movimiento en torno al equilibrio. Movimiento armónico simple.....	245
5.4 Apéndice - Cálculo de la potencia muscular específica.....	253
5.5 Ejercicios propuestos .....	255
5.6 Referencias.....	261
<b>Capítulo 6. Leyes de escala en los seres vivos .....</b>	<b>263</b>
6.1 Tamaño y forma .....	263
6.2 Análisis dimensional .....	268
6.3 Leyes de escala.....	271
6.4 El tamaño del esqueleto.....	282
6.5 La carga, el salto y la carrera.....	292
6.6 Ejercicios propuestos.....	306
6.7 Referencias .....	309
<b>Capítulo 7. El metabolismo y las leyes de escala .....</b>	<b>311</b>
7.1 La ley de Kleiber .....	312
7.2 El suministro energético.....	326
7.3 El tiempo biológico .....	335
7.4 Ejercicios propuestos .....	335
7.5 Referencias .....	340
<b>Apéndices A - F.....</b>	<b>343</b>
<b>Glosario.....</b>	<b>387</b>

# Referencias generales

En cada capítulo se añade una lista de referencias específicas que tienen relación con algunos de sus contenidos, sean datos o desarrollos teóricos, que no suelen encontrarse en los libros generales de un nivel similar a éste. Además de estas referencias específicas, relacionamos a continuación una serie de textos conocidos y fácilmente accesibles, también pensados para estudiantes en los primeros años de estudios universitarios, tanto de Física como de carreras centradas en las Ciencias de la Vida.

Alonso, M. y Finn, E. J. (1995): *Física*, Addison-Wesley Iberoamericana.

Cromer, A. H. (1992): *Física para las Ciencias de la Vida*, Reverté.

Gettys, W. E., Keller, F. J. y Skove, M. J. (1991): *Física clásica y moderna*, McGraw-Hill.

Glashow, S. L. (1993): *From alchemy to quarks. The study of physics as a liberal art*, Brooks-Cole.

Jou, D., Llebot, J.E. y Pérez García, C. (1994): *Física para de las Ciencias de la vida*. McGraw-Hill.

Kane, J.W. y Sternheim, M.M. (1998): *Física*. Reverté.

Ortuño Ortín, M. (1996): *Física para biología, medicina, veterinaria y farmacia*. Crítica, 1996

Tipler, P.A. (1996): *Física*. Reverté.





# Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración

## 1.1 Posición y trayectoria de un cuerpo

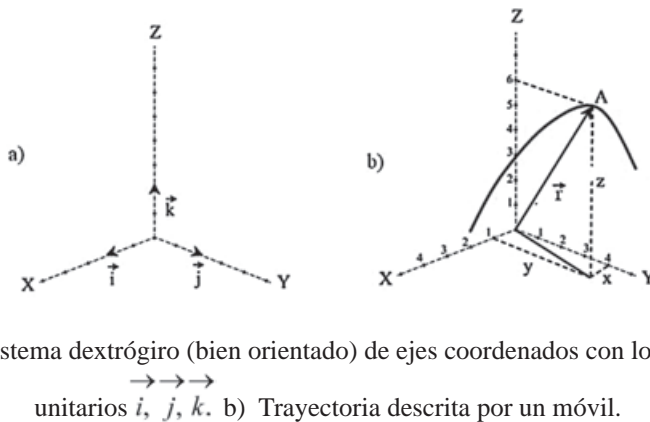
### 1.1.1 Dimensiones del espacio

Vivimos en un mundo caracterizado por tener tres dimensiones espaciales y una temporal, lo que implica que **sólo podemos trazar tres líneas perpendiculares entre sí que coincidan en un punto y no más**. Por lo tanto, el primer paso en la descripción de los fenómenos físicos consiste en localizarlos, en dar cuenta de su posición y del tiempo en el que suceden. Localizar un cuerpo extenso no es fácil y puede hacerse de varias maneras aprovechando sus propiedades físicas, tales como su condición de sólidos, rígidos u otras. La forma más elemental de hacerlo es dar la posición de cada uno de los puntos que lo componen, así que empezaremos por describir la posición (y el movimiento) de un punto material, al que nos referiremos indistintamente como punto, partícula o cuerpo, en el bien entendido de que los objetos reales se componen de infinidad de estos puntos y que su movimiento resulta del movimiento de todos ellos. Más adelante, encontraremos algunos métodos de tratar de forma simple cuerpos extensos. En la práctica un punto material puede visualizarse como una partícula o pequeño cuerpo **cuyas dimensiones son mucho menores que las dimensiones características de su movimiento**, de forma que son irrelevantes y pueden considerarse aproximadamente cero. Así, por ejemplo, la Tierra, en su movimiento alrededor del Sol, puede perfectamente ser considerada como un punto material, ya que su diámetro es mucho más pequeño que el diámetro de la órbita terrestre. Por el contrario, las dimensiones de un átomo, del orden de  $10^{-10}$  metros, son importantes cuando se estudian sus movimientos en una molécula debido a que las distancias interatómicas son del mismo orden que su diámetro.

### 1.1.2 Sistemas de referencia

La posición de un cuerpo no es una propiedad intrínseca del mismo, sino relativa a un objeto o conjunto de objetos, ligados a un observador, que se toman como sistema de referencia. Dada la estructura tridimensional del espacio, el sistema de referencia más útil y fácil de manejar es un conjunto de tres ejes perpendiculares que se cortan en un punto que tomamos como origen. Puede visualizarse un tal sistema con ayuda de las tres aristas que forman las paredes con el suelo de una habitación y que se juntan en uno de los vértices de la misma. Cada una de las tres direcciones asociadas a los tres ejes se llaman coordenadas y, convencionalmente, se les conoce por las letras  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

**Definición. Sistema de referencia bien orientado.** Un sistema de tres ejes perpendiculares  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  es dextrógiro o bien orientado si se ajusta a la llamada regla del sacacorchos, es decir, si al llevar por el camino más corto el primer eje, el  $X$ , sobre el segundo, el  $Y$ , un sacacorchos que gire en ese sentido, se mueve a lo largo del tercer eje, el  $Z$ .



**Fig 1.1.** a) Sistema dextrógiro (bien orientado) de ejes coordenados con los tres vectores unitarios  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . b) Trayectoria descrita por un móvil.

La posición de un punto en un instante de tiempo queda determinada por tres números,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que son las componentes del vector posición  $\vec{r}$  que une el origen de coordenadas con el punto en cuestión (a partir de ahora, un símbolo con una pequeña flecha encima denotará siempre su carácter vectorial y será equivalente al conjunto de sus tres componentes). El módulo de dicho vector, que denotaremos normalmente con la misma letra pero sin flecha encima, o bien acotando el símbolo del vector con trazos verticales, será:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Con el paso del tiempo, el cuerpo irá cambiando de posición, siendo su trayectoria la curva que resulta de unir todos los puntos por los que pasa. Esa trayectoria, que describe el movimiento del cuerpo, es la que sigue también el extremo del vector  $\vec{r}$ , por lo que, en términos matemáticos, viene caracterizada por la función  $r, (t)$ . El tiempo  $t$  se referirá, por su parte, al intervalo transcurrido desde un instante que, convencionalmente, se toma como origen de tiempos, hasta el instante en el que la partícula pasa por el punto de la trayectoria que estemos considerando.

**Definición. Vectores unitarios.** Llamamos vectores unitarios a los que tienen un módulo igual a la unidad y los denotaremos normalmente como  $\vec{u}$ . Así, los tres vectores unitarios a lo largo de los tres ejes coordenados serían, con esta nomenclatura,  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ . Es costumbre, sin embargo, utilizar la notación  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  para este caso particular. En el resto de los casos, utilizaremos siempre el símbolo  $\vec{u}$  para designar vectores unitarios. Así, el vector  $\vec{r}$  se escribirá como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Cuando el movimiento tiene lugar a lo largo de una recta, se dice que es unidimensional. En ese caso puede siempre escogerse un sistema de coordenadas tal que uno de sus ejes coincida con la recta a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento, con lo que todas las magnitudes vectoriales que lo caracterizan, por ejemplo la posición y la velocidad, tienen dos coordenadas que son siempre iguales a cero y basta una coordenada, la asociada a la dirección del movimiento, para describirlo por completo. Si elegimos el eje  $X$  como esta coordenada, entonces la trayectoria viene dada por una única función  $x(t)$ .

Puede ocurrir también que el movimiento describa una trayectoria contenida en un plano. Se dice, en este caso, que es bidimensional y, del mismo modo que en el caso anterior, conviene elegir un sistema de referencia tal que dos de sus ejes estén contenidos en dicho plano y el tercero sea perpendicular al mismo. Si definimos los ejes  $X, Y$  contenidos en el plano del movimiento, la coordenada  $z$  será siempre cero y bastarán dos coordenadas,  $x(t), y(t)$ , para describir por completo el movimiento.

### 1.1.3 Unidades de longitud y tiempo

Las coordenadas  $x, y, z$ , son distancias y, por lo tanto, deben ser expresadas en términos de longitudes. Pero **toda magnitud con dimensiones requiere de la existencia de una unidad**, en este caso la longitud de un objeto, o asociada a un cierto fenómeno físico fácilmente reproducible, que se toma

convencionalmente igual a 1 y respecto de la cual se comparan todas las demás longitudes. Las primeras magnitudes elementales, longitud y tiempo, están asociadas a la estructura espacio-temporal del mundo físico, pero no son las únicas. En lo sucesivo introduciremos otras dimensiones elementales, así como muchas otras magnitudes cuyas dimensiones son función de las elementales. La concurrencia de dimensiones implica que toda relación entre magnitudes debe ser homogénea dimensionalmente, ya que no pueden igualarse ni sumarse magnitudes con diferentes dimensiones. En general, **en una ecuación entre magnitudes físicas, los dos miembros deben tener las mismas dimensiones, así como los sumandos que aparezcan en cada uno de ellos.** Existe un sistema universalmente aceptado de unidades de medida para todas las magnitudes físicas llamado Sistema Internacional (*SI*), que es el que utilizaremos de forma consistente a lo largo de todo el libro, aunque a veces introduzcamos otras unidades que sean usadas por razones históricas o de comodidad, así como las reglas de equivalencia entre ellas. Para la longitud y el tiempo, las unidades del *SI* son el metro y el segundo.

*Definición. El metro. La unidad de longitud metro fue introducida durante el siglo XVIII como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, desde el Polo Norte al Ecuador. Tras una serie de expediciones geofísicas y mediciones de la longitud de dicho arco de meridiano, se dispuso de un primer patrón que fue el depositado en 1799 en la Academia de Ciencias Francesa. Ese patrón y sus sucesivos refinamientos es el que perdura como unidad de longitud. Pero hoy sabemos que la Tierra no es exactamente una esfera. De hecho, la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador a lo largo del meridiano que pasa por París, medida con ayuda de satélites geodésicos, es de 10.002.290 metros, es decir, el metro patrón de 1799 es 0,229 milímetros más corto que la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, pero es el que ha pervivido hasta hoy. Posteriormente se fabricaron nuevos prototipos de materiales cada vez menos sensibles a las perturbaciones externas, y copias que se distribuyeron por los distintos países, pero siempre sobre el patrón de 1799. En 1960, sin embargo, se consideró que asociar la unidad de longitud a la distancia entre dos marcas en un barra metálica era poco preciso, y se introdujo una definición basada en un número de longitudes de onda en el vacío de un cierto tipo de radiación electromagnética. Posteriormente, en 1983, la Conferencia General de Pesos y Medidas partió de la velocidad de la luz para definir el metro como la longitud recorrida por la luz en un cierto intervalo de tiempo. Más concretamente, la definición hoy en vigor es:*

***El metro es la longitud recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299.792.458 segundos.***

*Nótese que esta definición implica fijar la velocidad de la luz a un valor exacto de 299.792,458 kilómetros por segundo.*

**Definición El segundo.** *Las unidades de tiempo, por su parte, siempre han estado relacionadas con intervalos entre fenómenos astronómicos o la duración de ciertos ciclos observados en los cuerpos celestes. Así, el segundo se definió como 1/60 minutos, el minuto como 1/60 horas, la hora como 1/24 días, y el día como el tiempo que tarda, en promedio, la Tierra en girar por completo alrededor de sí misma. Como la duración de los giros terrestres no es constante y está sujeta a variaciones, se definió el segundo como la fracción 1/86.400 del día solar promedio hasta que, en 1960, se optó por una definición basada en parámetros atómicos, más precisa que la asociada al movimiento de la Tierra. Así, la definición oficial en vigor es la siguiente:*

***El segundo es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del cesio 133.***

En todo caso, y a pesar de que estas definiciones sean necesarias para efectuar medidas de precisión, lo más importante desde el punto de vista práctico es comprender la necesidad de unidades de medida para las magnitudes físicas y, en lo que se refiere al metro y al segundo, interiorizar su valor aproximado en términos de la longitud comprendida entre las marcas del cero y de un metro en una cinta métrica, y del tiempo que marca el segundero de un reloj.

**Es recomendable utilizar siempre en los cálculos las cantidades expresadas en unidades en el Sistema Internacional**, lo que asegura su corrección y permite obtener resultados, de forma consistente, en las unidades de dicho sistema. Muchas veces es útil manejar múltiplos o submúltiplos de las unidades fundamentales, como, por ejemplo, el kilómetro o el centímetro. Los prefijos utilizados, con sus abreviaturas, vienen especificados en la tabla 1.1.

**Tabla 1.1. Nombres y abreviaturas de múltiplos y submúltiplos**

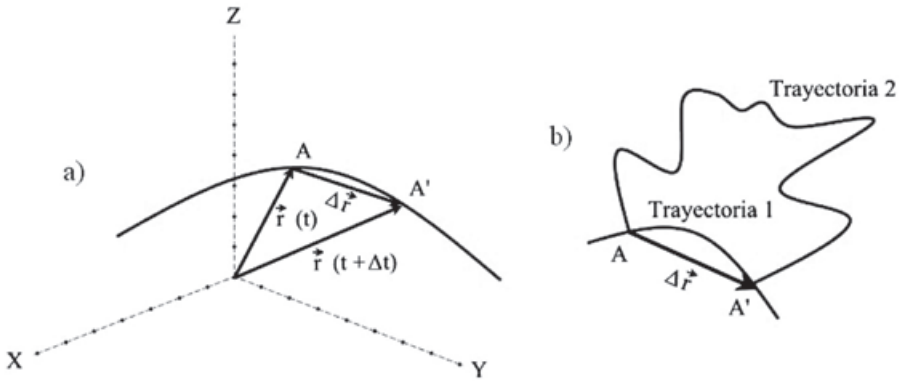
Prefijo	Factor	Prefijo	Factor
deca (da)	10	deci (d)	$10^{-1}$
hecto (h)	100	centi (c)	$10^{-2}$
kilo (k)	$10^3$	mili (m)	$10^{-3}$
mega (M)	$10^6$	micro ( $\mu$ )	$10^{-6}$
giga (G)	$10^9$	nano (n)	$10^{-9}$
tera (T)	$10^{12}$	pico (p)	$10^{-12}$
peta (P)	$10^{15}$	femto (f)	$10^{-15}$

## 1.2 La velocidad

### 1.2.1 Definición

Un cuerpo puede recorrer una trayectoria lentamente (es decir, invirtiendo mucho tiempo en completarla) o rápidamente (invirtiendo poco tiempo). La magnitud que describe la mayor o menor rapidez con que se sigue una trayectoria es la velocidad, definida, en primera aproximación, como el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo utilizado en recorrerlo. Afinando un poco más, puesto que la posición es una magnitud vectorial, definiremos la velocidad también como un vector, resultado de dividir el incremento del vector posición al pasar de un punto a otro de la trayectoria por el intervalo de tiempo transcurrido entre dichos puntos:

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



**Fig. 1.2.** a) Posiciones sucesivas de una partícula en los puntos A y A' alcanzadas en tiempos que difieren  $\Delta t$ , junto con la variación del vector posición,  $\Delta \vec{r}$ .

b) Dos trayectorias distintas se cruzan en dos puntos de forma que la variación del vector posición,  $\Delta \vec{r}$ , entre esos dos puntos es la misma, aunque los recorridos son distintos.

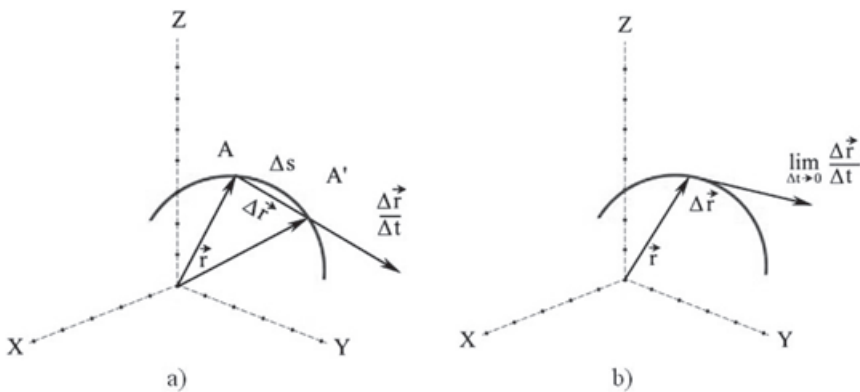
Lo que hemos definido es todavía un promedio vectorial de velocidades a lo largo de la trayectoria entre los dos puntos. Pero la velocidad puede variar a lo largo del recorrido y, además, la definición anterior no nos da información sobre la rapidez real con que se ha recorrido ese trozo de trayectoria, como puede verse en la figura 1.2.b, en la que la misma velocidad vectorial media describe dos movimientos muy distintos. Las insuficiencias de esta definición de velocidad serán tanto mayores cuanto más grandes sean los intervalos  $\Delta \vec{r}$  y  $\Delta t$  escogidos. La verdadera noción de velocidad surge cuando estos intervalos se hacen cada vez más pequeños, hasta el límite en el que ambos son cero y su cociente tiende a un valor que no es otro que la derivada de la

función  $\vec{r}(t)$  (es decir, las derivadas de las tres funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ) con respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k} \quad (1.1)$$

La magnitud así definida es la velocidad instantánea, la que tiene el cuerpo en cada instante y punto de la trayectoria y es, por lo tanto, una función del tiempo. La velocidad instantánea fue una noción extremadamente difícil de introducir y de entender en la Antigüedad, pero hoy en día su significado intuitivo está al alcance de todo el mundo al existir un instrumento, el velocímetro de los automóviles, cuya significación es evidente. Mide, precisamente, la velocidad instantánea del automóvil y por eso la aguja que marca la velocidad se mueve constantemente, al variar ésta en cada momento.

Puede verse en la figura 1.3 que cuando  $\Delta r$  se va haciendo más pequeño, su dirección tiende a confundirse con la de la trayectoria, hasta que, en el límite, la velocidad es un vector tangente en cada punto a la trayectoria.



**Fig. 1.3.** a) Velocidad media (vectorial) entre los puntos A y A' de la trayectoria.  
b) Velocidad instantánea en el punto A. Nótese que el límite de  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  es tangente a la trayectoria.

El módulo de  $\vec{v}$  se obtendrá, sencillamente, tomando los módulos de los dos miembros en la ecuación vectorial:

$$v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



Llamaremos  $\Delta s$  al intervalo de arco de una trayectoria a lo largo de la misma, es decir, la longitud de la trayectoria entre dos puntos. En el límite cuando el intervalo tiende a cero, la longitud de arco (infinitesimal),  $ds$  tiende al módulo de  $d\vec{r}$ , es decir:

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

De la definición de velocidad se sigue que sus dimensiones son longitud dividido por tiempo, es decir:

$$[v] = LT^{-1}$$

donde utilizamos el símbolo  $[A]$  para denotar las dimensiones de la magnitud  $A$ . La unidad de velocidad en el Sistema Internacional es, por lo tanto, el  $m/s$  (metro por segundo).

**Observación.** La velocidad en kilómetros por hora. La unidad seguramente más utilizada en la vida cotidiana es el  $km/h$  (kilómetro por hora), cuya conversión a metros por segundo es inmediata:

$$1 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$$

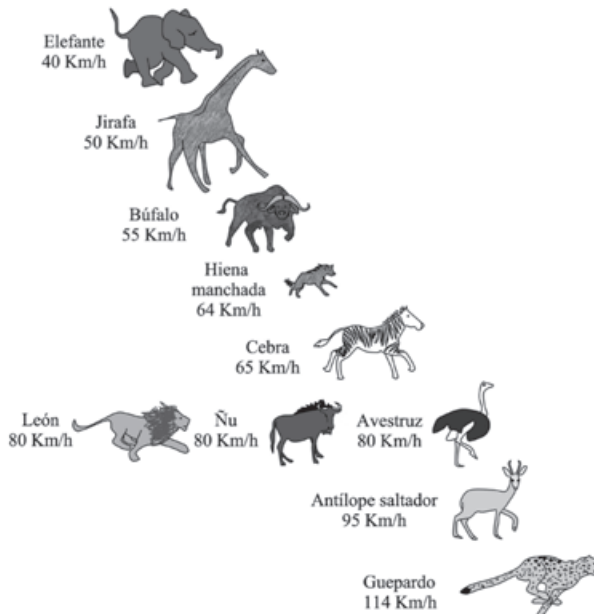
o lo que es lo mismo,  $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$ . Por consiguiente, para pasar de metros por segundo a kilómetros por hora hay que multiplicar por 3,6, mientras que para pasar de kilómetros por hora a metros por segundo hay que dividir por 3,6.

### 1.2.2 Velocidad de desplazamiento de los seres vivos

Entre los animales, la velocidad que pueden alcanzar mientras se desplazan varía mucho de unas especies a otras y depende de la situación en la que se encuentren, por lo que no es una variable bien definida. En efecto, podemos referirnos a los máximos alcanzables durante breves periodos de tiempo, en los momentos de acometida o de huida; o bien a velocidades sostenidas, y aún habría que especificar el intervalo de tiempo en el que el animal puede mantenerla. Así, el guepardo (*Acinonyx jubatus*) es el animal terrestre más rápido, pudiendo llegar hasta los  $30 \text{ m/s}$  (unos  $110 \text{ km/h}$ ), pero sólo puede mantener esta punta de velocidad durante algo más de  $250 \text{ m}$ , alcanzando inmediatamente una temperatura corporal y un déficit de oxígeno que le hacen detenerse, pero puede sostener durante mucho más tiempo una velocidad de

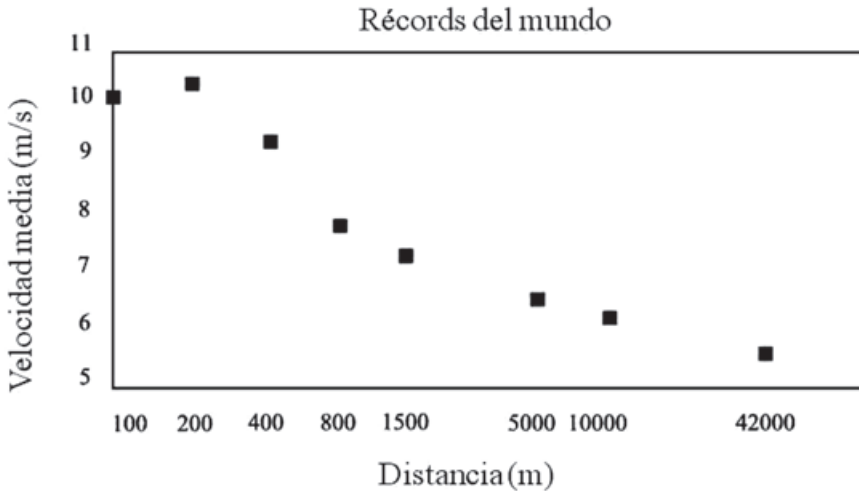
unos 18  $m/s$  (unos 64  $km/h$ ), que es muy elevada en comparación con la de otros felinos, más lentos en carrera sostenida.

Los hervíboros alcanzan velocidades considerables, aunque no los máximos del guepardo, pero pueden mantenerla durante más tiempo, como algunas especies de antílope (*Damaliscus*), cuya punta de velocidad puede superar los 90  $km/h$ , el camello, el caballo, el ñu (*Connochaetes*) y ciertas gacelas (*Gazella*), hasta los 80  $km/h$ , algunas variedades de liebres, que pueden llegar a los 70  $km/h$ , que es una velocidad excepcionalmente alta para un animal de pequeño tamaño, o los venados y canguros, hasta los 48  $km/h$ . Así, un felino sólo puede cazar a uno de estos hervíboros, que son sus presas habituales, si aprovecha el breve intervalo de tiempo en el que desarrolla su velocidad máxima, y aun así combinando la carrera con el salto. Los avestruces pueden alcanzar velocidades punta cercanas a los 80  $km/h$  y los galgos pueden acercarse a los 60  $km/h$ . El resto de los cánidos, como zorros o lobos, pueden llegar hasta unos 50  $km$  en los momentos de máxima velocidad. Los elefantes pueden llegar también a los 40  $km/h$ , pero sólo en arrancadas muy cortas, mientras que su velocidad en carrera sostenida es del orden de los 15  $km/h$  y unos 7  $km/h$  durante su marcha normal. Los ratones y pequeños roedores llegan a velocidades máximas entre los 10  $km/h$  y los 20  $km/h$ .



**Fig. 1.4.** Velocidades máximas alcanzadas por algunos animales africanos.

Los humanos se desplazan caminando a una velocidad del orden de  $1 \text{ m/s}$ . Los mejor dotados para la carrera y bien entrenados llegan a moverse a unos  $10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$  sobre distancias no superiores a los  $200 \text{ m}$ , aunque hay momentos en los que pueden alcanzar los  $45 \text{ km/h}$ . Para distancias más largas, del orden de varios kilómetros, con un entrenamiento adecuado se puede mantener una velocidad sostenida de cerca de  $20 \text{ km/h}$ .



**Fig. 1.5.** Velocidad media en función de la distancia recorrida para los récords del mundo de atletismo, de  $100 \text{ m}$  a  $42 \text{ km}$  (Maratón).

Las aves pueden moverse más rápidamente que los animales terrestres debido a que no tienen que desplazar las extremidades sobre el suelo y a la forma aerodinámica que pueden adoptar. Las rapaces, como los halcones (*Falconidae*) o las águilas (*Accipitridae*), pueden llegar a alcanzar, mientras caen en picado hacia una presa minimizando la superficie de fricción con el aire, hasta unos increíbles  $250 \text{ km/h}$  a  $300 \text{ km/h}$ .

Los animales marinos, por el contrario, deben moverse en un medio que ofrece mucha mayor resistencia que el aire y, por esa razón, alcanzan velocidades menores. Entre los más veloces se encuentran algunas especies de tiburones que pueden llegar hasta cerca de los  $50 \text{ km/h}$ , mientras que los delfines se sitúan en los  $20 \text{ km/h}$  y las focas en algo más de los  $10 \text{ km/h}$ . Las gigantescas ballenas azules pueden mantener una velocidad de crucero de unos  $20 \text{ km/h}$ , pero cuando entran en situación de alarma y quieren alejarse lo más rápido posible de algún peligro potencial pueden llegar hasta los  $48 \text{ km/h}$ .

Un parámetro que puede ser comparado entre animales de muy diferente tamaño y estructura anatómica es la velocidad a la que se produce la transición entre la marcha, que es la fase de desplazamiento terrestre durante la cual siempre hay alguna extremidad en contacto con el suelo, y la carrera, que es la fase aérea, en la que hay muchos momentos en los que no existe ese contacto. La velocidad de transición es propia de cada especie y es una función monótona del tamaño del animal, según una ley que veremos en otro capítulo. La velocidad de transición para los ratones es del orden de los 2,5 km/h, la de los perros varía entre los 6 km/h y los 15 km/h, la de los humanos se sitúa alrededor de los 9 km/h y la de los caballos es del orden de los 25 km/h.

### 1.3 La aceleración

#### 1.3.1 Definición

Normalmente los cuerpos no se mueven con velocidad constante, sino que ésta varía. La magnitud que mide la variación de la velocidad en función del tiempo se llama aceleración y se define también localmente en cada punto de la trayectoria haciendo el límite del cociente entre el incremento de la velocidad y el intervalo de tiempo en el que se produce dicho incremento:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (1.2)$$

La aceleración es, por lo tanto, una nueva magnitud vectorial cuyas dimensiones son

$$[a] = LT^{-2}$$

que, en el Sistema Internacional, se expresa en  $m/s^2$  (metros por segundo al cuadrado).

**Observación. La aceleración de la gravedad.** La aceleración de la gravedad, al nivel del mar, es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra de módulo  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ , que redondearemos normalmente a  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Ya veremos que **la aceleración que adquiere un cuerpo es la magnitud dinámica básica al estar determinada por las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo**. Si conociéramos la aceleración en función del tiempo podríamos deducir la trayectoria que sigue la partícula siempre que sepamos cuáles son las condiciones iniciales, es decir, la posición y la velocidad del cuerpo en

un tiempo dado que tomaremos siempre, por comodidad, como origen de tiempos,  $t = 0$ .

### 1.3.2 El movimiento uniforme y rectilíneo

La aceleración es el parámetro que caracteriza el tipo de trayectoria que sigue un cuerpo, por lo que describiremos a continuación los tipos de movimiento ligados a aceleraciones simples. El más sencillo es el asociado a una aceleración cero. La expresión de la velocidad y de la posición en función del tiempo y de las condiciones iniciales es inmediata. En efecto, para el caso  $a = 0$ , tenemos que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

por lo que  $\vec{v}$  no dependerá del tiempo y será una constante. Si fijamos como condición inicial  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ , entonces el cuerpo se moverá siempre con esa misma velocidad:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

Ahora, de la definición de velocidad se sigue que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

de donde podemos despejar  $\vec{r}(t)$ , con el resultado:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \text{constante}$$

y, fijando la posición inicial  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ , llegamos a la expresión final de la posición en función del tiempo (es decir, la trayectoria) de forma unívoca en función de la posición y velocidad iniciales:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

La velocidad es un vector, por lo que el que sea constante a lo largo de toda la trayectoria implica que lo son sus tres componentes y, en consecuencia, tanto su módulo como su dirección. **Cuando un cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria con una velocidad cuyo módulo es constante se dice que el movimiento es uniforme.** La constancia de la dirección de la velocidad implica, por otra parte, que el cuerpo se desplaza necesariamente a lo largo de una recta, por lo que **el movimiento asociado a una aceleración nula es uniforme y rectilíneo, es decir, unidimensional.** Escogiendo ahora un sistema de coordenadas tal que uno de los ejes coincida con la recta a lo largo de la

cual se desplaza el cuerpo, podemos describirlo por completo con ayuda de una sola coordenada, por ejemplo la  $x$ .

Así, para el caso de aceleración cero, basta siempre con un conjunto de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 \\x(t) &= x_0 + v_0 t\end{aligned}$$

**Observación. El reposo.** *El reposo es el caso particular de movimiento uniforme y rectilíneo en el que la velocidad inicial  $v_0 = 0$ . Siempre que nos refiramos a casos de movimiento uniforme y rectilíneo debemos recordar que el reposo es un caso particular de este tipo de movimiento, dependiendo de las condiciones iniciales o, como veremos más adelante, de la elección del sistema de referencia.*

### 1.3.3 El movimiento uniformemente acelerado

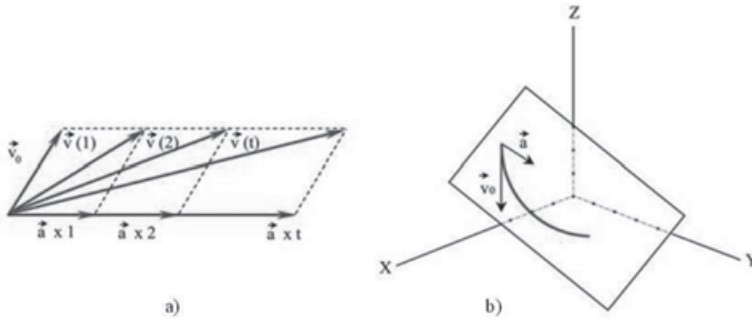
El caso más simple, aparte del movimiento uniforme y rectilíneo, es el asociado a una aceleración constante, que recibe el nombre de uniformemente acelerado. Muchas veces es posible aproximar un movimiento complicado, por ejemplo el que sirve para darse impulso en un salto, suponiendo que se produce con una aceleración constante que sería, en casos como éste, una aceleración promedio. Si la aceleración  $\vec{a}$  es constante (como magnitud vectorial, es decir, en módulo y en dirección), la velocidad tiene la forma:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (1.3)$$

y, a partir de estas expresiones, también podemos encontrar la ecuación de la trayectoria, es decir, la posición en función del tiempo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (1.4)$$

Nótese, de la ecuación (1.3), que la velocidad  $\vec{v}(t)$  es un vector contenido en un mismo plano para todo instante  $t$ , ya que es la suma de un vector fijo,  $\vec{v}_0$ , y otro que varía con el tiempo pero es siempre proporcional a  $\vec{a}$ , tal y como puede verse en la figura 1.6. Ahora bien, como la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en cada punto, ésta debe ser una curva plana, es decir, contenida íntegramente en un plano.



**Fig. 1.6.** a) La velocidad en un movimiento uniformemente acelerado para los instantes 1 s y 2 s y t. En todos los casos está contenida en el plano que forman la velocidad inicial y la aceleración. b) El movimiento uniformemente acelerado transcurre siempre en el plano que forman la velocidad inicial y la aceleración.

**El caso más general de movimiento uniformemente acelerado es, por lo tanto, bidimensional, contenido en el plano definido por la velocidad inicial y la aceleración,** y siempre podremos elegir un sistema de referencia tal que dos de sus ejes estén contenidos en ese plano y la tercera coordenada sea irrelevante. Para el caso en el que la velocidad inicial sea cero, o bien sea un vector paralelo a la aceleración, el plano del movimiento se reduce a la recta que contiene la aceleración y el movimiento es unidimensional, a lo largo de la misma. Estudiaremos primero este caso.

### Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Escogemos como eje X la recta que contiene a la aceleración y las ecuaciones vectoriales del caso general se reducen a una sola dimensión:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

donde todos los parámetros,  $v_0$ ,  $a$ , y  $x_0$ , pueden tener valores positivos o negativos según se sitúen en el eje X, cuya dirección convenimos en definir como positiva hacia la derecha. Si queremos encontrar una relación entre posición y velocidad en cada punto de la trayectoria, no tenemos más que eliminar la variable tiempo entre estas dos ecuaciones. Es decir, despejando  $t$  de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a}{2} \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 = x_0 + \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

de donde:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (1.5)$$

El caso más frecuente es el del movimiento de cuerpos bajo la acción de la gravedad terrestre, caracterizados por una aceleración aproximadamente constante dirigida a lo largo de la dirección vertical, siempre hacia abajo. Si identificamos ahora el eje  $Y$  con la dirección vertical y, como es usual, escogemos el sentido positivo del mismo hacia arriba, la aceleración tendrá un valor  $-g$ , con  $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$ . Las velocidades  $v$  y  $v_0$  deben entenderse ahora como velocidades a lo largo de dicho eje, positivas cuando son hacia arriba y negativas hacia abajo según la convención adoptada. La ecuación (1.5) se escribirá ahora:

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) = 2g(y_0 - y) \quad (1.6)$$

Si, por ejemplo, tomamos como origen el punto en el que el eje  $Y$  corta el suelo y dejamos caer un cuerpo que estaba en reposo ( $v_0 = 0$ ) desde una altura inicial  $y_0$ , la velocidad a la que llegará al suelo ( $y = 0$ ), en el supuesto de que no haya rozamiento con el aire, será:

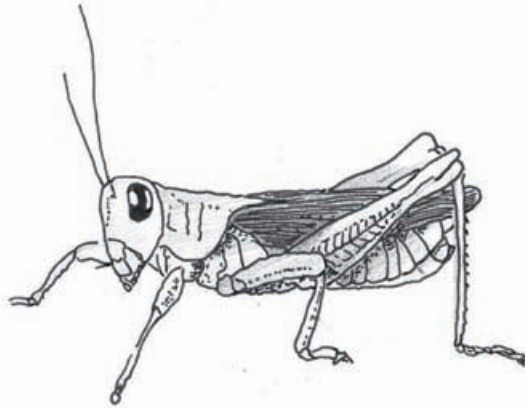
$$v = \sqrt{2gy_0} \quad (1.7)$$

**Ejemplo.** Si aplicamos esta ecuación a una bola de vidrio, de acero o de otro material denso, de forma que el rozamiento con el aire sea pequeño, que dejamos caer desde una altura de 1 m, la velocidad con la que llegará al suelo es  $v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1} = 4,4 \text{ m/s} = 15,9 \text{ km/h}$ .

**Ejemplo. El saltamontes.** Los saltamontes y las langostas (Acrididae) son capaces de alcanzar, en ausencia de rozamiento con el aire, unos 45 cm en salto vertical. A partir de este dato y de la ecuación (1.6) es posible encontrar la velocidad con que necesita despegar del suelo. En efecto, el punto de máxima altura está caracterizado por una velocidad cero, ya que es el punto en el que el animal, que se movía con velocidad ascendente (positiva), se para momentáneamente justo antes de caer con velocidad descendente (negativa). Es decir,  $v = 0$  cuando  $y = 0,45 \text{ m}$ . Como parte desde el suelo,  $y_0 = 0$ , resulta que

$$v_0 = \sqrt{2gy} \approx 3,0 \text{ m/s}$$





**Fig. 1.7.** Saltamontes. Nótese los potentes músculos del fémur en las patas saltadoras.

*Para llegar a despegar con esta velocidad, el saltamontes ha tenido que flexionar sus patas y luego extenderlas imprimiendo así un movimiento que podemos tomar como uniformemente acelerado hacia arriba durante el tiempo que dura la extensión. La longitud a lo largo de la cual el movimiento se acelera hasta llegar a la velocidad de despegue es del orden de magnitud de la longitud de las patas, pongamos unos 3 cm. Podemos ahora calcular la aceleración que el saltamontes necesita imprimir a su cuerpo para llegar a dicha velocidad:*

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{3,0^2}{2 \times 0,03} \approx 150 \text{ m/s}^2 \approx 15 g$$

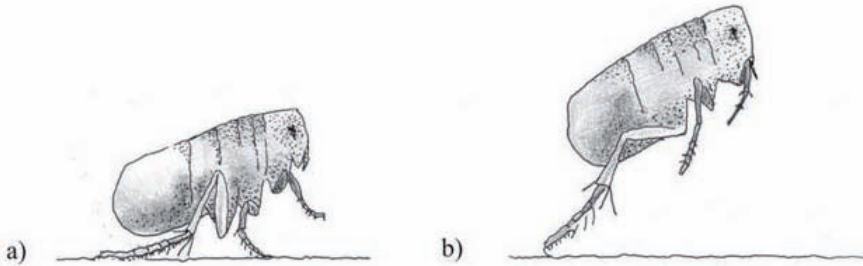
*donde g es la aceleración de la gravedad. El tiempo de aceleración es*

$$t = \frac{v_0}{a} = 0,02 \text{ s}$$

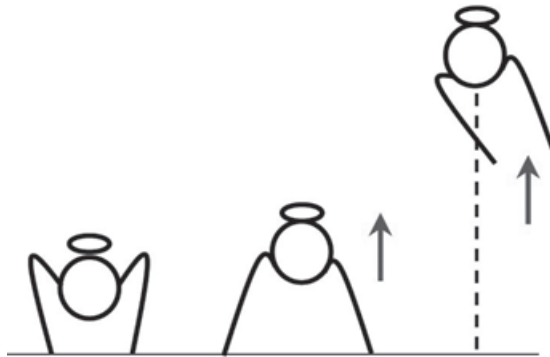
### El salto en los animales

Muchos animales están especialmente dotados para el salto como modo de huir de los depredadores, de desplazarse o de alcanzar a sus presas. Concentrándonos en el salto en vertical, resulta que, por razones que veremos más adelante, las capacidades saltadoras son bastante independientes del tamaño. **Para animales isométricos, es decir, que tienen la misma forma aunque de distinto tamaño, la velocidad de despegue que pueden alcanzar es la misma y, por lo tanto, si no hubiera rozamiento llegarían exactamente a la misma altura.** Así, un pequeño canguro de 30 cm de altura puede llegar a saltar 2 metros, lo mismo que un canguro de más de 1,5 metros de altura. Animales de proporciones distintas pueden alcanzar velocidades de despegue distintas, pero su rango de variación no es muy grande. Una pulga (*Siphonaptera*) del género

*Pulex*, por ejemplo, puede llegar a saltar unos 25 cm en vacío (en aire alcanza algo menos de 20 cm debido al rozamiento que, para un animal tan pequeño, es muy grande), es decir, cerca de unas 200 veces su propia altura.



**Fig. 1.8.** Esquema de una pulga (*Spilopsyllus*) de 1,5 mm de longitud. a) Un milisegundo antes de saltar. b) Durante el primer milisegundo de vuelo.



**Fig. 1.9.** Fases de flexión, despegue y vuelo de una pulga.

Una persona, por el contrario, salta en vertical apenas 60 cm, que es mucho menos que su propia altura. Quizá esta afirmación resulte extraña, teniendo en cuenta que el récord de salto de altura se sitúa más allá de los 2,40 m, pero en un salto atlético el centro de gravedad del atleta parte, en el momento del despegue, de una altura inicial superior a un metro, se toma carrerilla y se convierte parte de la velocidad de carrera en velocidad vertical gracias a la recuperación elástica de los tejidos de las piernas y, además, la técnica del salto permite girar el cuerpo alrededor del listón y superarlo aunque se encuentre por encima del centro de gravedad del saltador. En un salto en vertical puro, el único impulso es el que se da al flexionar y luego extender las piernas. Si tras el impulso inicial se mantienen las piernas extendidas, los pies difícilmente superarán los 60 cm de separación del suelo. El rozamiento con el aire, para el caso de una persona, es irrelevante, por lo que podemos calcular directamente

la velocidad de despegue, unos  $3,4 \text{ m/s}$ , no muy distinta de la alcanzada por el saltamontes. Sin embargo, el espacio y el tiempo de aceleración son mucho mayores para una persona que para un animal de pequeño tamaño, por lo que las aceleraciones que deben imprimir a su movimiento de impulso son muy distintas, como puede verse en la tabla 1.2.

**Tabla 1.2. Características del salto de algunos animales**

Magnitud	Pulga	Escar. de resorte	Saltamontes	Rana	Gálago	Persona
Masa	0,5 mg	40 mg	0,44 g	10 g	200 g	70 kg
Altura de salto	25 cm	33 cm	45 cm	40 cm	220 cm	60 cm
Distancia de aceleración	0,075 cm	0,077 cm	3 cm	4 cm	30 cm	50 cm
Velocidad de despegue	2,2 m/s	2,5 m/s	3,0 m/s	2,8 m/s	6,6 m/s	3,4 m/s
Tiempo de despegue	0,0007 s	0,0006 s	0,02 s	0,03 s	0,09 s	0,29 s
Aceleración	$3.200 \text{ m/s}^2$	$4.200 \text{ m/s}^2$	$150 \text{ m/s}^2$	$98 \text{ m/s}^2$	$72 \text{ m/s}^2$	$12 \text{ m/s}^2$
Ac. en términos de g	330 g	429 g	15 g	10 g	7 g	1,2 g

Las alturas de salto no se corresponden a los valores reales, que son bastante menores en los animales más pequeños debido al rozamiento con el aire, sino que son las que alcanzarían aproximadamente en ausencia de rozamiento.

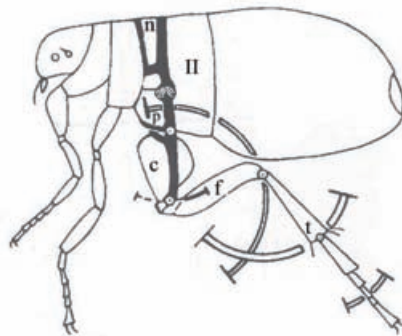
Nótense las enormes aceleraciones que alcanzan los animales más pequeños para llegar, a lo largo de una diminuta longitud de aceleración, hasta velocidades de despegue de entre  $2 \text{ m/s}$  y  $3 \text{ m/s}$ . Las aceleraciones, que se dan en  $\text{m/s}^2$  y también en términos de la gravedad terrestre  $g$ , pueden acercarse a los  $500 g$ , que es el límite aproximado de resistencia a la destrucción de los tejidos blandos y los órganos internos. No podrían producir una mayor aceleración porque la organización interna de sus cuerpos se desmoronaría. En los humanos, aceleraciones del orden o superiores a  $10 g$  producen ya daños irreversibles.

Los campeones, en cuanto a aceleración de despegue, son los escarabajos de resorte y las espumadoras o chinches babosas. El escarabajo de resorte

(*Elateridae*) cuando se encuentra en posición invertida, con el abdomen hacia arriba, curva el dorso y pone en marcha un mecanismo de recuperación elástica que permite a algunos de ellos, como los del género *Athous*, saltar hasta 30 cm en aire desarrollando aceleraciones de despegue de más de 400 g. Por su parte, la chinche babosa (*Philaenus spumarius*) tiene una longitud de unos 6 mm y es capaz de elevarse a alturas de entre 40 cm y 70 cm, generando en la fase de impulso aceleraciones del mismo orden que el escarabajo de resorte (unos 400 g).

Lo llamativo no está sólo en las aceleraciones que alcanzan estos animales, sino también en el corto intervalo de tiempo del que disponen en la fase de despegue, menos de una milésima de segundo para una pulga o un escarabajo de resorte. Pero es imposible que una fibra muscular se contraiga tan rápidamente, así que en los animales saltadores más pequeños ha surgido evolutivamente un procedimiento para darse impulso distinto a la contracción muscular directa. Se trata de un mecanismo de catapulta por el que se acumula la energía de contracción de los músculos en un dispositivo que actúa como un muelle y que, cuando se suelta, dispara al animal hacia arriba. Es exactamente lo que ocurre cuando un arquero flexiona el arco utilizando su fuerza muscular durante un cierto intervalo de tiempo y luego éste recupera su forma original, en un tiempo mucho menor, impulsando la flecha con una velocidad que no podría nunca ser alcanzada mediante la acción directa del brazo.

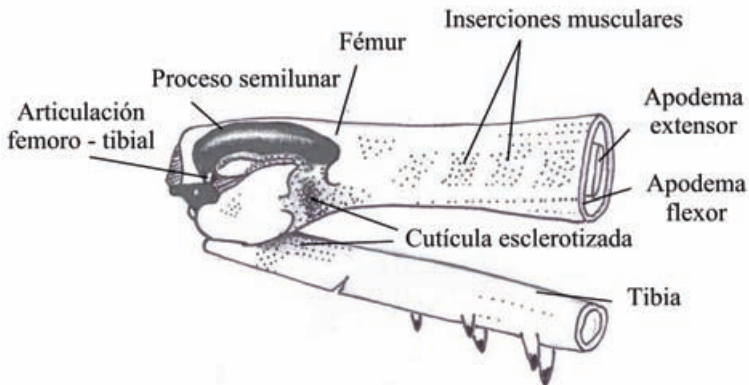
El dispositivo utilizado por estos pequeños animales está constituido por una pieza de resilina, una proteína con propiedades elásticas parecidas a las del caucho, capaz de almacenar energía elástica en volúmenes diminutos; por ejemplo, el resorte de resilina de una pulga tiene una masa aproximada 4.000 veces menor que la masa total de la pulga.



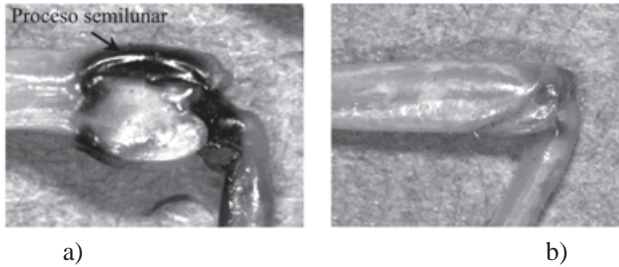
**Fig. 1.10.** Esquema de los elementos principales del esqueleto de una pulga (*Pulex*) que participan en el salto. El bloque de resilina (II) se sitúa entre el notum o tergo (n) y la pleura (p). También se representan la coxa (c), el fémur (f) y la tibia (t). Bennet-Clark y Lucey (1967).

Las cualidades elásticas de este caucho proteico, rico en glicocola, son comparables o superiores a las de los mejores cauchos sintéticos, pudiéndose alargar hasta varias veces su longitud en reposo de forma reversible, sin deformaciones permanentes. La resilina se encuentra también en la base de las alas de muchos insectos voladores y sus propiedades elásticas sirven también para mantener la frecuencia de movimiento de las alas. Muy probablemente, las estructuras de resilina adaptadas al salto en los artrópodos sean una derivación evolutiva de las que servían para el vuelo.

Los animales como la pulga, el escarabajo de resorte o la espumadora acumulan energía comprimiendo lentamente la estructura de resilina con sus músculos y bloqueándola en la posición previa al salto mediante un mecanismo de sujeción. Cuando este mecanismo se desconecta, la resilina actúa como un muelle y libera rápidamente la energía almacenada extendiendo las patas mucho más rápidamente de lo que haría la contracción muscular simple sin almacenamiento de resorte. Los animales pequeños, como las pulgas, basan sus capacidades para el salto en los mecanismos tipo catapulta de sus patas saltadoras, mientras que en el saltamontes, más grande y con tiempos de despegue en un factor superior a 30, se sirven de un mecanismo mixto, en el que una parte de la aceleración la producen mediante la acción directa de los músculos de sus patas saltadoras, muy poderosos en el fémur, y otra parte mediante resortes de una proteína elástica con propiedades similares a las de la resilina. En los saltamontes, en particular, el principal elemento elástico se encuentra en una estructura llamada proceso semilunar situada en la junta de la rodilla.

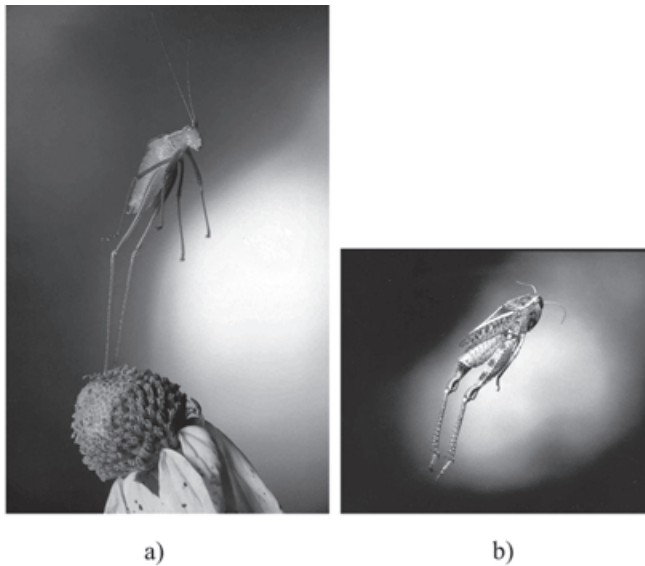


**Fig. 1.11.** Articulación del fémur y la tibia (“rodilla”) en la pata saltadora de un saltamontes. El proceso semilunar y, en menor medida, el apodema extensor son las estructuras que acumulan energía elástica en la flexión de la articulación para luego liberarla en el momento del salto. Bennet-Clark (1975).



**Fig. 1.12** a) Región de la “rodilla” en la pata trasera, saltadora, del saltamontes *Schistocerca gregaria* mostrando la estructura en la que se aloja el proceso semilunar.  
b) La misma región en la pata intermedia, no saltadora, del animal en la que esa estructura no existe. Heitler (1999).

Puede apreciarse, a simple vista, la diferencia entre las articulaciones de las patas saltadoras (traseras) y las de las patas intermedias, que no sirven para saltar, de la *Schistocerca gregaria* de la figura 1.12. Hay otros ortópteros, en particular algunos grillos de la familia *Tettigoniidae*, que no poseen mecanismos de catapulta y los sustituyen con patas desproporcionadamente largas para prolongar el tiempo de aceleración y conseguir grandes velocidades de despegue.



**Fig. 1.13.** a) Los grillos (*Tettigoniidae*) tienen patas más largas que los saltamontes (*Acrididae*). Parece improbable que la articulación de la “rodilla” sea suficientemente ancha como para albergar una estructura elástica similar a la que se encuentra en las articulaciones del saltamontes, pero la notable longitud de las patas incrementa la longitud y la duración de la fase de aceleración. En la foto puede verse un *Leptophyes punctatissima* a punto de iniciar el despegue.  
b) En el saltamontes *Calliptamus* de la figura se aprecia el ensanchamiento de la “rodilla” en el que se aloja la estructura elástica que sirve para aumentar la potencia del salto. Brackenbury (1992).

En los animales que utilizan este tipo de dispositivos, los saltos se suceden de forma discontinua, ya que es preciso almacenar energía comprimiendo los resortes entre salto y salto. La pulga, por ejemplo, tarda aproximadamente una décima de segundo en plegar las patas saltadoras y almacenar energía, manteniéndolas en posición de bloqueo durante dos centésimas de segundo, mientras que el impulso para saltar dura menos de una milésima de segundo.

Los animales más grandes, incluidos todos los mamíferos, adquieren la aceleración necesaria para despegar mediante la acción simple de los músculos de las piernas. En los casos del gálgalo (*Galago senegalensis*), que son primates saltadores de pequeño tamaño de la familia *Lorisoidea*, o de los canguros, la altura que alcanzan es sensiblemente superior a la del resto de los animales, debido a que su configuración corporal es tal que los músculos activados al saltar suponen una fracción de la masa total del cuerpo muy superior a lo habitual en el resto de los animales, como puede verse en la figura 6.16 del capítulo 6. Están, así, especialmente adaptados al salto.

### Movimiento uniformemente acelerado en dos dimensiones

Dado que el caso más general de movimiento uniformemente acelerado está siempre contenido en un plano, elegiremos los ejes  $X, Y$  dentro del plano que forman la velocidad inicial y la aceleración. Consideraremos también, desde el principio, que la aceleración  $a$  que está sometido el móvil es la gravedad terrestre, es decir,  $\vec{a} = (0, -g)$ , con  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Tomaremos el origen de coordenadas de forma que la coordenada  $x = 0$  coincida con la abscisa del móvil en el instante inicial, es decir,  $x_0 = 0$ , y el sentido positivo del eje  $X$  con el sentido de la componente  $x$  de la velocidad inicial, mientras que la coordenada  $y = 0$  estará a la altura del punto de caída. Como puede verse en la figura 1.4. A partir de la expresión general (1.4), las ecuaciones del movimiento son, en este caso:

$$x(t) = v_{0x}t \quad (1.8)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.9)$$

$$v_x = v_{0x} \quad (1.10)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (1.11)$$

donde  $y_0$  es la ordenada del móvil en el instante inicial y  $v_{0x}, v_{0y}$  son las componentes de la velocidad inicial, que pueden escribirse en función del

módulo de la velocidad,  $v_0$ , y del ángulo  $\alpha$  que forma el vector  $\overline{v_0}$  con la horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (1.12)$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.8-9) son la expresión de lo que se llama trayectoria cinemática, que nos dan las coordenadas del móvil en cada instante, pero con frecuencia interesa únicamente la trayectoria geométrica, es decir, la forma de la curva que describe, independientemente del tiempo en que se pase por cada uno de sus puntos. La forma que contiene más información es, por supuesto, la trayectoria cinemática, pudiéndose pasar de ésta a la geométrica, pero no al contrario.

**El procedimiento de pasar de la trayectoria cinemática a la geométrica es muy simple. Basta eliminar el tiempo del conjunto de las ecuaciones que la caracterizan.** Así, para una trayectoria tridimensional, descrita por las tres ecuaciones que dan las componentes  $x, y, z$  en función del tiempo, eliminar la variable  $t$  despejándola de una de ellas y sustituyendo en las otras dos nos da un par de ecuaciones que describen una curva en el espacio. Para el caso de una trayectoria en un plano, como la que estamos considerando, despejar  $t$  de una ecuación y sustituirla en la otra nos deja con una sola ecuación en  $x, y$  que describe una curva en ese plano. En nuestro caso, despejando  $t$  de la ecuación (1.8) y sustituyendo en (1.9), obtenemos:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 \quad (1.14)$$

que es una parábola, por lo que **el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad terrestre recibe el nombre de movimiento parabólico.** Nótese que, debido al signo menos del término en  $x^2$ , la parábola tiene los “cuernos” hacia abajo, tendiendo  $y$  a  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $\pm\infty$  (ver la figura 1.14). Podemos reescribir la ecuación (1.14) en términos del ángulo de lanzamiento con ayuda de las expresiones (1.12-13):

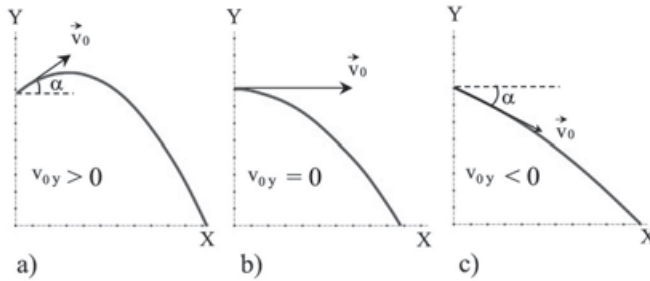
$$y = y_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 (\cos \alpha)^2} x^2 \quad (1.15)$$

La derivada en el origen es:



$$\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \operatorname{tg} \alpha$$

y, por lo tanto, puesto que  $v_{0x}$  es positiva por construcción del eje X, la derivada en el origen de la trayectoria tiene el signo de la componente y de la velocidad inicial. En la figura 1.14 puede verse cómo es la trayectoria para los tres casos de  $v_{0y}$  positiva, cero y negativa.



**Fig. 1.14.** Movimiento parabólico en la gravedad terrestre:  
 a) Con velocidad inicial de componente vertical positiva.  
 b) Con velocidad inicial de componente vertical cero.  
 c) Con velocidad inicial de componente vertical negativa.

Cuando la altura inicial es cero,  $y_0 = 0$ , la componente y de la velocidad inicial es necesariamente positiva y estamos en el caso particular del movimiento de un proyectil que es disparado desde la altura del suelo y va a impactar sobre esa misma altura (ver la figura 1.15). En ese caso, la ecuación de la trayectoria es:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 \quad (1.16)$$

que pasa por el origen ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ). A partir de esta expresión es muy fácil calcular el alcance máximo, que corresponderá al valor de  $x$  para el que la trayectoria vuelva a pasar por  $y = 0$ . Es decir, poniendo  $y = 0$  en la ecuación (1.16) y despejando  $x$ , obtenemos:

$$x_M = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \quad (1.17)$$

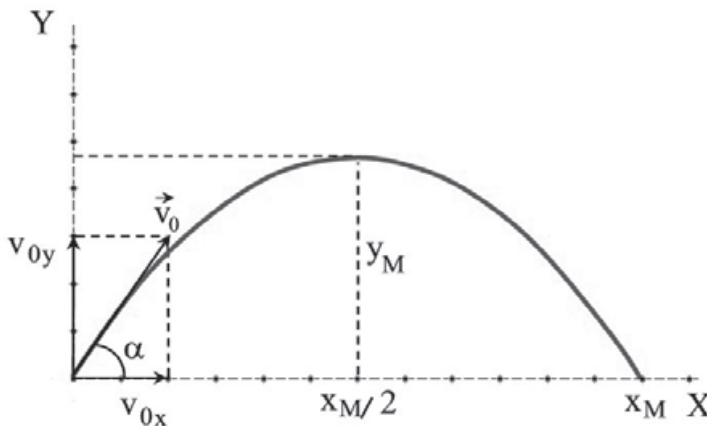
Para una velocidad inicial de módulo  $v_0$ , **el alcance máximo se logra con un ángulo de tiro tal que  $\operatorname{sen} 2\alpha$  adquiera su valor máximo, igual a 1, es decir,  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ , o lo que es lo mismo,  $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ .** Para ángulos superiores,

el tiro es bombeado, mientras que para ángulos inferiores el tiro es rasante. La altura máxima alcanzada se obtendrá calculando el máximo de  $y$  en la ecuación (1.16):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{1}{2} x_M$$

$$y_M = y\left(\frac{1}{2} x_M\right) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} - \frac{g}{2v_{0x}^2} \left(\frac{v_{0x} v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 (\text{sen}\alpha)^2}{2g} \quad (1.18)$$

Obsérvese que la trayectoria pasa por su altura máxima justo a la mitad de su recorrido debido a la simetría de la parábola. Por ejemplo, una pelota de golf lanzada con un ángulo de  $60^\circ$  respecto de la horizontal, que impacta en el suelo a 90 metros del punto de salida, ha tenido que ser impulsada con una velocidad inicial  $v_0 = 32 \text{ m/s} = 115 \text{ km/h}$ . La pelota, con esa misma velocidad, llegará a la misma distancia si sale con un ángulo de  $30^\circ$ , mientras que si se lanzara con un ángulo de  $45^\circ$  podría haber llegado a los 104 metros.



**Fig. 1.15** Movimiento parabólico. Caso en el que la posición inicial es el origen de coordenadas.

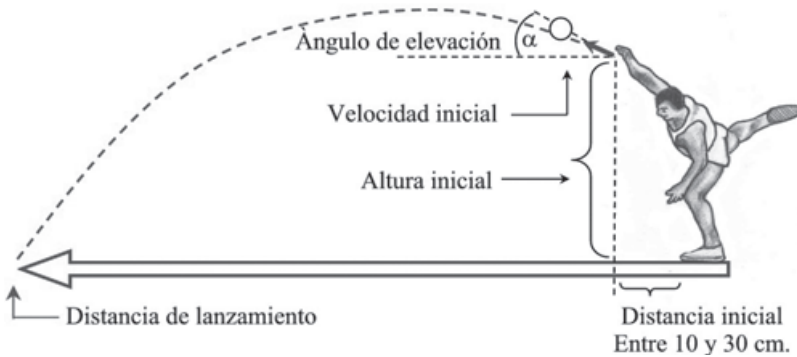
La ecuación de la trayectoria puede ahora escribirse en términos de  $x_M$  e  $y_M$  sustituyendo en la ecuación (1.16) los valores de  $v_{0x}$  y  $v_{0y}$  por  $x_M$  e  $y_M$ , de la siguiente forma:

$$y = 4 \frac{y_M}{x_M} x \left(1 - \frac{x}{x_M}\right) \quad (1.19)$$

**Ejemplo.** Consideremos un lanzador de peso que lanza su artilugio desde una altura  $y_0$ , con una velocidad  $v_0$  y un ángulo  $\alpha$ . A partir de la ecuación (1.15), el punto de impacto estará a una distancia  $x_M$  tal que:

$$0 = y_0 + x_M \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x_M^2}{2 v_0^2 (\cos \alpha)^2} \quad (1.20)$$

Para el caso de un lanzador que llegue a los 21 metros desde la vertical del punto de salida del peso (la distancia medida será, en realidad, de 21 m más los 10 a 30 cm que hay desde el borde del círculo de lanzamiento hasta dicho punto), saliendo éste de la mano a una altura de 2,20 m y con un ángulo de  $35^\circ$ , puede calcularse de la ecuación (1.20) la velocidad  $v_0$  que debe imprimir a la bola.



**Fig. 1.16.** Lanzador de peso. Parámetros básicos del lanzamiento.

El resultado es

$$v_0 = 13,8 \text{ m/s} = 49,8 \text{ km/h}$$

En realidad ese ángulo no es el óptimo. El cálculo del ángulo que maximiza el alcance horizontal puede consultarse en uno de los problemas de este capítulo.

### Las componentes de la aceleración

En el caso de un movimiento en general, siempre se puede descomponer la aceleración en dos componentes, llamadas tangencial y normal, que juegan papeles distintos en la forma del movimiento. Definiremos, en cada punto de la trayectoria, un vector unitario tangente a la misma  $\vec{u}_T$ . Introduciremos también el vector unitario normal  $\vec{u}_N$ , perpendicular a  $\vec{u}_T$  en el sentido de la curvatura de la trayectoria. Como ya se dijo en la sección 1.2, la velocidad es tangente a la trayectoria y, por lo tanto, proporcional al vector unitario tangente en cualquier punto. Llamando  $v$  al módulo de la velocidad:

$$\vec{v} = v\vec{u}_T$$

La aceleración está asociada a la variación de la velocidad en función del tiempo, pudiendo ser ésta tanto de su módulo como de su dirección. Es decir, en general  $v$  y  $u_T$  variarán en el tiempo y por lo tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \quad (1.21)$$

Puede demostrarse que el segundo término es perpendicular a  $\vec{u}_T$ , siendo su módulo igual a  $\frac{v^2}{R}$ , donde  $R$  es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado. La forma más general de la aceleración es, por tanto:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

El primer término recibe el nombre de **aceleración tangencial** y va dirigido en la misma dirección de la velocidad, siendo su módulo igual a la derivada del módulo de la velocidad respecto del tiempo. Es decir, **el “papel” de esta componente es cambiar el módulo de la velocidad y hacer que el móvil se desplace más o menos rápidamente**. El segundo término recibe el nombre de **aceleración normal o centrípeta** y va dirigido a lo largo de la normal a la trayectoria apuntando siempre al centro de curvatura, de ahí su nombre. **Su “papel” no es modificar el módulo de la velocidad o, lo que es lo mismo, la rapidez del movimiento, sino que es el de curvar la trayectoria**. Por supuesto, cuanto mayor es el módulo de la velocidad, más difícil es desviar la trayectoria, y por eso la aceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad, y también cuesta más generar una curvatura grande que una pequeña y, como el radio de curvatura es más pequeño cuanto más grande es la curvatura, es natural que la aceleración centrípeta sea inversamente proporcional a  $R$ . Como ambas componentes de la aceleración son perpendiculares entre sí, se sigue que:

$$a^2 = |\vec{a}|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}$$

Los movimientos pueden ahora clasificarse según sean las dos componentes de la aceleración:

- $a_T = a_N = 0$ : movimiento uniforme y rectilíneo

- $a_T = 0, a_N \neq 0$ : movimiento uniforme (con una velocidad cuyo módulo es constante) pero no rectilíneo

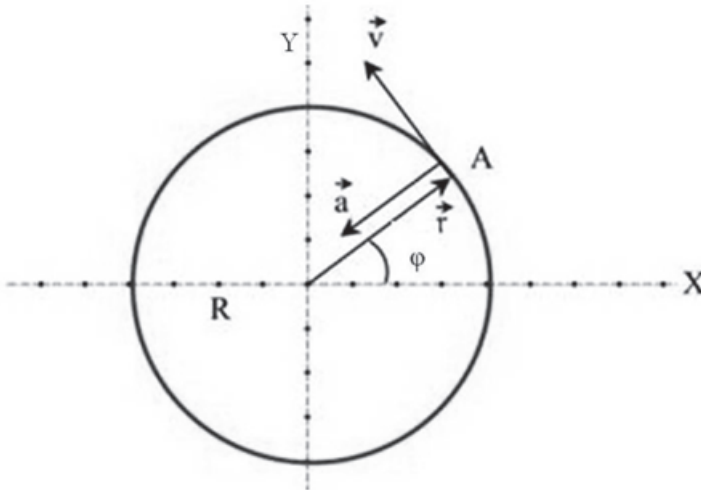
- $a_T \neq 0; a_N = 0$ : movimiento rectilíneo (aunque no uniforme; si  $a_T$  es constante, entonces el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado)

$R = \text{constante}$ : movimiento circular

$R = \text{constante}; a_T = 0$ : movimiento circular uniforme

### 1.3.4 Movimiento circular uniforme

Consideremos el movimiento a lo largo de una circunferencia de radio de curvatura  $R$  constante con una velocidad cuyo módulo es constante y, por lo tanto, la aceleración tangencial es nula.



**Fig. 1.17.** Movimiento circular.

La aceleración centrípeta va siempre dirigida hacia el centro de la circunferencia y su módulo tiene un valor constante igual a  $\frac{v^2}{R}$ . Si no existiera una tal aceleración, el móvil tendría tendencia a seguir en línea recta, y no seguiría la trayectoria circular. **Definimos la velocidad angular,  $\omega$ , como la variación con el tiempo del ángulo que forma el vector posición con un eje fijo que se toma, convencionalmente, como el eje X.** Es decir:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

La velocidad angular se expresa en radianes por segundo y sus dimensiones son  $T^{-1}$ . Teniendo en cuenta la relación entre el elemento de arco y el de ángulo,  $ds = R d\varphi$ , se sigue que:

$$v = \frac{|\vec{dr}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \quad (1.22)$$

Para el caso del movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante, ya que tanto la velocidad lineal como el radio de curvatura lo son. La aceleración normal puede también expresarse en términos de  $\omega$  del siguiente modo:

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = \omega^2 R \vec{u}_N \quad (1.23)$$

Teniendo en cuenta que  $\omega$  es constante, puede calcularse el valor del ángulo y del arco en función del tiempo:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Nótese que cuando el ángulo varía en  $2\pi$  radianes, el cuerpo vuelve a ocupar exactamente la misma posición que tenía inicialmente, ya que se ha completado una vuelta. **Llamamos periodo,  $T$ , al intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones idénticas**, es decir:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi \Rightarrow \varphi(t+T) - \varphi(t) = \omega T = 2\pi; T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si el periodo es el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa, el número de vueltas que da por unidad de tiempo (por segundo) será su inverso y se llama frecuencia,  $f$ :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.24)$$

sus dimensiones son el inverso del tiempo y su unidad el inverso del segundo ( $s^{-1}$ ) o hercio ( $Hz$ ), siendo  $1 Hz = 1 s^{-1}$ . Se suele expresar en vueltas por segundo o revoluciones por segundo.

El movimiento circular puede no ser uniforme, sino estar animado de una aceleración tangencial debido a la cual varíe continuamente el módulo de

la velocidad. En este caso, la velocidad angular no será constante, sino que variará, pudiéndose definir una aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

y para el caso en que la aceleración angular (y la tangencial) sean constantes, el movimiento será circular y uniformemente acelerado. Si se parte del reposo en el instante inicial, la aceleración total será:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + (\alpha t)^2 R \vec{u}_N$$

**Ejemplo.** La Tierra gira alrededor del Sol completando una vuelta en un año. La trayectoria es aproximadamente una circunferencia de 150 millones de kilómetros de radio. En este caso la aceleración centrípeta es la atracción gravitatoria del Sol. La velocidad con que se mueve la Tierra será:

$$v = \frac{2\pi \times 150 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} = 30.000 \text{ m/s} \approx 108.000 \text{ km/h}$$

y la aceleración tendrá el siguiente valor:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(3 \times 10^4)^2}{150 \times 10^9} = 0,006 \text{ m/s}^2$$

**Ejemplo.** Una de las objeciones que se hicieron en su tiempo a la afirmación de que la Tierra estaba animada de un movimiento de rotación sobre sí misma, responsable de la sucesión de los días y las noches, era que las personas no podrían permanecer apoyadas sobre su superficie y serían despedidas al espacio debido a su propia inercia. Ello sería así si la Tierra no ejerciera una fuerza de atracción sobre cualquier cuerpo situado en su superficie que contrarresta dicha inercia. Para que un cuerpo sobre la superficie terrestre siga el movimiento de rotación de la Tierra es necesario que actúe sobre él una aceleración centrípeta cuyo módulo es:

$$a_N = \frac{v^2}{R_T}$$

donde  $v$  es la velocidad de un punto de la superficie terrestre y  $R_T$ , el radio de la Tierra. La máxima velocidad se obtendrá sobre el ecuador, uno de cuyos puntos recorre 40.000 km, que es la longitud de la circunferencia de la Tierra, en 24 horas, que es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa. La velocidad será, por lo tanto,

$$v = \frac{40.000 \text{ km}}{24 \text{ h}} = 1.667 \text{ km/h} = 463 \text{ m/s}$$

Como el radio de la Tierra es de 6.370 km, la aceleración normal será:

$$a_N = 0,034 \text{ m/s}^2$$

Ahora bien, como la aceleración de la gravedad es de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , muy superior a la mínima exigida, todos los cuerpos sobre la superficie terrestre se mantienen en ella y tienden a caer hacia el centro de la Tierra en lugar de salir despedidos al espacio.

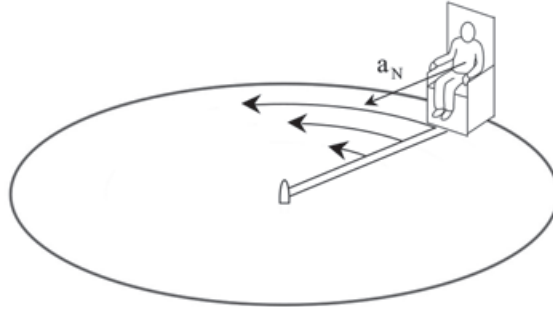
### **La centrífuga de entrenamiento y los efectos fisiológicos de la aceleración**

Los organismos vivos se han adaptado a las aceleraciones que pueden experimentar durante su vida sobre la Tierra, normalmente del orden de  $g$ , que es la aceleración en caída libre, mientras que aceleraciones superiores pueden producir daños sobre órganos y tejidos. En los viajes espaciales se sufren fuertes aceleraciones lineales durante el ascenso sobre un cohete para alcanzar la velocidad de escape de la Tierra (unos 40,000 km/h) desde el reposo, y también en el momento del reingreso en la atmósfera, cuando se produce un fuerte frenado por rozamiento. En el primer caso se trata de aceleraciones sostenidas durante varios minutos en las que el astronauta está situado transversalmente a la dirección de ascenso, produciéndose lo que se conoce como el efecto de “ojos hacia dentro”, mientras que en el caso del reingreso en la atmósfera se trata de picos de fuerte deceleración pero muy cortos, con un efecto llamado de “ojos hacia afuera”. Otros efectos importantes, a los que nos referiremos más adelante, ocurren en situaciones de ingravidez, que se dan cuando se describe una órbita estable alrededor de la Tierra.

La forma más eficaz y utilizada de experimentar con aceleraciones elevadas es con ayuda de un brazo giratorio en cuyo extremo se sitúa el cuerpo sobre el que se quiere experimentar, tal y como se muestra en la figura 1.18. El soporte sobre el que se apoya dicho cuerpo para no salir despedido por su propia inercia es el que imprime a éste la aceleración centrípeta necesaria para mantenerlo girando. Los primeros astronautas norteamericanos se entrenaron



en una centrífuga cuyo brazo tenía una longitud de 15 metros y podía llegar a generar una aceleración de hasta 40 g, es decir,  $392 \text{ m/s}^2$ . Un artefacto de este tipo permite estudiar pautas de aceleración y deceleración durante intervalos breves o prolongados de tiempo, y probar con diferentes posiciones del sujeto sobre el que se experimenta.



**Fig. 1.18.** Esquema de una centrífuga de entrenamiento. El asiento ejerce una fuerza sobre la persona imprimiéndole una aceleración centrípeta, que es la que la obliga a seguir la trayectoria circular.

De acuerdo con las ecuaciones del movimiento circular uniforme, para una aceleración normal dada  $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ , el periodo de rotación  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  y la velocidad lineal vienen dadas, en función de  $R$ , por las siguientes ecuaciones:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{a_N}}$$

$$v = \sqrt{a_N R}$$

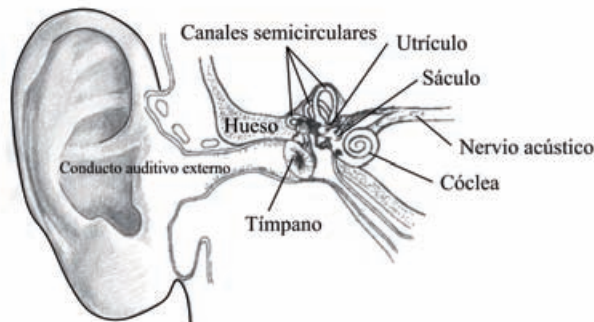
Poniendo ahora  $R = 15 \text{ m}$  y distintos valores de  $a_N$ , se obtienen los valores de  $T$  y  $v$  necesarios para que el cuerpo experimente la aceleración  $a_N$ . Por ejemplo, si queremos que dicha aceleración sea igual a  $g$ , entonces  $T = 7,8 \text{ s}$  y  $v = 44 \text{ km/h}$ , mientras que si queremos llegar a 10 g, el brazo de la centrífuga debe completar una rotación completa en 2,5 s con una velocidad tangencial de 138 km/h, y para 40 g dichos valores deberán ser de 1,2 s y 276 km/h.

En los experimentos con la centrífuga se comprobó que **la posición en la que se producen menos efectos fisiológicos es aquella en la que la aceleración es transversal al cuerpo**, mientras que la aceleración en el sentido de la cabeza a los pies o viceversa es causa de trastornos graves,

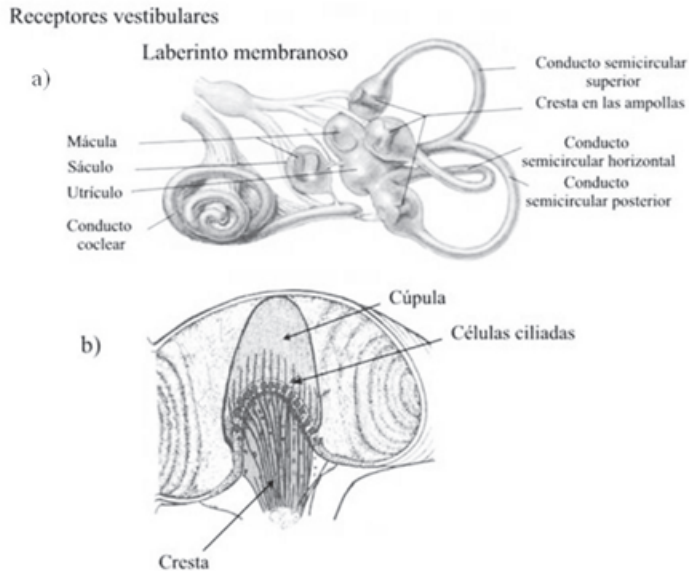
especialmente en el flujo sanguíneo de la cabeza y las extremidades. Una aceleración transversal de unos 3 g es perfectamente tolerable durante varios minutos incluso por personas no especialmente preparadas. Así, durante la fase de ascensión de los vuelos espaciales se soportan aceleraciones de unos 4 g que no causan daños apreciables en posición transversal, mientras que sería imposible soportarlas en posición erguida; por eso los astronautas se tienden en asientos colocados de forma perpendicular a la línea de despegue. Aceleraciones entre 8 g y 10 g podrían tolerarse, en individuos entrenados, durante unos dos minutos sin consecuencias irreversibles. No obstante lo cual, podrían producirse dolores de pecho, dificultad para respirar y desmayos ocasionales. **Más allá de unos 10 g los efectos sobre la salud pueden ser irreversibles excepto si se trata de picos de aceleración muy cortos.** Así, uno de los médicos que experimentaba en la centrífuga fue capaz de soportar una aceleración transversal de 31 g durante 5 segundos. Aceleraciones de este orden durante más tiempo producen daños en los órganos internos, disfunciones cardíacas y pueden llegar a ser letales para los humanos.

### 1.3.5 La percepción de la aceleración en el organismo

Nuestro cerebro es capaz de integrar numerosas informaciones provenientes de los sentidos acerca de la posición del centro de gravedad del cuerpo, de la posición relativa de sus partes, de su orientación respecto del campo gravitatorio terrestre, de la intensidad de éste, o de la aceleración con que nos movemos. Las señales proporcionadas por ojos y oídos complementan las que provienen de músculos, articulaciones, el tacto y los receptores de presión de la piel, sobre todo los situados en la planta de los pies. Pero los órganos especialmente adaptados para detectar la aceleración con que se mueve el cuerpo, muy similares en todos los vertebrados, se encuentran, en los mamíferos, en el oído interno: los canales semicirculares y el vestíbulo.



**Fig. 1.19.** Situación de los canales semicirculares, el utrículo y el sáculo en el oído interno.

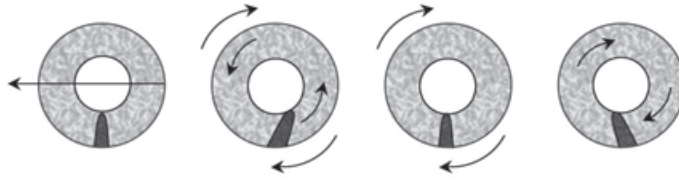


**Fig. 1.20.** a) Los canales semicirculares, el sáculo y el utrículo.

b) Ampolla en el extremo de un canal semicircular con la cresta ampular, la cúpula y las células ciliadas situadas en la cresta.

Los canales semicirculares son tres conductos aproximadamente semicirculares, de un milímetro de diámetro interno para los humanos, contenidos en planos perpendiculares entre sí, dos de ellos verticales, llamados anterior y posterior, y un tercero horizontal, llenos de un fluido, llamado endolinfa. Cada canal tiene en uno de sus extremos una zona dilatada llamada ampolla en cuyo epitelio interno hay una protuberancia en forma de pliegue perpendicular al conducto semicircular correspondiente llamada cresta ampular. Sobre cada cresta hay una masa gelatinosa en forma de campana, llamada cúpula, en la que penetran los cilios de las células sensoriales situadas en la base de la cresta. Las células sensoriales están, a su vez, conectadas a fibras nerviosas que se unen a las que proceden de los otros receptores del vestíbulo para formar parte del nervio acústico. Este órgano es sensible a las aceleraciones angulares que se producen cuando el cuerpo (específicamente la cabeza) gira.

En el caso de aceleraciones angulares, **los canales se mueven con la cabeza, mientras que el fluido contenido en ellos tiende a quedar retrasado por su propia inercia**, lo que genera un movimiento relativo entre éste y los canales que inclina la cúpula en la que se encuentran los cilios de las células sensoriales y éstos se curvan generando **una señal eléctrica** que se transmite al cerebro a través del nervio acústico.



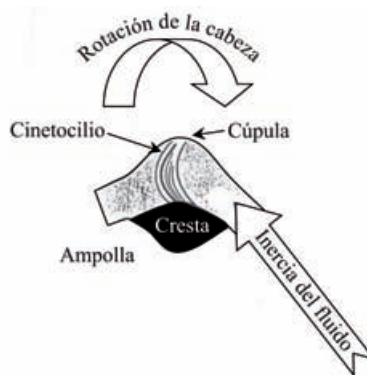
**Fig. 1.21.** Cuando la cabeza se mueve con aceleración lineal pero no circular, la endolinfa y la cúpula con las células ciliadas se mueven acompasadamente, no hay flexión en los cilios y no se genera señal nerviosa.

Cuando el canal gira con una cierta velocidad angular en el sentido de las agujas de un reloj, la endolinfa se mueve en sentido contrario respecto de la cúpula fijada a la pared del canal y se produce una flexión en los cilios que genera una señal nerviosa.

Cuando el canal gira con velocidad angular constante, la endolinfa se mueve al mismo tiempo que las paredes del canal y no hay flexión de la cúpula.

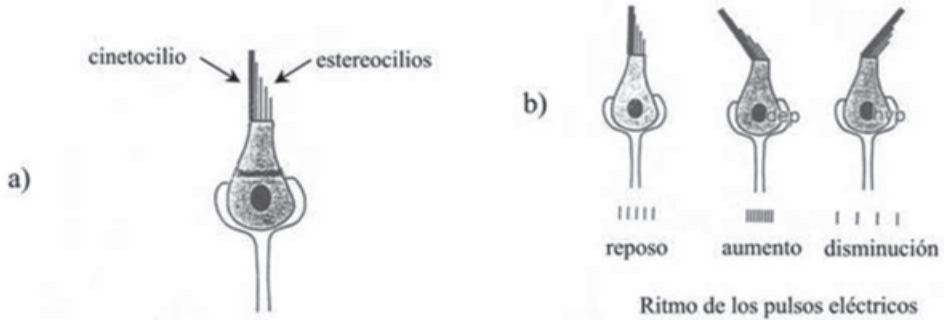
Cuando el giro de la cabeza se detiene, hay una velocidad angular en sentido contrario a las agujas de un reloj y la endolinfa se mueve en sentido contrario, flexionando la cúpula y generando una señal.

Cada célula tiene una prolongación larga y estrecha del citoplasma que forma el cilio más largo, llamado cinetocilio (o cinocilio o kinocilio), situado en posición lateral, y un conjunto de cilios más cortos, también proyecciones del citoplasma, llamados estereocilios. De esta forma, la señal transmitida cuando se produce una aceleración angular que hace que los estereocilios se curven hacia el cinetocilio es de un tipo (aumento del ritmo de pulsos eléctricos), mientras que cuando se curvan alejándose es del tipo contrario (disminución del ritmo de los pulsos).



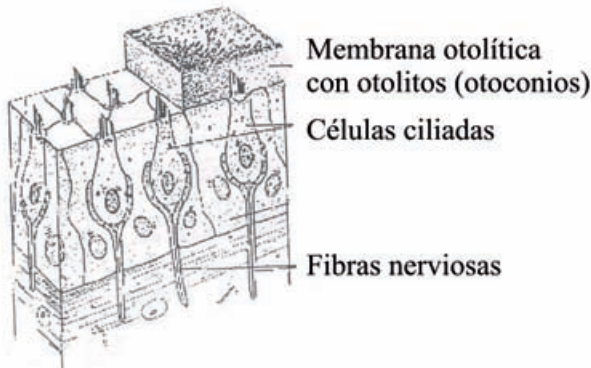
**Fig. 1.22.** Generación de una señal eléctrica en las células ciliadas de la cresta ampular cuando la inercia de la endolinfa flexiona la cúpula en la que están embebidos los cilios.

Teniendo en cuenta que hay un grupo de canales semicirculares en cada lado de la cabeza y que, en cada uno, el efecto sobre los cilios en contacto con el fluido depende de la dirección e intensidad del movimiento, es posible interpretar éste con gran precisión.



**Fig. 1.23.** a) Célula ciliada con el cinetocilio y los estereocilios.  
 b) Señales eléctricas generadas al flexionar los cilios.

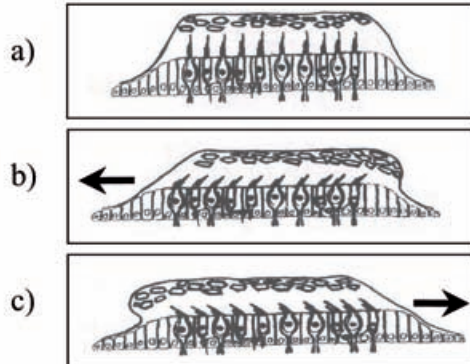
El vestíbulo lo constituyen dos bolsas membranosas comunicadas entre sí llamadas utrículo, de donde parten los canales semicirculares, y sáculo, que se comunica, a su vez, con la cóclea. Las dos bolsas están llenas de endolinfa y presentan en su epitelio interior unas zonas diferenciadas en forma de pliegue hacia el interior, llamadas máculas acústicas, que contienen células sensoriales ciliadas.



**Fig. 1.24.** Mácula del utrículo o del sáculo con las células ciliadas y la membrana gelatinosa con otolitos.

Como en el caso de los canales semicirculares, cada célula tiene un cinetocilio y múltiples estereocilios que penetran en una membrana gelatinosa, situada encima de las máculas, que contiene un gran número de pequeños cristales de carbonato cálcico llamados otolitos. **Cuando la cabeza se mueve**

con una aceleración lineal, los otolitos, más densos que el fluido en el que están sumergidos, tienden a quedarse retrasados y deforman la membrana que contiene a los cilios de las células sensoriales, generando señales con la misma estructura que en el caso de los canales semicirculares.

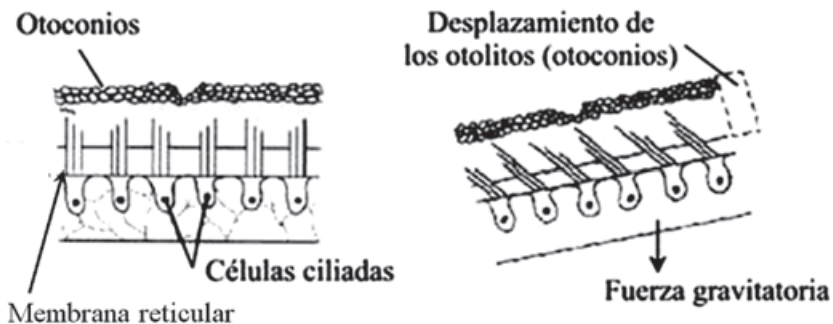


**Fig. 1.25.** a) Mácula en reposo o con velocidad uniforme.

b) Mácula moviéndose con aceleración lineal hacia la izquierda. Los otolitos deforman la membrana gelatinosa y ésta flexiona los cilios de las células ciliadas.

c) Mácula moviéndose con aceleración lineal hacia la derecha.

La mácula del utrículo es sensible, en particular, a las aceleraciones en direcciones paralelas a la superficie terrestre, mientras que la mácula del sáculo es sensible a las aceleraciones en dirección perpendicular a dicha superficie. Cuando cambia la orientación de la cabeza respecto del campo gravitatorio terrestre, los otolitos se mueven buscando la posición de equilibrio y deforman de nuevo los cilios. Así, **los órganos vestibulares no son sólo sensibles a las aceleraciones lineales, sino también a la orientación respecto de la gravedad y a la intensidad de ésta.**



**Fig. 1.26.** Las máculas son sensibles también a la dirección de la gravedad en relación con la orientación de la cabeza. Cuando se produce una inclinación hay un deslizamiento de los otolitos que depende del ángulo de inclinación y de la intensidad de la fuerza gravitatoria.

Una de las causas de la sensación de náusea y de mareo es la incongruencia entre los mensajes que envía el oído interno desde las células ciliadas de los canales semicirculares y los otolitos y las que provienen de los ojos o los sensores corporales, que es lo que sucede con los movimientos bruscos en los medios de transporte. Esa misma sensación de desconcierto y mareo ocurre cuando estando dentro de un automóvil en reposo, otro situado al lado se desplaza suavemente. La sensación visual es que somos nosotros quienes nos estamos moviendo, pero los órganos de la aceleración no registran señal alguna, por lo que se produce una incongruencia entre ambos órganos.

Todos los vertebrados tienen una estructura del oído interno similar, aunque la forma de los canales semicirculares varíe de unos a otros, triangular en los reptiles, elíptica en las aves y casi circular en los mamíferos. También varían el tamaño y la composición de los otolitos y la forma en que interaccionan con los cilios. Cuando son muy finos y parecen partículas de arena, como en el caso de los humanos, se llaman otoconios.

Los invertebrados, excepto los insectos, tienen también órganos para detectar su posición respecto de la gravedad y las aceleraciones que experimentan. Se llaman, en general, estatocistos y los hay en diversas variantes, pero responden al mismo principio que los órganos vestibulares. Es decir, constan de una cavidad tapizada en su interior con células ciliadas y llena de endolinfa en la que hay sumergidos corpúsculos de un material sólido y más denso llamados estatolitos. El movimiento relativo de estos corpúsculos respecto del fluido y su posición en la cavidad provocan flexiones en los estereocilios y, en consecuencia, señales eléctricas que son interpretadas después por el sistema nervioso. En las medusas, que existen desde hace más de 600 millones de años, ya hay estatocistos primitivos, llenos de agua, alineados en el borde de la umbrela. En los moluscos empiezan a aparecer órganos precursores de las crestas ampulares y en los peces más primitivos, los ciclóstomos, la cavidad se aísla del exterior y el fluido interno, la endolinfa, es segregado por el animal. Los cangrejos y las langostas utilizan partículas de arena como estatolitos y los cambian cada vez que mudan de caparazón. Así, se pudo hacer el siguiente experimento: una langosta hizo su muda en un ambiente en el que la arena había sido sustituida por partículas de hierro que incorporó a sus estatocistos. Cuando, mediante un imán, se desplazaban estas limaduras, el animal adoptaba posturas diferentes, como si la orientación del suelo (y la fuerza gravitatoria) hubiera cambiado e intentara colocarse en su posición “normal” respecto al falso campo gravitatorio creado por el imán.

## 1.4 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 1.1** En 12 gramos de carbono existen  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  átomos ( $N_A$  es el número de Avogadro). Si contáramos un átomo por segundo, ¿cuánto tiempo, en años, tardaríamos en contar todos los átomos de un gramo de carbono? Sabiendo que el tiempo transcurrido desde el Big Bang hasta ahora es de  $1,4 \times 10^{10}$  años, ¿cuánto supone este intervalo de tiempo en vidas del Universo?

Sol.:  $\Delta t = 1,59 \times 10^{15}$  años  $\approx$  110.000 vidas del Universo

**Ejercicio 1.2** El corazón humano bombea a razón de 0,083 litros de sangre por segundo. Sabiendo que una persona de dimensiones medias tiene unos 5 litros de sangre, ¿cuánto tiempo tarda el corazón en bombear toda la sangre de un organismo humano?

Sol.: 1 minuto

**Ejercicio 1.3** Comprobar la consistencia dimensional de las siguientes ecuaciones [ $v$ ,  $a$ ,  $x$ ,  $t$  representan velocidad, aceleración, longitud y tiempo, respectivamente]:

$$1. v^2 + v^3 = 2ax$$

$$2. x = v^2 / a$$

$$3. v = at^2 \text{ sen } [(x/t^2)/a]$$

$$4. v = 3at + x/t$$

Sol.: 1) no; 2) sí; 3) no; 4) sí

**Ejercicio 1.4** Sean  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  los vectores unitarios de los ejes rectangulares XYZ, con origen en O. Considérense los vectores siguientes:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} - 3\vec{j}; \quad \vec{r}_2 = 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{r}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

1. Calcular sus módulos

2. Calcular las componentes y los módulos de los vectores

$$\vec{A} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3; \quad \vec{B} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

3. Determinar el vector unitario  $\vec{u}_C$  coincidente con el vector  $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$



4. Calcular los productos  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$  y  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

Sol.: 1)  $\sqrt{10}, \sqrt{8}, \sqrt{6}$ ; 2)  $\vec{A} = (2, 1, -3)$ ,  $A = \sqrt{14}$ ;  $\vec{B} = (0, -3, -1)$ ,  $B = \sqrt{10}$ ;

3)  $\vec{u}_c = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 1, -4)$ ; 4)  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = -6$ ;  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

**Ejercicio 1.5** Descomponer un vector  $\vec{v}$  dirigido según la dirección  $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  y módulo  $\sqrt{27}$  según las direcciones de los vectores  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ;  $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ ;  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$

Sol.:  $\vec{v} = -3\vec{a} + 3\vec{c}$

**Ejercicio 1.6** Un tren metropolitano parte de una estación con aceleración constante y al cabo de 10 s alcanza una velocidad de 72 km/h. Mantiene esta velocidad durante 2 minutos. Al llegar a la estación siguiente frena uniformemente recorriendo 200 m hasta parar. Si el movimiento que ha realizado es rectilíneo, calcular:

1. La aceleración en la primera fase del movimiento
2. El espacio que recorre mientras acelera
3. La aceleración que tiene en la última fase
4. El tiempo que ha estado en movimiento
5. El espacio total recorrido
6. Representar la velocidad y la aceleración en función del tiempo durante todo el movimiento

Sol.: 1)  $2 \text{ m/s}^2$ ; 2)  $100 \text{ m}$ ; 3)  $-1 \text{ m/s}^2$ ; 4)  $150 \text{ s}$ ; 5)  $2,7 \text{ km}$

**Ejercicio 1.7** Un gato quiere saltar sobre una presa situada a 1 m de distancia en horizontal y a 30 cm de altura. Calcular la velocidad mínima de despegue que tiene que imprimir a su cuerpo para alcanzarla. Si salta con una velocidad inicial de 4 m/s, ¿con qué ángulo debe despegar para caer sobre la presa?

Sol.:  $v_{\min} = 3,63 \text{ m/s}$ ;  $\alpha = 39^\circ$  o  $68^\circ$

**Ejercicio 1.8** Un electrón de los que inciden en la pantalla de un televisor es acelerado, dentro del tubo de rayos catódicos, a lo largo de un centímetro con una aceleración del orden de  $10^{14} \text{ m/s}^2$ . Calcular la velocidad que adquiere

al final del tramo de aceleración. El electrón, una vez acelerado, se mueve en vacío sobre una distancia de unos 20 cm hasta llegar a la pantalla. Calcular el tiempo que tarda en realizar ese recorrido.

$$\text{Sol.: } v = 1,4 \times 10^6 \text{ m/s; } \Delta t = 0,14 \times 10^{-6} \text{ s}$$

**Ejercicio 1.9** Un avión se mueve en la pista de despegue con una aceleración del orden de un cuarto de  $g$ . Calcular la longitud mínima de la pista si tiene que alcanzar una velocidad de 300 km/h para empezar a elevarse.

$$\text{Sol.: } l = 1.420 \text{ m}$$

**Ejercicio 1.10** Una lanzadera en un parque de atracciones tiene una altura de 60 m. La cabina se mueve hacia abajo en caída libre durante 45 m. ¿Cuál debe ser la aceleración de frenado durante los últimos 15 m para que llegue al suelo con velocidad cero?

$$\text{Sol.: } a = 29,4 \text{ m/s}^2 \approx 3 \text{ g}$$

**Ejercicio 1.11** Justificar la norma de tráfico que establece que la distancia de seguridad para frenar debe ser proporcional al cuadrado de la velocidad. Dicha distancia es igual, en metros, a la décima parte de la velocidad medida en kilómetros por hora elevada al cuadrado. Calcular la aceleración de frenado implícita en dicha regla.

$$\text{Sol.: } a = 3,86 \text{ m/s}^2$$

**Ejercicio 1.12** Si una persona hace girar horizontalmente una bola que está sujeta por una cuerda de forma que el radio de giro sea de 1,5 metros y la frecuencia sea de una vuelta cada dos segundos, ¿qué aceleración centrípeta es necesario imprimir tirando de la bola para que siga esa trayectoria?

$$\text{Sol.: } a_N = 14,8 \text{ m/s}^2$$

**Ejercicio 1.13** Las plantas crecen en sentido contrario a la aceleración que actúa sobre ellas. Normalmente es sólo la gravedad y, por eso, adoptan la posición vertical. Si una planta está en el borde de una plataforma circular de 2 m de radio que gira con una frecuencia de media vuelta por segundo, ¿qué ángulo formará con la vertical al crecer?

$$\text{Sol.: } \alpha = 33^\circ$$

**Ejercicio 1.14** Un automóvil entra en una curva cuyo radio es de 100 m. Si se considera como criterio de seguridad que la fuerza centrípeta no supere un tercio de la aceleración de la gravedad, calcular la velocidad máxima a la que debe tomar esa curva.

$$\text{Sol.: } v = 65 \text{ km/h}$$

**Ejercicio 1.15** Calcular, para un móvil que se mueve en el plano XY y cuyo vector posición (en metros) viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + (t-1) \vec{j}$$

1. La ecuación de la trayectoria
2. La velocidad en  $t = 1$  s
3. La aceleración total en  $t = 1$  s
4. Las componentes intrínsecas de la aceleración en  $t = 1$  s
5. El radio de curvatura en  $t = 1$  s

Sol.: 1)  $y = x^{\frac{1}{3}} - 1$ ; 2)  $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$  m/s,  $v = \sqrt{10}$  m/s; 3)  $\vec{a} = 6\vec{i}$  m/s<sup>2</sup>;  
 4)  $a_T = 18/\sqrt{10}$  m/s<sup>2</sup>,  $a_N = 6/\sqrt{10}$  m/s<sup>2</sup>; 5)  $\rho = 5\sqrt{10}/3$  m

**Ejercicio 1.16** Un lanzador de martillo hace girar su artefacto seis vueltas y media antes de soltarlo. Si la longitud del alambre con la que lo sujeta es de 1,10 m y lo lanza a 75 m de distancia con un ángulo de 45°, calcular la velocidad angular en el momento de soltar la bola y la aceleración angular que ha debido imprimirle durante los giros.

Sol.:  $\omega = 24,6$  rad/s;  $\alpha = 7,4$  rad/s<sup>2</sup>

**Ejercicio 1.17** Una partícula se mueve, en una dimensión, con una aceleración  $a = 2v$ . Sabiendo que en el instante inicial la velocidad es de 1 m/s y la coordenada que marca la posición es de 1 m, calcular:

1. La velocidad en función del tiempo
2. La aceleración en función del tiempo
3. La posición en función del tiempo

Sol.: 1)  $v = e^{2t}$  m/s; 2)  $a = 2e^{2t}$  m/s<sup>2</sup>; 3)  $x = 1 + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)$  m

**Ejercicio 1.18** Dos corredores compiten sobre una longitud  $L = 100$  m. El primero hace el recorrido con velocidad constante  $v_0 = 10$  m/s y llega, por lo tanto, a la meta en un tiempo  $t_0 = \frac{L}{v_0} = 10$  s. El segundo llega a la meta en el mismo instante que el primero, pero  $\overset{v_0}{\text{parte}}$  del reposo y aumenta su velocidad sinusoidalmente hasta llegar al máximo en el momento de la llegada. Calcular dicha velocidad máxima del segundo corredor y representar la velocidad y la posición de ambos en función del tiempo.

[Ayuda: partir de que la velocidad del segundo corredor es  $v = A \operatorname{sen} \omega t$  y demostrar que las condiciones del problema implican que  $\omega = \frac{\pi}{2t_0}$  y  $A = \frac{\pi L}{2t_0}$ ]

Sol.:  $v = 15,7 \text{ m/s}$

**Ejercicio 1.19** *Un águila sólo percibe un objeto si éste cubre un ángulo mayor o igual que un minuto de arco. Si un roedor mide 12 cm, calcular la altura máxima a la que el águila debe situarse para registrar la presencia del roedor. Si desde esa altura se lanza en caída libre, calcular el tiempo que tarda en llegar a tierra y, por tanto, el tiempo que tiene el roedor para protegerse.*



**Fig 1.27.** Relación entre el tamaño mínimo de una presa y la altura a la que vigila un águila.

Sol.:  $h = 412 \text{ m}; \quad t = 9 \text{ s}$

**Ejercicio 1.20** *Para el lanzador de peso de la figura 1.16, calcular el ángulo de despegue  $\alpha_M$  que maximiza el alcance del lanzamiento, para una velocidad inicial y una altura de salida dadas. Encontrar la expresión general y el valor de  $\alpha$  para una velocidad inicial de 13,8 m/s y una altura de salida de 2,20 m.*

[Ayuda: despejar  $x_M$  de la expresión (1.20) y maximizar su valor respecto del ángulo  $\alpha$ , o mejor respecto de  $\cos 2\alpha$ , suponiendo constantes  $y_0$  y  $v_0$ ]

Sol.:  $\cos 2\alpha_M = \frac{y_0 g}{y_0 g + v_0^2}; \quad \alpha_M = 42^\circ$

## 1.5 Referencias

- Animal Diversity Web. <http://animaldiversity.ummz.umich.edu/>
- Barnes, R. D. *Zoología de Invertebrados*. Interamericana, 1969
- Bennett-Clark, H. C. “The Energetics of the Jump of the Locust *Schistocerca Gregaria*”. *J. Exp. Biol.* **63** (1975) 53
- Bennett-Clark, H. C. & Alder, G. M. “The effect of air resistance on the jumping performance of the insects”. *J. Exp. Biol.* **82** (1979) 105
- Bennett-Clark, H. C. & Lucey, E. C. A. “The Jump of the Flea: a Study of the Energetics and a Model of the Mechanism”. *J. Exp. Biol.* **47** (1967) 59
- Brackenbury, J. *Insects in Flight*. Blandford Press, 1992
- Bureau International des Poids et Mesures. <http://www.bipm.fr>
- Burrows, W. E. *This New Ocean*, Random House, 1998
- Burrows, M. “Froghopper insects leap to new heights”. *Nature* **424** (2003) 509
- Centro Español de Metrología: <http://www.cem.es>
- Chou, J. L. *et al. Acceleration Tolerance: Effect of Exercise, Acceleration Training; Bed Rest and Weightlessness Deconditioning*, NASA, 1987
- Gil-Carracedo, L. M. *Otología*. Menarini, 1995
- Heitler, W. J. *How Grasshopper Jump* . [http://www.st-andrews.ac.uk/126\\_wjh/jumping](http://www.st-andrews.ac.uk/126_wjh/jumping)
- Nave, C. R. *Hyperphysics*. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/ear.html>
- Netter, F. H. *Sistema Nervioso: Anatomía y Fisiología*. Salvat, 1987
- Rodríguez de la Fuente, F. *Fauna. África*. Salvat, 1978
- Rothschild, M. *et al.* “The flying leap of the flea”. *Scientific American* **229** (1973) 92
- Rus, A. & Hernández, C. “Récords de la Fauna”. *La Tierra* **22** (2000) 46
- Snodgrass, R. E. *Principles of Insect Morphology*. <http://entmuseum9.ucr.edu/ent205/snodgrass>
- White, R. J. “Weightlessness and the Human Body”. *Scientific American*, September, 1998
- <http://www.nocturnalprimate.org>

# Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales

## 2.1 Las leyes de Newton

Una vez establecidos los procedimientos para describir el movimiento de los cuerpos, es preciso estudiar las fuerzas o interacciones que actúan sobre ellos y su efecto sobre las trayectorias que siguen, es decir, lo que tradicionalmente se conoce como las causas del movimiento. La Dinámica es la parte de la Mecánica que se ocupa de relacionar fuerzas y trayectorias y, en el marco de la Física Clásica, esta relación puede formularse con ayuda de tres leyes o principios debidos a Isaac Newton.

### 2.1.1 Primera ley de Newton. La inercia

La primera ley establece el comportamiento de los cuerpos cuando no se ejerce sobre ellos fuerza alguna. Un cuerpo en tales condiciones se dice que es libre, y puede visualizarse como infinitamente alejado de todos los demás. Puesto que las únicas interacciones posibles sobre un cuerpo proceden de otros y la intensidad de dichas interacciones disminuye con la distancia, en el límite en que ésta tiende a infinito todas ellas tienden a cero. Pues bien, la primera ley suele enunciarse diciendo que **“una partícula libre se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo respecto de un sistema de referencia inercial”**. Lo malo de este enunciado es que hay que definir qué se entiende por sistema inercial y la definición más usual es que es aquel sistema de referencia en el que toda partícula libre se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo, es decir, una tautología o razonamiento circular. Pero la primera ley es mucho más que una tautología. En efecto, un sistema de referencia debe estar siempre ligado a algo material, a un cuerpo o conjunto de cuerpos, como pueden ser las aristas de una habitación o tres varillas perpendiculares. Llamaremos sistema inercial a un sistema de referencia ligado a un cuerpo que se

mueve libremente. En ese caso, la primera ley tiene dos consecuencias importantes:

- **Todos los sistemas de referencia inerciales posibles se mueven con movimiento uniforme y rectilíneo entre sí.**
- **Dos cuerpos libres se mueven con movimiento uniforme y rectilíneo entre sí.**

Nótese que esta segunda consecuencia podría ser una formulación de la primera ley sin necesidad de acudir a conceptos no definidos antes, y está lejos de ser trivial. De hecho, hasta Galileo y los físicos del siglo XVII, se pensó que el estado “natural” de un cuerpo sobre el que no se ejerce ninguna fuerza es el reposo y que mantener una velocidad uniforme requiere la acción de una fuerza constante. Ésta es la conclusión de la experiencia cotidiana, pero no puede servir para conocer cómo es el movimiento de los cuerpos libres porque hay siempre fuerzas que actúan sobre ellos, en particular la gravedad y el rozamiento. Hizo falta el análisis y la abstracción para extraer de esa experiencia cotidiana la conclusión de que los cuerpos no sujetos a ninguna fuerza permanecen moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Hoy, la posibilidad de conocer el comportamiento de los cuerpos en el espacio exterior, en condiciones muy próximas a la ausencia de toda fuerza, permite entender esta primera ley sin demasiada dificultad y proporciona evidencia empírica de su corrección. Ya no nos resulta extraña, en la ficción cinematográfica, la visión de un astronauta perdido en el espacio sin que nada interactúe con él, alejándose de su nave o astro de procedencia indefinidamente, con un movimiento uniforme y rectilíneo.

Conviene observar que, puesto que la elección de sistema de referencia es arbitraria y que son válidos sistemas que se mueven uno respecto de otro, la velocidad de un cuerpo no es una característica intrínseca de su movimiento, sino que depende del punto de vista desde el que se observe. Así, un cuerpo que está en reposo respecto de un determinado observador (ligado a un sistema de referencia inercial) se moverá visto por otro observador (en reposo en otro sistema de referencia que se mueve respecto del anterior).

### 2.1.2 Segunda ley de Newton. La fuerza y la masa

Puesto que, en ausencia de fuerzas, el movimiento de un cuerpo es uniforme y rectilíneo, la acción de las fuerzas debe generar aceleraciones, cambiando así la trayectoria que éste tendría si fuera libre. La segunda ley establece precisamente la relación entre fuerzas y aceleraciones. En concreto, si  $\vec{F}$  es la fuerza total sobre una partícula, suma vectorial de todas las que puedan

actuar sobre ella, entonces la partícula adquiere una aceleración  $\vec{a}$  cuya relación con la fuerza es la siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

donde  $m$  es un parámetro llamado masa, o también masa inercial. La masa así introducida es una propiedad básica de cada cuerpo, con dimensiones propias, independientes de longitud y tiempo, cuya unidad es, en el Sistema Internacional, el kilogramo.

**Observación. El kilogramo.** *A finales del siglo XVIII, se decidió considerar como unidad de masa la contenida en un litro (es decir, un decímetro cúbico) de agua y llamarla “grave”. Inmediatamente después de la Revolución francesa se acordó que ésta era demasiado grande para muchas transacciones de la vida cotidiana y que, por lo tanto, la unidad de masa sería la milésima parte de la contenida en un litro de agua, es decir, la contenida en un centímetro cúbico de agua, y la llamaron “gramo”. Pero un objeto que sirviera para contrastar la masa de un gramo era difícil de usar y de construir con precisión, así que el patrón físico con el que comparar las pesas utilizadas para medir la masa fue de mil gramos, es decir, un kilogramo, aunque la unidad fuera el gramo. Posteriormente, cuando en 1875 se redefinió la unidad de masa, dentro de lo que sería el Sistema Internacional, se volvió a la masa de un litro de agua y se le siguió llamando kilogramo. Ésta es la razón de que la unidad de masa tenga el nombre de un múltiplo de una cantidad que no es unidad en el SI. A partir de 1901, se define el kilogramo como la masa de un cierto prototipo hecho de platino e iridio, conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, y corresponde aproximadamente a la de un litro de agua a cero grados centígrados.*

**Observación. Masa y peso.** *Lo que se mide en las balanzas con ayuda de pesas que se comparan con los patrones de masa no es exactamente la masa, sino el peso de un cuerpo. Como veremos, el peso de un cuerpo es proporcional a su masa pero inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Así que comparar los pesos de dos cuerpos situados en los platillos de una balanza equivale a comparar las masas siempre que la distancia al centro de la Tierra sea igual para los dos. Y es evidente que, en todos los casos prácticos, eso es lo que sucede exactamente o con un grado de aproximación enorme.*

De la ecuación (2.1) se sigue que la fuerza es una magnitud cuyas dimensiones pueden escribirse en términos de masa, longitud y tiempo:

$$[F] = MLT^{-2}$$



La unidad de fuerza, en el Sistema Internacional, es el Newton ( $N$ ), de donde:

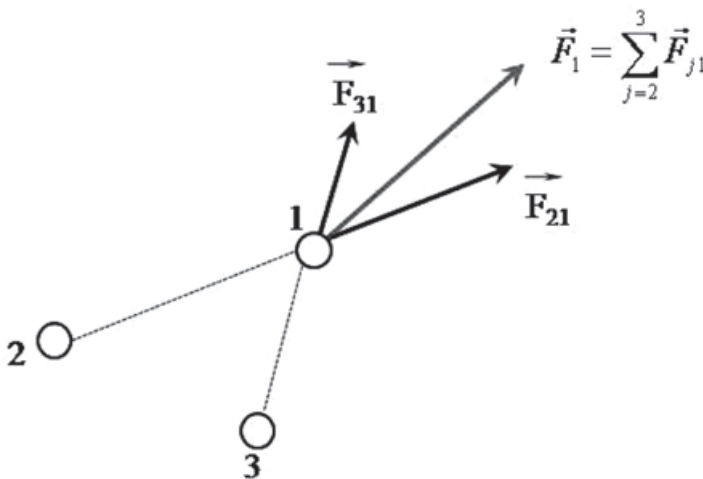
$$1 N = 1 kg \times m/s^2$$

**Las fuerzas sobre un cuerpo son el resultado de las interacciones con todos los cuerpos de su entorno, de contacto, como el rozamiento, o a distancia, como la gravitación. El contenido fundamental de la segunda ley es que los efectos de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos se manifiestan a través de las aceleraciones que inducen en sus movimientos. La aceleración, por lo tanto, al contrario que la velocidad, sí que es una propiedad intrínseca de los movimientos, dependiente de la dinámica y no del sistema de referencia escogido.**

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dependen de la posición y velocidad del mismo (relativas a todos los otros cuerpos) y del tiempo, aunque en la mayoría de los casos dependen únicamente de la posición. Las únicas fuerzas que existen se derivan de interacciones entre dos cuerpos. Así, para un conjunto de  $N$  objetos, la fuerza sobre cada uno de ellos es igual a la suma de las que se derivan de la interacción con cada uno de los restantes. Si llamamos  $\vec{F}_i$  a la fuerza total sobre el cuerpo  $i$  y  $\vec{F}_{ji}$  a la fuerza que ejerce sobre él el cuerpo  $j$ , tendremos:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \quad (2.2)$$

en el bien entendido que  $\vec{F}_{ii} = 0$ .



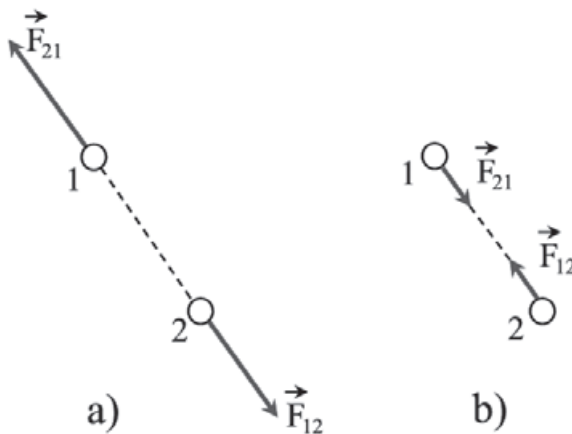
**Fig. 2.1.** Fuerza total sobre la partícula 1 debida a las interacciones con las partículas 2 y 3.

### 2.1.3 Tercera ley. La acción y la reacción

Puede enunciarse diciendo que **la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es siempre igual y de sentido contrario a la ejercida por el segundo sobre el primero**. Es decir, usando la nomenclatura introducida en el párrafo anterior:

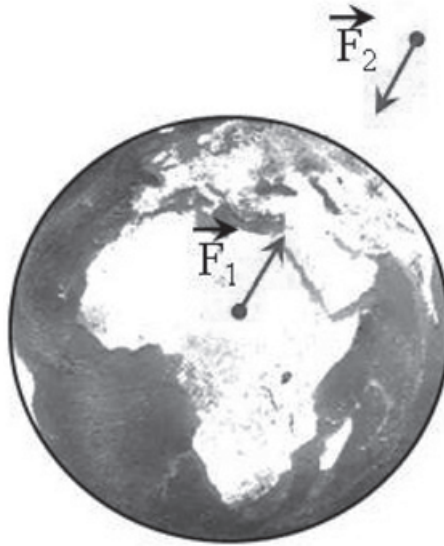
$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad (2.3)$$

Las fuerzas son iguales en módulo y de sentido contrario, pero están aplicadas a cuerpos distintos, cada una de ellas a uno de los dos cuerpos en interacción; por eso, en general, no se anulan. Las fuerzas elementales entre dos cuerpos son vectores que van siempre en la dirección de la línea que los une, por lo que las únicas configuraciones posibles son las de la figura 2.2, en un caso atractivas y en el otro, repulsivas.



**Fig. 2.2.** Fuerzas entre dos cuerpos, a) repulsivas, b) atractivas.

**Ejemplo.** Según la tercera ley, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo cuya masa es igual a 1 kg es igual a la que ejerce éste sobre la Tierra.



**Fig. 2.3.** Las fuerzas mutuas entre la Tierra y un objeto externo son iguales en módulo, pero las aceleraciones inducidas son inversamente proporcionales a la masa de cada cuerpo. Para un objeto de tamaño “normal”, la aceleración inducida sobre la Tierra es inapreciable.

*Pero a partir de la segunda ley sabemos que las aceleraciones inducidas son muy distintas. En efecto:*

$$m_T a_T = -mg$$

donde  $m_T$  es la masa de la Tierra ( $m_T = 5,974 \times 10^{24}$  kg),  $a_T$  es la aceleración que adquiere la Tierra por el efecto de atracción gravitatoria del cuerpo de masa  $m$ , y  $g$  es la aceleración inducida por la Tierra sobre el cuerpo en cuestión cuando se encuentra cerca de su superficie, es decir, unos  $9,8$  m/s<sup>2</sup>. Tomando como sentido positivo el que sale de la superficie terrestre hacia la masa  $m$  y negativo el contrario,  $g = -9,8$  m/s<sup>2</sup>. Si la masa  $m$  es de 1 kg,

$$a_T = -\frac{m}{m_T} g = 1,64 \times 10^{-24} \text{ m/s}^2$$

es decir, la aceleración con que la Tierra “cae” hacia un cuerpo de 1 kg de masa es absolutamente inapreciable.

La tercera ley no es intuitiva ni trivial, sino que está dotada de un considerable contenido físico susceptible de ser verificado experimentalmente.

## 2.2 El origen de la fuerza en los animales

En el capítulo siguiente trataremos de las fuerzas elementales o básicas, que son en el mundo macroscópico la gravitación y el electromagnetismo, y también de fuerzas derivadas, que son el resultado de superponer multitud de fuerzas elementales. Todas las interacciones entre átomos o moléculas, origen de las reacciones químicas o bioquímicas y de las propiedades de la materia, son de tipo electromagnético, pero su estructura es tan compleja, debido al gran número de átomos que forman el más pequeño y sencillo sistema macroscópico, que sólo puede tratarse aproximando su resultante con ayuda de una fuerza derivada. Éste es el caso de la fuerza muscular que estudiaremos en lo que sigue.

### 2.2.1 *Los músculos*

La inmensa mayoría de los animales utilizan los músculos para generar la fuerza que necesitan para moverse (acelerar desde el reposo, frenar cuando están en movimiento o mantener el movimiento en contra del rozamiento del aire, del agua o con el suelo), mover o levantar presas u objetos y, en general, para realizar cualquier tipo de operación mecánica. Los vertebrados y los artrópodos tienen una estructura rígida, un esqueleto, interno en los primeros y externo en los segundos, que actúa como sustentación general de la estructura corporal y también como palanca para mover los miembros y los distintos segmentos corporales. Las estructuras rígidas supusieron una ventaja evolutiva para los primeros animales que dispusieron de ellas y aparecieron en una época relativamente reciente en la historia de la vida sobre nuestro planeta, se cree que hace unos 600 millones de años.

El esqueleto externo de los invertebrados sirve como escudo protector y, al mismo tiempo, como anclaje de los músculos que, al disponer de un punto de apoyo rígido, pudieron desarrollarse enormemente. En el caso de los artrópodos, las propiedades del esqueleto externo se deben a una proteína, la quitina, que forma estructuras muy rígidas, flexibles y ligeras. Por su parte, el esqueleto interno de los cordados permite desarrollar más fuerza muscular y una mayor movilidad de los miembros, pero no protege el cuerpo como lo hace el esqueleto externo, así que debieron suplir esta protección con un mayor tamaño corporal, más fuerza o más rapidez. Las arañas suponen un caso excepcional en cuanto al mecanismo que mueve sus extremidades. Éstas se extienden cuando aumenta la presión interna de la sangre en su interior y se contraen cuando disminuye. La presión, a su vez, se genera mediante la acción de músculos situados en el abdomen, que son los que impulsan a la sangre en las patas. En último término, el origen del movimiento en las arañas

es común al de vertebrados y el resto de los artrópodos, la contracción de los músculos, seguida, en este caso, de un sistema de transmisión hidráulica de la fuerza muscular.

El esqueleto consiste en un conjunto de elementos rígidos conectados por articulaciones flexibles para que puedan moverse unos respecto de otros y unidos por ligamentos elásticos que permiten la rotación pero no la separación. Los músculos que sirven para mover estos elementos se llaman esqueléticos, se fijan al esqueleto a través de los tendones y, cuando se contraen o se extienden, son capaces de generar movimiento o resistir cargas o impulsos sobre el animal.

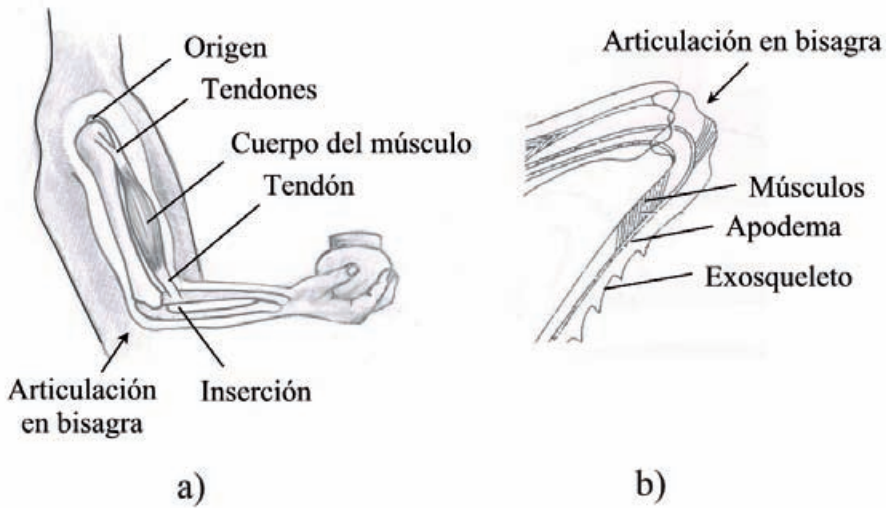


Fig. 2.4. a) Músculo de un vertebrado. b) Músculo de un artrópodo.

La forma más sencilla de articulación entre dos segmentos del esqueleto es la bisagra (ver la figura 2.4). Lo normal es que para mover dichos segmentos sean necesarios, en la configuración más sencilla, dos músculos, uno flexor, que cierra la bisagra, y otro extensor, llamado antagonista del primero, que sirve para abrirla. Pero en ciertos casos la bisagra está dotada de una estructura elástica que actúa como muelle de recuperación, como ocurre en la unión entre las dos conchas de los moluscos bivalvos. La estructura elástica que se encuentra en la articulación (charnela) de la concha de estos moluscos es un ligamento flexible de una proteína llamada abductina, que es un caucho proteico. Gracias a esta estructura, sólo se requiere un músculo, el aductor, que cuando se contrae cierra las dos valvas y comprime el ligamento de abductina, mientras que cuando se relaja, las valvas se abren por simple recuperación elástica, como puede apreciarse en la figura 2.5. Normalmente, estos animales

necesitan cerrar las valvas con rapidez para protegerse de los predadores, mediante una enérgica contracción del músculo aductor, pero la velocidad con que vuelven a separarse es de poca importancia. En la práctica pueden tardar entre dos y hasta diez segundos en abrirse después de una contracción; de ahí que sea suficiente con un solo músculo y un ligamento elástico. No obstante lo cual, las propiedades elásticas de la abductina permiten que existan moluscos bivalvos muy activos, como las veneras (*Pectinidae*), que nadan expulsando agua en dirección contraria a su movimiento, abriendo y cerrando las valvas con cierta rapidez (hasta unas tres veces por segundo).

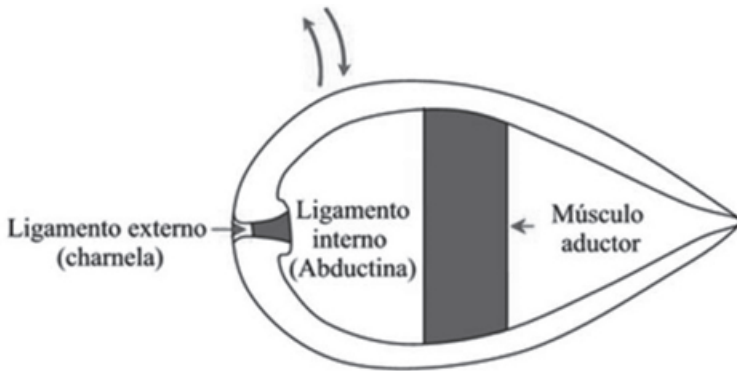


Fig. 2.5. Músculo aductor de un bivalvo y mecanismo elástico de recuperación.

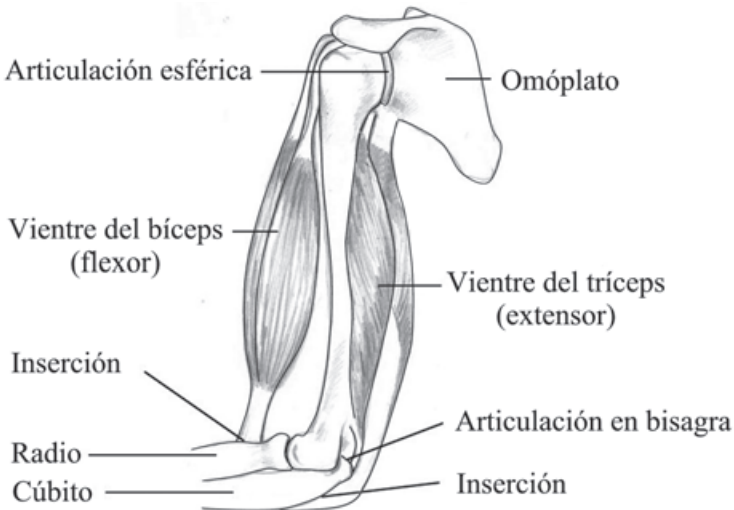


Fig. 2.6. Bíceps y tríceps braquiales en el brazo humano.

Hay muchos casos en los que para producir una mayor variedad de movimientos actúan varios músculos sobre una misma articulación. En el caso de los humanos, la rodilla y el codo son articulaciones tipo bisagra sencilla, que sólo permiten la rotación alrededor de un eje, el perpendicular al plano de la pierna o del brazo, como puede apreciarse en la figura 2.6, mientras que la articulación de la muñeca, llamada condílea, permite la rotación alrededor de los dos ejes perpendiculares al eje del antebrazo. Las articulaciones de la cadera y del hombro, llamadas esferoideas, son del tipo bola de rodamiento en el extremo de uno de los huesos alojada en una cavidad esférica del otro, lo que da libertad para girar alrededor de cualquier eje. Existen, además, otros tipos de articulación, como la pivotal, que permite el giro de la cabeza gracias a que la primera vértebra, el atlas, gira alrededor de una extensión de la segunda, el axis, que actúa como pivote, o la deslizante, que permite deslizamientos limitados, como los que se dan entre vértebras sucesivas.

En los vertebrados los músculos rodean al hueso, que es una estructura interna, mientras que en los artrópodos, el esqueleto es externo y sus elementos tienen forma tubular, alojándose los músculos en su interior y fijándose a su cara interna. En los gusanos, que no tienen esqueleto al que fijarse, hay una serie de músculos circulares y otros longitudinales a lo largo del cuerpo. Cuando se contraen los músculos longitudinales, el gusano se acorta, pero al conservarse su volumen total, se hace más grueso, por lo que los circulares deben extenderse. Por el contrario, si los músculos circulares se contraen, el animal se hace más delgado al tiempo que se alarga, lo que implica que los longitudinales deben extenderse. Los movimientos laterales se generan contrayendo sólo los músculos longitudinales de un lado del cuerpo y extendiendo los del lado contrario.

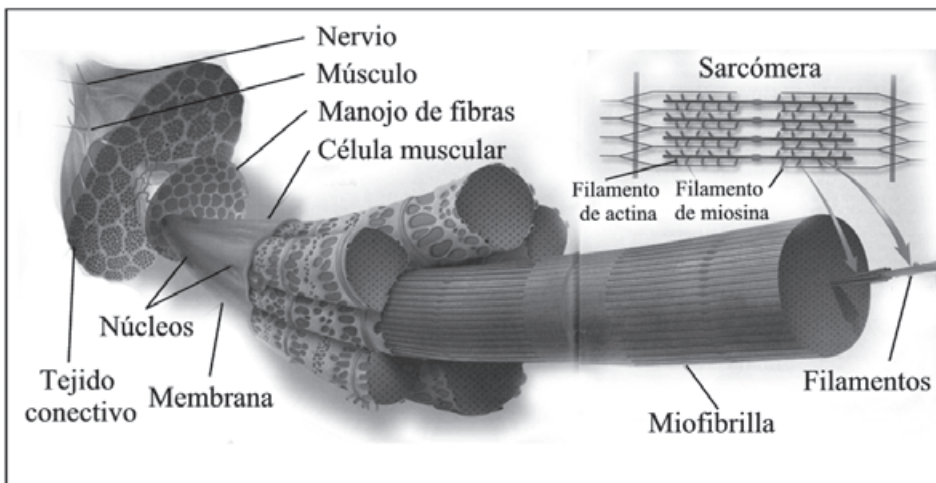
### 2.2.2 *Las fibras musculares*

En general, un músculo esquelético es un haz de células, o fibras, que se mantienen unidas gracias a un tejido conectivo de colágeno que se funde en el tendón y éste transmite el movimiento al hueso mediante su inserción en el mismo. El hueso, por su parte, es una estructura rígida y elástica a la vez, de fibras de colágeno, carbonato cálcico, otras sales de calcio y magnesio y agua. Una fibra muscular consiste en una membrana plasmática que contiene un conjunto de núcleos dispersos situados inmediatamente debajo de ella y un citoplasma, constituido por miles de miofibrillas. Las fibras musculares pueden llegar a tener, en el caso de los humanos, hasta unos 30 *cm* de longitud y entre 0,005 y 0,10 *mm* de ancho. Las miofibrillas,

por su parte, tienen la misma longitud que las fibras y son las responsables de la contracción del músculo y, por lo tanto, del desarrollo de la fuerza muscular y los movimientos corporales.

Las neuronas motoras transmiten las señales desde la médula espinal, ganglios u otras estructuras nerviosas e inervan las fibras musculares estimulando su contracción. **Para el caso de miembros cuyos movimientos son simples y en los que cooperan muchas fibras, como el bíceps, una misma neurona puede controlar cientos de fibras musculares, mientras que en el caso de movimientos delicados, como los del ojo, la laringe o los dedos, una neurona controla unas pocas fibras, incluso una sola de ellas. Se llama unidad motora al conjunto formado por la motoneurona y todas las fibras que ésta inerva.** En los músculos esqueléticos de los vertebrados, cada fibra recibe señales de una sola neurona (señal que puede compartir con otras fibras), mientras que en muchos invertebrados una fibra muscular puede recibir señales de varias neuronas.

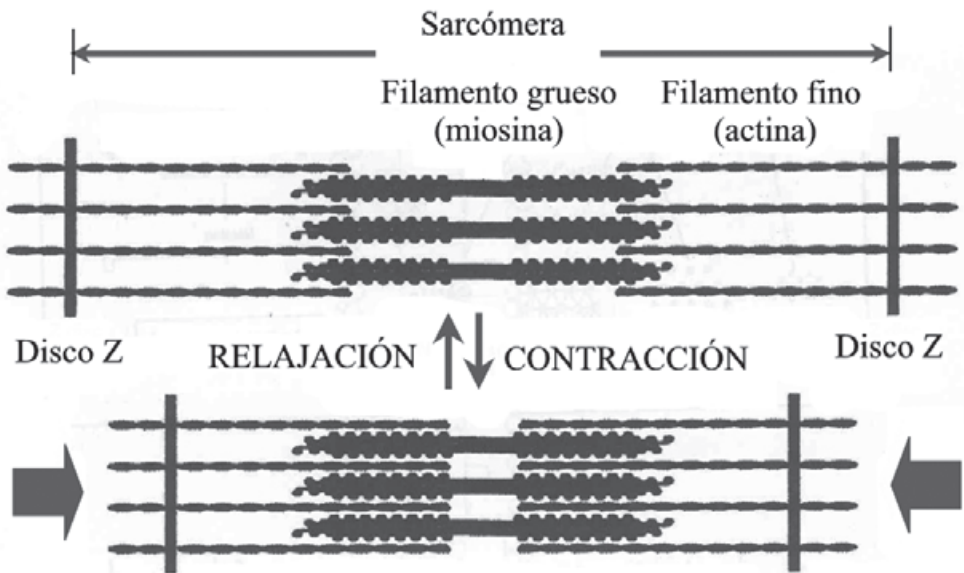
Hay otros tipos de músculo, como el cardíaco, parecido al esquelético pero sin inserción en un hueso, con fibras que se ramifican e interconectan y con un solo núcleo por célula, y los músculos llamados lisos, que no presentan las estriaciones de los dos anteriores, y que son los responsables de los movimientos involuntarios de los vasos sanguíneos, los intestinos y, en general, de todos los sistemas tubulares y órganos huecos. Las fibras de esta última clase de músculo se contraen más lentamente que las de los músculos esqueléticos, que son las que vamos a estudiar en más detalle.



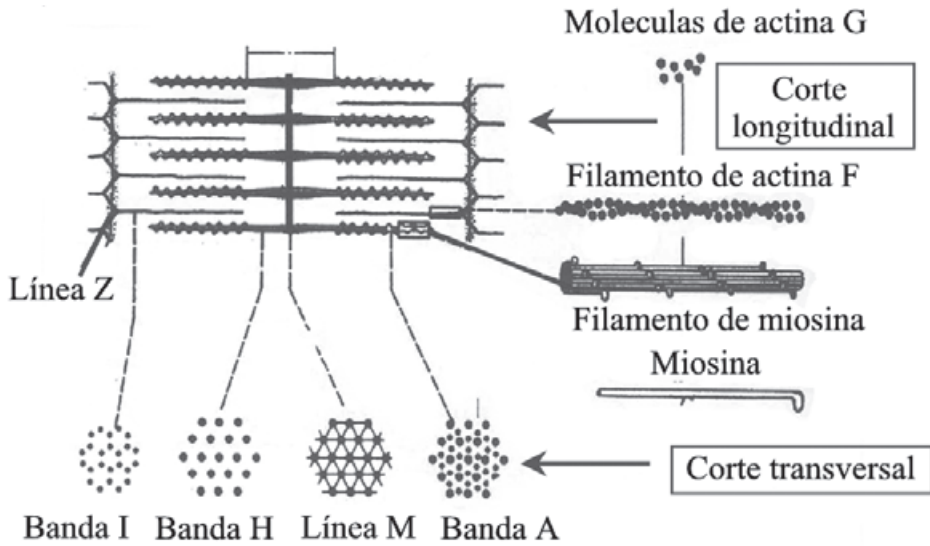
**Fig. 2.7.** Esquema de un músculo con las células musculares, las miofibrillas y las sarcómeras. Andersen *et al.* (2000).



Cada miofibrilla está compuesta por unidades repetidas llamadas **sarcómeras**, dispuestas **longitudinalmente**, una a continuación de la otra, y unidas por discos que reciben el nombre de discos Z. Las sarcómeras de los vertebrados tienen una longitud de unos  $1,5 \mu\text{m}$  ( $0,0015 \text{ mm}$ ) cuando están contraídas y pueden llegar al doble cuando están completamente extendidas, siendo justamente **su capacidad para variar de longitud lo que hace posible que los músculos se contraigan y ejerzan una fuerza sobre las estructuras óseas en las que se insertan**. Cada sarcómera contiene filamentos de un par de proteínas, el filamento grueso de miosina y el fino de actina, que tienen la propiedad de poder deslizarse uno respecto del otro. Están, además, colocadas de forma que la posición de las sarcómeras de una miofibrilla coincide con la de las miofibrillas adyacentes y así, las zonas en las que son predominantes uno u otro filamento están en el mismo plano transversal a la fibra muscular y eso es lo que produce su característico aspecto estriado. En la figura 2.8 puede verse la disposición de filamentos que corresponde a las sarcómeras en estado de relajación y de contracción. En la figura 2.9 se observan las distintas bandas que se distinguen en el tejido muscular y la superposición de filamentos a que corresponde cada una de ellas.



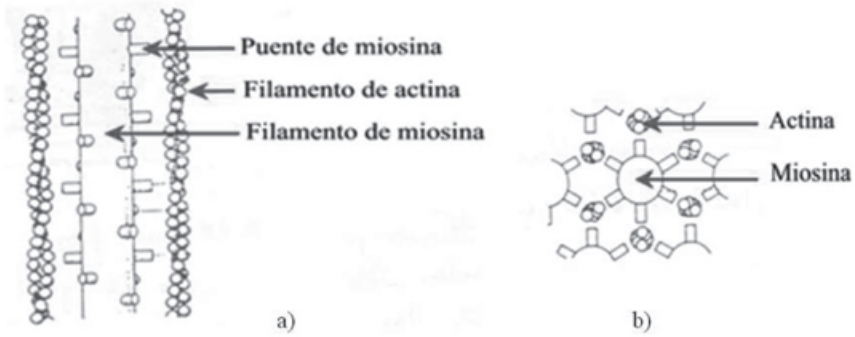
**Fig. 2.8.** Los filamentos gruesos (de miosina) y finos (de actina) deslizan unos respecto de los otros modificando la longitud de cada sarcómera.



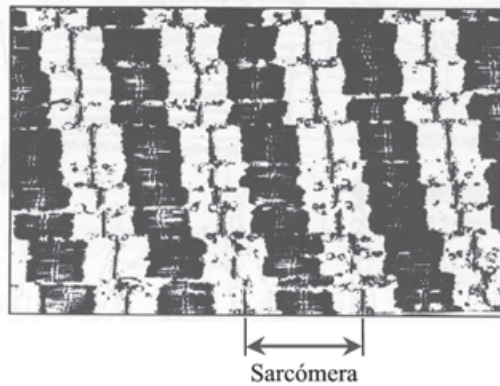
**Fig. 2.9.** Esquema de una sarcómera y los filamentos que la componen. La banda I está compuesta por filamentos de actina, la banda A por filamentos de actina y miosina, y la banda H por filamentos de miosina. La línea M está formada por proteínas que unen los filamentos de miosina entre sí, y la línea Z es el borde de los discos Z, formados por proteínas que unen los filamentos de actina de sarcómeras adyacentes.

(Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).

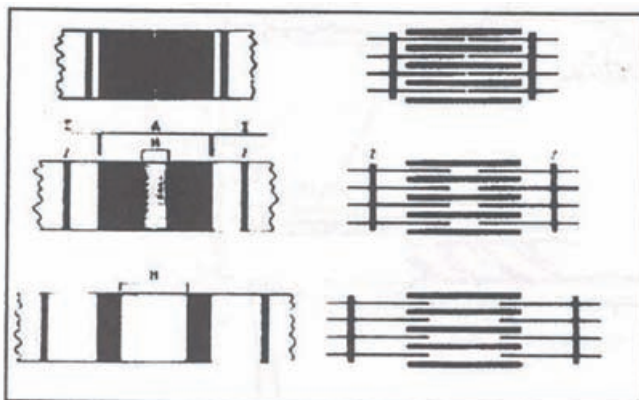
Los filamentos de actina están fijos a los discos Z, mientras que los de miosina pueden deslizarse paralelamente a los de actina gracias a una serie de extensiones, o puentes cruzados, situados a lo largo de la miosina y dispuestos perpendicularmente a la dirección de deslizamiento, que se fijan a distintos puntos del filamento de actina. Cada molécula de miosina tiene forma de bastón, alargada y con una cabeza globular en uno de los extremos. Cuando las moléculas de miosina se unen longitudinalmente para formar un filamento, las cabezas sobresalen y forman los puentes. Justamente, los cambios en la configuración de estos puentes, y en sus puntos de fijación, son los responsables del deslizamiento de un filamento respecto del otro, como una persona que sube y baja a lo largo de una cuerda tirando con una mano, cambiando de posición y volviendo a agarrar la cuerda en otro punto para volver a tirar, lo que implica la contracción o extensión de la sarcómera y, en consecuencia, de la miofibrilla a la que pertenece. La longitud del filamento grueso es, por lo tanto, del orden de la longitud de la sarcómera contraída, unos  $1,6 \mu\text{m}$  en los vertebrados y unos  $12 \text{ nm}$  de diámetro, mientras que cada uno de los dos filamentos finos enfrentados en una sarcómera tienen alrededor de  $1 \mu\text{m}$  de largo y unos  $5 \text{ nm}$  de diámetro (recordad que  $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 0,001 \text{ mm}$  y  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm}$ ).



**Fig. 2.10.** a) Puentes de miosina. b) Disposición transversal de los filamentos de actina y miosina.

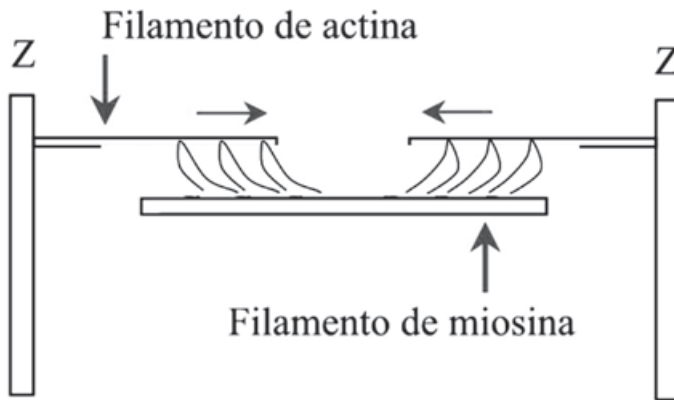


**Fig. 2.11.** Corte longitudinal de una fibra de músculo esquelético. Las bandas claras son las I, divididas en dos por los discos Z. Las bandas oscuras son las A, que contienen una parte más clara, correspondiente a las bandas H, que, a su vez, están divididas en dos por las líneas M. (Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).



**Fig. 2.12.** Variación de la longitud de la sarcómera y aspecto de las estriaciones en función del grado de contracción. (Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).

La disposición transversal es tal que cada filamento de miosina está rodeado por seis filamentos de actina y cada uno de actina por tres de miosina (ver la figura 2.10.b). Los puentes cruzados están situados en las dos mitades de cada filamento de miosina excepto en un pequeño segmento del centro. En la posición anterior a una contracción muscular, los puentes de cada mitad del filamento grueso están dirigidos hacia el disco Z más próximo a esa mitad, de forma que, al tensionar, acercan los filamentos finos de cada sarcómera y éstos a los discos Z, con lo que la longitud total de la sarcómera disminuye, permaneciendo inmóvil el filamento grueso en su posición centrada. La contracción muscular se debe, así, al deslizamiento relativo de los filamentos, que no se acortan, ensanchan ni pliegan de ninguna forma.

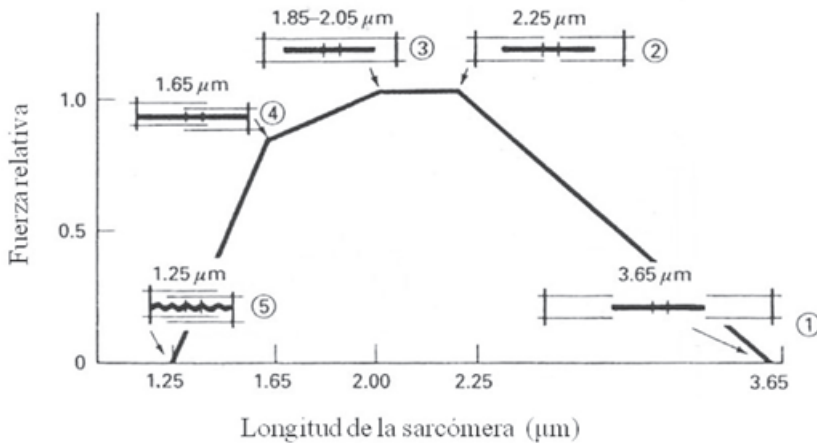


**Fig. 2.13.** Movimiento relativo de los filamentos en una miofibrilla y contracción de una sarcómera.

La disposición en serie de las sarcómeras hace que **el acortamiento de la miofibrilla sea igual a la suma de los acortamientos de cada sarcómera**, mientras que la fuerza con que se mantiene contraída es proporcional al número de puentes fijos en cada sarcómera, por lo que los músculos ejercen una fuerza máxima cuando están lo suficientemente contraídos como para que todos los puentes estén enganchados, pero sin que la contracción sea excesiva, en cuyo caso los filamentos de miosina se acercarían demasiado a los discos Z, e incluso llegarían a chocar con ellos, sin una ganancia en el número de puentes enganchados.

En la figura 2.14 puede verse la relación entre la fuerza generada por cada sarcómera y su longitud. Cuando está completamente extendida no hay puentes enganchados y la fuerza tiende a cero, mientras que cuando está tan contraída que los extremos del filamento grueso chocan con los discos Z, la fuerza también se anula. El máximo de fuerza se obtiene para una longitud en la que todos los puentes están activos. Lo normal es que, en todos los

movimientos, los músculos tengan un grado de contracción tal que la fuerza esté cerca del máximo, es decir, tal que longitud de las sarcómeras varíe entre  $1,7 \mu\text{m}$  y  $2,5 \mu\text{m}$ . Por ejemplo, las sarcómeras de los músculos flexores de una rana cuando están extendidas, en disposición de iniciar el salto, tienen una longitud de  $2,3 \mu\text{m}$ , mientras que cuando despegan, una vez que las ha contraído, han pasado a tener una longitud de  $1,8 \mu\text{m}$  y, por lo tanto, se han mantenido todo el tiempo en longitudes óptimas desde el punto de vista de la fuerza que pueden desarrollar.



**Fig. 2.14.** Fuerza relativa en función de la longitud de la sarcómera. Randall *et al.* (1998)

Al actuar las miofibrillas en paralelo, la fuerza de cada una es independiente de las otras, siendo la fuerza total de un músculo la suma de las fuerzas desarrolladas por las miofibrillas que lo componen, lo que implica que es proporcional a su sección transversal; cuanto más grueso es un músculo, más miofibrillas contiene y mayor es la fuerza que puede desarrollar. Los músculos esqueléticos de los vertebrados son capaces de ejercer una fuerza máxima de  $300.000 \text{ N/m}^2 \approx 30 \text{ N/cm}^2$ . Ya veremos que la unidad de presión en el SI, llamada pascal, se define de forma que  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ , con lo que la fuerza máxima por unidad de sección transversal en un músculo es de unos  $300.000 \text{ Pa}$ , o bien de unos  $300 \text{ kPa}$ .

Las sarcómeras de los músculos de ciertos artrópodos son más largas, llegando, por ejemplo, hasta unos  $5,5 \mu\text{m}$  cuando están contraídas en el caso de langostas y saltamontes, lo que implica que el número de puentes activos es superior y la fuerza que pueden desarrollar es también superior. En el caso de langostas y saltamontes, la fuerza máxima por unidad de sección es de unos  $800 \text{ kPa}$ . Este mismo valor es el que corresponde a la fuerza máxima desarrollada por el músculo aductor de los moluscos bivalvos.

**Ejercicio.** Un músculo de rana de  $1\text{ cm}^2$  de sección contiene del orden de  $5 \times 10^{10}$  filamentos gruesos. Como un músculo de esa sección es capaz de generar  $30\text{ N}$  de fuerza, cada filamento genera  $\frac{30}{5 \times 10^{10}} = 6 \times 10^{-10}\text{ N}$ . Como hay unos 150 puentes en cada mitad del filamento, cada uno de éstos tira con una fuerza de unos  $4 \times 10^{-12}\text{ N}$ .

Nótese que si en  $1\text{ cm}^2$  de sección hay  $5 \times 10^{10}$  filamentos, entonces a lo largo de  $1\text{ cm}$  de longitud sobre dicha sección hay  $\sqrt{5 \times 10^{10}} \approx 2,24 \times 10^5$  filamentos, lo que implica que la distancia media entre sus centros es:

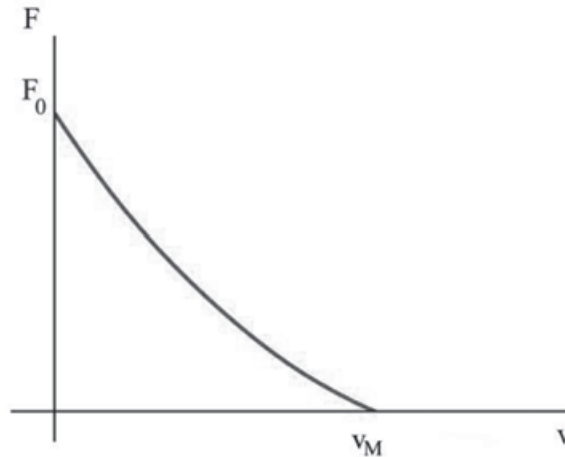
$$d \approx \frac{10^{-2}}{2,24 \times 10^5} \approx 4,5 \times 10^{-8}\text{ m} = 45\text{ nm}$$

que es una distancia del todo compatible con el grosor de unos  $12\text{ nm}$  de cada filamento.

La velocidad a que un músculo se contrae se suele medir en longitudes por segundo, de forma que si una miofibrilla se contrae hasta la mitad de su longitud en  $0,5$  segundos, se dice que tiene una velocidad de contracción de  $1$  longitud por segundo (que es el resultado de dividir media longitud por el medio segundo que tarda en contraerse). Los músculos más rápidos conocidos son los de los ojos de ratas y ratones, en los que la velocidad de contracción puede llegar hasta unas  $25$  longitudes de fibra por segundo. Las fibras de otros músculos de esos mismos animales y de otros vertebrados se sitúan en unas pocas ( $3$  a  $10$ ) longitudes por segundo, mientras que los de una tortuga se contraen con una velocidad del orden de  $0,1$  longitudes por segundo. Por otra parte, la velocidad de contracción es inversamente proporcional a la longitud de la sarcómera, así que en un artrópodo de sarcómeras largas, sus músculos pueden hacer más fuerza por unidad de masa muscular, pero se contraen más lentamente.

**Cuanto más rápida es la contracción, menos fuerza se puede hacer. El máximo de fuerza sólo se puede conseguir en contracción lenta o sin contracción,** con todos los puentes de miosina enganchados e inmóviles. En efecto, al tirar de los filamentos finos, los puentes de miosina, aun en el caso de que todos estén activos, en el momento previo al desenganche, llegan a estar en una posición en la que hay una reacción elástica que tiende a ejercer una fuerza en la dirección contraria; una vez desenganchados, buscan un nuevo anclaje en el que vuelven a tirar en la dirección de acortar la sarcómera. Además, la fijación al nuevo punto requiere un cierto tiempo. Por lo tanto, a gran velocidad, habrá un cierto número de puentes desenganchados y también otros que se encuentren en la posición que genera una fuerza elástica contraria.

El resultado neto es que cuando un músculo se contrae rápidamente cada puente ejerce, por término medio, una fuerza menor y además hay menos puentes activos. Ambos fenómenos dan lugar a una disminución de la fuerza ejercida por el músculo, mientras que a velocidad cero, todos los puentes están inmóviles y fuertemente sujetos ejerciendo la tensión máxima.



**Fig. 2.15.** Fuerza generada por un músculo en función de la velocidad de contracción.

Este resultado es intuitivo y conforme a la experiencia cotidiana de mover los objetos pesados lentamente y sólo ser capaces de contraer rápidamente un músculo si la carga que soporta es pequeña o nula. Archibald V. Hill, en los años 30, aproximó el comportamiento de la fuerza en función de la velocidad de contracción con ayuda de la siguiente expresión:

$$F = F_0 \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + bv}$$

donde  $F_0$  es la fuerza desarrollada para velocidad cero,  $v_M$  es la velocidad de contracción máxima y  $b$  es un parámetro que caracteriza la forma de la curva de la figura 2.15.

Los músculos más rápidos de rata o de ratón a los que nos hemos referido antes pueden contraerse tan rápidamente porque no realizan prácticamente ningún trabajo. Por el contrario, la tensión de un músculo que no varía de longitud, como cuando empujamos sobre una pared o tiramos de un soporte fijo, es máxima y produce lo que se llama contracción isométrica, aunque no se produce contracción en sentido literal, pero sí estimulación nerviosa de las fibras musculares. Cuando sí se produce un acortamiento del músculo, se dice que la contracción es isotónica.

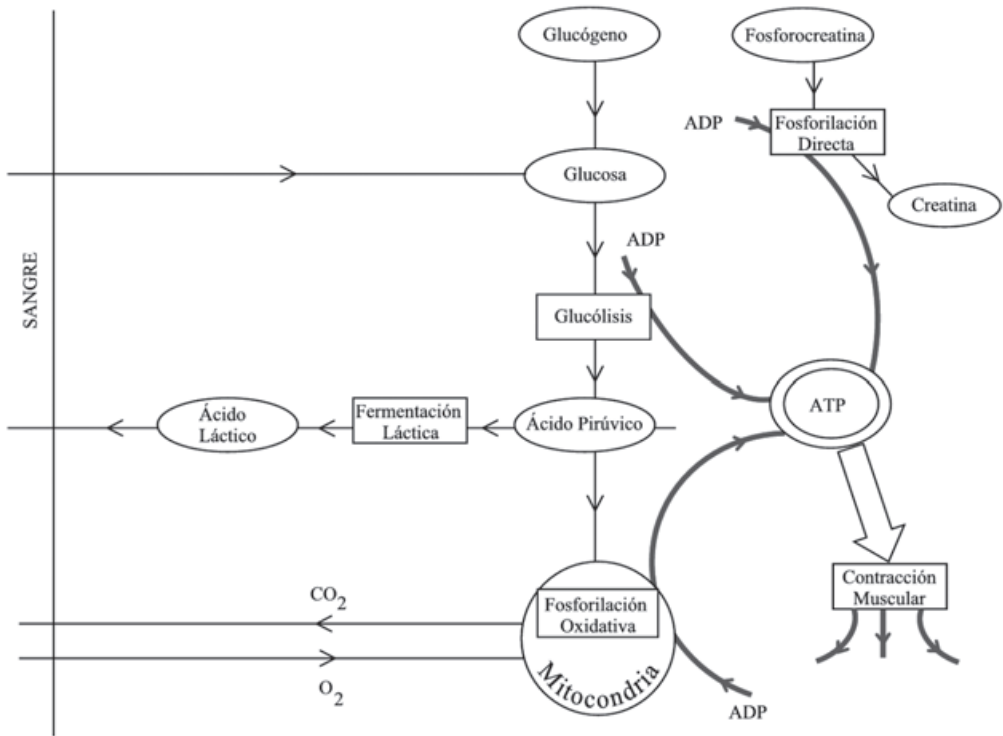
### 2.2.3 *Fibras rápidas y lentas*

Existen diferentes variedades de moléculas de miosina, con características funcionales que modifican su velocidad de deslizamiento. Ésta depende, a su vez, de la velocidad con que se extraiga la energía necesaria para romper el anclaje de los puentes y volver a fijarlos en otro punto. Cada operación de desanclaje y nuevo anclaje requiere hidrolizar una molécula de ATP (Adenosín Trifosfato o Trifosfato de Adenosina) y gastar la energía contenida en su enlace de fósforo de alta energía. Las fibras más lentas pueden obtener la energía necesaria del ATP sintetizado directamente por fosforilación oxidativa a partir de los hidratos de carbono y el oxígeno, desprendiendo  $CO_2$  en el proceso. Cuando las reservas de glucógeno en el músculo se agotan, el aporte de carbohidratos es insuficiente y, si el esfuerzo persiste aunque de forma no muy intensa, el organismo puede utilizar grasas como fuente de energía química y, en casos extremos, incluso proteínas. En todo caso, la velocidad de la fibra está limitada por la velocidad de incorporación del oxígeno a los órganos respiratorios, de su difusión en la sangre y del transporte a través del flujo sanguíneo al tejido muscular. Este mecanismo directo es el que usan los músculos llamados aerobios y el ejercicio que de él se deriva se conoce también como ejercicio aerobio.

Sin embargo, los vertebrados (y algunos invertebrados) pueden utilizar otro mecanismo, el llamado metabolismo anaerobio, que es capaz de generar estallidos de actividad muscular demasiado violentos y rápidos como para depender del aporte normal de oxígeno. En este caso, la energía necesaria se obtiene a partir de ATP sintetizado en procesos que no consumen oxígeno. Así, durante el esfuerzo muscular máximo, el ATP puede sintetizarse a partir de la fosfocreatina presente en el músculo con una eficacia y rapidez enormes, aunque los depósitos de esta sustancia se agotan en un periodo de entre ocho y diez segundos, para el caso de los humanos, debido a que la concentración de fosfocreatina sólo es unas pocas veces mayor que la de ATP. Este mecanismo se conoce como anaeróbico aláctico.

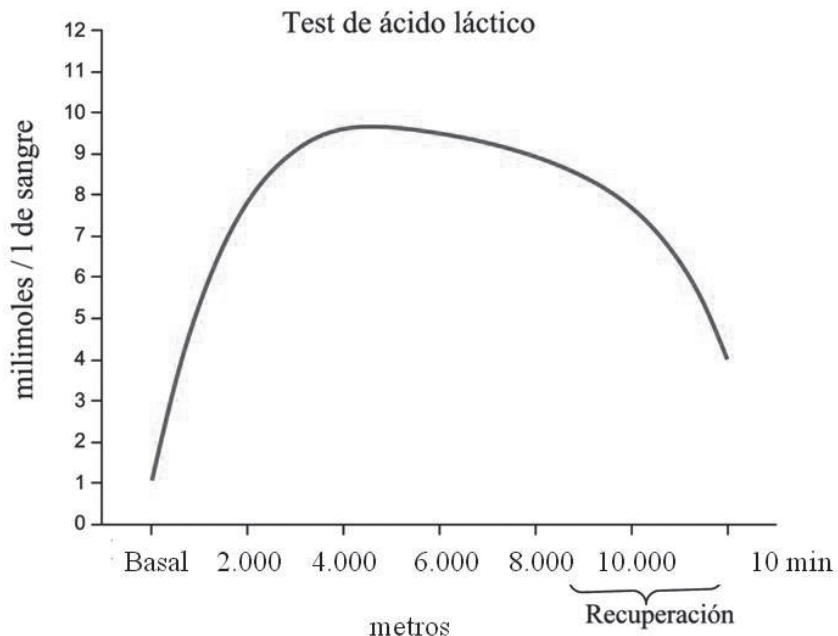
Si la actividad muscular intensa se prolonga, entonces las moléculas de ATP son sintetizadas por glucólisis, pero el ácido pirúvico resultante no se oxida en las mitocondrias por el procedimiento aerobio normal, sino que se convierte en ácido láctico. Este proceso no consume oxígeno, pero genera ácido láctico como desecho y se conoce como mecanismo anaeróbico láctico. Se trabaja, así, con una deuda de oxígeno y se acumula ácido láctico, que tiene efectos tóxicos en el músculo, produciendo una acidez que perturba la actividad enzimática responsable de la formación de los puentes entre filamentos y llega a bloquear su funcionamiento.



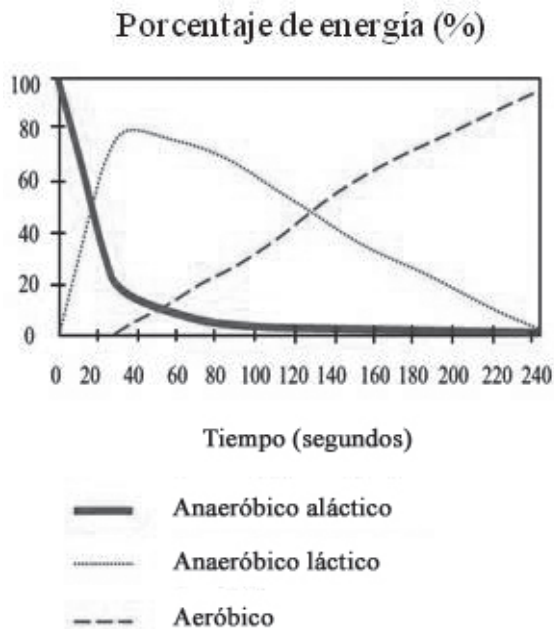


**Fig. 2.16.** Los tres procesos que regeneran el ATP necesario para suministrar energía a las miofibrillas y producir la contracción muscular.

Así, la prolongación de un ejercicio muy intenso da lugar a sensaciones de agarrotamiento, dolores y dureza muscular, junto con la imposibilidad de mantener la intensidad del esfuerzo. Al hacer vida normal, el contenido de ácido láctico es de un milimol por litro de sangre; si mantenemos una carrera continuada y suave normalmente se estabiliza en unos 2 a 3 milimoles por litro, y cuando la concentración supera los 20 milimoles por litro de sangre la situación se hace prácticamente insostenible. Eso es lo que ocurre con los corredores de 400 metros, que mantienen su esfuerzo prácticamente al máximo nivel y llegan a acumular, al final de la carrera, hasta 25 milimoles de ácido láctico por litro de sangre, lo que provoca, en atletas poco entrenados, descoordinación muscular, dolores intensos, vómitos, etc. Una carrera de 500 metros a este mismo nivel traspasaría ya el umbral de lo insoportable para el organismo.



**Fig. 2.17.** Test de ácido láctico realizado a un fondista de élite. El atleta ha corrido 4 series de 2.000 metros cada una a 4 min. 40 seg. con 30 seg. de recuperación entre series.



**Fig. 2.18.** Tipos de metabolismo para un ejercicio intenso y sostenido en función del tiempo.

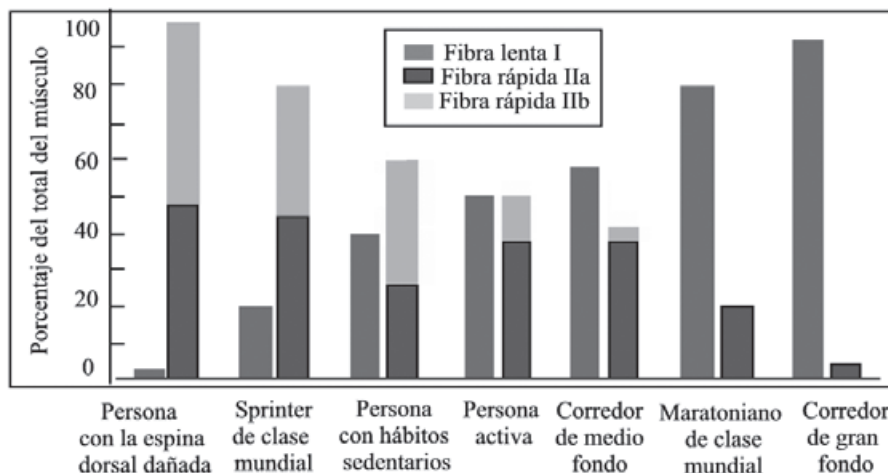
En consecuencia, en los intervalos de reposo entre periodos de actividad anaerobia, es imprescindible un aporte extraordinario de oxígeno para producir energía adicional que elimine el ácido láctico existente y “saldar” la deuda de oxígeno contraída. Un atleta que respira afanosamente después de una carrera rápida está, justamente, contrarrestando la acumulación de ácido láctico mediante una incorporación extraordinaria de oxígeno al organismo. Por esta misma razón, el ejercicio anaerobio no puede durar mucho, al no tolerar el organismo el exceso de ácido láctico durante mucho tiempo.

Las fibras musculares son, en lo que se refiere a su velocidad de contracción y procesamiento de energía, de varios tipos: las tónicas, muy lentas, capaces de contracciones continuas pero a pequeña velocidad, útiles para el mantenimiento del tono postural, y las fásicas, que son las que mueven las extremidades. De éstas, **las fibras lentas, o de tipo I, son aeróbicas**, con una gran resistencia a la fatiga, desarrollan poca fuerza por unidad de sección muscular y tienen muchas más mitocondrias en su citoplasma que las anaeróbicas a fin de asimilar el oxígeno necesario simultáneamente con el gasto de energía, lo que, junto con la gran concentración de mioglobina y alta capilarización, les da un tono rojizo, distinguible a simple vista. Las fibras lentas son más económicas desde el punto de vista energético y, por lo tanto, presentan una ventaja evolutiva cuando no es necesario moverse a gran velocidad, como es el caso de las tortugas, que cuentan con una sólida protección pasiva gracias a su caparazón. **Las fibras fásicas rápidas del tipo IIa usan los mecanismos aerobio y anaerobio**, con una resistencia a la fatiga y una fuerza por unidad de sección intermedias, tienen muchas mitocondrias y sirven para mantener una locomoción sostenida y vigorosa, como en el vuelo de las aves. Por último, **las fibras del tipo IIb se apoyan esencialmente en el metabolismo anaerobio**, son muy rápidas pero muy poco resistentes a la fatiga, desarrollan una gran fuerza por unidad de sección y tienen poca mioglobina, lo que les da un tono más pálido.

Por ejemplo, la masa muscular de los peces es, en su gran mayoría, anaerobia para permitir rápidos y bruscos esfuerzos, aunque de corta duración, y por eso tiene un tono predominantemente blanco, mientras que hay una capa de músculo rojizo bajo la piel que es la que sirve para nadar lentamente de forma continuada. Una carpa (*Cyprinus carpio*), por ejemplo, da un coletazo cada 0,4 segundos en natación continua mientras que en respuesta a una señal de peligro es capaz de dar un coletazo cada 0,025 segundos. En general, las fibras lentas son importantes para todo tipo de ejercicios de resistencia, como la carrera larga o el ciclismo, mientras que las fibras rápidas son las que entran en juego en los momentos de máxima potencia, como en el *sprint* o la halterofilia.

En el caso de corredores de distancias cortas y gran velocidad, las reservas de glucógeno existentes en el músculo se agotan tras un intervalo de 6 a 8 segundos, momento en el que empieza a ser dominante el mecanismo de producción de ácido láctico, el cual, a su vez, no puede prolongarse más allá de unos 40 segundos. Como puede verse en la figura 2.18, las distancias de 100 y 200 metros se basan casi exclusivamente en el glucógeno muscular y el metabolismo anaerobio, aunque el aerobio, que funciona de forma permanente, sigue proporcionando un 5 % de la energía necesaria en el primer caso y un 10 % en el segundo. Por el contrario, la carrera de los 400 metros (que dura más de 40 segundos) se encuentra en el límite de la acumulación de ácido láctico que puede soportar el organismo y requiere ya una contribución significativa del mecanismo aerobio.

En una persona adulta hay, aproximadamente, un cincuenta por ciento de fibras de cada clase (I y II) en los músculos directamente responsables de la locomoción, por ejemplo en el cuádriceps, pero hay diferencias individuales muy grandes, tanto genéticas como derivadas del entrenamiento.



**Fig. 2.19.** Composición del tejido muscular en las piernas de un corredor según su especialidad. Andersen *et al.* (2000).

Una persona con un 95 % de fibras lentas podría ser un buen maratoniano pero no un buen *sprinter*, mientras que si tiene únicamente un 20 % de fibras lentas, ocurrirá lo contrario. Ambas características tienen un fuerte componente genético y el entrenamiento sólo puede cambiar ligeramente el balance entre los tipos de fibra.

A partir de una edad tan temprana como los 25 años se pueden perder fibras musculares, pero no ganar nuevas. Para una persona que no haga ejercicio

intenso, a los 50 años se ha reducido su masa de músculos esqueléticos en un 10 % y cuando se llega a los 80 años, se puede haber perdido del orden de la mitad de dicha masa muscular. El entrenamiento específico puede aumentar la masa muscular y contrarrestar, en el caso de las personas mayores, su pérdida, aumentando el grosor de cada fibra pero no impidiendo la disminución de su número. El engrosamiento de las fibras se produce porque aumenta el número de miofibrillas en cada una de ellas mediante la generación y el ensamblamiento de nuevos filamentos de actina y miosina. El ejercicio desencadena, en los tendones y otras estructuras asociadas a los músculos, señales químicas que activan los genes de los núcleos que producen moléculas de actina y miosina. Pero producir más filamentos requiere de más núcleos a fin de preservar una cierta relación entre el número de núcleos de una fibra y su volumen. Estos núcleos provienen de células exteriores a las fibras, llamadas mioblastos, que se dividen y proporcionan más núcleos a la célula muscular.

La falta de ejercicio se traduce en una disminución de la masa muscular que puede comprobarse en las personas que han sufrido un grave daño en la médula espinal y han perdido movilidad en la parte inferior de su cuerpo. Pero esa pérdida se refleja especialmente en las fibras lentas, que pueden desaparecer casi completamente después de varios años de falta de estímulos nerviosos sobre el músculo, lo que parece indicar que la estimulación eléctrica es necesaria para mantener el tipo de estructura de la miosina en la que se basan los músculos lentos.

## 2.3 La conservación del momento

### 2.3.1 Sistemas aislados y definición de momento

Un sistema aislado es aquel que no interactúa con ningún otro, lo que, tal y como ya hemos dicho antes, puede visualizarse como un sistema muy alejado de cualquier otro cuerpo o partícula. Un sistema aislado puede ser muy complejo internamente, con multitud de interacciones entre sus componentes y, en la práctica, puede considerarse aislado del entorno si las energías de interacción con otros sistemas son muy inferiores a las que caracterizan las interacciones internas. Un ejemplo de sistema prácticamente aislado debido a la debilidad de su interacción con el entorno es una molécula de nitrógeno del aire, mientras que otro sistema, de enorme complejidad interna, aunque también aproximadamente aislado, es una galaxia. El caso más sencillo de sistema aislado es el formado por dos únicas partículas que interactúan entre sí. Si aplicamos a este sistema las leyes de Newton, tendremos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

y, sumando ahora las dos ecuaciones y teniendo en cuenta la ecuación (2.3), obtenemos:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

de donde se sigue que

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (2.4)$$

Cuando la derivada con respecto al tiempo de una cierta magnitud cinemática (una magnitud cinemática es una función de las posiciones y las velocidades de las partículas que componen un cuerpo) es cero, ocurre que dicha magnitud no varía con el tiempo y se dice que es una constante del movimiento. La mayoría de las magnitudes cinemáticas que introduciremos en lo sucesivo son interesantes porque se conservan: son constantes del movimiento en ciertas circunstancias. Definimos el momento o momento lineal  $\vec{p}$ , también llamado cantidad de movimiento, impulso o impulsión, para una partícula, como el producto de su masa por su velocidad, y para un sistema complejo como la suma de los momentos de sus partículas:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (2.5)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (2.6)$$

Para un sistema aislado de dos partículas se sigue de la ecuación (2.4) que:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{constante} \quad (2.7)$$

El momento de un cuerpo, al combinar masa y velocidad, es una magnitud que proporciona más información sobre su movimiento que la simple velocidad. Un camión y una mosca pueden ir a la misma velocidad, pero sus “efectos” son muy distintos debido a su distinta masa. El momento tiene en cuenta la masa y toma valores muy distintos en ambos casos aun cuando la velocidad sea la misma.

La segunda ley de Newton puede escribirse ahora, en función del momento de una partícula sometida a una fuerza, del siguiente modo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.8)$$

que es una forma más cercana a la formulación original de Newton.

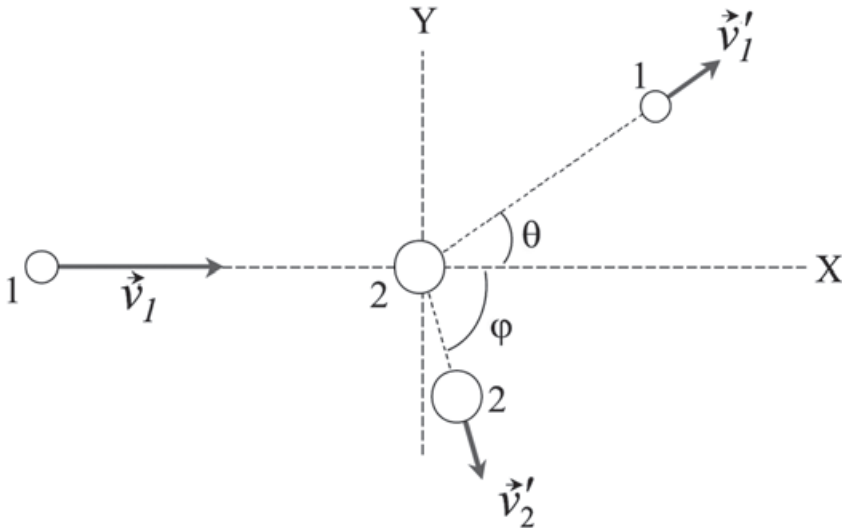
La conservación del momento total para un sistema de partículas en interacción pero aisladas del entorno se puede generalizar sin dificultad al caso de  $N$  partículas, incluso si  $N$  es enorme, siguiendo la misma pauta que para el caso de dos partículas visto anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_N \vec{v}_N) = 0 \\ \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \text{constante} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Así pues, **el momento total de un sistema aislado es siempre una constante del movimiento**. Si en el instante inicial tenía un cierto valor, calculable a partir de las velocidades iniciales, ya siempre tendrá el mismo valor. Las velocidades de cada una de las partículas que lo componen variarán, pero deben hacerlo de tal forma que el momento total permanezca constante. Nótese que este teorema de conservación se deduce directamente de la segunda y la tercera ley de Newton y es por completo independiente del tipo de interacciones internas o del número y complejidad de los componentes del sistema.

### 2.3.2 Choques y desintegraciones

Este resultado puede aplicarse al caso sencillo de dos cuerpos que chocan y ese choque es la única interacción que actúa sobre ellos. **Decimos que el choque es elástico cuando los dos cuerpos salen rebotados tras la interacción sin que se modifique su número ni su naturaleza y sin que haya pérdida de energía cinética** (que definiremos en detalle más adelante).



**Fig. 2.20.** Choque elástico entre el cuerpo 1 moviéndose a la velocidad  $\vec{v}_1$  y el cuerpo 2 en reposo.

El caso de la figura 2.20 se supone que no hay interacción con el entorno, ni siquiera gravitatoria, por lo que el sistema de los dos cuerpos que chocan es aislado. La conservación del momento implica que:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Lo que implica, a su vez, que existe una relación entre las componentes de las velocidades con que salen las partículas y las velocidades iniciales. Suponiendo que la partícula 2 esté inicialmente en reposo y tomando el eje  $X$  a lo largo de la velocidad con que incide la partícula 1, tenemos:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} = m_1 v'_1 \cos \theta + m_2 v'_2 \cos \varphi$$

$$0 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} = m_1 v'_1 \sin \theta + m_2 v'_2 \sin \varphi$$

y de estas ecuaciones se pueden despejar la velocidad de retroceso  $v'_2$  de la partícula 2 y el ángulo  $\varphi$  con el que retrocede en función de la velocidad  $v_1$  con la que sale la partícula 1 y el ángulo  $\theta$  que forma dicha velocidad con la velocidad incidente:

$$v_2'^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} (v_1^2 + v_1'^2 - 2v_1 v_1' \cos \theta)$$



$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{v_1 / v_1' - \cos \theta}$$

Si, por ejemplo, la partícula 1 sale de la interacción en dirección vertical hacia arriba,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , obtenemos:

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{v_1^2 + v_1'^2} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_1'}{v_1}$$

y, si no se tiene en cuenta la conservación de la energía cinética, no es posible fijar más los parámetros de la colisión. En todo caso, independientemente de la naturaleza del choque y sin más que aplicar las ecuaciones obtenidas a partir de la conservación del momento, se sabe, a partir de la ecuación (2.10), que en el límite en el que  $m_2 \gg m_1$ , que corresponde al caso de una partícula en reposo con una enorme inercia, prácticamente un punto fijo sobre el que colisiona la partícula 1,  $v_2' \rightarrow 0$ , es decir, la partícula 2 apenas se mueve por efecto del choque.

**La colisión es inelástica cuando hay pérdida de energía cinética en el choque**, normalmente en forma de calor o en la deformación mecánica de los cuerpos que chocan. Un caso extremo de interacción inelástica es aquel en el que los dos cuerpos permanecen unidos, empotrados uno en el otro, tras la colisión. En ese caso la conservación del momento se expresa del siguiente modo:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

siendo  $\vec{v}_f$  la velocidad final del sistema formado por los dos cuerpos unidos. Para el caso anterior, de una partícula moviéndose a lo largo del eje X y la otra en reposo, la velocidad final tiene que estar necesariamente alineada con el eje X y su módulo será:

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.11)$$

En el caso particular  $m_1 \gg m_2$ , la ecuación (2.11) indica que la velocidad final del conjunto es igual a la del cuerpo incidente. Se trata de un cuerpo pesado que prácticamente “arrolla” al más ligero, que estaba en reposo. Si, por el contrario,  $m_1 \ll m_2$ , entonces la velocidad final tiende a cero: un cuerpo ligero que se empotra sobre uno más pesado apenas puede moverlo.

Si las dos masas son iguales,  $m_1 = m_2$ , la velocidad final es la mitad de la del cuerpo incidente.

*Ejemplo.* Uno de los procedimientos para medir la velocidad de una bala es dispararla contra un bloque de madera de gran masa y medir la velocidad con que éste se mueve. Si una bala de 12 g se incrusta en un bloque de madera de 6 kg y el conjunto bloque-bala sale despedido a una velocidad de 0,8 m/s, la velocidad con la que ha tenido que incidir la bala es:

$$v_1 = \frac{6,012}{0,012} \times 0,8 \approx 401 \text{ m/s}$$

Otro de los casos sencillos en los que puede aplicarse la conservación del momento es el de un sistema que se fragmenta en otros varios como consecuencia de sus interacciones internas. Es el caso de un proyectil que se rompe en vuelo, el de un núcleo o un átomo que se desintegra, o el de un cohete que va eliminando parte de su combustible interno. En todos estos casos, el estado inicial es el de un solo cuerpo, por lo que la ecuación general que expresa la conservación del momento es:

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N \quad (2.12)$$

donde  $m_i, \vec{v}_i$  son las masas y velocidades de los fragmentos en los que se divide el cuerpo con una masa inicial  $m$  y una velocidad inicial  $\vec{v}$ .

Cuando la partícula inicial está en reposo y se desintegra en dos fragmentos, las velocidades con que salen despedidos deben cumplir la condición:

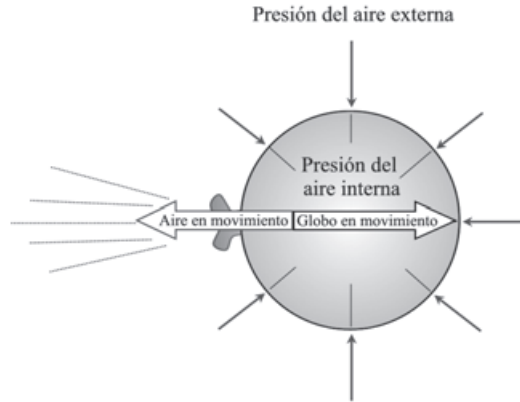
$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

lo que implica que las velocidades son paralelas y en sentido contrario, es decir, **los fragmentos salen en direcciones opuestas.**

### 2.3.3 La propulsión a chorro. El calamar

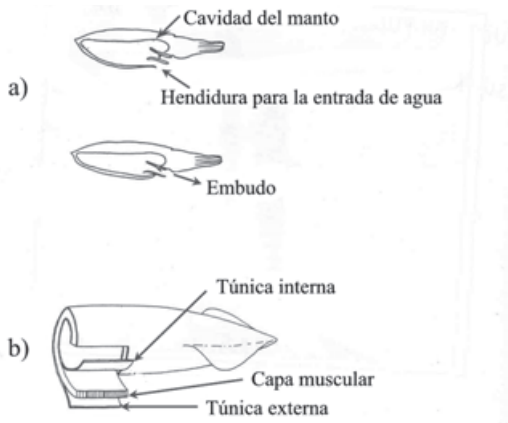
Los cohetes que ponen en órbita lanzaderas o estaciones espaciales y los que sacan de la Tierra las sondas que viajan a otros planetas, del mismo modo que algunos animales marinos como el calamar, se mueven gracias a la conservación del momento. En efecto, debido a sus interacciones internas (combustión del combustible que transportan o contracción muscular) generan un haz de gases o líquidos que salen a gran velocidad por una tobera, moviéndose el resto del cuerpo en la dirección contraria para conservar el momento total. Es exactamente lo mismo que ocurre cuando un globo se

deshincha y el aire sale en una dirección mientras que el globo se mueve en dirección contraria.



**Fig. 2.21.** Un globo que pierde aire en una dirección se mueve en la dirección contraria debido a la conservación del momento.

Los calamares son los invertebrados que pueden moverse a mayor velocidad en el agua, alcanzando grandes velocidades gracias al mecanismo de la propulsión a chorro, el mismo que los cohetes, es decir, aprovechando la conservación del momento. En efecto, estos animales poseen una cavidad externa al cuerpo del animal, rodeada por un manto de paredes musculosas, que se llena de agua.



**Fig. 2.22.** (a) Circulación del agua en la cavidad del manto.  
(b) Estructura del manto.

Los músculos circulares del manto son capaces de ejercer, al contraerse, una presión adicional sobre el agua de la cavidad del orden de 0,4 atmósferas (aproximadamente  $40.000 \text{ N/m}^2$ ). El agua sale, así, expulsada a través de un

conducto estrecho, llamado embudo o sifón, a gran velocidad. Como todas las complejas interacciones que dan lugar a la contracción muscular y la expulsión del agua son internas, el momento debe conservarse, lo que **implica que el calamar se mueve en dirección contraria al agua expulsada, exactamente igual que un cohete que se impulsa expulsando gas por sus toberas.** Cuando la cavidad está vacía puede volver a llenarse a través de la hendidura, muy ancha, que forma el borde del manto y la cabeza, de forma que el agua que entra lo hace a pequeña velocidad, casi en reposo respecto del animal y no tiene efecto mecánico alguno. Mientras se llena, una válvula impide el flujo a través del embudo, pero cuando la cavidad está llena, el borde del manto se cierra sobre la cabeza y el agua no puede salir por el mismo sitio por el que ha entrado, sino sólo a través del embudo, a gran velocidad debido a la estrechez de este último.

Normalmente el calamar contrae lentamente los músculos del manto con objeto de asegurar el flujo de agua a través de las branquias, situadas en la cavidad, y respirar, pero cuando quiere moverse con rapidez las contracciones son violentas y los chorros de agua expulsada hacen que el animal adquiera una gran velocidad.

El manto es una gruesa capa de músculo protegida por dos túnicas, una externa y otra interna, de fibras de colágeno que aseguran su resistencia y una gran flexibilidad de movimientos. La capa muscular está organizada en gruesos bloques de fibras circulares, que rodean la cavidad, y fibras radiales que lo recorren longitudinalmente. Ambos tipos de fibras son antagonistas.

Así, cuando los músculos circulares se contraen, se produce una disminución en el volumen de la cavidad, al tiempo que se cierra la hendidura entre el borde del manto y la cabeza, y el agua tiene que salir por el embudo. Cuando, por el contrario, se contraen los músculos radiales, se relajan los circulares y la cavidad aumenta de volumen, inhalando agua del entorno. Las contracciones lentas están controladas a través de un sistema de muchas neuronas motoras de pequeño tamaño, mientras que las contracciones rápidas del manto se desencadenan a través de dos axones gigantes, provenientes de dos neuronas especializadas, que aseguran la sincronización del movimiento de contracción del manto en un único impulso motor y hacen que la expulsión del agua se produzca con gran eficacia.

Los calamares pueden moverse en cualquier dirección, incluso hacia adelante, girando el extremo del embudo, de forma que la extremidad por la que sale el agua se oriente siempre en dirección contraria a la del movimiento. Un calamar del género *Loligo*, de unos 20 cm de largo, puede alcanzar una velocidad del orden de los 2 m/s en una sola contracción, con un ritmo de

hasta dos contracciones por segundo, siendo la masa de agua contenida en la cavidad del orden de 0,6 veces la masa del cuerpo. Si llamamos  $u$  a la velocidad de salida del agua por el embudo y  $v$  la velocidad a que se mueve en dirección contraria el cuerpo del calamar tras la contracción, en el caso en que ésta sea rápida y pueda considerarse que el agua sale instantáneamente, la conservación del momento, en el caso de partir de una situación en la que el animal está en reposo, implica que:

$$P = m_C v - m_A u = 0$$

$$v = u \frac{m_A}{m_C}$$

donde  $m_A$  y  $m_C$  son, respectivamente, la masa del agua expulsada y la del cuerpo del calamar.

Debido a la fuerte fricción con el agua, la fórmula así obtenida nos da sólo la velocidad inicial del animal, que se amortigua rápidamente. Si se tiene en cuenta el tiempo a lo largo del cual se produce la expulsión del fluido (agua para el calamar o gases para un cohete) y el cambio progresivo en la relación de la masa expulsada y la que se mueve en dirección contraria, se encuentra una expresión más complicada y precisa que no consideraremos aquí. A partir de la relación entre las masas  $m_A$  y  $m_C$  obtenemos la relación entre la velocidad de salida del agua por el embudo,  $u$ , y la velocidad de retroceso del calamar,  $v$ :

$$v = u \frac{m_A}{m_C} = u \frac{0,6m_C}{m_C} = 0,6u$$

y tomando ahora la velocidad inicial adquirida por propulsión, por ejemplo, igual a 2 m/s, podemos despejar  $u$ , obteniéndose un valor de 3,3 m/s. Hay calamares voladores que salen despedidos fuera del agua debido al impulso que se dan y han llegado a aterrizar sobre cubiertas de barcos situadas a cuatro metros de altura. Un calamar de este tipo, como el *Dosidicus gigas*, para elevarse a una altura de cuatro metros debe alcanzar los 9 m/s de velocidad inicial, lo que da, suponiendo la misma proporción entre masa de agua y masa corporal que en el caso anterior, la considerable velocidad de salida del agua por el embudo de unos 15 m/s. En realidad, los resultados así obtenidos representan una cota inferior a las velocidades del agua expulsada que, teniendo en cuenta los efectos de la expulsión progresiva, siempre es algo mayor, en este caso unos 19 m/s.

El calamar es el animal que más ha perfeccionado el sistema de propulsión a chorro basado en la conservación del momento, pero otros cefalópodos lo

utilizan también, así como algunos moluscos bivalvos, o larvas de insectos que expulsan agua por el recto, lo que les sirve para desplazarse a pequeñas velocidades, y hasta las medusas, cuyo movimiento se basa en la circulación del agua generada por la contracción de su cuerpo en forma de campana.

## 2.4 El centro de masas

### Definición

Para un sistema formado por un conjunto de  $N$  partículas, por ejemplo un ser vivo en el que las  $N$  partículas son las moléculas que lo componen o las distintas partes de su cuerpo, se puede definir un punto especial, llamado centro de masas, que es **un promedio ponderado de las posiciones de esas partículas**:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (2.13)$$

donde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  es la masa total del sistema. Para el caso de partículas de igual masa, el centro de masas es simplemente la posición promedio, como puede verse si se ponen todas las masas  $m_i$  iguales a un cierto valor  $m$ :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$$

Sin embargo, para componentes con masas desiguales, el centro de masas se sitúa más cerca de las masas más grandes.

*Ejemplo.* Para dos partículas iguales, el centro de masas es simplemente el punto intermedio entre las dos, mientras que cuando una de ellas, por ejemplo  $m_p$ , es mucho mayor que la otra, tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 \vec{r}_1}{m_1} = \vec{r}_1$$

Es decir, el centro de masas se sitúa cerca de la posición de la partícula más pesada. Es el caso del sistema Sol-Tierra. Si tomamos como origen de coordenadas la posición del centro del Sol, la Tierra se encuentra a una distancia aproximada de 150 millones de kilómetros y, sabiendo que la masa del Sol es unas 330.000 veces superior a la de la Tierra, podemos calcular la posición del centro de masas:

$$x_{CM} = \frac{m_{Sol} \times 0 + m_T \times 1,5 \times 10^8}{330.000m_T + m_T} \approx 450 \text{ km}$$

es decir, dado que el radio del Sol es de unos 700.000 km, el centro de masas del sistema Tierra-Sol se encuentra en un punto situado dentro del Sol, muy próximo a su centro. Lo mismo ocurre en el sistema Tierra-Luna y en el sistema protón-electrón de un átomo de hidrógeno, sólo que en este caso la masa del protón es unas 1.840 veces superior a la del electrón.

Si el sistema es continuo y no formado por un conjunto discreto de partículas, la definición de centro de masas puede generalizarse considerando cada elemento diferencial de volumen como un punto de masa  $dm$  situado en una cierta posición  $\vec{r}$  y sustituyendo la suma por una integral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho d^3 \vec{r}$$

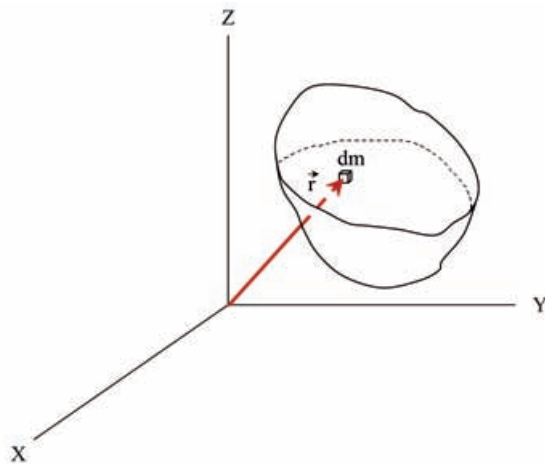


Fig. 2.23. Cuerpo continuo.

donde la integral está extendida a todo el volumen  $V$  del cuerpo,  $\rho$  es la densidad, que puede variar con la posición, y  $M$  es su masa total.

**Ejemplo.** Consideremos el caso simple de un cuerpo unidimensional, es decir, una varilla. En ese caso, podemos tomar el eje  $X$  a lo largo de la varilla y, de esta forma, sólo interviene la coordenada  $x$ .



**Fig 2.24.** Varilla unidimensional: (a) de densidad uniforme, (b) de densidad proporcional a la distancia a uno de sus extremos.

Para un objeto unidimensional, se define la densidad lineal como la masa por unidad de longitud. Escogiendo el origen de forma que coincida con el extremo izquierdo de la varilla, y llamando  $\lambda$  a la densidad lineal,  $dm = \lambda dx$ , el centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

Para el caso de una varilla homogénea, es decir, de densidad uniforme,  $M = \lambda L$  y la posición del centro de masas:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \lambda \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

se encuentra en el centro de la varilla, como resulta intuitivo. Consideremos ahora que la densidad varía con la posición, aumentando linealmente a lo largo de la varilla,  $\lambda = kx$ , siendo  $k$  una constante. En este caso:

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda dx = k \int_0^L x dx = \frac{kL^2}{2}$$

y el centro de masas estará situado en:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{k}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{kL^3}{3M} = \frac{2}{3}L \tag{2.14}$$

El centro de masas se encuentra en este caso escorado hacia la parte más densa de la varilla. Un ejemplo aproximado de varilla cuya densidad aumenta linealmente hacia un extremo es un bate de béisbol, y su centro de masas se encuentra, de acuerdo con la expresión (2.14), a un tercio de su longitud, aproximadamente, del extremo más grueso y a dos tercios del extremo más delgado.



**Para sistemas con una cierta simetría, el centro de masas se sitúa siempre en el centro, el eje o el plano de simetría.** Por ejemplo, en una esfera, un cubo o un cilindro homogéneos, el centro de masas está en el centro geométrico.

Para una persona, el centro de masas se encuentra aproximadamente a la altura del ombligo (ver el Ejercicio 2.11) y a unos tres o cuatro centímetros por delante de la vertical del punto de unión de los tobillos con los pies. **Para un sistema formado por varios cuerpos extensos, el centro de masas se calcula como si cada uno de ellos fuera puntual y toda su masa estuviera concentrada en su centro de masas.** Gracias a esta propiedad hemos podido calcular anteriormente el centro de masas del sistema Tierra-Sol, considerando que cada uno de los dos astros es un punto situado en su centro respectivo que concentra toda su masa.

**El centro de gravedad se define del mismo modo que el centro de masas, pero ponderando con los pesos de las partículas y no con las masas.** Naturalmente, para el caso de cuerpos sobre la superficie terrestre el peso es siempre igual a  $mg$  con  $g$  constante, por lo que coinciden centro de masas y centro de gravedad. En lo sucesivo, utilizaremos indistintamente ambas expresiones porque siempre nos referiremos a sistemas cuyos componentes están sujetos al mismo campo gravitatorio.

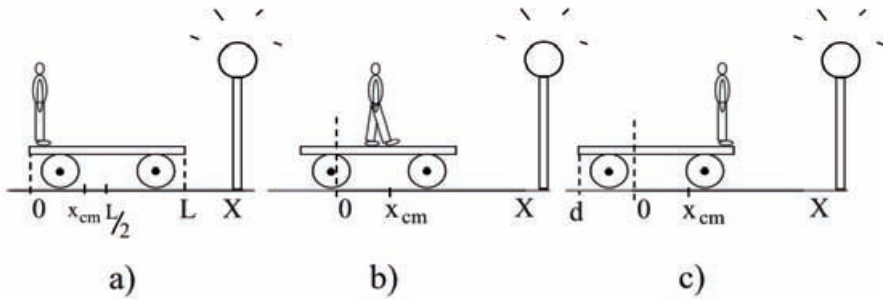
### El movimiento del centro de masas en sistemas aislados

La velocidad con que se mueve el centro de masas de un cuerpo será:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \vec{P}$$

Para un sistema aislado sabemos que el momento total se conserva, por lo que también la velocidad del centro de masas es constante. Así, **para un sistema complejo, con multitud de interacciones internas pero aislado del exterior, el centro de masas permanece en reposo o sigue un movimiento uniforme y rectilíneo**, independientemente de los movimientos de las partes que configuran dicho sistema. Por ejemplo, el centro de masas de un astronauta fuera de toda interacción externa, en el espacio exterior, se mueve indefinidamente con movimiento uniforme y rectilíneo. Puede girar o mover los brazos y las piernas, pero no puede alterar con sus propias fuerzas la velocidad de su centro de masas.

***Ejemplo.** Consideremos un sistema formado por un carro y una persona situada en uno de sus extremos, según la figura 2.25.*



**Fig. 2.25.** Persona desplazándose sobre un carro que se mueve horizontalmente sin rozamiento con el suelo. (a) Situación inicial. (b) Situación intermedia. (c) Situación final.

Partimos de una situación de reposo, en la que el momento inicial es cero y, por lo tanto, la velocidad del centro de masas es cero. Si no hay interacción con el entorno porque no hay rozamiento con el suelo ni con el aire, el sistema puede considerarse aislado y la velocidad del centro de masas será indefinidamente cero, es decir, permanecerá en la misma posición que ocupaba en el instante inicial. Supondremos que el carro es simétrico respecto del plano transversal que pasa por su centro, de forma que su centro de masas está a una distancia  $\frac{L}{2}$  del origen, siendo  $L$  su longitud total. Llamando  $M$  a la masa del carro y  $m$  a la de la persona, la posición del centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{m \times 0 + M \times L/2}{m + M} = \frac{M}{M + m} \times \frac{L}{2} \quad (2.15)$$

Si la persona puede caminar sobre el carro es porque ejerce una fuerza de fricción con los pies sobre su superficie, es decir, como resultado de interacciones internas al sistema. La conservación del momento implica que, si la persona se mueve en un sentido, el carro debe moverse en el contrario, de forma que el momento total siga siendo cero o, lo que es lo mismo, que la posición del centro de masas no varíe, lo que permite calcular la distancia que el carro ha tenido que desplazarse hacia atrás cuando la persona llega al final del mismo y se detiene. En esta situación, la posición del centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{m(L - d) + M\left(\frac{L}{2} - d\right)}{m + M} \quad (2.16)$$

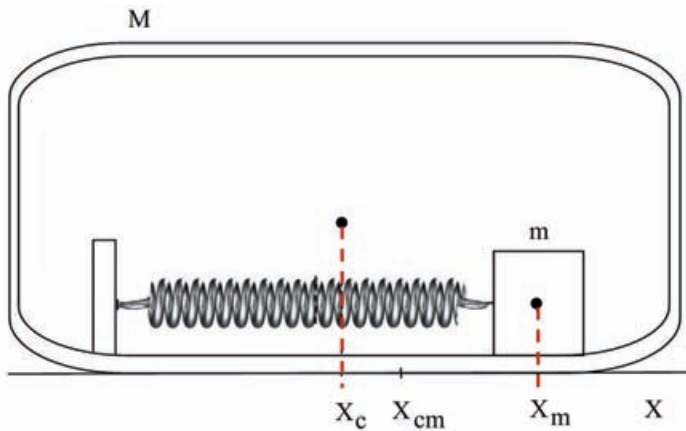
siendo  $d$  el desplazamiento total. Igualando ahora las expresiones (2.15) y (2.16), obtenemos:

$$d = \frac{m}{m+M} L$$

Nótese que si la masa del carro es enorme respecto de la de la persona ( $M \gg m$ ), por ejemplo un vagón de ferrocarril, la distancia retrocedida es prácticamente cero. Por el contrario, para un bote sobre el agua o un carro ligero, cuya masa sea igual a la de la persona ( $M \simeq m$ ), la distancia retrocedida es justamente la mitad de su longitud.

### Balisticardiografía

Consideremos un sistema formado por una caja de masa  $M$  que contiene un muelle sujeto rígidamente a la caja y en cuyo extremo libre puede oscilar un cuerpo de masa  $m$ .



**Fig. 2.26.** Caja rígida de masa  $M$  en cuyo interior hay un cuerpo de masa  $m$  que puede moverse por la acción de un muelle sujeto a la caja. La posición del centro de masas de la caja es  $x_c$  y la del sistema caja + cuerpo oscilante es  $x_{cm}$ . El muelle y la sujeción de éste a la caja se toman de masa nula.

Si la caja está sobre una superficie horizontal sin rozamiento, su peso está compensado por la fuerza de contacto de la superficie, por lo que la fuerza externa neta actuando sobre el sistema es cero. Las fuerzas responsables de la oscilación del cuerpo de masa  $m$ , a través de la unión rígida entre el muelle y la caja, son internas al sistema. Si el conjunto estaba inmóvil en el momento inicial, la posición de su centro de masas respecto de un eje de coordenadas ligado a la masa será:

$$x_{CM} = \frac{Mx_c + mx_m}{M + m} \quad (2.17)$$

donde  $x_C$  es la posición del centro de la caja y  $x_m$  es la posición de la masa  $m$ . El centro de masas del conjunto no variará en el tiempo; es decir, su derivada respecto del tiempo será nula. Si tomamos como origen de coordenadas la posición del centro de masas del sistema,  $x_{CM} = 0$ , de acuerdo con la ecuación (2.17), tiene que cumplirse en todo momento que:

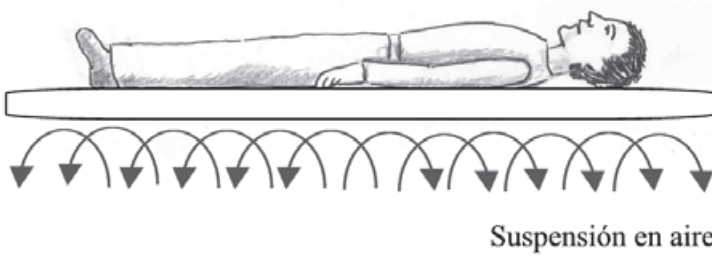
$$x_C = -\frac{m}{M} x_m \quad (2.18)$$

Si la masa ligada al muelle oscila, entonces la caja tendrá que oscilar en sentido contrario para que el centro de masas del sistema permanezca inmóvil. Si la oscilación de la masa interna tiene una amplitud  $x_0$ , su posición vendrá dada por la expresión  $x_m = x_0 \text{ sen}(\omega t)$ , donde  $\omega$  es un parámetro llamado pulsación (sobre el que se volverá en la sección dedicada al movimiento oscilatorio) y la caja oscilará en sentido contrario con la misma pulsación pero con diferente amplitud:

$$x_C = -\frac{m}{M} x_0 \text{ sen}(\omega t) \quad (2.19)$$

lo que asegura que se cumple la ecuación (2.18). Es decir, registrando los movimientos externos de la caja podemos deducir el tipo de movimiento que la masa  $m$  realiza en su interior.

La técnica que permite estudiar el movimiento de la sangre de una persona midiendo los pequeños movimientos del cuerpo que se derivan del mismo se llama balistocardiografía y se basa en el principio estudiado en los párrafos anteriores. En efecto, durante la fase de sístole el corazón impulsa unos 65 g de sangre por el sistema arterial, principalmente a través de la arteria aorta, desplazando el centro de masas de la sangre impulsada unos 7 cm. Durante la diástole la sangre fluye de nuevo al corazón a través de las venas cava y pulmonares, describiendo así un movimiento aproximadamente oscilatorio con un periodo de unos 0,8 segundos (lo que equivale a un ritmo cardíaco de unas 75 pulsaciones por minuto e implica que el corazón bombea  $75 \times 65 \approx 5.000$  gramos de sangre por minuto).

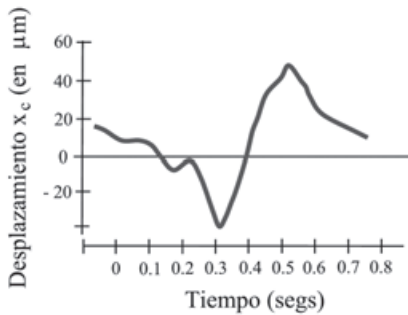


**Fig. 2.27.** Dispositivo para balistocardiograma.

Supongamos ahora que una persona yace sobre un soporte horizontal que puede moverse sin rozamiento, por ejemplo sobre un flujo de aire. El cuerpo de la persona es como la caja del ejercicio anterior y la sangre juega el papel de masa oscilante en su interior. Puesto que no hay fuerzas externas, la condición de que el centro de masas total permanezca inmóvil implica que el cuerpo de la persona (que suponemos de  $70\text{ kg}$ ) oscilará para compensar la oscilación de la sangre con el mismo periodo de  $0,8$  segundos y una amplitud  $A_c$ :

$$A_c = \frac{m}{M} x_0 = \frac{0,065}{70} \times 0,07 = 6,5 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,065 \text{ mm} = 65 \mu\text{m}$$

El desplazamiento producido es minúsculo pero observable y separable de vibraciones que proceden del medio debido a que se produce con una frecuencia específica, que es la de la pulsación cardíaca. Un balistocardiograma típico es el de la figura 2.28, en el que puede verse que el desplazamiento es periódico pero sólo aproximadamente sinusoidal.



**Fig. 2.28.** Balistocardiograma: oscilación del cuerpo en posición horizontal por efecto de los latidos del corazón.

A partir del estudio de esa curva puede calcularse, en principio, la masa de sangre bombeada por el corazón en cada contracción, que es una manifestación del funcionamiento del sistema cardiovascular. De todas formas, la interpretación de un balistocardiograma es difícil y debe completarse

con medidas de velocidad y aceleración del movimiento, así como con electrocardiogramas.

### El movimiento del centro de masas en sistemas en interacción

Consideremos ahora un cuerpo en el que sus componentes están sometidas no sólo a las fuerzas internas, sino también a fuerzas externas  $\vec{F}^{(e)}$ . Para el caso de dos partículas, las ecuaciones de Newton se escriben del siguiente modo:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

Sumando ahora estas dos expresiones y recordando la tercera ley de Newton ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ), resulta que:

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

y recordando, de la definición del centro de masas:

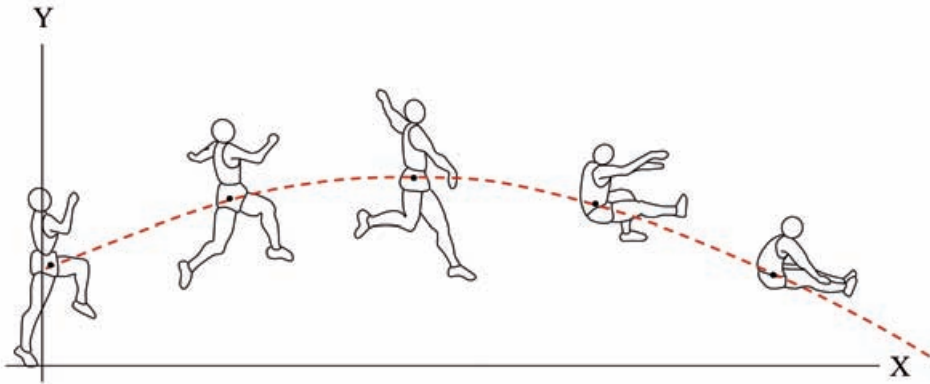
$$\vec{a}_{CM} = \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2)$$

obtenemos:

$$\vec{F}^{(e)} = M \vec{a}_{CM} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \quad (2.20)$$

Es decir, **el centro de masas se mueve con una aceleración igual a la que tendría una partícula que concentrara toda la masa del cuerpo y sobre la que actuara la suma de todas las fuerzas externas.**

***Ejemplo.** Un saltador de longitud, mientras va en carrera hacia la tabla de saltos, interactúa con el suelo a través de sus pies y va acelerando su movimiento. Cuando da el impulso final y despega, no hay más interacciones que las internas, gracias a las que puede mover sus miembros durante el salto, y la gravedad terrestre como única fuerza externa. Así, su centro de masas describe un movimiento parabólico determinado por la velocidad inicial (sus dos componentes, horizontal y vertical), sin que el saltador pueda alterar su movimiento. Los movimientos que realiza durante el vuelo le permiten aprovechar mejor el rozamiento con el aire, por lo que en vacío serían irrelevantes, y también aterrizar en una posición que le permita tocar el foso de saltos con los pies lo más lejos posible del punto de batida, pero no para alterar la trayectoria de su centro de masas.*



**Fig. 2.29.** Salto de longitud y movimiento del centro de masas del saltador.

Si un saltador sale de la tabla de batida con una velocidad de 11 m/s y un ángulo de elevación  $\alpha = 20^\circ$  (parámetros típicos de Carl Lewis, por ejemplo), el centro de masas, que partiría desde una altura  $y_0$  de aproximadamente un metro en el momento del despegue, llegaría al suelo, tras aplicar la expresión (1.20), a una distancia de unos 10 metros del punto de salida (la mejor marca de Carl Lewis es de 8,87 m, obtenida en 1991, mientras que el récord del mundo lo batió ese mismo año Mike Powell saltando 8,95 m). En este cálculo no se ha tenido en cuenta el rozamiento con el aire, que disminuiría ligeramente la distancia recorrida, ni que el centro de gravedad no llega nunca al suelo, sino que está todavía a una cierta altura cuando los pies impactan sobre el foso de caída. Es también muy fácil calcular la altura máxima durante el salto. En efecto, si la componente vertical de la velocidad es  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha \approx 3,76$  m/s, la altura máxima sobre el punto de partida será

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} \approx 0,72 \text{ m}$$

que sumado al metro de altura desde el que se inicia el salto, da para el centro de gravedad del atleta una altura máxima del orden de 1,7 metros.

### El choque de un cuerpo contra el suelo

De la ecuación (2.20) puede deducirse que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(e)} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{P}_{CM} = \vec{P}_{2,CM} - \vec{P}_{1,CM}$$

donde  $\bar{P}_{1,CM}$  y  $\bar{P}_{2,CM}$  son, respectivamente, los momentos final e inicial del centro de masas. Considerando movimientos en una dimensión y suprimiendo índices y superíndices, en el bien entendido de que se trata de fuerzas externas totales y momentos del centro de masas del cuerpo sobre el que se aplican esas fuerzas:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = P_2 - P_1 \quad (2.21)$$

Cuando se producen choques o interacciones de corta duración, se puede aproximar la fuerza que actúa durante el choque por una fuerza promedio aproximadamente constante  $F_0$ . En estas condiciones, podemos integrar la ecuación (2.21) y obtenemos:

$$F_0 \Delta t = P_2 - P_1$$

Consideremos ahora una persona en un ascensor que cae en caída libre debido a que se ha roto el cable de sustentación. Al impactar contra el suelo puede ocurrir que el choque sea elástico y rebote por completo, en cuyo caso el momento de la persona después del choque es igual al que llevaba antes pero cambiado de signo, o que no rebote en absoluto, en cuyo caso el momento final es cero. Tomando como sentido positivo el vertical hacia arriba, que es el de la fuerza  $F_0$  del suelo sobre el cuerpo,  $P_1$  es igual a  $-P$ , donde  $P$  es el módulo del momento incidente y el momento saliente  $P_2 = xP$ , donde  $x$  es un número que varía entre 1 cuando el choque es elástico y 0 cuando el cuerpo no rebota en absoluto. En la aproximación de una fuerza constante durante el tiempo del choque:

$$F_0 \Delta t = xP + P = C \times P = C \times mv \quad (2.22)$$

donde  $C = 1 + x$  es una constante que vale 2 para el caso de rebote completo, 1 para el caso de ningún rebote y un valor entre 1 y 2 para todos los casos intermedios,  $m$  es la masa y  $v$  la velocidad. Si la caída ha sido libre y despreciamos el rozamiento, la velocidad es una función de la altura de caída  $h$ :

$$v = \sqrt{2gh}$$

de donde:

$$F_0 = C \frac{mv}{\Delta t} = C \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} \quad (2.23)$$

Pongamos algunos números. Si el golpe ha sido seco, contra un suelo duro y manteniendo rígido el cuerpo, el tiempo de choque será muy corto, del orden de unos 5 milisegundos. Si la persona cae desde 20 metros (unos 6 pisos) y pesa 70 kg:



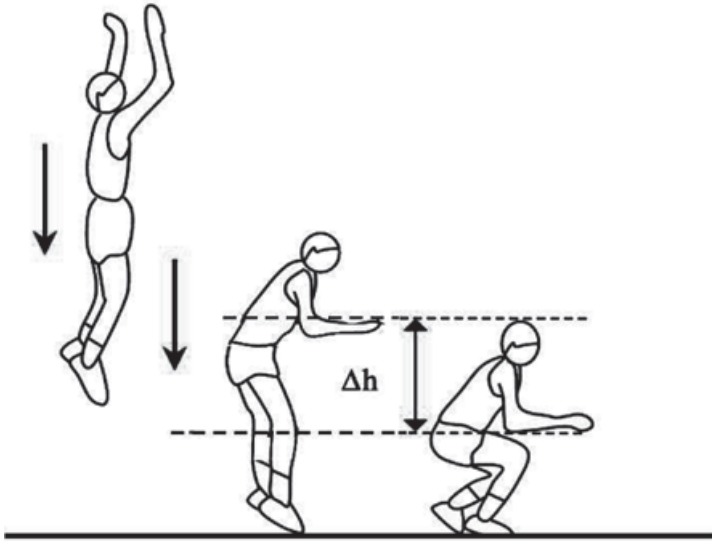
$$F_0 = C \frac{70 \times \sqrt{2 \times 9,8 \times 20}}{0,005} \approx C \times 280.000 \text{ N}$$

Por lo tanto, la fuerza experimentada en el choque varía entre 280.000 *N* y 560.000 *N*, según sea el valor de *C*, es decir, el equivalente a un peso entre 28 y 56 toneladas. Nótese que la velocidad de caída es de unos 20 m/s (71 km/h), por lo que la fuerza calculada es la misma que sufriría el pasajero de un automóvil circulando a esa velocidad en un choque seco, contra un muro de hormigón, por ejemplo. Volviendo al ascensor, si la persona cae de pie rígidamente, la mitad de la fuerza se aplicará a cada una de las dos piernas, específicamente sobre la tibia. El punto más débil de la tibia es el más estrecho, un poco por encima del tobillo, con una sección de unos 3,5 cm<sup>2</sup>, de forma que la fuerza por unidad de sección en ese punto de una de las dos tibias, lo que llamaremos esfuerzo en el capítulo 16, será:

$$\sigma = \frac{F}{S} = C \times \frac{280.000}{2 \times 3,5} = C \times 40.000 \text{ N / cm}^2$$

Pero el esfuerzo de rotura por compresión longitudinal para un hueso es del orden de 16.000 N/cm<sup>2</sup>, entre 2,5 y 5 veces menor que el soportado en el choque, lo que implica que, en estas condiciones, el hueso se fracturará. Si en la parte del suelo donde choca el ascensor hay un amortiguador, como muelles o un material blando, el periodo de tiempo de colisión se prolonga, lo que disminuye la fuerza ejercida durante ese periodo (ver ecuación (2.23)). Así, si la duración del choque se multiplica por diez, la fuerza disminuye en esa misma cantidad y los daños causados son menores. Otra forma de disminuir los daños es aumentar la superficie sobre la que se reparte la fuerza adoptando una posición tendida, aunque entonces puede sufrir la columna o la cabeza, pero el impacto, medido en fuerza por unidad de superficie, es menor.

Cuando una persona cae desde una cierta altura sobre sus pies, el fenómeno es el mismo y las expresiones obtenidas más arriba siguen siendo válidas. Lo que se hace instintivamente, en este caso, para aumentar la duración del impacto y disminuir, en consecuencia, la fuerza soportada, es doblar las rodillas gradualmente de forma que la fuerza se reparta a lo largo del tiempo que media desde que hacemos contacto con el suelo hasta que cesa el movimiento.



**Fig. 2.30.** Flexión de piernas en la caída vertical. El intervalo  $\Delta h$  es la distancia de deceleración desde la velocidad de caída hasta la velocidad cero.

Supongamos, entonces, que la persona llega al suelo con una velocidad,  $v$ , tras caer desde una altura  $h$ . Desde que toca el suelo hasta que queda en reposo hay una deceleración, cuyo promedio es  $a$ , generada por los músculos de las piernas al doblarse por las rodillas, que reduce la velocidad de caída desde  $v$  hasta cero, teniendo lugar dicha reducción a lo largo de un recorrido  $\Delta h$ , que es la distancia que recorre el centro de gravedad del cuerpo en la fase de frenado. La deceleración será, entonces:

$$a = \frac{v^2}{2\Delta h}$$

y el tiempo que tarda en detenerse es:

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{2\Delta h}{v} \quad (2.24)$$

En este caso  $C$  es igual a 1 debido a que la persona que cae no rebota, sino que queda inmóvil después del tiempo de frenado. De las ecuaciones (2.23) y (2.24) se sigue que la fuerza media experimentada en el choque es:

$$F_0 = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{mv^2}{2\Delta h} \quad (2.25)$$

Ahora podemos sustituir la velocidad de caída en función de la altura  $h$  desde la que cae:

$$F_0 = \frac{m \times 2gh}{2\Delta h} = mg \frac{h}{\Delta h}$$

Si el choque se produce con las piernas rígidas, de forma que casi no hay flexión y  $\Delta h$  es muy pequeño (pongamos del orden de 1 cm), entonces podemos calcular la altura a partir de la cual habrá fractura de tibia. Para una persona de 70 kg, tendremos:

$$F_0 = 70 \times 9,8 \times \frac{h}{0,01} = 68.600 \times hN$$

Como la sección mínima de cada tibia es de unos  $3,5 \text{ cm}^2$ , el esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{68.600 \times h}{2 \times 3,5} = 9.800 \times h \text{ N/cm}^2 \quad (2.26)$$

y habrá fractura si esta tensión es superior al límite de rotura por compresión del hueso, que es de unos  $16.000 \text{ N/cm}^2$ . Por lo tanto, caídas rígidas a partir de unos dos metros de altura serán suficientes para quebrar la tibia. Flexionar las piernas de forma que la distancia de deceleración sea de 10 o 20 cm sirve para evitar la rotura de huesos a estas alturas y a otras superiores. Lo que ocurre para alturas más grandes es que la deceleración que se necesita es muy grande, lo que implica una tensión en ligamentos y tendones que pueden dañarse con más facilidad que el hueso. Por supuesto que si la caída tiene lugar sobre arena, agua o un suelo blando, la distancia de deceleración aumenta debido al recorrido en el medio absorbente, sin necesidad de tensar los músculos, y la fuerza del impacto es mucho menor, por lo que se puede caer desde alturas muy grandes sin que se produzca ninguna fractura.

Un paracaídas deportivo moderno puede poner al paracaidista en el suelo con una velocidad de unos  $3 \text{ m/s}$ , que es la velocidad a la que cae en vacío un cuerpo desde medio metro de altura. En estas condiciones, la ecuación (2.25) nos dice que no habrá ningún riesgo de fractura. Los paracaídas militares deben ser diseñados de forma que sean rápidos para que el tiempo pasado en el aire sea lo más corto posible pero, al tiempo, deben permitir aterrizar de forma que no se produzcan daños. La velocidad de llegada en estos casos es de unos  $7,5 \text{ m/s}$ , que corresponde a una caída libre desde unos  $3 \text{ m}$ . Los paracaidistas deben, por lo tanto, aprender a caer flexionando y disponiendo su cuerpo de forma que se prolongue al máximo el tiempo de deceleración y se reparta la fuerza del impacto sobre la mayor superficie posible.

Hasta este momento, hemos estado considerando la caída en posición vertical, lo que permite aumentar el tiempo de impacto flexionando las piernas.

Pero si la caída es en posición tendida, la distancia de deceleración sólo puede producirse por la deformación elástica del cuerpo, que es muy pequeña, o por la del suelo si éste es blando. Si la caída se produce en posición tendida, la fuerza del impacto se reparte sobre una superficie mucho mayor. Por ejemplo, la superficie de contacto en la caída de espaldas es de unos 3.500 cm<sup>2</sup>, es decir, unas 1.000 veces igual a la superficie transversal de una tibia. Se ha comprobado que, para choques con el suelo de este tipo, no se producen daños si la fuerza por unidad de superficie es del orden de 20 N/cm<sup>2</sup> o menor, mientras que hay un 50 por ciento de probabilidades de fallecimiento si este parámetro es de unos 35 N/cm<sup>2</sup> o mayor.

Estudiemos ahora la caída sobre una superficie blanda, como por ejemplo la nieve, que permite alargar la fase de deceleración y disminuir la violencia del impacto. Cuando un cuerpo cae en el aire, además de la fuerza de gravedad, actúa el rozamiento, que es muy pequeño a bajas velocidades (es decir, poca altura de caída) y por eso no lo hemos considerado hasta ahora. Sin embargo, como veremos en detalle en el siguiente capítulo, a grandes velocidades la fricción puede llegar a ser tan grande que la velocidad de caída se haga constante, con un valor que llamamos velocidad límite. La velocidad límite para una persona en aire al nivel del mar es de unos 55 m/s (200 km/h). De la ecuación (2.25) sabemos que la fuerza por unidad de superficie en un choque es:

$$\sigma = \frac{F_0}{S} = \frac{mv_L^2}{2S\Delta h}$$

donde  $S$  es la superficie que recibe el impacto y  $v_L$  es la velocidad límite. Para una superficie de 3.500 cm<sup>2</sup> y una masa de 70 kg:

$$\sigma \approx \frac{30}{\Delta h} \text{ N / cm}^2$$

Lo que quiere decir que si la distancia de amortiguamiento en el suelo es del orden de 1 metro o mayor, estamos en el rango de valores para el que la probabilidad de sobrevivir es del 50 por ciento. Y por sorprendente que parezca el resultado y simple que sea la deducción, los datos empíricos están de acuerdo con esta conclusión. Existen multitud de documentos que testimonian la posibilidad de sobrevivir a una caída desde un avión sin paracaídas, siempre que ésta se produzca sobre nieve profunda y la profundidad del agujero que se hace en la fase de frenado contra el suelo resulta ser del orden de, o algo superior a, un metro.

## 2.5 Ejercicios propuestos

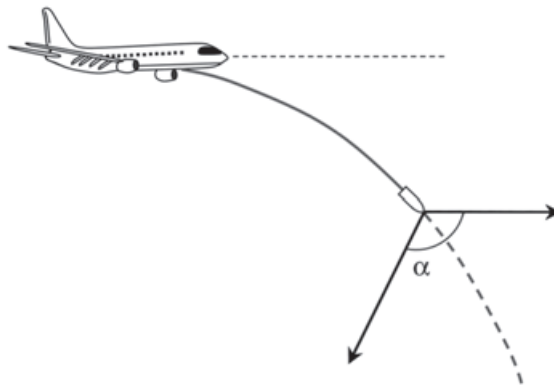
**Ejercicio 2.1** Una persona se encuentra en un bote en reposo sobre el agua y tira una pelota de  $0,5 \text{ kg}$  de masa hacia atrás con una velocidad de  $4 \text{ m/s}$ . Si la masa del bote más la persona es de  $120 \text{ kg}$ , calcular la velocidad a la que se moverá el bote en sentido contrario a la pelota si no hubiera rozamiento.



**Fig. 2.31.** Al lanzar un objeto en una dirección, el resto del sistema (bote, persona, objeto, etc.), inicialmente en reposo, retrocede en la dirección contraria debido a la conservación del momento.

Sol.:  $v = 1,7 \text{ cm/s}$

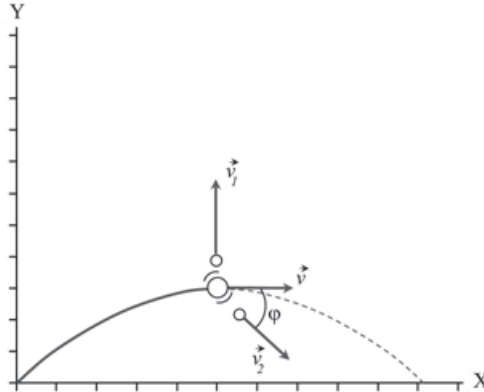
**Ejercicio 2.2** Desde un avión se lanza una granada en dirección horizontal con una velocidad de  $100 \text{ m/s}$ . La granada estalla a los  $20 \text{ s}$  de haber sido lanzada, dividiéndose en dos trozos, de masas  $1 \text{ kg}$  y  $1,5 \text{ kg}$ . El fragmento mayor sale despedido según la dirección horizontal con una velocidad de  $250 \text{ m/s}$ . Calcular la velocidad y dirección del otro fragmento.



**Fig. 2.32.** Un avión lanza una bomba que se fragmenta en vuelo.

Sol.:  $\vec{v} = (-125, -500) \text{ m/s}$ ;  $v = 515 \text{ m/s}$ ;  $\alpha = -104^\circ$

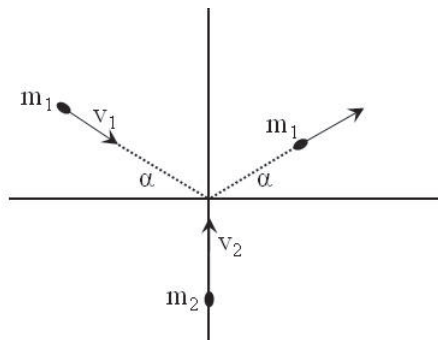
**Ejercicio 2.3** *Un proyectil llega al punto de máxima altura con una velocidad de 100 m/s y en ese punto explota y se divide en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales sale en dirección vertical con una velocidad también de 100 m/s. Calcular el módulo de la velocidad y la dirección en la que sale el otro fragmento.*



**Fig. 2.33** Fragmentación de un proyectil cuando se encuentra en el máximo de su trayectoria parabólica.

Sol.:  $v_2 = 223,6 \text{ m/s}$ ;  $\varphi = -26,5^\circ$

**Ejercicio 2.4** *Dos bolas de masas  $m_1 = 5 \text{ kg}$  y  $m_2 = 10 \text{ kg}$  se mueven hacia el origen de coordenadas con velocidades constantes  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  y  $v_2$ , respectivamente, según se indica en la figura 2.34. Tras el choque, que se produce en el origen, la bola de masa  $m_2$  queda en reposo y la de masa  $m_1$  se mueve con la misma velocidad incidente  $v_1$  en valor absoluto, pero en la dirección indicada en la figura. Calcular  $v_2$  en función de  $m_1, m_2, v_1$  y el ángulo de incidencia  $\alpha$ . Dar el valor de  $v_2$  para el caso  $\alpha = 30^\circ$ .*



**Fig. 2.34.** Choque elástico.

Sol.:  $v_2 = \frac{2m_1v_1\text{sen}\alpha}{m_2} = 5 \text{ m/s}$

**Ejercicio 2.5** *Dos carneros corren a la misma velocidad constante de 20 m/s sobre una misma línea recta en sentidos opuestos, acercándose, hasta que chocan. Tras el choque ambos carneros quedan enredados, de modo que se mueven juntos. Si la masa de uno de ellos es un 50 % mayor que la del otro, y suponiendo que no hay rozamiento, ¿a qué velocidad se mueven ambos después del choque?*

Sol.:  $v = 4 \text{ m/s}$

**Ejercicio 2.6** *Un coche rueda en punto muerto a 36 km/h por una carretera horizontal sin rozamiento. En sentido contrario vuela un enjambre de moscas a una velocidad de 20 m/s. Si la masa del coche es de 1000 kg y la de cada mosca 0,1 g, ¿cuántas moscas deben estrellarse contra el coche para que éste se pare?*

Sol.:  $5 \times 10^6$

**Ejercicio 2.7** *Una almeja de 20 g de masa, inicialmente en reposo, primero aspira y luego expulsa por el sifón 2,0 g de agua a una velocidad de 0,5 m/s. ¿Con qué velocidad se mueve la almeja?*

Sol.:  $v = 5,0 \text{ cm/s}$

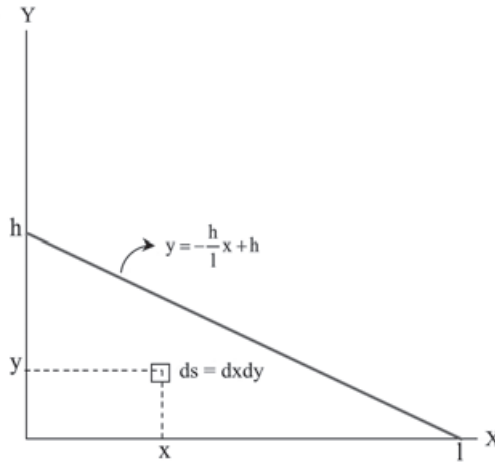
**Ejercicio 2.8** *Un balón de masa 5,0 kg se mueve horizontalmente a velocidad constante de 50 m/s y rebota contra el poste de una portería de fútbol. Tras el rebote, el balón se mueve en sentido opuesto con la misma velocidad. Suponiendo que la fuerza ejercida por el poste sobre el balón es de 1.000 N, constante durante el tiempo que dura el choque, ¿cuánto tiempo ha durado éste?*

Sol.:  $t = 50 \text{ ms}$

**Ejercicio 2.9** *En un encierro, un toro de 450 kg corriendo a 40 km/h embiste a un mozo de 70 kg que huye delante del toro a una velocidad de 20 km/h. Tras la embestida, el toro sigue moviéndose a una velocidad de 30 km/h en la misma dirección. ¿A qué velocidad ha salido despedido el mozo?*

Sol.:  $v = 84 \text{ km/h}$

**Ejercicio 2.10** *Calculemos el centro de masas de un triángulo rectángulo homogéneo. Se trata de un sistema en dos dimensiones, así que tomaremos como ejes X e Y dos ejes perpendiculares contenidos en el plano del triángulo coincidiendo con sus dos lados perpendiculares, como puede verse en la figura.*



**Fig. 2.35.** Triángulo rectángulo de densidad uniforme cuyos catetos tienen una longitud  $h$  y  $l$ .

El elemento de superficie será  $dS = dxdy$ , y si  $\sigma$  es la densidad superficial, entonces la masa de dicho elemento será  $dm = \sigma dxdy$ . La masa total del triángulo será igual a su área por la densidad superficial:

$$M = \sigma \times \frac{1}{2}lh$$

Las coordenadas del centro de masas serán:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint xdm = \frac{\sigma}{M} \iint x dxdy$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \iint ydm = \frac{\sigma}{M} \iint y dxdy$$

donde la integral se extiende al triángulo en cuestión. La variable  $x$  va desde 0 a  $l$ , mientras que, para cada valor de  $x$ , la variable  $y$  va desde 0 hasta la hipotenusa del triángulo. La ecuación de la hipotenusa es:

$$y = -\frac{h}{l}x + h$$

por lo tanto, para las coordenadas del centro de masas tenemos:

$$x_{CM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^l x dx \int_0^{-\frac{h}{l}x+h} dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^l x dx \left[ -\frac{h}{l}x + h \right] = \frac{\sigma}{M} \left[ -\frac{hl^2}{3} + \frac{hl^2}{2} \right]$$

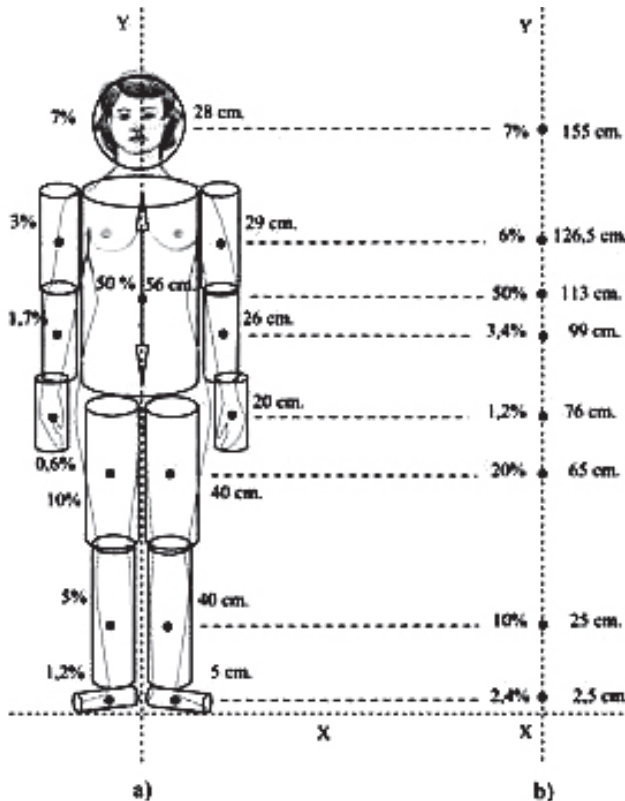


$$x_{CM} = \frac{\sigma h l^2}{6} = \frac{1}{3} l$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^l dx \int_0^{-\frac{h}{l}x+h} y dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^l dx \frac{1}{2} \left[ -\frac{h}{l}x + h \right]^2 = \frac{\sigma}{2M} \left[ \frac{h^2 l}{3} - \frac{h^2 l}{2} + h^2 l \right]$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma h^2 l}{6} = \frac{1}{3} h$$

**Ejercicio 2.11** Consideremos un modelo simplificado del cuerpo humano formado por segmentos cilíndricos como los de la figura 2.36, en la que se indican, además, el porcentaje de la masa corporal de cada uno de ellos y sus dimensiones.



**Fig. 2.36.** a) Esquema aproximado de la distribución de masas en un cuerpo humano cuyo tronco y extremidades se aproximan por medio de cilindros. La masa está dada en porcentaje de la masa total. b) Situación de los centros de masas de la cabeza, tronco y pares de extremidades. Se da la altura sobre el suelo y el porcentaje de la masa total que representa cada uno de esos puntos.

El centro de masas de cada segmento estará en su centro geométrico, por lo que pueden sustituirse por masas puntuales con la masa de cada uno de ellos situada en su centro de masas, de acuerdo con la figura 2.36. Además, todo es simétrico respecto del eje Y, por lo que el centro de masas de cada par de segmentos laterales está en dicho eje. Calcular la altura a la que se encuentra el centro de masas del cuerpo.

Sol.:  $y_{CM} \approx 95 \text{ cm}$

**Ejercicio 2.12** Una rana de 50 g de masa se encuentra sobre el extremo de una tabla de madera de 1 kg de peso y 2 m de longitud que está flotando sobre la superficie de un lago. La rana salta con velocidad  $v_0$  formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Suponiendo que el rozamiento entre la madera y el agua es despreciable y que el movimiento vertical de la madera es absorbido por el agua, calcular la velocidad  $v_0$  para que la rana caiga sobre el otro extremo de la tabla.

(Tómese como origen de coordenadas el extremo en el que se encontraba inicialmente la rana y, para empezar, calcúlese la velocidad con que la tabla retrocede en función de  $v_0$ )

Sol.:  $4,6 \text{ m/s} \simeq 17 \text{ km/h}$

**Ejercicio 2.13** Se dispara un proyectil de 20 g sobre un bloque de madera de 10 kg y el conjunto desliza sobre una superficie sin rozamiento recorriendo 10 kg en 3 s. Calcular la velocidad del proyectil.

Sol.:  $v = 334 \text{ m/s}$

**Ejercicio 2.14** Se conoce con el nombre de carro de Newton al dispositivo de la figura 2.37.

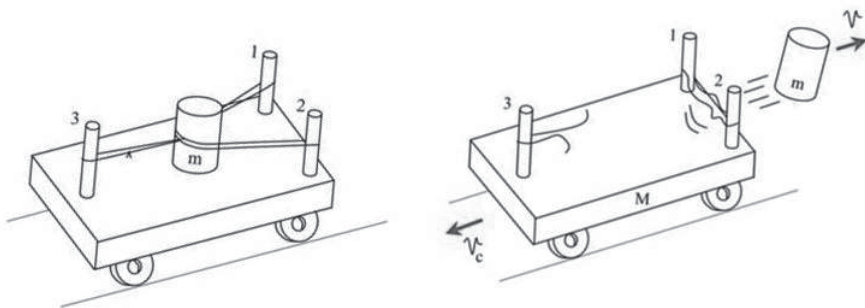


Fig. 2.37. Carro de Newton.

La goma elástica está sujeta a los tornillos 1 y 2, y se mantiene en posición extendida gracias a un hilo sujeto al tornillo 3 que impide que se encoja hasta

la longitud de equilibrio. Si se quema el hilo con una cerilla, o se corta, la goma impulsa al peso que hay sobre el carro y éste se mueve en dirección contraria a la del movimiento del peso. Como veremos en el capítulo dedicado a las oscilaciones, la velocidad que la goma imprime a la masa  $m$  es proporcional al inverso de  $\sqrt{m}$ . Si al lanzar una carga de 10 g el carro se mueve en la dirección contraria a una velocidad de 10 cm/s, ¿a qué velocidad se moverá si se lanza una carga de 30 g?

Sol.:  $v = 17,3 \text{ cm/s}$

**Ejercicio 2.15** Un automóvil cuya masa es de 1.000 kg circula a 60 km/h y choca contra un poste, desplazándolo 10 cm antes de pararse. Calcular la fuerza que actúa sobre el automóvil y el tiempo durante el que actúa.

Sol.:  $F = 1,4 \times 10^6 \text{ N}$ ;  $\Delta t = 0,012 \text{ s}$

**Ejercicio 2.16** Una persona cae desde 4 m de altura. Al llegar al suelo flexiona las rodillas para decelerar su movimiento hasta el reposo. La longitud a lo largo de la cual se produce el frenado es de 50 cm. Si la masa del cuerpo,  $m$ , es de 70 kg y la del tronco (incluidos la cabeza y los brazos) es de 50 kg, calcular la fuerza que ejercen las piernas sobre el tronco durante la deceleración y expresarla en unidades del peso de la persona. Si en la caída la persona hubiera mantenido las piernas rígidas, la distancia de frenado sería simplemente la contracción de los tejidos elásticos de las piernas, de un centímetro aproximadamente. Calcular también la fuerza ejercida sobre el tronco en este segundo caso.

Sol.: 1)  $F = 3.920 \text{ N} = 5,7 \times mg$ ; 2)  $F = 196.000 \text{ N} = 285 \times mg$

**Ejercicio 2.17** Un proyectil de 10 g que se mueve a 800 m/s penetra en un bloque de madera de 25 kg y se detiene después de haber recorrido 20 cm en el bloque. Calcular la velocidad con la que se mueve el bloque después del impacto, el tiempo que ha transcurrido desde que el proyectil toca la madera hasta que se detiene y la fuerza que ejerce durante el impacto.

Sol.: 1)  $v = 0,32 \text{ m/s}$ ; 2)  $\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$ ; 3)  $F = 16.000 \text{ N}$

## 2.5 Referencias

Aguilar Gutiérrez, M.: *Biomecánica: la Física y la Biología*. CSIC, 2000

Alberts, B. et al.: *Muscle Contraction: Sliding Filaments*. <http://www.garlandscience.com/ECB/about.html>

Alexander, R. McN. *Locomotion of Animals*. Blackie, 1982

Andersen, J. L., Schjerling, P. & Saltin, B. "Muscle, Genes and Athletic Performance". *Scientific American*, Sept., 2000

Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics with illustrative examples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973

Huxley, H. E. "The mechanism of muscular control". *Science*, **164** (1969) 1357

NASA: *A teacher's guide with activities in science, mathematics and technology*, 1999

Piazzesi, G. *et al.* "Mechanism of force generation by myosin heads in skeletal muscle". *Nature* **415** (2002) 659

Randall, D., Burggren, W. & French, K. *Fisiología Animal*. McGraw-Hill, 1998

Thibodeau, G. A. & Patton, K. T.: *Estructura y Función del Cuerpo Humano*, Harcourt Brace, 1998



## Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción

Llamamos fuerzas elementales a aquellas que se derivan de alguna propiedad dinámica de los cuerpos, como por ejemplo la carga eléctrica o la masa, y están presentes en las interacciones entre partículas elementales, aunque, en algunos casos, sus efectos son acumulativos, se manifiestan de forma directa o indirecta a cualquier escala, y son independientes entre sí. En realidad existen muy pocas fuerzas elementales en la naturaleza. Tal y como se menciona en la Introducción, no hay más que cuatro fuerzas asociadas a interacciones elementales, y dos de ellas, las llamadas interacciones nucleares débil y fuerte, sólo se manifiestan a escalas comparables o menores que el tamaño de los núcleos atómicos, es decir,  $10^{-15}$  m.

Las dos únicas fuerzas elementales que actúan a cualquier distancia y que, por consiguiente, son perceptibles sin ayuda de instrumentos sofisticados, se conocen desde la Antigüedad y su presencia es evidente en las propiedades de los objetos de la vida cotidiana. **Estas dos fuerzas son la gravitación y el electromagnetismo**, que comprende la electricidad y el magnetismo, consideradas fuerzas independientes hasta el siglo XIX. De las dos, la gravitación es la más débil, por lo que, en general, su papel es insignificante en comparación con el del electromagnetismo. Así, por ejemplo, todas las propiedades de los objetos, su carácter sólido, líquido o gaseoso, su conductividad térmica o eléctrica, su dureza, su transparencia, su calor específico, etc., dependen exclusivamente de la interacción electromagnética entre sus átomos y moléculas. Dicha interacción será estudiada con detenimiento más adelante. Existen, sin embargo, determinadas situaciones en las que la acumulación de multitud de interacciones gravitatorias elementales, y la cancelación de las electromagnéticas por compensación de cargas positivas y negativas, resulta en efectos visibles achacables únicamente a la gravitación, y eso es lo que ocurre con los cuerpos celestes, incluida la Tierra, debido a que tienen masas muy grandes y carga prácticamente cero. Uno de sus efectos es, por ejemplo, la caída de los cuerpos sobre la superficie terrestre o el mantenimiento de los seres vivos en

contacto con dicha superficie. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de la fuerza gravitatoria.

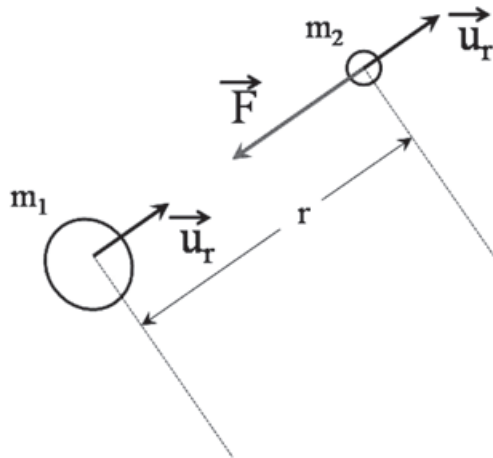
Las fuerzas derivadas resultan, por su parte, de superponer fuerzas elementales entre la multitud de partículas que componen los cuerpos macroscópicos, apareciendo como fuerzas efectivas, aplicadas a dichos cuerpos y con propiedades muy simples. Ejemplos sencillos de fuerzas derivadas son el rozamiento, la fuerza elástica que ejerce un muelle sobre un cuerpo al que esté fijado, las fuerzas de contacto entre cuerpos sólidos, etc. En todos estos casos, las fuerzas son la resultante de multitud de interacciones entre los átomos y las moléculas de los cuerpos que intervienen, siempre de naturaleza electromagnética.

### 3.1 La gravitación

#### 3.1.1 La fuerza gravitatoria

La gravitación es una interacción que genera y experimenta cualquier cuerpo. En realidad, la gravitación afecta a cualquier forma de masa o de energía, pero su estudio, con este grado de generalidad, sólo es posible en el marco de la Relatividad General de Einstein. Nos restringiremos, por tanto, a la fuerza gravitatoria entre masas.

Dos cuerpos cualesquiera ejercen siempre una interacción atractiva entre sí, observándose que la fuerza entre ellos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.



**Fig. 3.1.** Fuerza gravitatoria entre dos cuerpos. La fuerza  $\vec{F}$  es la que ejerce el cuerpo 1 sobre el 2.

Es decir, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la 2, según se representa en la figura 3.1, tiene la forma:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.1)$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los dos cuerpos,  $r$  es la distancia entre ellos y  $\vec{u}_r$  es el vector unitario que va en la dirección de la recta que une a los cuerpos. El signo menos indica el carácter atractivo de la fuerza, dirigida en dirección contraria a  $\vec{u}_r$ .  $G$  es, por su parte, una constante, llamada constante de Newton, que debe determinarse experimentalmente. La partícula 1, por su parte, experimenta una fuerza debida a la presencia de la partícula 2, que es igual y de sentido contrario a  $\vec{F}$ .

Los cuerpos puntuales no existen, son sólo una idealización de los cuerpos reales, que tienen extensión. Pero, a partir de la expresión (3.1), puede calcularse la forma de la fuerza gravitatoria para cuerpos extensos. En particular, para cuerpos esféricos homogéneos puede demostrarse que la fuerza que generan sobre cualquier objeto exterior es la misma que la que generaría una partícula puntual con toda su masa concentrada en el centro de la esfera.

Así que la verificación experimental de las propiedades de la fuerza gravitatoria se hace con facilidad con ayuda de cuerpos esféricos como la Tierra. En efecto, **un cuerpo situado por encima de la superficie terrestre experimenta una fuerza de atracción generada por las interacciones gravitatorias de todas las partículas que componen la Tierra cuyo resultado es el mismo que si toda la masa terrestre estuviera concentrada en su centro.** Así, si el cuerpo se encuentra sobre la superficie, o a una distancia de la misma pequeña en comparación con el radio de la Tierra, de forma que la distancia al centro se pueda aproximar por dicho radio, la fuerza que experimenta será:

$$\vec{F} = -G \frac{m_T m}{R_T} \vec{u}_r$$

donde  $m_T$  y  $R_T$  son la masa y el radio de la Tierra y  $m$  es la masa del cuerpo. La fuerza apuntará hacia el centro del planeta, es decir, en dirección perpendicular a su superficie. Aplicando ahora la segunda ley de Newton y llamando  $g$  a la aceleración que adquiere el cuerpo por efecto de dicha fuerza, tendremos:

$$G \frac{m_T m}{R_T^2} = mg$$



de donde se puede despejar  $g$ :

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2} \quad (3.2)$$

De esta expresión se puede obtener el valor de la constante de Newton  $G$  (también llamada constante de la gravitación universal). Como la Tierra es una esfera, su volumen será  $\frac{4}{3}\pi R_T^3$  y, como la masa es igual al volumen por la densidad, resulta:

$$g = \frac{4}{3}\pi G R_T \rho_T \quad (3.3)$$

Poniendo ahora los valores encontrados experimentalmente,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $R_T = 6.370 \text{ km}$  y  $\rho_T$  igual a unas 5,5 veces la densidad del agua, es decir unos  $5.500 \text{ kg/m}^3$ , encontramos para  $G$  el valor:

$$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

donde las dimensiones pueden calcularse a partir de la fórmula (3.1).

La constante  $G$  expresa la intensidad de la interacción gravitatoria, por lo que la pequeñez del valor obtenido nos está indicando la extrema debilidad de dicha interacción. De acuerdo con la ecuación (3.1), **dos cuerpos de un kilogramo de masa, situados a una distancia de un metro, se atraen mutuamente con una fuerza de tan sólo  $6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$**  (que es el peso de un cuerpo de  $0,68 \times 10^{-11} \text{ kg}$ , por ejemplo de una **minúscula** gota de agua de  $0,02 \text{ mm}$  de diámetro). En consecuencia, la observación directa de la interacción gravitatoria entre cuerpos cuya masa sea de unos pocos gramos o kilogramos es muy difícil. Aun así, Cavendish logró, en 1798, verificar la ecuación (3.1) utilizando esferas de plomo cuya minúscula atracción era capaz de detectar mediante una balanza de torsión.

Así, la expresión de la fuerza de Newton (3.1) permite obtener, a partir de mediciones sobre la superficie terrestre, como por ejemplo estudiando el movimiento de un cuerpo en caída libre o el de un péndulo, una constante que caracteriza las fuerzas entre cualquier clase de cuerpos, en particular los astros, permitiendo relacionar la mecánica celeste con las trayectorias de los cuerpos sobre la Tierra.

Por ejemplo, si consideramos un astro esférico de radio  $R_A$  y densidad  $\rho_A$ , la aceleración de la gravedad sobre su superficie tiene una forma similar a la de la expresión (3.3):

$$g_A = \frac{4}{3} \pi G R_A \rho_A$$

y dividiéndola ahora por la (3.3), obtenemos:

$$g_A = \frac{R_A \rho_A}{R_T \rho_T} g$$

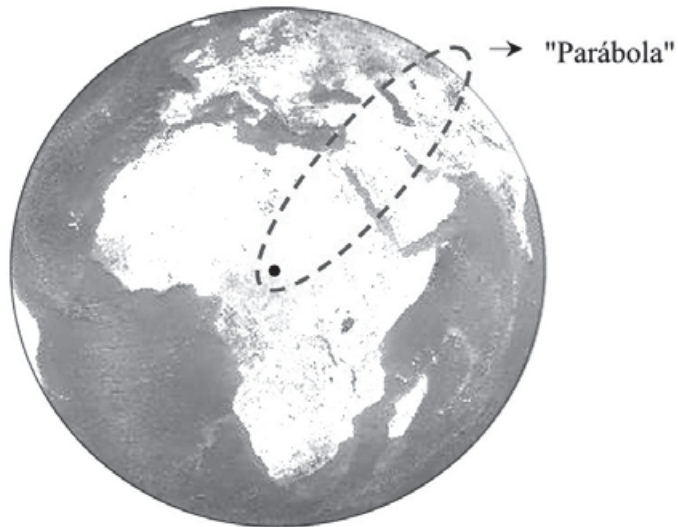
que nos da la relación entre la gravedad sobre la Tierra,  $g$ , y la que hay sobre cualquier otro cuerpo esférico, independientemente del valor de  $G$ . Por ejemplo, para Fobos, que es uno de los dos minúsculos satélites de Marte, apenas una roca de unos 6 km de radio y con una densidad del doble de la de la Tierra, resulta que la aceleración de la gravedad sobre su superficie es de unos  $2 \text{ cm/s}^2$  (un cuerpo que se deja caer desde una altura de 10 metros sobre la superficie de Fobos tardaría más de medio minuto en llegar al suelo). En el otro extremo se encuentran las estrellas de neutrones, que son objetos con la masa del Sol contenida en una esfera de unos 10 km de radio, lo que da la inimaginable densidad de cien billones de veces la densidad de la Tierra y produce una aceleración de la gravedad sobre su superficie de un billón de metros por segundo al cuadrado (un cuerpo tardaría millonésimas de segundo en caer sobre su superficie desde 10 metros de altura).

Otra consecuencia importante de (3.3) es que **la aceleración de la gravedad sobre la Tierra es independiente de la naturaleza de los cuerpos que caen, en particular de su masa o de su densidad**. Este es un resultado aparentemente contrario a la experiencia cotidiana, ya que un papel cae mucho más despacio que una moneda. Pero esa diferencia se debe al rozamiento con el aire, que afecta de modo muy distinto a ambos cuerpos. Si hacemos esa misma experiencia en vacío, se puede comprobar que ambos objetos caen al mismo tiempo.

### 3.1.2 Las trayectorias que se derivan de la gravitación

Se puede demostrar que un cuerpo sujeto a la fuerza gravitatoria describe una trayectoria que es una cónica en la que el centro de atracción ocupa uno de sus focos. Para el caso de un sistema finito o ligado, es decir, que no se pueda alejar indefinidamente del centro de atracción, como es el caso de los planetas alrededor del Sol o de cualquier cuerpo orbitando la Tierra, la única cónica que cumple esta condición es la elipse, así que las órbitas son elipses o una circunferencia, que es el caso particular de elipse sin ninguna excentricidad. Para el caso de un sistema infinito, asintóticamente libre, por ejemplo un cuerpo celeste que pasa por las cercanías del Sol y la fuerza gravitatoria de éste modifica su trayectoria pero no lo atrapa, la cónica en cuestión es una hipérbola.

**Observación. Trayectorias aproximadas sobre la superficie de la Tierra.** Un cuerpo moviéndose en el campo gravitatorio de la Tierra describe, tal y como hemos dicho, una elipse alrededor de su centro. Sin embargo, en el capítulo 1 hemos demostrado que las trayectorias de los cuerpos cayendo en la gravedad terrestre son parábolas. En realidad, se trata de una aproximación para movimientos cuyas dimensiones son mucho más pequeñas que el radio de la Tierra, en cuyo caso se puede considerar que ésta es plana y la aceleración de la gravedad constante y perpendicular a dicha superficie en todos los puntos de la trayectoria. Como puede verse en la figura 3.2, las parábolas son aproximaciones a arcos pequeños de elipses en uno de cuyos focos está el centro de la Tierra. Para alcances y alturas de metros, kilómetros o, incluso, centenas de kilómetros, esa aproximación es muy precisa.



**Fig. 3.2.** El arco de elipse que recorre un cuerpo que se mueve bajo la acción de la gravedad terrestre se puede aproximar por una parábola si las dimensiones de ésta son pequeñas en comparación con el radio de la Tierra. En estas condiciones, la superficie de la Tierra sobre la que se mueve el cuerpo se puede aproximar por un plano, y la aceleración de la gravedad es aproximadamente normal a dicha superficie plana e independiente de la altura.

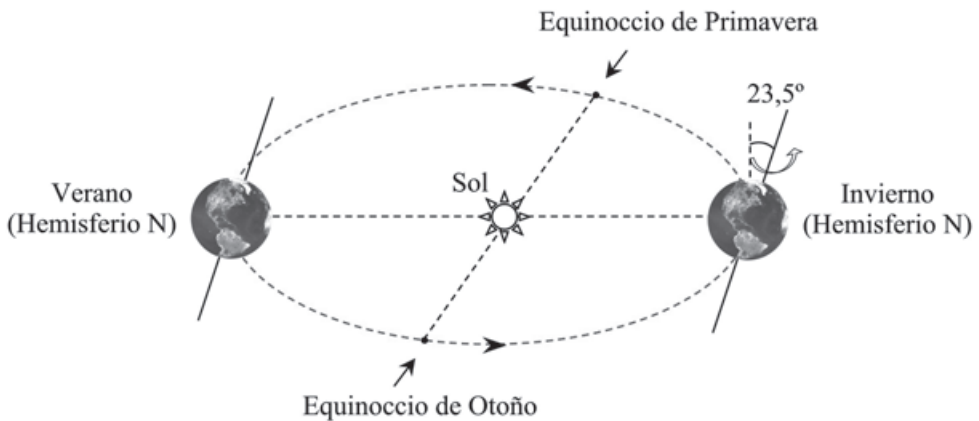
**Observación. Las leyes de Kepler.** Johannes Kepler (1571-1630) consiguió interpretar todos los datos astronómicos existentes en su época sobre el movimiento de los planetas, en el contexto del modelo heliocéntrico del Sistema Solar (heliocéntrico quiere decir que el Sol está en el centro) de Copérnico, llegando en 1609 a resumirlos mediante las tres leyes que llevan su nombre. La primera consiste, sencillamente, en afirmar que **las órbitas de los planetas son elipses en uno de cuyos focos está situado el Sol**. La segunda establece que dichos cuerpos se mueven a lo largo de sus trayectorias elípticas de forma

tal que **el área barrida por la recta que los une al Sol por unidad de tiempo es constante**; o dicho de otra forma, que la velocidad areolar (área barrida por unidad de tiempo) es constante. La tercera ley afirma que **el cuadrado del periodo de rotación de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media entre ambos astros**.

La primera y la tercera ley se derivan de la forma específica de la fuerza de la gravitación mientras que la segunda es consecuencia simplemente de que es una fuerza central, es decir, dirigida según la dirección de la línea que une el Sol y el planeta. Las leyes de Kepler abrieron el camino al descubrimiento de la gravitación universal por Newton.

Las elipses que describen los planetas que giran alrededor del Sol son muy poco excéntricas, prácticamente circunferencias, mientras que los cometas siguen trayectorias muy alargadas, tales que en algunas de sus posiciones pasan cerca del Sol, que es justo cuando brillan y son visibles, y en otros están sumamente alejados y no pueden verse.

**Observación. La longitud de las estaciones.** La elipse que describe la Tierra es muy poco excéntrica. Si llamamos Unidad Astronómica (UA) a la distancia media entre la Tierra y el Sol, igual a 150 millones de km, la longitud del semieje mayor de la elipse (distancia máxima entre la Tierra y el Sol) es de 1,0167 UA y la del semieje menor (distancia mínima entre la Tierra y el Sol) es de 0,9833. Como se ve, las desviaciones son de apenas un 1,67 por ciento respecto de la distancia media.



**Fig. 3.3.** La Tierra describe una elipse muy poco excéntrica alrededor del Sol, que ocupa uno de sus focos. La distancia máxima se produce cuando el hemisferio norte está en verano debido a que, en esa posición, los rayos solares inciden perpendicularmente sobre dicho hemisferio. La distancia mínima ocurre cuando ese mismo hemisferio está en invierno. El eje de rotación de la Tierra alrededor de sí misma forma un ángulo de  $23,5^\circ$  con la perpendicular al plano que contiene la órbita terrestre.

*La pequeñez de la excentricidad de la órbita hace que las variaciones en la distancia al Sol no influyan demasiado en las estaciones. Como es sabido, las estaciones dependen de la inclinación del eje de rotación de la Tierra respecto de la dirección de llegada de los rayos del Sol. Es verano en un lugar de la superficie terrestre cuando los rayos del Sol inciden perpendicularmente e invierno cuando inciden de forma más oblicua. Justamente, el verano del hemisferio norte ocurre, en estos momentos, cuando la Tierra se encuentra más alejada del Sol, aunque ocurrirá lo contrario dentro de 13.000 años, cuando el eje de rotación de la Tierra, que gira, a su vez, como el eje de una peonza en lo que se llama movimiento de precesión de los equinoccios, haya completado media vuelta y la perpendicularidad de los rayos del Sol sobre el hemisferio norte ocurra cuando la Tierra esté en la parte más cercana al Sol.*

*De todas formas, la excentricidad de la órbita se manifiesta en que la duración de la primavera y el verano (intervalo de tiempo transcurrido entre el paso por el equinoccio de primavera y por el de otoño) es seis días mayor que la del otoño y el invierno.*

### 3.1.3 Caída libre e ingravidez

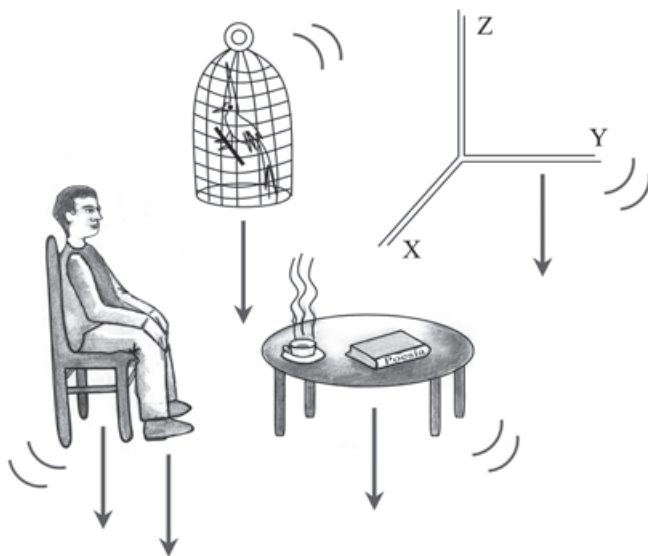
Un cuerpo abandonado desde el reposo en un campo gravitatorio constante, como el de la Tierra en las cercanías de su superficie, cae con un movimiento uniformemente acelerado. El hecho de que la aceleración con que cae sea independiente de la naturaleza del cuerpo implica, como ya hemos visto, que todos caigan al mismo tiempo. Si pensamos en una persona que cae en el vacío junto con otros objetos, durante el tiempo de caída tendrá la impresión de que esos objetos continúan en reposo si así lo estaban al iniciarse la caída, o bien siguen moviéndose con una cierta velocidad relativa respecto de la persona si ése era su estado inicial.

Los efectos de la gravedad, uniforme en este caso, son contrarrestados exactamente por el movimiento uniformemente acelerado, de forma que el comportamiento relativo de los cuerpos al moverse todos con la misma aceleración es el de cuerpos no sometidos a fuerza de gravedad alguna. Este fenómeno es el que se conoce con el nombre de ingravidez. Como la fuerza de la gravedad es la misma también para todas las partes del cuerpo y éstas se mueven con la misma aceleración, la ingravidez no es sólo respecto de todos los otros objetos moviéndose al unísono, sino también un efecto, y una sensación, sobre el propio cuerpo. Así, **un conjunto de objetos cayendo libremente dentro de un ascensor que también cae por efecto de la gravedad terrestre se comportan como si no actuara sobre ellos la fuerza de la gravedad. Recíprocamente, en ausencia de gravedad, un movimiento uniformemente acelerado produce efectos indistinguibles de**

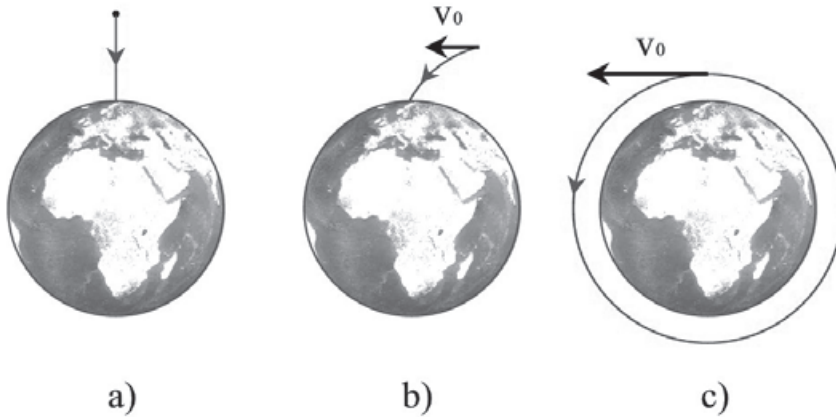
los que produce un campo gravitatorio constante. Así, en un lugar infinitamente alejado de todos los cuerpos y, por consiguiente, no sujeto a fuerza gravitatoria alguna, si una persona y su entorno están dentro de un ascensor y éste se mueve en una cierta dirección con una aceleración constante de  $9,8 \text{ m/s}^2$ , los fenómenos físicos serán indistinguibles de los generados por el campo gravitatorio terrestre en dirección contraria a la del movimiento. Por ejemplo, sentirá en los pies una fuerza exactamente igual a la que se siente estando en reposo pero sujeto a la acción de la gravedad.

*Observación. Relatividad general.* Esta reflexión, de una gran profundidad conceptual, fue la base sobre la que Einstein construyó su teoría de la Relatividad General, que es una teoría de la gravitación en la que se relaciona a ésta con las propiedades geométricas del espacio-tiempo.

La ingravidez, por lo tanto, no se produce sólo en ausencia de toda interacción gravitatoria, sino también cuando existe gravedad y ésta está compensada exactamente por el movimiento en caída libre. Pero caída libre no es sólo el movimiento vertical hacia abajo que se produce cuando la velocidad inicial es cero o en dirección vertical. Si la velocidad inicial tiene una cierta componente horizontal, ya sabemos que el movimiento es parabólico, y también independiente de la naturaleza del cuerpo. **Un conjunto de objetos lanzados con la misma velocidad inicial sobre la superficie terrestre se mueven todos según la misma trayectoria parabólica, que es, en este caso, la de caída libre, y experimentan también la sensación de ingravidez.**



**Fig. 3.4.** Los objetos sometidos a un campo gravitatorio se comportan como si fueran libres (ingrávidos) en un sistema de referencia no inercial que se mueve con una aceleración igual a la inducida por el campo gravitatorio.



**Fig. 3.5.** Caída libre. a) Con velocidad horizontal inicial cero. b) Con velocidad horizontal inicial moderada. c) Con velocidad horizontal inicial grande.

Si la componente horizontal de la velocidad inicial es muy grande puede ocurrir que el objeto no llegue a caer sobre la superficie de la Tierra y, si se encuentra fuera de la atmósfera y no experimenta el rozamiento del aire, permanezca indefinidamente en órbita. Pero se trata de nuevo de un movimiento en caída libre, lo que implica que todos los cuerpos animados de esa misma velocidad inicial sigan exactamente la misma trayectoria y se produzca de nuevo el fenómeno de la ingravidez. Esto es justamente lo que ocurre en las estaciones espaciales, sondas o satélites artificiales en órbita alrededor de la Tierra, que están en un movimiento en caída libre y contrarrestan exactamente el efecto de la gravedad. **Un astronauta dentro de una de estas estaciones se mueve con la misma aceleración que la carcasa de la estación y todos los objetos contenidos en la misma. Se produce ingravidez, aunque todo sigue sujeto a la atracción terrestre;** de otra forma se alejaría indefinidamente de la Tierra. Hoy este fenómeno es un hecho familiar debido a las imágenes de astronautas y de todo tipo de objetos en órbita, que nos los muestran flotando como si estuvieran libres en el espacio y no sometidos a ninguna fuerza externa.

***Ejemplo.** La Estación Espacial Internacional se encuentra a unos 400 km de altura sobre la Tierra. Para que, impulsada únicamente por la gravedad terrestre, se mueva en una órbita circular, la velocidad tangencial  $v$  a la que hay que impulsarla tiene que ser tal que la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular sea precisamente igual a la fuerza gravitatoria:*

$$m \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{m_T m}{(R_T + h)^2}$$

y sabiendo, a partir de la ecuación (3.2), que  $Gm_T = gR_T^2$ , resulta que:

$$v^2 = \frac{gR_T^2}{R_T + h}$$

Sustituyendo ahora  $g$  y  $R_T$  por los valores ya conocidos y poniendo  $h = 400 \text{ km}$ , obtenemos:

$$v = 7.660 \text{ m/s} \approx 27.600 \text{ km/h}$$

### 3.1.4 *Los efectos de la ingravidez sobre el cuerpo humano*

**Los organismos vivos han evolucionado en un entorno caracterizado por la presencia constante de la gravedad terrestre, y a ella se han adaptado.**

Nuestra cabeza pesa sobre el tronco, éste sobre las piernas y todo el cuerpo sobre los pies. Lo mismo pasa con los órganos internos o la circulación de la sangre, que actúan según mecanismos que tienen en cuenta la existencia de la gravedad. Sin embargo, como hemos visto, los efectos de la fuerza gravitatoria desaparecen en caída libre, uno de cuyos casos particulares es el movimiento en una órbita alrededor de la Tierra. Así, en las últimas décadas se ha podido experimentar sobre las respuestas de los organismos a la ingravidez, condición en la que se producen los viajes espaciales.

Todas las partes del organismo reaccionan a este cambio en las condiciones del entorno, desde el cerebro a los huesos pasando por los receptores de la gravedad, los sentidos, los músculos y los fluidos corporales. Una de las primeras sensaciones es la de estar siempre inmóviles, aunque el cuerpo se mueva con relación a las paredes de la cápsula espacial, y sentir que es todo lo demás lo que se mueve. La razón es que el procesamiento de la información sobre nuestra posición (tanto la del centro de masas como la posición relativa de las distintas partes del cuerpo), que proviene de los órganos sensores de la gravedad (utrículo y sáculo) ya descritos en el primer capítulo, depende fuertemente de la dirección e intensidad de la fuerza gravitatoria, omnipresente sobre la superficie terrestre pero ausente en condiciones de ingravidez. Lo mismo ocurre con las tensiones sufridas por músculos y tendones, y las señales procedentes de la vista y del tacto.

La ausencia de indicaciones claras procedentes del utrículo y el sáculo indicando cuál es la dirección “hacia abajo”, de peso en los miembros y de presión en la planta del pie, el relajamiento de los músculos que ya no tienen que ejercer fuerzas variables para mantener la posición erguida o el movimiento, todo ello provoca mareos, dolor de cabeza, vómitos, pérdida de concentración y una confusión



posicional que se traduce en la sensación subjetiva de estar “boca abajo”. Muchos de estos síntomas, como los mareos o los vómitos, desaparecen tras el primer o los primeros días de ingravidez, aunque otros son más persistentes. En cuanto a la confusión acerca de la posición, el cerebro se adapta al nuevo entorno y modifica el procesamiento de los impulsos provenientes de los distintos órganos, acabando por asociar la dirección “hacia abajo” a aquella en la que se encuentran los pies.

Un cambio importante es el relacionado con la circulación de la sangre. En efecto, sobre la superficie terrestre, la presión de la sangre en las venas y las arterias de los pies es superior a la que tiene en las de la cabeza, debido a su propio peso, como veremos más adelante en detalle. En cuanto una persona se sitúa en condiciones de ingravidez, aumenta el flujo sanguíneo hacia la cabeza y disminuye el de las partes del cuerpo que están por debajo del corazón. Las venas del cuello se hinchan y se produce una sensación de congestión en la cabeza y aparato respiratorio, parecida a la que se tiene cuando se está resfriado. La presión excesiva de la sangre sobre la cabeza sólo disminuye parcialmente cuando se hace ejercicio y hay una demanda suplementaria de riego sanguíneo en otras partes del cuerpo.

El conjunto de los fluidos se redistribuye debido a la ausencia de gravedad y siempre siguiendo la misma pauta: fluyendo de la parte inferior del cuerpo, donde tiene tendencia a acumularse en condiciones de gravedad, a la parte superior. Así, cada pierna pierde casi un litro de fluido, lo que supone del orden de un décimo de su volumen, tras un solo día sin gravedad. El cambio en la distribución y flujo de los fluidos corporales afecta a prácticamente todos los órganos del cuerpo así como a los mecanismos hormonales y mecánicos que regulan dichos flujos y los electrolitos disueltos en los fluidos. El ritmo de filtrado de los riñones aumenta en casi un 20 por ciento durante la primera semana en el espacio y se produce una forma de anemia debido a la destrucción de glóbulos rojos provocada por la disminución del volumen total que ocupa el plasma.

Por último se producen efectos sensibles también sobre las estructuras que dan consistencia y permiten el movimiento del cuerpo: músculos y huesos. La espina dorsal deja de estar comprimida por nuestro propio peso y se expande elásticamente, de forma que en el espacio se aumenta de estatura unos cinco o seis centímetros. La caja torácica también se expande y el hígado, el estómago, los riñones y el resto de los órganos dejan de pesar y “flotan” dentro de la cavidad corporal generando la sensación de que están sueltos y se mueven libremente.

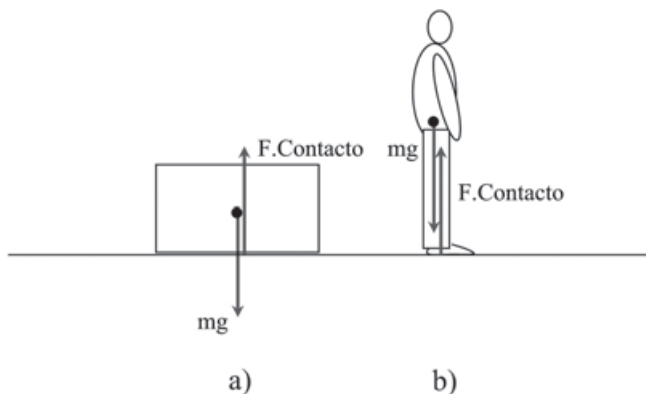
En cuanto a los músculos esqueléticos, justamente aquellos que sirven para mantenerse erguido contra la gravedad terrestre e impulsarse en dicho medio, dejan de ser útiles y se atrofian rápidamente, perdiendo una parte importante de su masa. De ahí que sea imprescindible el ejercicio físico intenso para hacer trabajar a todos estos músculos, preservar las capacidades motoras y hacer

menos penoso el retorno a condiciones de gravedad. Los huesos pierden masa también, a un ritmo del orden del 1 por ciento al mes. La pérdida se debe a la ruptura del equilibrio en la actividad de reposición de tejido óseo por los osteoblastos, actividad que está regulada por la presencia de ciertas hormonas en la sangre y por las tensiones mecánicas sobre el hueso.

Teniendo en cuenta que el 99 % del calcio en el cuerpo está formando parte del esqueleto, la pérdida de masa ósea implica un aumento del nivel de calcio en la sangre, alterando la regulación de muchos mecanismos celulares sensibles a dicho nivel, y propiciando la aparición de “cálculos” en los riñones. La mayoría de estos efectos se corrigen una vez se vuelve al entorno terrestre, pero no se sabe todavía si alguna pérdida de masa ósea es irreversible, en cuyo caso se producirá una mayor propensión a las fracturas. Salvo este último efecto, sobre cuya reversibilidad existen dudas, todos los otros efectos desaparecen con bastante rapidez una vez se retorna a la superficie y se experimenta la sensación de peso. Todo parece indicar que es perfectamente posible vivir durante periodos de tiempo muy prolongados en condiciones de ingravidez, debido a las adaptaciones del organismo a las nuevas condiciones externas, y luego volver a reintegrarse en el entorno terrestre.

### 3.2 Fuerzas de contacto

Cuando un cuerpo está sometido a una fuerza, por ejemplo la de su propio peso debido a la gravedad terrestre, debe moverse con la aceleración que se deriva de la segunda ley de Newton. Sin embargo, cuando el cuerpo está apoyado en una superficie sólida, por ejemplo el suelo, no se mueve, lo que, de acuerdo con dicha ley, implica que la suma de las fuerzas que actúan sobre él es cero. Por lo tanto, **la fuerza de la gravedad está compensada por otra fuerza igual y de sentido contrario que ejerce el suelo sobre el cuerpo, de forma que su suma es cero.**



**Fig. 3.6** Fuerzas de contacto de una superficie sólida sobre a) un objeto con forma de paralelepípedo, b) una persona.