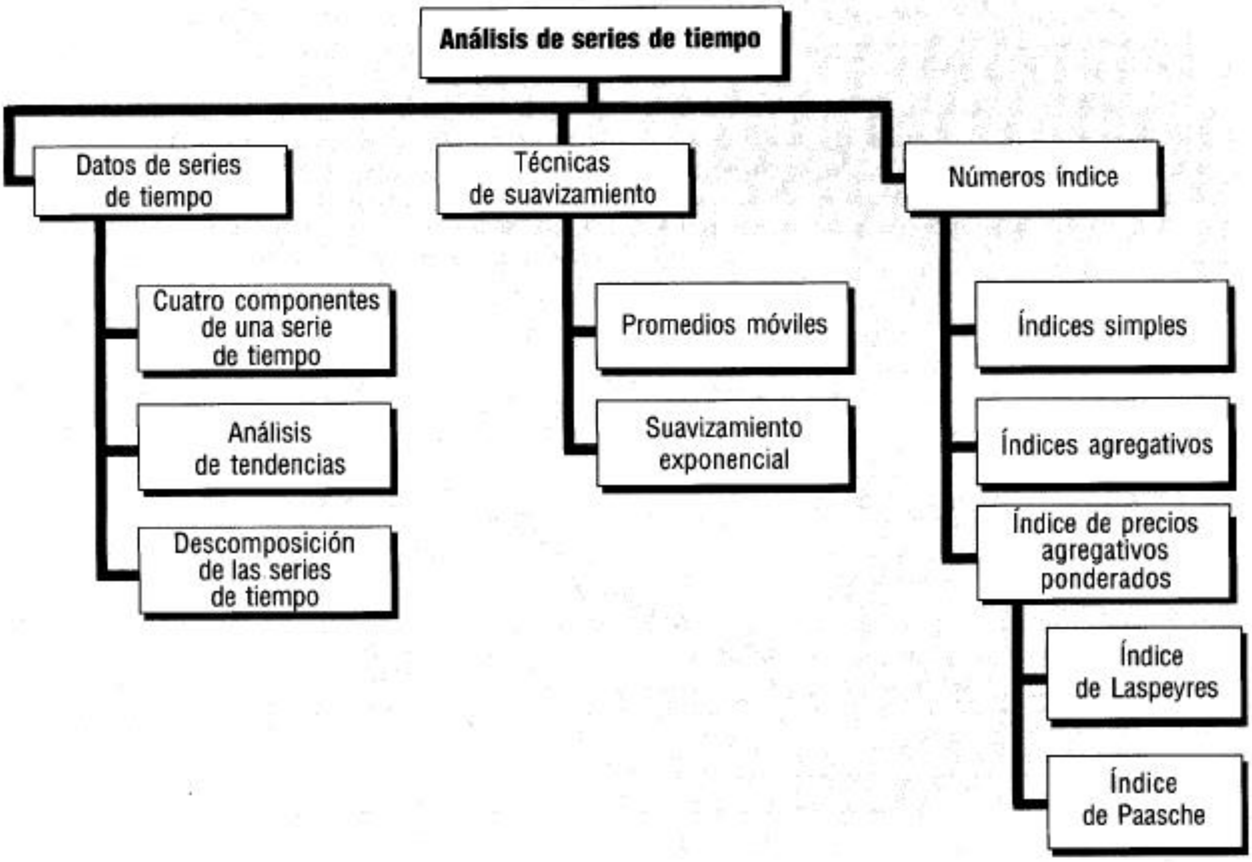
13

Series de tiempo y números índice

Plan del capítulo

Este capítulo analiza el uso de los datos de series de tiempo o series temporales y su aplicación en situaciones comunes. También se demuestra la forma como se utilizan los números índice para hacer los datos de las series de tiempos más comparables respecto al tiempo.



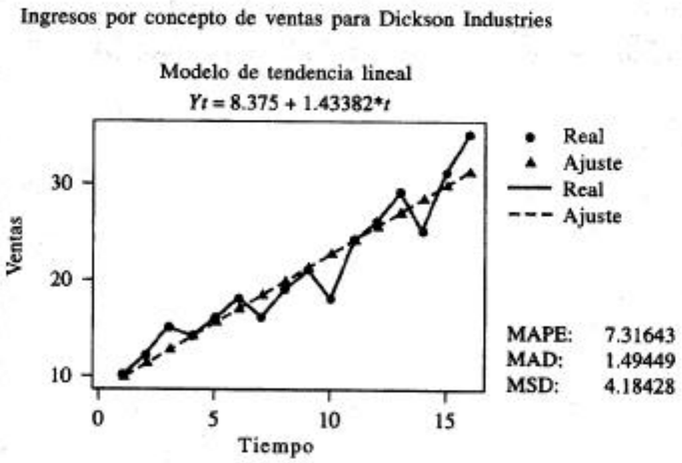
ESCENARIO

Durante los últimos años, Dickson Industries ha gozado de un crecimiento considerable en los ingresos por ventas y en las utilidades. Gran parte de este éxito se debe al arduo trabajo realizado por Jeremy Dickson, propietario y director ejecutivo del negocio, así como de su personal cercano y confiable. El Sr. Dickson siempre ha confiado en la planeación cuidadosa con base en un análisis exhaustivo de las condiciones del mercado.

Este análisis con frecuencia está diseñado para detectar movimientos en la actividad comercial y para determinar si la tendencia actual continuará. El Sr. Dickson también insiste en que su personal analice toda actividad cíclica en las fluctuaciones del negocio durante el transcurso de varios años.

Además, el Sr. Dickson observa todo patrón detectable regularmente y que ocurre en momentos específicos dentro del año, o durante ciertas estaciones, respecto a la planeación de sus operaciones. Ha notado últimamente que su negocio es muy estacional, es decir, que sus utilidades son generalmente más altas en ciertas épocas del año.

Sin embargo, el Sr. Dickson se da cuenta que la tendencia ascendente en las ventas que ha experimentado no es tan favorable como parece. Los cambios en el clima económico, con el tiempo, afectan los valores de sus utilidades y de los rendimientos por concepto de ventas. Por tanto, él reconoce la necesidad de establecer índices de las medidas del desempeño comercial para obtener una impresión más exacta de qué tan bien va el negocio.



13.1 Introducción

La importancia de poder pronosticar el futuro con algún grado de exactitud es inapreciable. ¿Se imaginan los resultados si se pudiera observar a través de una bola de cristal y predecir el futuro sobre el primer sábado del mes de mayo cuando se realizaba el Derby de Kentucky, o antes del saque del próximo campeonato de fútbol? La proporción de éxito en la predicción de los ganadores, sin duda alguna se dispararía.

Tal es el caso en el mundo comercial. La habilidad para proyectar eventos futuros y tendencias aumenta enormemente la probabilidad de éxito. Por tanto, no es sorprendente que los negocios gastan buena parte de tiempo y esfuerzo persiguiendo los pronósticos exactos de las tendencias comerciales y las evoluciones futuras.

Numerosas herramientas cuantitativas pueden utilizarse para desarrollar proyecciones útiles. Con la ayuda de estas herramientas, se puede construir una bola de cristal propia y utilizarla para ver el futuro. Este capítulo analiza las formas en las cuales pueden utilizarse los datos de series de tiempo para hacer pronósticos, y cómo estos pronósticos pueden servir para tomar decisiones bien informadas.

13.2 Series de tiempo y sus componentes

El proceso de desarrollar un pronóstico comienza con la recolección de datos anteriores durante varios períodos. El conjunto de datos resultantes se denomina una **serie de tiempo** o serie temporal porque contiene observaciones para alguna variable durante el tiempo. Los períodos de tiempo varían en duración. Pueden ser anuales, trimestrales, mensuales o incluso diarios. Los períodos de sólo una hora pueden utilizarse para variables altamente volátiles como el precio o para las acciones transadas en una de las bolsas de valores reconocidas.

Series de tiempo Una recolección de datos para alguna variable o conjunto de variables durante varios períodos.

La tabla 13.1 contiene datos de ventas trimestrales para Rampart Industries en millones de dólares, en donde por ejemplo, 1998-III es el tercer trimestre del año 1998.

Tabla 13.1
Cifras de las ventas trimestrales para Rampart Industries

Período	Ventas (en millones)	Período	Ventas (en millones)
1995-IV	31.1	1997-II	61.8
1996-I	35.6	III	75.9
II	42.8	IV	74.1
III	50.3	1998-I	88.7
IV	49.2	II	79.1
1997-I	62.0	III	92.5

El propósito del análisis de las series de tiempo es predecir o proyectar los valores futuros de la variable a partir de observaciones anteriores. Un método directo es el **método intuitivo de proyección,** el cual presume que el mejor predictor del valor de la variable en el siguiente período es su valor en el período corriente. En su forma más simple puede expresarse como:

Modelo de proyección intuitivo

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t \qquad [13.1]$$

en donde $\hat{Y}_{t+1}$ es el estimado del valor de la serie de tiempo en el siguiente período $t + 1$, y Y_t es el valor real en el período corriente t. Este método se utiliza con frecuencia con los datos que presentan una **caminata aleatoria**. Los movimientos de caminata aleatoria no presentan tendencia ascendente o descendente y cambian de dirección súbitamente. Tales movimientos son análogos a un paseo nocturno a ningún sitio en especial. Cuando llega a una intersección, decide aleatoriamente, quizá lanzando una moneda, qué camino tomar. Tal aleatoriedad no puede predecirse, y lo mejor que se puede hacer es utilizar la observación más reciente como predicción para el siguiente valor. Este método de pronóstico es más exitoso para los datos que se recogen para intervalos cortos de tiempo, tales como los diarios o los semanales.

Sin embargo, la mayoría de las series de tiempo son más complejas. Todas las series de tiempo contienen por lo menos uno de los siguientes cuatro componentes: 1) tendencia secular; 2) variación estacional; 3) variación cíclica; o 4) variación irregular, o aleatoria. En esta sección se analizarán cada uno de estos componentes de las series de tiempo.

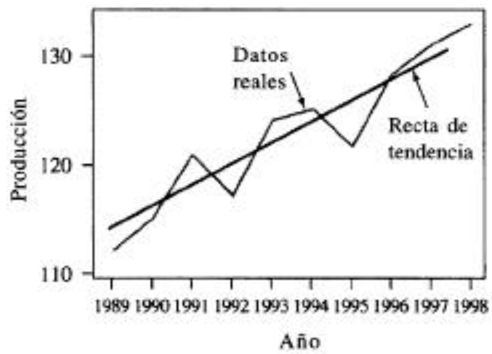
A. Tendencia secular

La **tendencia secular**, o simplemente la tendencia, es la conducta a largo plazo de la variable durante un período de longitud prolongada. Refleja la dirección general de la serie de tiempo como ascendente o descendente. Algunos ejemplos incluyen el creciente número de autos vendidos en Estados Unidos, el incremento en el volumen de las transacciones de crédito durante los últimos años, y el movimiento descendente en el número de personas que viven en áreas rurales en las últimas dos décadas.

Tendencia secular El movimiento continuo en una variable durante un período de tiempo extendido.

La figura 13.1 muestra la tendencia en la producción de Rampart Industries para la última década. Aunque los datos muestran una variación considerable por encima y por debajo de la recta de tendencia, dibujada con la mitad de los datos, la tendencia secular es, sin equivocarse, ascendente.

Figura 13.1
La recta de tendencia para Rampart Industries (reporte anual)



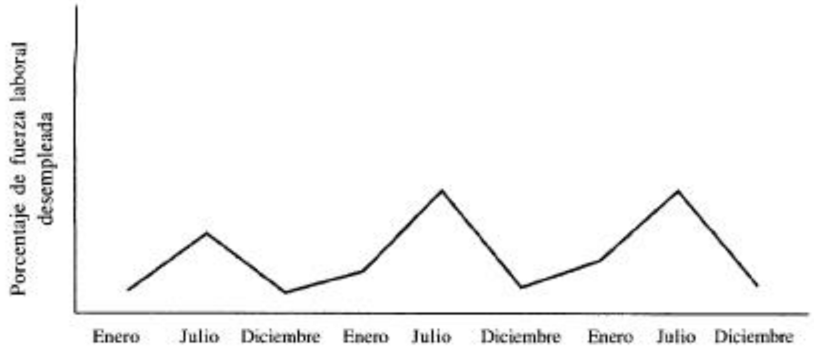
B. El componente estacional

Gran parte de la actividad comercial se ve influenciada por las cambiantes estaciones del año. Por ejemplo, las ventas de ciertos bienes estacionarios como las motonieves Honda, vestidos de baño Jantzen, y tarjetas de amor y amistad de Hallmark, probablemente presentarían un componente altamente estacional. Las **fluctuaciones estacionales** son patrones que tienden a ocurrir de nuevo, regularmente, durante el período. Aunque se piensa con frecuencia que las variaciones estacionales ocurren regularmente cada año, como las ventas anuales de jamones de navidad, el período en cuestión puede ser mucho más corto. El flujo diario de clientes a la barra de comidas cada medio día es un ejemplo. Si la variación estacional no ocurre anualmente, los datos anuales no capturarán o reflejarán tales cambios. Los datos deben recolectarse trimestral, mensual o incluso semanalmente.

Variaciones estacionales Movimientos en las series de tiempo que ocurren de nuevo cada año por la misma época.

La figura 13.2 muestra que cada año la tasa de desempleo tiende a subir en el mes de mayo, cuando los estudiantes de bachillerato ingresan al mercado laboral del verano, y luego baja en noviembre cuando las tiendas minoristas contratan ayuda temporal para atender la época de navidad. Vale la pena destacar que no existe ninguna tendencia evidente en la tasa de desempleo.

Figura 13.2
Variaciones estacionales en el desempleo



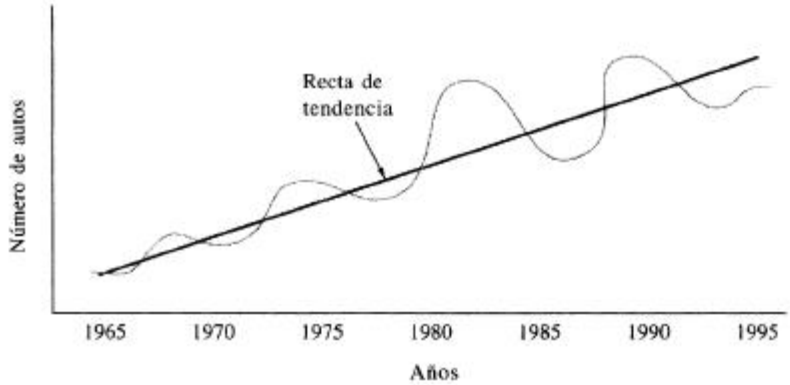
C. Variaciones cíclicas

Muchas variables presentan una tendencia a la variación por encima y por debajo de la tendencia a largo plazo, durante un período prolongado de tiempo. Tales fluctuaciones se denominan **variaciones cíclicas** o **ciclos comerciales**. Abarcan períodos mucho más prolongados que las variaciones estacionales, y con frecuencia incluyen tres o más años de duración.

> **Variaciones cíclicas** Son variaciones como de onda en el nivel general de la actividad comercial durante un periodo relativamente prolongado.

Un ciclo contiene cuatro fases: 1) Alza o expansión, durante la cual el nivel de actividad comercial se acelera, el desempleo es bajo y la producción es rápida; 2) el pico, en el cual la tasa de actividad económica tiene "el punto más alto"; 3) el descenso, o contracción, cuando el desempleo sube y la actividad se merma; y 4) la depresión, cuando la actividad está en su punto mínimo. Un ciclo va desde una fase hasta la siguiente, y tal como se ilustra en la figura 13.3, varía por encima y por debajo de la tendencia a largo plazo, de manera ondular.

Figura 13.3
Variaciones cíclicas de las importaciones de autos



D. Variaciones irregulares

Las series de tiempo también contienen **variaciones irregulares o aleatorias**, producidas por sucesos inusuales, que producen movimientos sin un patrón discernible. Tales movimientos son, como las huellas y los copos de nieve, únicos y probablemente no ocurrirán de nuevo de la misma manera. Pueden ser producidos por eventos tales como guerras, inundaciones, terremotos, elecciones políticas, o embargos del petróleo.

13.3 Modelos de series de tiempo

Un modelo de series de tiempo puede expresarse como alguna combinación de estos cuatro componentes. El modelo es simplemente una expresión matemática de la relación entre los cuatro componentes. Comúnmente dos tipos de modelos se relacionan con las series de tiempo: 1) el modelo aditivo y 2) el modelo multiplicativo. El modelo aditivo se expresa como:

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

en donde Y_t es el valor de la serie de tiempo para el período t, y la tendencia son los valores al lado derecho, la variación estacional, la variación cíclica, y la variación aleatoria o irregular, respectivamente, para el mismo período. En el modelo aditivo, todos los valores están expresados en unidades originales, y S, C, e I son desviaciones alrededor de T. Si se desarrollara un modelo de series de tiempo para las ventas en dólares de una tienda minorista local, se puede encontrar que T = US\$500, S = US\$100, C = –US\$25, e I = –US\$10. Las ventas serían

$$\begin{aligned} Y &= \text{US\$500} + \text{US\$100} - \text{US\$25} - \text{US\$10} \\ &= \text{US\$565} \end{aligned}$$

Vale la pena destacar que el valor positivo para S indica que las influencias estacionales existentes han tenido un impacto positivo en las ventas. El valor cíclico negativo sugiere que el ciclo comercial está actualmente descendiendo. Aparentemente, sucedió algún evento aleatorio que tuvo un impacto negativo en las ventas.

El modelo aditivo sufre del supuesto, algo irreal, de que los componentes son independientes uno del otro. Esto rara vez es el caso en la vida real. En la mayoría de los casos, los movimientos de un componente tendrán un impacto en los otros componentes, por tanto, se niega el supuesto de independencia. O quizás de manera más común, con frecuencia se encuentran que ciertas fuerzas que trabajan en la economía, simultáneamente afectan dos o más componentes. De nuevo, el supuesto de independencia no se cumple.

Como resultado, el modelo multiplicativo es el que se prefiere con frecuencia; supone que los componentes interactúan entre sí y no se mueven independientemente. El modelo multiplicativo se expresa como:

$$Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

En el modelo multiplicativo, sólo T se expresa en las unidades originales, y S, C, e I se expresan en términos de porcentajes. Por ejemplo, los valores para las deudas morosas en un banco comercial pueden registrarse como T = US\$10.000.000, $S = 1.7$, $C = 0.91$ e $I = 0.87$. Las deudas morosas podrían entonces calcularse como:

$$Y = (10)(1.7)(0.91)(0.87) = \text{US\$13.46 millones}$$

Debido a que las fluctuaciones ocurren dentro de períodos de menos de un año, podrían no estar reflejados en los datos anuales. Una serie de tiempo para datos anuales se expresaría como

$$Y_t = T_t \times C_t \times I_t$$

13.4 Técnicas de suavizamiento

El comportamiento general de una variable, con frecuencia puede analizarse mejor observando su tendencia a largo plazo. Sin embargo, si la serie de tiempo contiene demasiadas variaciones o cambios estacionales a corto plazo, la tendencia puede ser algo confusa y difícil de observar. Es posible eliminar muchos de estos factores que se pueden confundir promediando los datos de varios períodos. Esto se logra utilizando ciertas técnicas de suavizamiento o suavización que eliminan las fluctuaciones aleatorias de la serie, proporcionando por tanto un panorama menos distorsionado de la conducta real de la serie. Se analizarán dos métodos comunes de suavizamiento de los datos de series de tiempo: promedio móvil y suavizamiento exponencial.

A. Promedios móviles

Un **promedio móvil** (PM) tendrá el efecto de "suavizamiento" de los datos, produciendo un movimiento con menos picos y valles. Se calcula promediando los valores en la serie de tiempo sobre un número fijo de períodos. El mismo número de períodos se mantiene para cada promedio, eliminando la observación más antigua y recogiendo la más reciente. Se supone que los precios de cierre para una acción en la Bolsa de Valores de Nueva York, para el período de lunes a miércoles, fueron de US$20, US$22, y US$18, respectivamente. Se calcula un promedio móvil de tres períodos (día) así:

$$(20 + 22 + 18) / 3 = 20$$

Este valor de 20 sirve entonces como proyección o estimado de lo que puede ser el precio de cierre en cualquier momento futuro. Si el cierre del jueves es de 19, el siguiente promedio móvil se calcula quitando el valor del lunes de 20 y utilizando el precio de cierre del jueves que es 19. Así, la proyección es:

$$(22 + 18 + 19)/3 = 19.67$$

El estimado que ha sido calculado de esta manera, se observa como el promedio a largo plazo de la serie. Se toma como el pronóstico para el precio de cierre en cualquier día futuro.

Promedio móvil (PM) Una serie de promedios aritméticos sobre un número dado de períodos; es la estimación del promedio de la variable a largo plazo.

En la tabla 13.2 se presentan las ventas para Arthur Momitor's Snowmobiles, Inc., durante los últimos 12 meses. Se calculan tanto un PM de tres meses, como uno de cinco meses. Se obtiene la primera entrada en el PM de tres meses promediando las ventas de motonieves en enero, febrero y marzo. El valor resultante de (52 + 81 + 47) / 3 = 60 se centra en el período medio de febrero. Se determina la siguiente entrada promediando febrero, marzo y abril, y centrando el valor de 64.33 en el medio de estos tres periodos, que es marzo. El resto de entradas se determinan de manera similar.

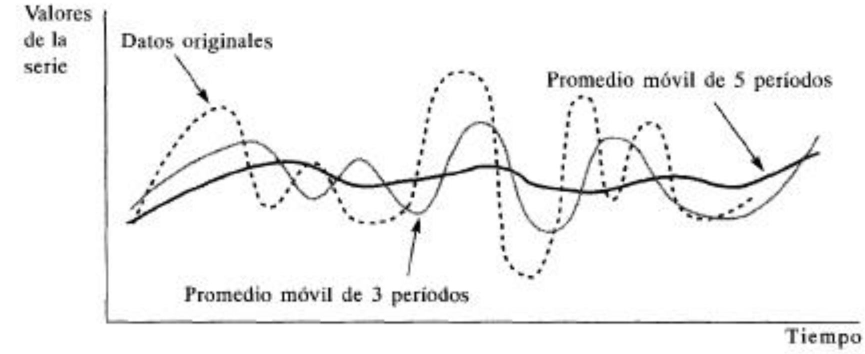
Tabla 13.2
Ventas de motonieves para Arthur Momitor

Mes	Ventas (US$100)	PM de tres meses	PM de cinco meses
Enero	52		
Febrero	81	60.00	
Marzo	47	64.33	59.00
Abril	65	54.00	63.20
Mayo	50	62.67	56.00
Junio	73	56.00	58.60
Julio	45	59.33	55.60
Agosto	60	51.67	61.40
Septiembre	50	63.00	55.80
Octubre	79	58.00	59.20
Noviembre	45	62.00	
Diciembre	62		

La primera entrada de cinco meses en el PM utiliza valores para los meses de enero a mayo. El promedio de (52 + 51 + 47 + 65 + 50) /5 = 59 se centra en la mitad de tales cinco períodos en marzo.

Los promedios móviles tienen el efecto de suavizamiento en las variaciones grandes de los datos. Este efecto de suavizamiento ocurre porque observaciones inusualmente pequeñas se promedian con otros valores, y por tanto su impacto se mitiga. Entre más grande sea el número de períodos en un promedio móvil, más pronunciado será el efecto de suavizamiento. Vale la pena notar que el rango de valores en un PM de tres meses, es menor que en los datos originales y mayor que en el rango hallado en el PM de cinco meses. La figura 13.4 ilustra esta tendencia del efecto de suavizamiento a incrementar con el número de períodos en el promedio móvil.

Figura 13.4
Comparación de los promedios móviles



Cuando un número impar de períodos se utiliza en el promedio móvil, los resultados pueden centrarse automáticamente en el período de la mitad. Cuando Arthur Momitor calculó su promedio móvil de tres meses para las motonieves, el primer valor podría centrarse de inmediato en el período de la mitad, es decir, febrero.

Sin embargo, si existe un número par de períodos en el promedio, debe hacerse un ajuste ya que no existe una observación en la mitad en la cual se centre automáticamente el valor. Se consideran los datos de ventas trimestralmente para Sun Shine Greetings Cards (Tarjetas de saludos de Sun Shine) en la tabla 13.3. Los datos van desde el primer trimestre de 1996, hasta el último trimestre de 1998. Si se va a calcular un PM de cuatro períodos (trimestres), la primera entrada de 42.50 se obtiene promediando los datos para los cuatro trimestres de 1996. Sin embargo este valor no corresponde a ningún período específico en la serie original de datos, pero se fija *entre* el segundo y el tercer trimestre de 1996. Las entradas restantes están a la misma distancia del centro.

Tabla 13.3
Ventas para Sun Shine Cards (US$1,000)

Período	Ventas	PM de cuatro trimestres	PM de cuatro trimestres centrado
1996-I	40		
II	45		
		42.50	
III	38		44.13
		45.75	
IV	47		45.00
		44.25	
1997-I	53		45.38
		46.50	
II	39		44.63
		42.75	
III	47		42.50
		42.25	
IV	32		43.00
		43.75	
1998-I	51		42.50
		41.25	
II	45		44.00
		46.75	
III	37		
IV	54		

Es necesario centrar el promedio móvil tomando la media de cada *par* sucesivo de promedios móviles. Así, el promedio del primer y del segundo valor resulta:

$$(42.50 + 45.75)/2 = 44.13$$

el cual se centra en el tercer trimestre. La siguiente entrada de 45.00 se obtiene promediando el segundo y el tercer valor:

$$(45.75 + 44.25)/2 = 45.00$$

el cual está centrado en el cuarto trimestre de 1996. De igual forma, los valores restantes están centrados en sus respectivos períodos.

Los promedios móviles pueden utilizarse para eliminar variaciones irregulares y estacionales. Cada entrada en el PM se deriva de cuatro trimestres, es decir, el valor de todo un año. Por tanto, el promedio móvil "promedia" toda variación estacional que pueda ocurrir dentro del año, eliminándolas de manera efectiva y dejando sólo la tendencia y las variaciones cíclicas.

En general, si el número de períodos en un promedio móvil es suficiente como para abarcar todo un año (si se utilizan datos de 12 meses; 52 si se utilizan datos semanales), las variaciones estacionales se promedian y se eliminan de la serie. Entonces se afirma que los datos están **desestacionalizados**.

Como se expresó anteriormente, el uso de un número mayor de períodos termina en una serie promediada más suave. Así pues, si los datos son muy volátiles, sería conveniente utilizar en el pronóstico un número de períodos más pequeño, para así evitar colocar la proyección muy cerca al promedio a largo plazo. Si los datos no varían mucho de la media a largo plazo, sería necesario utilizar un número mayor de períodos en la creación del promedio móvil.

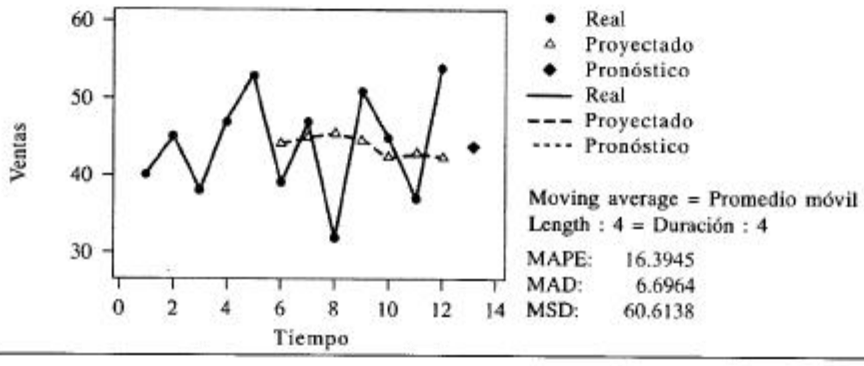
La pantalla de Minitab 13.1 muestra una impresión en Minitab para el ejemplo de las tarjetas Sun Shine. El ejemplo 13.1 muestra el método del promedio móvil.

Pantalla en Minitab 13.1

Four-period moving average for Sun Shine cards (Promedio móvil para cuatro períodos de las tarjetas de Sun Shine)

Row	Period	C1	.MA	Predict	Error
1	1	40	*	*	*
2	2	45	*	*	*
3	3	38	44.125	*	*
4	4	47	45.000	*	*
5	5	53	45.375	*	*
6	6	39	44.625	44.125	-5.125
7	7	47	42.500	45.000	2.000
8	8	32	43.000	45.375	-13.375
9	9	51	42.500	44.625	6.375
10	10	45	44.000	42.500	2.500
11	11	37	*	43.000	-6.000
2	12	54	*	42.500	11.500

Row = Fila
Period = Período
C1 = Tarjeta 1
.MA = Promedio móvil
Predict= Pronóstico



Ejemplo 13.1

TransAmerica Trucking ha recolectado datos para los últimos 10 meses sobre las toneladas de envíos. Ayude al departamento de investigación calculando el promedio móvil de tres períodos. ¿Cuál es su pronóstico para los envíos en el futuro?

Solución

Mes	Envíos	PM de tres períodos	Mes	Envíos	PM de tres períodos
1	70		6	81	76.67
2	68	71.00	7	82	77.33
3	75	74.00	8	69	74.33
4	79	73.67	9	72	69.67
5	67	75.67	10	68	

Los tres primeros valores de 70, 68, y 75 promedian 71. Los valores para los períodos dos al cuatro de 68, 75 y 79, promedian 74. El proceso continúa hasta que se encuentre la última observación. La proyección para todo mes futuro es de 69.67 toneladas.

Interpretación

Debido a que los datos no presentan ninguna tendencia ascendente o descendente, la técnica de promedio móvil se ajusta para proyectar envíos futuros. El pronóstico de 69.67 claro que cambiará, cuando se reporte el envío del mes 11 y se calcule el promedio móvil para el mes 10.

B. Suavizamiento exponencial

Como su nombre lo indica, el suavizamiento exponencial tiene el efecto de *suavizar* una serie. También proporciona un medio efectivo de predicción. **Suavizamiento exponencial de primer orden** se utiliza cuando los datos no presentan ningún patrón de tendencia. El modelo contiene un mecanismo de autocorrección que ajusta los pronósticos en dirección opuesta a los errores pasados. La ecuación es:

Suavizamiento exponencial $$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t \qquad [13.2]$$

en donde F_{t+1} es el pronóstico para el siguiente período

A_t es el valor real observado para el período corriente

F_t es la proyección hecha previamente para el período corriente

α es una "constante de suavizamiento" a la cual se le da un valor entre 0 y 1. Teniendo en cuenta que los datos no tienen tendencia ascendente o descendente, pero varían alrededor de algún promedio a largo plazo, se toma el valor F_{t+1} como pronóstico para cualquier período futuro.

Suavizamiento exponencial Herramienta de proyección en la cual el pronóstico se basa en un promedio ponderado de los valores actuales y anteriores.

Como ejemplo, se supone que es el último día hábil del mes de febrero. Las ventas totales del mes para Uncle Vito's Cars fueron de US$110.000. Uncle Vito ha decidido pronosticar las ventas para el mes de marzo. De acuerdo con la fórmula [13.2], la proyección de marzo, F_{t+1} requiere:

1. Ventas reales de febrero, A_t.
2. Pronóstico para febrero, F_t.

Sin embargo, debido a que marzo es el primer mes en el cual Uncle Vito está haciendo su predicción, no se hizo pronóstico para el mes de febrero y F_t es desconocido. La práctica general es utilizar simplemente el valor real del período anterior, enero en este caso, para la primera proyección. Los registros de Uncle Vito demuestran que las ventas de enero fueron de US$105.000. Se asume un valor de 0.3 para α, entonces el pronóstico para marzo es:

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha A_t + (1-\alpha)F_t \\ &= \alpha A_{\text{Feb}} + (1-\alpha)F_{\text{Feb}} \\ &= (0.3)(110) + (0.7)(105) \\ &= \text{US\$106.500 como la proyeccion de las ventas en marzo.} \end{aligned}$$

Como lo revela la tabla 13.4, Uncle Vito puede planear ventas de US$106.500. Si las ventas reales de marzo son de US$107.000, el error se calcula (en miles) como $F_t - A_t = 106.5 - 107 = -0.5$. También $F_{Abril} = (0.3)(107) + (0.7)(106.5) = 106.65$.

Tabla 13.4
Venta de autos de Uncle Vito

Mes	Proyección	Real	Error ($F_t - A_t$)
Enero	-	105	
Febrero	105	110	-5.0
Marzo	106.5	107	-0.5
Abril	106.65	112	-5.35

Se asume que las ventas en abril fueron de US$112.000. Entonces el error es –US$5.350. Uncle Vito puede predecir también las ventas de mayo así:

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha A_t + (1-\alpha)F_t \\ F_{\text{Mayo}} &= \alpha A_{\text{Abril}} + (1-\alpha)F_{\text{Abril}} \\ &= (0.3)(112) + (0.7)(106.65) \\ &= \$108.260 \end{aligned}$$

Claro, que el valor seleccionado para α es crucial. Debido a que se desea producir un pronóstico con el error más pequeño posible, el valor α que minimiza el cuadrado medio del error (CME) debe ser óptimo. El ensayo y error sirve con frecuencia como el mejor método para determinar el valor α apropiado. La tabla 13.5 contiene los datos de las ventas reales de Uncle Vito para los primeros siete meses. Los errores se basan en las proyecciones que se calcularon utilizando los valores α de 0.3 y 0.8. El *CME* es

Cuadrado medio del error
$$CME = \frac{\Sigma(F_t - A_t)^2}{n-1} \qquad [13.3]$$

Tabla 13.5
Datos de las ventas de Uncle Vito

Mes	Real	Proyección (α = 0.3)	Error	Proyección (α = 0.8)	Error
Enero	105				
Febrero	110	105.00	-5.00	105.00	-5.00
Marzo	107	106.50	-0.50	109.00	2.00
Abril	112	106.65	-5.35	107.40	-4.60
Mayo	117	108.26	-8.74	111.08	-5.92
Junio	109	110.88	1.88	115.82	6.82
Julio	108	110.32	2.32	110.36	2.36
Agosto		109.62		108.47	

Para $\alpha = 0.3$, CME es:

$$CME = \frac{(-5)^2 + (-0.5)^2 + (-5.35)^2 + (-8.74)^2 + (1.88)^2 + (2.32)^2}{7 - 1}$$

$$= 23.20$$

Un α de 0.8

$$CME = \frac{(-5)^2 + (2)^2 + (-4.6)^2 + (-5.92)^2 + (6.82)^2 + (2.36)^2}{7 - 1}$$

$$= 22.88$$

Un α de 0.8 produce mejores resultados de pronóstico debido a que genera un factor de error más pequeño. Otros valores de α pueden probarse para determinar su impacto en CME y en la exactitud de las proyecciones resultantes. Generalmente hablando, si los datos son volátiles se precisa un menor valor α. Esto se debe a que los valores más pequeños para α asignan menos peso a las observaciones más recientes. Si los datos presentan un movimiento considerable, la última observación puede no ser representativa del promedio a largo plazo.

Vale la pena recordar, que el suavizamiento exponencial de primer orden, en la forma aquí descrita, es apropiado si los datos no presentan tendencia pero se mueven alrededor de algún valor promedio a largo plazo. Si una tendencia descendente o una ascendente puede detectarse representando los datos, debería utilizarse el suavizamiento exponencial de segundo orden, cuya mecánica no se analizará aquí.

Ejemplo 13.2 Predicción de las tasas de desempleo

Los índices mensuales de desempleo para 1997 se presentan a continuación. Como analista del Ministerio de Trabajo de los Estados Unidos, usted debe: 1) suavizar las fluctuaciones utilizando un promedio móvil con cuatro períodos, y 2) utilizar un modelo de suavizamiento exponencial fijando α en 0.4 para proyectar el desempleo para algún mes futuro. Los datos no demuestran ninguna tendencia pronunciada ascendente o descendente.

Enero	5.4	Julio	5.4
Febrero	5.1	Agosto	5.5
Marzo	5.0	Septiembre	5.2
Abril	5.2	Octubre	5.5
Mayo	5.3	Noviembre	5.1
Junio	5.3	Diciembre	5.4

Solución:

Mes	Tasa	PM	PM centrado	F_t
Enero de 1997	5.4			
Febrero	5.1	5.175		5.4
Marzo	5.0	5.150	5.163	5.28
Abril	5.2	5.200	5.175	5.17
Mayo	5.3	5.300	5.250	5.18
Junio	5.3	5.375	5.338	5.23
Julio	5.4	5.350	5.363	5.26
Agosto	5.5	5.400	5.375	5.31
Septiembre	5.2	5.325	5.363	5.39
Octubre	5.5	5.300	5.313	5.31
Noviembre	5.1			5.39
Diciembre	5.4			5.27
Enero de 1998				5.32

La tabla muestra el primer promedio móvil de 5.175, calculado al promediar los índices de enero a abril. Se sitúa en medio de los cuatro meses entre febrero y marzo. La segunda entrada de 5.150 es el promedio de los meses de febrero a mayo y se coloca entre marzo y abril. Los valores restantes para PM se calculan de forma similar. Estos valores se centran luego promediando pares sucesivos de promedios móviles.

Para proyectar haciendo uso del suavizamiento exponencial, se deben calcular las cifras pronosticadas para febrero a diciembre, para poder obtener $F_{Dic} = 5.27$, el cual se utiliza luego en la proyección de enero de 1998:

$$\begin{aligned} F_{\text{Ene}} &= \alpha(A_{\text{Dic}}) + (1 - \alpha)(F_{\text{Dic}}) \\ &= (0.4)(5.4) + (0.6)(5.27) \\ &= 5.32\% \end{aligned}$$

Interpretación

El método de promedio móvil pronostica una tasa de 5.313%. El suavizamiento exponencial proporciona un pronóstico de 5.32%. Este valor (de 5.313% o 5.32%) es el pronóstico para enero, o para cualquier período futuro, ya que los datos no presentan una tendencia sino que supone que varían o fluctúan a largo plazo alrededor de este promedio.

A diferencia de los promedios móviles, los cuales utilizan sólo un número fijo de períodos, el suavizamiento exponencial utiliza todos los valores anteriores de la serie de tiempo. Esto se debe a que F_{t+1} depende de A_t y F_t Sin embargo, F_t utilizó A_{t-1} y F_{t-1} en su cálculo, y F_{t-1} utilizó A_{t-2} y F_{t-2}. Por tanto, cada pronóstico depende de los valores reales anteriores de A_{t-n} hasta llegar a donde comenzaron los pronósticos por primera vez. Entre más se vaya hacia atrás en el tiempo, menos impacto tiene un valor de A en la proyección corriente.

Ejercicios de la sección

1. Si los datos en una serie temporal tienen una varianza grande, ¿podría utilizarse un promedio móvil con un número mayor de períodos, o uno con un número menor de períodos? ¿Por qué?

2. ¿Por qué se debe utilizar un promedio móvil sólo cuando los datos no presentan tendencia ni ascendente ni descendente?

3. A continuación se presenta el número de llamadas telefónicas diarias que ingresan a un conmutador de una oficina muy ocupada. Calcule el promedio móvil para tres períodos.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Llamadas	40	37	45	32	42	47	39	47	41	36	38

4. A continuación se presenta el número de empleados que se ausentan diariamente de sus trabajos en una fábrica grande. Calcule el promedio móvil de cuatro períodos relacionado con estos datos. Centre los promedios.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Empleados	45	54	63	39	42	31	48	54	64	36	41	52

5. Las existencias excedentes para Mom's Apple Pies, Inc., durante las últimas 10 semanas han sido 101, 122, 109, 111, 120, 117, 115, 118, 112 y 117. Utilice el suavizamiento exponencial con α 0.20 y proyecte las existencias para la semana número once.

6. Los créditos mensuales en miles de dólares en el banco local son 211, 234, 209, 217, 215, 232, 221, 211 y 203. Utilice el suavizamiento exponencial para proyectar los créditos al siguiente período utilizando un valor α de 0.10. Calcule el cuadrado medio del error y compárelo con el cuadrado medio del error si α es 0.80. ¿Cuál valor α proporciona el mejor pronóstico?

13.5 Análisis de tendencia

Si una serie de tiempo tiene una tendencia ascendente o descendente a largo plazo (como por ejemplo en la figura 13.1), el análisis de tendencia puede ser útil para desarrollar pronósticos. Es decir, si una tendencia está presente debido a que los datos no varían alrededor de algún promedio a largo plazo como los de las tarjetas Sun Shine discutidos anteriormente, los métodos de suavizamiento como el promedio móvil y el suavizamiento exponencial no son apropiados. En su lugar, se puede estimar una recta de tendencia, utilizando las técnicas para la regresión simple discutida en el capítulo 11. La variable dependiente es la serie de tiempo que se desea pronosticar y el tiempo se utiliza como variable independiente. El modelo a estimar es simplemente:

Recta de tendencia utilizando regresión simple

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t \qquad [13.4]$$

Considerando los datos para el número de casas iniciadas (en cientos) en Happy Valley, California, que se observan en la tabla 13.6, Mayfield Construction desea ajustar su serie de tiempo utilizando MCO en el desarrollo de un modelo para predecir futuros comienzos de construcción de vivienda.

Tabla 13.6
Comienzo de construcción de casas en Happy Valley (en 1000's)

Año	t(X)	Comienzos de casas (Y)	XY	X^2
1983	1	7.0	7.0	1
1984	2	7.1	14.2	4
1985	3	7.9	23.7	9
1986	4	7.3	29.2	16
1987	5	8.2	41.0	25
1988	6	8.3	49.8	36
1989	7	8.1	56.7	49
1990	8	8.6	68.8	64
1991	9	8.8	79.2	81
1992	10	8.9	89.0	100
1993	11	8.7	95.7	121
1994	12	9.1	109.2	144
1995	13	9.4	122.2	169
1996	14	9.1	127.4	196
1997	15	9.5	142.5	225
1998	16	9.9	158.4	256
	136	135.9	1,214.0	1,496.0

Los valores para t se obtienen codificando el período, iniciando con 1 para el primer período, 2 para el segundo, y así sucesivamente. Como se aprendió en el capítulo 11, las sumas de cuadrados y productos cruzados utilizados para calcular la recta de regresión son:

Suma de cuadrados de X	$SCx = \Sigma X^2 - \dfrac{(\Sigma X)^2}{n}$	[13.5]

$$= 1{,}496 - \frac{(136)^2}{16}$$
$$= 340$$

Suma de cuadrados de productos cruzados	$SCxy = \Sigma XY - \dfrac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n}$	[13.6]

$$= 1{,}214 - \frac{(136)(135.9)}{16}$$
$$= 58.85$$

Las fórmulas para b_1 y b_0 son:

Pendiente de la recta de tendencia	$b_1 = \dfrac{SCxy}{SCx}$	[13.7]

$$= \frac{58.85}{340}$$
$$= 0.173$$

Intercepto de la recta de tendencia	$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$	[13.8]

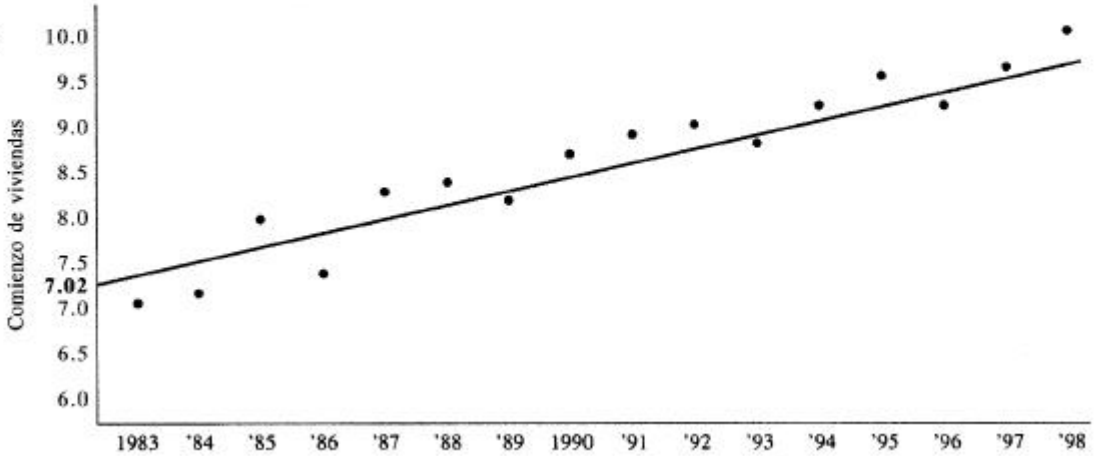
$$= 7.02$$

La ecuación para la recta de tendencia es:

$$\hat{Y}_t = 7.02 + 0.173t$$

La figura 13.5 muestra los datos originales y la recta de tendencia que producen.

Figura 13.5



Dada esta ecuación, es posible predecir períodos futuros, el número de viviendas iniciadas simplemente substituyendo el valor apropiado por *t*. Se supone que Mayfield Construction desea pronosticar para 1999 las viviendas iniciadas. Debido a que el valor *t* sería 17 en 1999, la proyección sería:

$$\hat{Y} = 7.02 + 0.173(17)$$
$$= 9.96$$

o 9,960 viviendas iniciadas, debido a que los datos se expresaron en unidades de 1,000.

De igual manera, debido a que 2001 tendría un valor *t* de 19, el pronóstico para 2001 sería

$$\hat{Y} = 7.02 + 0.173(19)$$
$$= 10.31$$

Se estima que en el 2001 habrá 1,031 viviendas en construcción.

Claro que entre más lejana en el futuro se haga una proyección, menos confiable es su resultado. Adicionalmente, su precisión se basa en la condición de que el pasado proporcione un panorama representativo de las tendencias futuras.

Ejemplo 13.3

Larry's Lawn Service hace publicidad de un nuevo químico para erradicar las malezas. Para determinar la tendencia en el número de clientes, Larry consulta los registros de la Compañía y encuentra los datos que aparecen a continuación. Él desea pronosticar el número de clientes para los períodos futuros.

Período	$t(X)$	Clientes (Y)	XY	X^2
Enero de 1997	1	41	41	1
Febrero	2	43	86	4
Marzo	3	39	117	9
Abril	4	37	148	16
Mayo	5	42	210	25
Junio	6	35	210	36
Julio	7	30	210	49
Agosto	8	31	248	64
Septiembre	9	32	288	81
Octubre	10	30	300	100
Noviembre	11	28	308	121
Diciembre	12	28	336	144
Enero de 1998	13	29	377	169
Febrero	14	26	364	196
	105	471	3,243	1,015

Solución

$$SCx = 1{,}015 - \frac{(105)^2}{14}$$
$$= 227.5$$

$$SCxy = 3{,}243 - \frac{(105)(471)}{14}$$
$$= -289.5$$

$$b_1 = -1.27$$
$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$$
$$= 33.64 - (-1.27)(7.5)$$
$$= 43.2$$

La ecuación para la recta de tendencia es:

$$\hat{Y}_t = 43.2 - 1.27t$$

Si Larry desea pronosticar el número de clientes que puede conseguir su empresa en marzo de 1998, el cual sería el período 15, tendría:

$$\hat{Y}_{\text{Mar}} = 43.2 - 1.27(15)$$
$$= 24.15, \text{ o } 24 \text{ clientes}$$

La proyección para agosto es:

$$\hat{Y}_{\text{Ago}} = 43.2 - 1.27(21)$$
$$= 16.53 \text{ clientes}$$

Interpretación

El coeficiente negativo para t de -1.27 indica a Larry que el negocio está descendiendo a una tasa de 1.27 clientes por cada período (mes).

Ejercicios de la sección

7. A continuación aparecen los puntajes de las pruebas nacionales anuales, de los estudiantes de último año de bachillerato que están solicitando ingreso a las universidades. Desarrolle una recta de tendencia y proyecte el puntaje del examen para 1998.

	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Puntaje	412	423	453	432	541	539	587	591	602

8. El departamento de investigación de National Industries ha registrado el nivel de producción en miles de unidades, producidas durante los últimos meses. Utilizando los datos que aquí se muestran, desarrolle una recta de tendencia y una proyección para la producción de noviembre y diciembre.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
Producción	89	78	71	75	68	61	65	54

9. City Utilities ha experimentado una rápida expansión durante los últimos años. Este crecimiento ha requerido cada año adiciones a la fuerza laboral. Utilice el análisis de tendencia para predecir el tamaño de la fuerza laboral (en cientos) para el año 2001.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Empleados	3.5	4.8	5.2	4.9	5.6	5.2	6.5	7.8	8.5

13.6 Descomposición de las series de tiempo

Con frecuencia es útil *descomponer* una serie de tiempo o una serie temporal "desglosando" cada uno de sus cuatro componentes. Así, cada componente se puede examinar individualmente. La tendencia histórica puede reflejar patrones anteriores de comportamiento, permitiendo ganar discernimiento en cuanto a los movimientos a largo plazo de las variables que se desea examinar. Esto permite el desarrollo de modelos de tendencia, útiles en la proyección y pronóstico, tal como se estudió en la sección anterior que se refería al análisis de tendencia. Al analizar el factor estacional se puede determinar si la actividad comercial presenta alguna variación estacional, que pueda considerarse para formular planes futuros. Por ejemplo, si se comercializan trajes de baño o algún otro producto estacional, se puede encontrar que las ventas son mucho más altas en primavera que en otoño o en invierno. Además, el desempeño cíclico del negocio puede también influir en la dirección de la planeación del negocio.

A. Aislamiento de la componente estacional

El primer paso en el desglosamiento es obtener un índice estacional. Se consideran los datos de la tabla 13.7 para Vinnie's Video Village. Una evaluación superficial revela que las utilidades parecen ser más altas durante los meses de verano, cuando las escuelas están de vacaciones, y más bajas en otras épocas del año. Esto sugiere la presencia de factores estacionales.

Tabla 13.7
Variaciones estacionales en las utilidades de Vinnie

Período	*(Y)* Utilidades (cientos de dólares)	PM de 12 meses ($T \cdot C$)	PM centrado	Razón con PM $Y/CMA = S \cdot I$
1996				
Enero	10			
Febrero	9			
Marzo	11			
Abril	12			
Mayo	18			
Junio	23	15.5833		
Julio	27	15.5000	15.5417	1.7373
Agosto	26	15.6667	15.5833	1.6685
Septiembre	18	15.5833	15.6250	1.1520
Octubre	13	15.5833	15.5833	0.8342
Noviembre	10	15.6667	15.6250	0.6400
Diciembre	10	15.8333	15.7500	0.6349
1997				
Enero	9	15.9167	15.8750	**0.5669**
Febrero	11	16.3333	16.1250	0.6822
Marzo	10	16.6667	16.5000	0.6061
Abril	12	16.8333	16.7500	0.7164
Mayo	19	16.9167	16.8750	1.1259
Junio	25	17.0833	17.0000	1.4706
Julio	28	17.1667	17.1250	1.6350
Agosto	31	16.9167	17.0417	1.8191

(Continúa)

Período	(Y) Utilidades (cientos de dólares)	PM de 12 meses ($T \cdot C$)	PM centrado	Razón con PM $Y/CMA = S \cdot I$
Septiembre	22	16.9167	16.9167	1.3005
Octubre	15	16.9167	16.9167	0.8867
Noviembre	11	16.9167	16.9167	0.6502
Diciembre	12	16.9167	16.9167	0.7094
1998				
Enero	10	17.0000	16.9583	**0.5897**
Febrero	8	17.0000	17.0000	0.4706
Marzo	10	16.9167	16.9583	0.5897
Abril	12	17.0000	16.9583	0.7076
Mayo	19	17.5833	17.2916	1.0988
Junio	25	18.1667	17.8750	1.3986
Julio	29			
Agosto	31			
Septiembre	21			
Octubre	16			
Noviembre	18			
Diciembre	19			

El primer paso para desarrollar un índice estacional es calcular un promedio móvil centrado. Teniendo en cuenta que las utilidades de Vinnie tienden a fluctuar durante el transcurso del año y se utilizan datos mensuales, se calcula un promedio móvil de 12 períodos (mes). Si se requiere que analizar la actividad en las bolsas de valores organizadas, podrían utilizarse los datos diarios empleando un promedio móvil de cinco períodos (para los cinco días hábiles) ya que, como se anotó anteriormente, la actividad en las bolsas parece depender del día de la semana.

La tabla 13.7 muestra el promedio móvil de 12 meses y el promedio móvil centrado (PMC). Como se expresó anteriormente, el promedio móvil de todo el año elimina los movimientos estacionales recurrentes (debido a que las variaciones estacionales ocurren *dentro* de un año), así como todo efecto aleatorio durante el transcurso del año. Así, dado un modelo multiplicativo $Y = T \cdot C \cdot S \cdot I$, el promedio móvil elimina S e I y contiene sólo T y C. Es decir, $PM = T \cdot C$.

Ahora es posible calcular la **razón por promedio móvil**. Para hacerlo, se divide el valor de la serie original Y por el promedio móvil. El resultado produce los componentes S e I de la serie de tiempo.

$$\frac{Y}{PM} = \frac{T \times C \times S \times I}{T \times C} = S \times I \quad \text{Razón por promedio móvil}$$

Al dividir los valores de la serie de tiempo por el promedio móvil, se llega a la razón por promedio móvil, la cual contiene sólo componentes S e I. El componente I se eliminará en breve.

Para resumir, se busca aislar y analizar el componente estacional. Extrañamente se comienza eliminando S (e I) calculando el promedio móvil. Luego se restaura el componente estacional calculando la razón por promedio móvil. Estos valores también aparecen en la última columna de la tabla 13.7.

Razón por promedio móvil Al dividir los datos de la serie de tiempo por el promedio móvil se obtiene la razón por promedio móvil, que contiene los componentes S e I.

Ahora se debe calcular una **razón media por promedio móvil** para cada uno de los doce meses. Esto se logra promediando la razón por promedio móvil para cada mes tal y como se muestra en la tabla 13.8. Por ejemplo, en la tabla 13.7 se nota que enero tiene dos razones por promedio móvil: 0.5669 para 1997 y 0.5897 para 1998. La tabla 13.8 muestra que estos promedian 0.5669 + 0.5897/2 = 0.5783. Las razones promedio para los meses restantes se calculan de forma similar. Estas doce razones promedio luego se suman. De forma ideal, se sumarían hasta 12. Pero debido a la aproximación y al promedio, esto es rara vez el caso. Como lo indica la tabla 13.8, la suma en realidad es 11.8454.

Tabla 13.8
Índices estacionales para la utilidades de Vinnie

(1) Mes	(2) 1996	(3) 1997	(4) 1998	(5) Razón promedio por PM	(6) Índice estacional (columna 5 X 1.01305)
Enero		0.5669	0.5897	0.5783	0.5858
Febrero		0.6822	0.4706	0.5764	0.5839
Marzo		0.6061	0.5897	0.5979	0.6057
Abril		0.7164	0.7076	0.7120	0.7213
Mayo		1.1259	1.0988	1.1124	1.1269
Junio		1.4706	1.3986	1.4346	1.4533
Julio	1.7373	1.6350		1.6861	1.7082
Agosto	1.6685	1.8191		1.7438	1.7665
Septiembre	1.1520	1.3005		1.2262	1.2422
Octubre	0.8342	0.8867		0.8605	0.8717
Noviembre	0.6400	0.6502		0.6451	0.6535
Diciembre	0.6349	0.7094		0.6721	0.6809
				11.8454	11.9999≈12

Por tanto, se deben *normalizar* estas razones promedio para obtener un índice estacional. Esto se logra dividiendo 12 (debido a que hay doce períodos) por la suma de las razones promedio por promedio móvil 11.8454. El resultado es:

$$\frac{12}{11.8454} = 1.01305$$

es la **razón de normalización.** Esta razón de normalización se multiplica por cada una de las razones promedio para obtener el índice estacional para cada período, tal como se observa en la tabla 13.8. Este proceso de *normalización* ha eliminado toda actividad irregular, dejando sólo el factor estacional.

Los usos del índice estacional son los siguientes:

1. Después de pasar por todos los problemas para calcular estos índices estacionales, usted estará complacido de saber que pueden ponerse en uso vital. Por ejemplo, el índice estacional para un mes en particular indica cómo se comporta ese mes respecto al año como un todo. El índice de 0.5858 para enero le dice a Vinnie que las utilidades en enero son sólo de 58.58% del promedio del año total. Las utilidades son del 41.42% (1.000 - 0.5858) por debajo del promedio mensual del año.

2. Quizás aún más importante, los índices se pueden utilizar *para desestacionalizar los datos*. Esto tiene el efecto de eliminar la variación estacional de una serie para determinar lo que serían los valores ante la ausencia de variaciones estacionales. Ofrece un valor promedio por mes el que se cumpliría si no existieran cambios estacionales. El valor desestacionalizado se halla dividiendo el valor real durante el mes por el índice estacional en dicho mes. Por ejemplo, en enero de 1996, el valor desestacionalizado es:

$$\frac{10}{0.5858} = 17.07$$

En otras palabras, si el negocio de Vinnie no estuviere sujeto a la variación estacional, las utilidades en enero de 1996 hubieran sido de US$1,707.

Los valores desestacionalizados también denominados **corregidos estacionalmente**, porque dicen lo que los valores serían si se corrigieran las influencias estacionales. El ejemplo clásico involucra las tasas de desempleo. Debido a que el desempleo generalmente es mayor en mayo que en la mayoría de los otros meses, debido a los despidos y al influjo de muchos adolescentes en el mercado laboral, el índice estacional para mayo será mayor que 1. Si el desempleo real en mayo es de 7.2% y el índice es 1.103, el valor desestacionalizado, o corregido estacionalmente, la tasa de desempleo es 7.2/1.103 = 6.53%. Esto no es lo mismo que decir que el desempleo fue de 6.53% (en realidad fue de 7.2%). Pero cuando se corrigen las fuerzas estacionales que inflan típicamente la tasa de desempleo en mayo, la tasa desestacionalizada es menor. De esta forma, una medida o índice de variación estacional puede utilizarse para determinar si el cambio en algunas series es más o menos lo que se esperaría, dado el comportamiento estacional típico.

Valores desestacionalizados Valores obtenidos dividiendo los valores reales por sus índices estacionales respectivos. Reflejan cómo sería la variable si se corrigiera la influencia estacional.

3. Lo contrario es posible en la medida en que el índice estacional pueda utilizarse para *estacionalizar los datos* y obtener un mejor panorama de lo que se puede generar en utilidades durante un mes. Se asume que Vinnie consideró que las utilidades deberían alcanzar un total de 190 durante el año. Sin ninguna estacionalización, se puede argumentar que cada mes generaría 190/12 = 15.83, o US$1,583 en utilidades. Sin embargo, Vinnie sabe que las variaciones mensuales ocurrirán. Podría estacionalizar los datos para determinar el grado de dicha variación mensual multiplicando 15.83 por el índice estacional. Él sabe que en enero las utilidades tienden a ser del 58.58% del total del año. Su estimación de las utilidades para enero es (15.83)(0.5858) = 9.27, o US$927.

O quizás Vinnie está trabajando con la ecuación de tendencia la cual, con los datos dados, sería:

$$Y_t = 13.85 + 0.167t$$

La proyección para enero de 1999, el período de tiempo número 37, es:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 13.85 + 0.167(37)\\ &= 20.03\end{aligned}$$

Sin embargo, no explica los descensos estacionales que ocurren en enero. El valor puede estacionalizarse multiplicando por el índice estacional de enero, dando como resultado (20.03)(0.5858) = 11.73, lo cual probablemente refleja con mayor exactitud las utilidades durante dicho mes.

La pantalla de Minitab 13.2 demuestra la impresión en Minitab para las utilidades de Vinnie. La recta de tendencia (la cual no se calculó aquí) se da junto con los índices estacionales. Estos difieren en algo de los cálculos manuales en la tabla 13.8 debido a la aproximación. Sin embargo, se nota que los índices son mayores que 1 para los períodos de mayo a septiembre, justo como estaban en los cálculos.

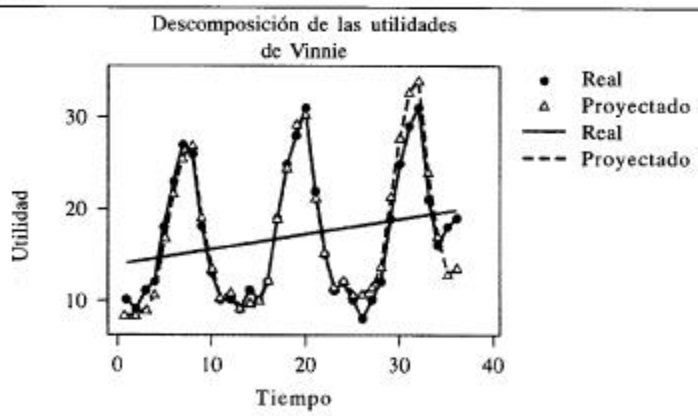
Pantalla en Minitab 13.2

Time series decomposition for Vinnie's profits (Descomposición de la serie de tiempo para las utilidades de Vinnie)

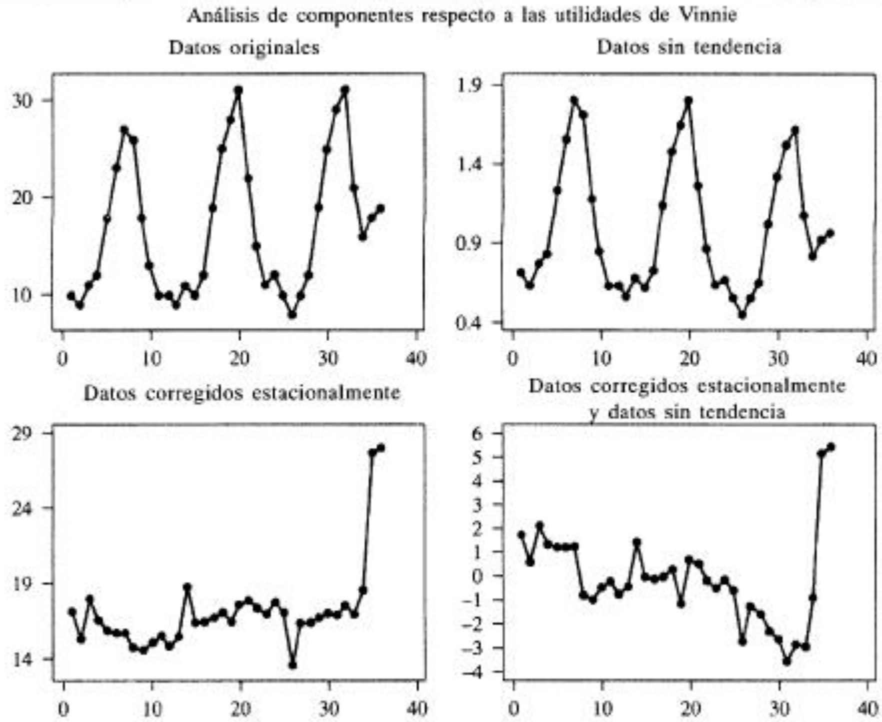
```
Data        profits                  Data             = Datos
Length      36.0000                  Length           = Duración
NMissing    0                        NMissing         = N faltante
                                     Seasonal Indices = Índices estacionales

Trend Line Equation (Ecuación de la recta de la tendencia)
Yt = 13.8540 + 0.167053*t

Seasonal Indices

Period      Index
 1          0.584635
 2          0.587189
 3          0.612000
 4          0.729246
 5           1.13705
 6           1.46259
 7           1.70946
 8           1.76051
 9           1.23313
10          0.862486
11          0.646247
12          0.675462
```

La pantalla en Minitab 13.3 representa los valores reales para las utilidades contra los valores proyectados, con base en la recta de tendencia. Finalmente, la pantalla en Minitab 13.4 proporciona varias representaciones. Los datos sin tendencia reflejan los movimientos en las utilidades si se elimina la tendencia. Se nota que las utilidades parecen moverse por encima y por debajo de un promedio a largo plazo entre 0.9 y 1.4. Los datos corregidos estacionalmente se obtienen cuando los datos reales se dividen por los índices estacionales en la pantalla en Minitab 13.2 como se discutió en esta sección.

Pantalla en Minitab 13.3



Pantalla en Minitab 13.4



Ejemplo 13.4

Marge Spaniel ha tenido y administrado un criadero de perros durante varios años. Ella desea determinar los índices estacionales para los datos trimestrales sobre los ingresos presentados aquí en miles de dólares en las primeras dos columnas de la tabla.

Solución

Debido a que se utilizan datos trimestralmente, un promedio móvil de cuatro períodos eliminará las variaciones estacionales.

Trimestre del año	Ingreso	PM	PM centrado	Razón por PM Y/CMA = S·I
1996-I	24			
II	31	29.50		
III	21	30.25	29.8750	0.7029
IV	42	30.50	30.3750	1.3827
1997-I	27	31.50	31.0000	0.8710
II	32	31.25	31.3750	1.0199
III	25	29.50	30.3750	0.8230
IV	41	28.25	28.8750	1.4200
1998-I	20	26.50	27.3750	0.7306
II	27	26.00	26.2500	1.0286
III	18			
IV	39			

La suma de la razón promedio con los promedios móviles es 3.9895 como se observa en la siguiente tabla. La razón de normalización es 4/3.9895 = 1.0026

	Razones por promedio móvil				
	1996	1997	1998	Razón promedio por PM	Índice estacional
I		0.8710	0.7306	0.8008	0.8029
II		1.0199	1.0286	1.0243	1.0270
III	0.7029	0.8230		0.7630	0.7650
IV	1.3827	1.4200		1.4014	1.4050
				3.9895	3.99 ≈ 4

Cada índice estacional se calcula multiplicando la razón promedio por la razón de normalización. Para el trimestre I es 0.8008 X 1.0026 = 0.8029.

Interpretación

Las ventas en el cuarto trimestre, por ejemplo, son 40.5% mayores que el promedio anual. El valor desestacionalizado para el cuarto trimestre de 1996 es 42/1.4050 = 29.89.

B. Aislamiento de la variación cíclica

Muchos negocios se ven afectados por las oscilaciones en el ciclo de los negocios. Cuando la economía en general se activa, su actividad comercial se puede acelerar, mientras que un descenso económico trae una caída en los negocios. Algunas industrias presentan con frecuencia movimientos en dirección opuesta del ciclo. Por ejemplo, la industria del entretenimiento ha sido reconocida por experimentar movimientos no cíclicos. Se supone que cuando las condiciones económicas empeoran, muchas personas alivian la cruel realidad escapando al cine.

El componente cíclico puede identificarse primero obteniendo la tendencia y el componente estacional tal y como se describió anteriormente. Los datos del ejemplo 13.4, para el caso de la señorita Spaniel, servirán de ilustración. La recta de tendencia es:

$$\hat{Y}_t = 28.58 + 0.0524t$$

Los datos originales de la serie de tiempo, los valores pronosticados con base en este modelo de tendencia y los índices estacionales como se determinaron en el ejemplo 13.4, se muestran en las columnas 2) , 3) y 4) de la tabla 13.9. Por ejemplo, el valor de tendencia para el segundo período de tiempo, 1996-II es

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 28.58 + 0.0524(2)\\ &= 28.68\end{aligned}$$

Tabla 13.9 Aislamiento del componente cíclico

(1) Período	(2) Ingreso	(3) Proyección de tendencia	(4) Índice estacional	(5) Norma estadística (3) X (4)	(6) Componente cíclico-irregular [(2)/(5)](100)	(7) Componente cíclico
1996-I	24	28.63	0.8029	22.99	104.39	
II	31	28.68	1.0270	29.45	105.26	
III	21	28.73	0.7650	21.98	95.54	103.78
IV	42	28.79	1.4050	40.45	103.83	105.63
1997-1	27	28.84	0.8029	23.16	116.58	108.13
II	32	28.89	1.0270	29.67	107.85	109.90
III	25	28.94	0.7650	22.14	112.92	105.64
IV	41	29.00	1.4050	40.75	100.61	99.60

(Continúa)

(1) Período	(2) Ingreso	(3) Proyección de tendencia	(4) Índice estacional	(5) Norma estadística (3) X (4)	(6) Componente cíclico-irregular [(2)/(5)](100)	(7) Componente cíclico
1998-I	20	29.05	0.8029	23.32	85.76	93.38
II	27	29.10	1.0270	29.89	90.33	88.65
III	18	29.15	0.7650	22.30	80.72	
IV	39	29.21	1.4050	41.04	95.03	

Se calcula la *norma estadística* multiplicando la proyección de tendencia por el índice estacional. A ésta se le denomina la *norma* porque representa los valores que ocurrirían si sólo estuvieran presentes la tendencia y las variaciones estacionales.

Los componentes cíclicos e irregulares se obtienen dividiendo los datos originales por la norma estadística, la cual contiene T y S. Es decir, debido a que $Y = T x S x C x I$

$$\frac{Y}{T \times S} = \frac{T \times S \times C \times I}{T \times S} = C \times I$$

Luego, los resultados se multiplican por 100 para expresar la respuesta en forma de porcentaje como se mostró en la columna 6) de la tabla 13.9. Los valores de la columna 6) contienen tanto componentes cíclicos como irregulares. El último se elimina tomando un promedio móvil de cuatro períodos, dejando sólo el factor cíclico. Esto se hace en la columna 7). Los valores finales de la columna 7) representan los niveles reales de ingresos de la señorita Spaniel para esos períodos como porcentaje de la tendencia.

Se nota que si se utilizan los datos anuales, por definición no se tendrán en cuenta las variaciones estacionales. El índice estacional (como se encontró en la columna 4) de la tabla 13.9, por ejemplo) sería innecesario. Los valores de la serie de tiempo constarían de:

$$Y = T \times C \times I$$

Los componentes C e I se encontrarían directamente al dividir sólo por los valores de tendencia:

$$\frac{Y}{T} = \frac{T \times C \times I}{T} = C \times I$$

C. Variación irregular

Al aislar los otros tres componentes de una serie de tiempo, se necesita decir poco sobre las variaciones irregulares. Es suficiente con decir que con frecuencia es posible suavizarlas y eliminarlas de manera efectiva utilizando un promedio móvil, tal como se efectuó para la columna 7) de la tabla 13.9.

Ejercicios de la sección

10. Las exportaciones trimestrales en miles de dólares de accesorios para tubería hacia los países de la costa del pacífico por parte de International Metals, Inc., se presentan a continuación. Calcule e interprete los índices estacionales para cada trimestre

1995		1997	
I	12	I	10
II	15	II	15
III	18	III	14
IV	26	IV	25

(Continúa)

1996		1998	
I	15	I	12
II	18	II	14
III	21	III	15
IV	36	IV	25

11. Los datos trimestrales para el número de clientes de Eastern Electronics se presentan a continuación. Compare la recta de tendencia y los índices para cada trimestre.

1995		1996		1997		1998	
I	215	I	366	I	587	I	621
II	253	II	471	II	571	II	655
III	351	III	451	III	569	III	687
IV	398	IV	652	IV	588	IV	699

12. Los costos en cientos de dólares de las llamadas telefónicas internacionales realizadas por los fondos de inversión de Estados Unidos (USA Investment Funds) aparecen a continuación. Calcule e interprete los índices trimestrales.

1995		1996		1997		1998	
I	14	I	21	I	21	I	26
II	18	II	24	II	23	II	28
III	26	III	29	III	38	III	48
IV	15	IV	18	IV	21	IV	31

13. Desestacionalice los datos para los fondos de Inversión de Estados Unidos en el ejercicio anterior.

13.7 El uso de los números índice

En los estudios sobre las series de tiempo con frecuencia se comparan los datos en un período con los datos de un período diferente. Tales comparaciones deben hacerse cuidadosamente, ya que las condiciones económicas van cambiando con el paso del tiempo. Tales cambios dificultan el análisis de los datos comerciales o la interpretación de las variables económicas. Las comparaciones directas de un período de tiempo con el siguiente, con frecuencia se tornan engañosas.

El uso de números índice puede proporcionar, a quienes toman las decisiones, un panorama más preciso del comportamiento de las variables económicas a través del tiempo y hacer comparaciones a través de períodos más significativos. Un número índice relaciona un valor en un período de tiempo, denominado **período de base,** con un valor en otro período, denominado **período de referencia (o actual)**.

A. Índice de precios simple

Un **índice de precios simple** caracteriza la relación entre el precio de un producto o servicio en un *período base*, con el precio del mismo producto o servicio en el *período de referencia.*

> **Índice de precios simple** Indica el cambio relativo en el precio de un producto o servicio en el período de referencia, con respecto al período base.

Para calcular un índice simple se divide el precio del producto en el período de referencia por su precio en el período base y se multiplica por 100.

Índice de precios simple $$IP_R = \frac{P_R}{P_B} \times 100 \qquad [13.9]$$

Por ejemplo, si se desea determinar el índice de precios IP para el período de referencia 1995 y se selecciona 1990 como período de base, se tendría:

$$IP_{1995} = \frac{P_{1995}}{P_{1990}} \times 100$$

en donde IP es el índice de precios y P es el precio en los años respectivos.

Jack Nipp y su socio, Harry Tuck, poseen una planta empacadora de carne en Duluth. Los datos para sus tres artículos más populares aparecen en la tabla 13.10. Nipp le dice a Tuck que calcule un índice de precios simple para cada producto siendo 1995 el período base. Utilizando la fórmula [13.9], Tuck encuentra que los índices de precios para la carne en cada uno de los tres años son:

$$\begin{aligned} IP_{1995} &= \frac{P_{1995}}{P_{1995}} \times 100 = \frac{3.00}{3.00} \times 100 \\ &= 100 \\ IP_{1996} &= \frac{P_{1996}}{P_{1995}} \times 100 = \frac{3.30}{3.00} \times 100 \\ &= 110 \\ IP_{1997} &= \frac{P_{1997}}{P_{1995}} \times 100 = \frac{4.50}{3.00} \times 100 \\ &= 150 \end{aligned}$$

Tabla 13.10
Datos de Nipp y Tuck, Inc.

		Precio/Unidad		
Artículo	**Unidad**	**1995**	**1996**	**1997**
Res	1 libra	3.00	3.30	4.50
Cerdo	1 libra	2.00	2.20	2.10
Ternera	1 libra	4.00	4.50	3.64

Desde el año base de 1995 a 1996, el índice de precios incrementó de 100 a 110. Tuck puede por tanto concluir que el precio de la carne se incrementó en un 10%. Esto se calcula como la diferencia entre los dos números índice dividido por el número índice base. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{IP_{1996} - IP_{1995}}{IP_{1995}} &= \frac{110 - 100}{100} \\ &= 10\% \end{aligned}$$

De igual forma se puede concluir que un incremento del 50% ocurrió de 1995 a 1997.

$$\begin{aligned} \frac{IP_{1997} - IP_{1995}}{IP_{1995}} &= \frac{150 - 100}{100} \\ &= 50\% \end{aligned}$$

De igual forma, se puede concluir que un incremento del 40% en el precio se presentó desde 1996 hasta 1997 debido a que el índice de precios se incrementó en 40%. Sin embargo, este *no* es el caso. El incremento porcentual de 1996 a 1997 fue:

$$\frac{IP_{1997} - IP_{1996}}{IP_{1996}} = \frac{150 - 110}{110}$$
$$= 36.4\%$$

La diferencia del 40% entre los números índice en 1996 y 1997 se denomina el *incremento puntual porcentual*, no incremento porcentual.

Se observa que el índice de precios en el año base es siempre 100. Este será siempre el caso ya que el precio en el año base es el 100% de sí mismo.

Los índices para el cerdo y la ternera se calculan de forma similar y se muestran en la tabla 13.11. Se observa que el índice de 1997 para la ternera es menor que 100. Esto refleja el hecho de que los precios de la ternera en 1997 fueron menores de lo que fueron en el año base de 1995. Específicamente, los precios para la ternera descendieron en (100 – 91) / 100 = 9% de 1995 a 1997.

Tabla 13.11
Índices de precios para Nipp and Tuck Inc. (1995 = 100)

Artículo	1995	1996	1997
Res	$\frac{3.00}{3.00} \times 100 = 100$	$\frac{3.30}{3.00} \times 100 = 110$	$\frac{4.50}{3.00} \times 100 = 150$
Cerdo	$\frac{2.00}{2.00} \times 100 = 100$	$\frac{2.20}{2.00} \times 100 = 110$	$\frac{2.10}{2.00} \times 100 = 105$
Ternera	$\frac{4.00}{4.00} \times 100 = 100$	$\frac{4.50}{4.00} \times 100 = 112$	$\frac{3.64}{4.00} \times 100 = 91$

Ejemplo 13.5

Los precios mensuales para un galón de gasolina aparecen a continuación. Utilizando marzo como período de base, calcule los índices de precios. ¿Cuáles fueron los incrementos porcentuales de marzo a mayo, y de mayo a junio? ¿Cuál es el incremento puntual porcentual de mayo a junio?

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
1.79	1.82	1.96	2.01	2.10	2.25	2.15

Solución

Índices de precios (marzo = 100)			
Mes	**Índice**	**Mes**	**Índice**
Enero	$\frac{1.79}{1.96}(100) = 91.3$	Mayo	$\frac{2.10}{1.96}(100) = 107.1$
Febrero	$\frac{1.82}{1.96}(100) = 92.9$	Junio	$\frac{2.25}{1.96}(100) = 114.8$
Marzo	$\frac{1.96}{1.96}(100) = 100$	Julio	$\frac{2.15}{1.96}(100) = 109.7$
Abril	$\frac{2.01}{1.96}100) = 102.6$		

El incremento porcentual de marzo a mayo es:

$$\frac{107.1 - 100.0}{100.0} = 7.1\%$$

De mayo a junio el incremento porcentual es:

$$\frac{114.8 - 107.1}{107.1} = 7.2\%$$

y el incremento puntual porcentual es de 114.8 – 107.1 = 7.7%

Interpretación

El período de base reportará un índice de 100. Los períodos en los cuales los valores son menores que el año de base tendrán un índice menor que 100, y los períodos con valores superiores al del año base tendrán un índice por encima de 100.

B. Índices de precios agregativos

Con frecuencia se desea calcular un índice de precios para varios productos. Esto se denomina **índice de precios agregativo**. Las firmas que producen dos o más artículos se interesan en los índices agregativos. Hay muchas agencias del gobierno que registran gráficamente el comportamiento del consumidor. El Ministerio de Trabajo de Estados Unidos calcula el índice de precios al consumidor, el cual mide los precios relativos para una "canasta" típica de productos y servicios consumidos por el público en general.

El índice agregativo se calcula sumando el precio de los bienes individuales en el año de referencia y dividiendo por la suma de tales precios en el año de base. El resultado entonces se multiplica por 100.

Índice de precios agregativo $$IP_R = \frac{\Sigma P_R}{\Sigma P_B} \times 100 \qquad [13.10]$$

Utilizando los datos de Nipp and Tuck, se tiene que el índice agregativo de 1995 para los tres productos, manteniendo 1995 como período de base, es:

$$IP_{1995} = \frac{3.00 + 2.00 + 4.00}{3.00 + 2.00 + 4.00}(100) = 100.0$$

El índice para 1996 es:

$$IP_{1996} = \frac{3.30 + 2.20 + 4.50}{3.00 + 2.00 + 4.00}(100) = 111.1$$

Y para 1997 resulta:

$$IP_{1997} = \frac{4.50 + 2.10 + 3.64}{3.00 + 2.00 + 4.00}(100) = 113.8$$

Esto significa que en 1997 se necesitarían US$113.80 para comprar los que con US$100 se compraría en 1995.

C. Índice de precios agregativos ponderados

Por lo menos dos problemas surgen con el uso de los índices de precios agregativos. El primero es la forma arbitraria con la cual se expresan las unidades. Si Nipp and Tuck hubieran fijado el precio de la carne de res en US$1.50 por media libra, en lugar de US$3.00 por libra, el índice de precios hubiera sido completamente diferente. Segundo, los índices agregativos tal como se calculan, no tienen en cuenta el hecho de que algunos productos se venden en cantidades mayores que otros productos menos populares. No se da consideración a las cantidades correspondientes de cada producto que se vende.

Por ejemplo, el índice agregativo calculado para Nipp and Tuck da la misma importancia o peso a la carne de res que a la de cerdo, aunque los clientes hayan comprado dos veces más carne de res. Por estos motivos se puede querer calcular un **índice de precios ponderado.** Tal cálculo asigna ponderaciones diferentes a los precios individuales. Estas ponderaciones se establecen para tener en cuenta las cantidades vendidas de cada producto. Esto proporciona un reflejo más exacto del costo verdadero de la canasta típica del consumidor.

Las cantidades seleccionadas como ponderaciones pueden tomarse del número de unidades vendidas en: 1) el período base o en 2) el período de referencia. Dos índices comunes son el índice de Laspeyres y el índice de Paasche. El índice de Laspeyres utiliza cantidades vendidas en el año de base como ponderaciones, el índice de Paasche se basa en las cantidades vendidas en el año de referencia como ponderaciones. Cada procedimiento tiene sus propias ventajas y desventajas.

El **índice de Laspeyres** utiliza las ponderaciones del **período base** (cantidades) en su cálculo. El fundamento es que tales cantidades no cambiarán de un cálculo al siguiente permitiendo por tanto comparaciones más significativas con el tiempo.

> **Índice de Laspeyres** Un índice de precios agregativo ponderado que utiliza las cantidades vendidas en el período base como factor de ponderación.

Para ilustrar, se consideran los datos para Nipp and Tuck de la tabla 13.12, la cual incluye también las cantidades vendidas para cada producto. El índice de Laspeyres es

Índice de Laspeyres

$$L = \frac{\Sigma(P_R \times Q_B)}{\Sigma(P_B \times Q_B)} \times 100 \qquad [13.11]$$

en donde P_R es el precio en el período de referencia, y P_B y Q_B son el precio y las cantidades vendidas en el período seleccionado como base.

Tabla 13.12
Nipp and Tuck, Inc.

		Precio/Unidad			Cantidad vendida (100's lb)		
Artículo	**Unidad**	**1995**	**1996**	**1997**	**1995**	**1996**	**1997**
Res	1 libra	3.00	3.30	4.50	250	320	350
Cerdo	1 libra	2.00	2.20	2.10	150	200	225
Ternera	1 libra	4.00	4.50	3.64	80	90	70

Tabla 13.13
Índice de Laspeyres para Nipp and Tuck (1995 = 100)

	Precio			Cantidades	$P_R \times Q_B$		
Artículo	**1995**	**1996**	**1997**	**de 1995**	$P_{95}Q_{95}$	$P_{96}Q_{95}$	$P_{97}Q_{95}$
Carne de Res	3.00	3.30	4.50	250	750	825	1,125.0
Cerdo	2.00	2.20	2.10	150	300	330	315.0
Ternera	4.00	4.50	3.64	80	320	360	291.2
					1,370	1,515	1,731.2

El numerador utiliza Q_B, las cantidades de cada artículo en el año base. La tabla 13.13 muestra los cálculos necesarios para el índice de Laspeyres utilizando 1995 como año de base. El numerador para L se determina multiplicando primero cada precio por las cantidades vendidas en el período base de 1995. Luego el denominador se determina multiplicando el precio en el año base por la cantidad en dicho año. El índice para 1995:

$$L_{1995} = \frac{\Sigma(P_{1995} \times Q_{1995})}{\Sigma(P_{1995} \times Q_{1995})}(100)$$
$$= \frac{1,370}{1,370}(100) = 100$$

El índice para 1996 utiliza los precios en el año de referencia (1996) y las cantidades en el año base (1995) para el numerador:

$$L_{1996} = \frac{\Sigma(P_{1996} \times Q_{1995})}{\Sigma(P_{1995} \times Q_{1995})}(100)$$
$$= \frac{1,515}{1,370}(100)$$
$$= 110.58$$

El numerador para 1997 utiliza precios en 1997 y cantidades en 1995:

$$L_{1997} = \frac{\Sigma(P_{1997} \times Q_{1995})}{\Sigma(P_{1995} \times Q_{1995})}(100)$$
$$= \frac{1,731.2}{1,370}(100)$$
$$= 126.36$$

La interpretación del índice de Laspeyres es como la de los índices anteriores. De 1995 a 1997, el precio de la canasta para estos tres artículos se incrementó en un 26.36%. Gastaría US$126.36 en 1997 para comprar lo que con US$100 compraba en 1995. O de manera alterna, se necesitaría US$1.26 en 1997 para comprar lo que se compraba con US$1.00 en 1995.

Vale la pena notar que el denominador es el mismo en los tres años: el índice de Laspeyres siempre utiliza cantidades del período de base.

Por otra parte, el **índice de Paasche** utiliza como ponderaciones las cantidades vendidas en cada uno de los varios años de referencia. Esto tiene la ventaja de que el índice se basa en los patrones de comportamiento del consumidor corriente. A medida que los consumidores cambian sus hábitos para comprar, estos cambios en los gustos del consumidor se reflejan en el índice. Los bienes que ya no atraen el interés de los consumidores, como BUGGY WHIPS y los sombreros de copa, no reciben mucha consideración. No obstante, utilizar diferentes cantidades hace posible atribuir toda diferencia en el índice a los cambios en los precios.

Índice de Paasche Un índice de precios agregativo ponderado que utiliza como factor de ponderación cantidades vendidas en el período de referencia.

Su cálculo es un poco más dispendioso que el de Laspeyres:

Índice de Paasche $$P = \frac{\Sigma(P_R \times Q_R)}{\Sigma(P_B \times Q_R)} \times 100 \qquad [13.12]$$

Las cantidades para los años de referencia aparecen tanto en el numerador como en el denominador. La tabla 13.14 proporciona el cálculo necesario para el índice de Paasche, utilizando los datos de Nipp and Tuck, con 1995 como año base. Primero se multiplican los precios y las cantidades para todos los tres años para obtener $P_R X Q_R$, lo cual

Tabla 13.14
Índice de Paasche para Nipp and Tuck (1995 = 100)

	1995		1996		1997	
Artículo	P	Q	P	Q	P	Q
Carne de res	3.00	250	3.30	320	4.50	350
Cerdo	2.00	150	2.20	200	2.10	225
Ternera	4.00	80	4.50	90	3.64	70

$P_{95}Q_{95}$	$P_{96}Q_{96}$	$P_{97}Q_{97}$	$P_{95}Q_{96}$	$P_{95}Q_{97}$
750	1,056	1,575.0	960	1.050
300	440	472.5	400	450
320	405	254.8	360	280
1,370	1,901	2,302.3	1,720	1,780

se utiliza en el numerador. También necesitamos el precio en el año base, 1995, multiplicado por la cantidad para cada año de referencia y obtener así P_B X Q_R, que se utiliza en el denominador. El índice de Paasche para 1995 es:

$$P_{1995} = \frac{\Sigma(P_{95} \times Q_{95})}{\Sigma(P_{95} \times Q_{95})}(100)$$
$$= \frac{1{,}370}{1{,}370}(100) = 100$$

Para 1996 es

$$P_{1996} = \frac{\Sigma(P_{96} \times Q_{96})}{\Sigma(P_{95} \times Q_{96})}(100)$$
$$= \frac{1{,}901}{1{,}720}(100) = 110.5$$

Para 1997 es

$$P_{1995} = \frac{\Sigma(P_{97} \times Q_{97})}{\Sigma(P_{95} \times Q_{97})}(100)$$
$$= \frac{2{,}302.3}{1{,}780}(100) = 129.3$$

La interpretación usual se aplica.

El índice de Laspeyres requiere los datos de cantidad para un solo año y es más fácil de calcular. Por tanto, se utiliza con más frecuencia que el de Paasche. Como siempre se utilizan las cantidades del período de base, se permiten con el tiempo más comparaciones significativas.

Sin embargo, el índice de Laspeyres tiende a sobreponderar los bienes cuyos precios se incrementan. Esto ocurre debido a que el incremento en el precio reducirá las cantidades vendidas, pero la cantidad menor no se reflejará en el índice de Laspeyres porque utiliza las cantidades del año base.

Ejemplo 13.6

El Salón Dippy Doo Hair está considerando ajustar los precios de sus servicios. Harriet Follicle, gerente de Dippy Doo, desea calcular los índices de Laspeyres y de Paasche utilizando estos datos sobre los precios y el número de servicios prestados. Se toma como período base el mes de enero.

	Precio			Cantidad		
	Enero	**Febrero**	**Marzo**	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**
Champú	US$10	US$12.00	US$16.50	20	22	25
Corte de cabello	8	10.50	9.50	25	20	25
Peinado	12	13.50	14.00	30	31	33

Solución

El índice de Laspeyres se basa en la siguiente tabla:

	Precio			Cantidad	$P_R \times Q_{Enero}$		
	Enero	Febrero	Marzo	en enero	Enero	Febrero	Marzo
Champú	US$10	US$12.00	US$16.50	20	200	240.0	330.0
Corte de cabello	8	10.50	9.50	25	200	262.5	237.5
Peinado	12	13.50	14.00	30	360	405.0	420.0
					760	907.5	987.5

$$
\begin{aligned}
L_{\text{Ene}} &= \frac{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}(100) \\
&= \frac{760}{760}(100) \\
&= 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\text{Feb}} &= \frac{\Sigma(P_{\text{Feb}} \times Q_{\text{Ene}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}(100) \\
&= \frac{907.5}{760}(100) \\
&= 119.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\text{Mar}} &= \frac{\Sigma(P_{\text{Mar}} \times Q_{\text{Ene}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}(100) \\
&= \frac{987.5}{760}(100) \\
&= 129.9
\end{aligned}
$$

El índice de Paasche requiere otro conjunto de cálculos.

	Enero		Febrero		Marzo	
	P	**Q**	**P**	**Q**	**P**	**Q**
Champú	10	20	12.00	22	16.50	25
Corte de cabello	8	25	10.50	20	9.50	25
Peinado	12	30	13.50	31	14.00	33

Precio por cantidad				
$P_{Ene}Q_{Ene}$	$P_{Feb}Q_{Feb}$	$P_{Mar}Q_{Mar}$	$P_{Ene}Q_{Feb}$	$P_{Ene}Q_{Mar}$
200	264.0	412.5	220	250
200	210.0	237.5	160	200
360	418.5	462.0	372	396
760	892.5	1,112.0	752	846

$$
\begin{aligned}
P_{\text{Ene}} &= \frac{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Ene}})}(100) \\
&= \frac{760}{760}(100) \\
&= 100
\end{aligned}
$$

$$P_{\text{Feb}} = \frac{\Sigma(P_{\text{Feb}} \times Q_{\text{Feb}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Feb}})}(100)$$
$$= \frac{892.5}{752}(100)$$
$$= 118.7$$
$$P = \frac{\Sigma(P_{\text{Mar}} \times Q_{\text{Mar}})}{\Sigma(P_{\text{Ene}} \times Q_{\text{Mar}})}(100)$$
$$= \frac{1,112}{846}(100) = 131.4$$

Interpretación

Los dos índices generan resultados diferentes. Se basan en sistemas de ponderación distintos. Sin embargo, es claro que un incremento en los precios por parte de Dippy Doo es poco sabio. Los precios han sido incrementados en un 29.9%, de acuerdo con el índice de Laspeyres, y 31.4% de acuerdo con el índice de Paasche en tan sólo tres meses.

Como se expresó anteriormente, el índice de Laspeyres tiende a sobreponderar los bienes cuyos precios aumentan, debido a que este incremento en el precio va acompañado de una reducción en la cantidad, que no se ve reflejada en el índice de Laspeyres el cual utiliza cantidades con base fija como ponderación. Por otra parte, el índice de Paasche tiende a sobreponderar los productos cuyos precios bajan. En un esfuerzo por compensar este hecho, el **índice ideal de Fisher** se sugiere en algunas ocasiones. Este índice combina los índices de Laspeyres y de Paasche encontrando la raíz cuadrada de su producto:

$$F = \sqrt{L \times P}$$

La interpretación del índice de Fisher está sujeta a discusión. Por este motivo, no se utiliza ampliamente.

La tabla 13.15 proporciona una breve comparación de las ventajas y desventajas de los índices de Laspeyres y de Paasche.

Tabla 13.15
Ventajas y desventajas relativas de los índices de Laspeyres y de Paasche

	Ventajas	Desventajas
Laspeyres	Requiere datos de cantidad para un solo período. Por tanto: 1) los datos se obtienen más fácilmente y 2) se puede hacer una comparación más significativa debido a que los cambios se pueden atribuir a los movimientos en precios.	Pondera los productos cuyos precios aumentan. No refleja los cambios en los patrones de compra a través del tiempo.
Paasche	Refleja los cambios en los hábitos de compra debido a que utiliza los datos de cantidad para cada período de referencia.	Requiere datos de cantidad para cada año; estos datos con frecuencia son difíciles de obtener. Debido a que se utilizan cantidades diferentes, es imposible atribuir las diferencias en el índice sólo a los cambios en precio. Sobrepondera los productos cuyos precios disminuyen.

13.8 Índices específicos

Numerosas agencias del gobierno así como el Sistema Federal de Reservas (el cual no es parte del gobierno federal) y la empresa privada calculan diferentes índices para una variedad de efectos. El uso de un índice específico depende de quién está calculándolo y qué factores tienen en cuenta en su formulación. Quizá la serie de índices más conocida es el **índice de precios al consumidor**.

A. Índice de precios al consumidor

El índice de precios al consumidor (IPC) es reportado mensualmente por parte de la Agencia de Estadísticas Laborales (*Bureau of Labor Statistics* – BLS) del Ministerio de Trabajo de los Estados Unidos. Se presentó por primera vez en 1914, como un medio para determinar si los salarios de los trabajadores industriales estaban acorde con las presiones de la inflación que se originó por la Primera Guerra Mundial. Antes de 1978, sólo había un IPC. Esta medida tradicional reflejó los cambios en los precios de una canasta típica fija de aproximadamente 400 productos y servicios adquiridos usualmente por los trabajadores urbanos "corrientes" y de oficina. Comprendía aproximadamente el 40% de la población total de la nación.

En enero de 1978, la agencia de estadísticas laborales comenzó a publicar un índice más completo, el índice de precios al consumidor para todos los consumidores urbanos. Se le denomina IPC-U, mientras que el índice anterior es el ICP-W. El nuevo IPC-U comprende cerca del 80% de la población e incluye alrededor de 3,000 productos de consumo que van desde los productos básicos, como alimentos, vestuario y vivienda, hasta provisiones para gastos en educación y en entretenimiento. En 1988 ambas series de IPC cambiaron su base de 1967 a 1982-1984.

Tanto el IPC-W como el IPC-U emplean un sistema de ponderación para los tipos de productos y servicios que los consumidores adquieren. Por ejemplo, al alimento se le asigna una ponderación o medida de importancia relativa de aproximadamente 18, mientras que a la vivienda se le da uno de 43. La atención médica y el entretenimiento reciben cada uno una ponderación de 5. Las ponderaciones totales para todos los bienes suman 100. Las ponderaciones sobre estos productos se corrigen aproximadamente cada 10 años. De esta forma, el IPC-W y el IPC-U son similares para el índice de Laspeyres. Técnicamente, el IPC difiere levemente de un índice de Laspeyres verdadero porque el sistema de ponderación utilizado por el IPC no se revisa al mismo tiempo que el índice se cambia de base. Por tanto, el IPC algunas veces se le denomina *índice de precios agregados con ponderación fija*.

El IPC es altamente útil para medir la inflación, medir los cambios en valores monetarios eliminando el impacto de los cambios en el precio, así en un grado limitado sirviendo como índice del costo de vida. Incluso se puede utilizar como instrumento para determinar los incrementos en los beneficios de seguridad social y las negociaciones salariales en los contratos laborales. Sus múltiples usos se analizarán de forma más completa en la siguiente sección.

B. Otros índices

El **índice de precios al productor IPP** (anteriormente el índice de precios al mayorista) también se publica mensualmente por parte de la agencia de estadísticas laborales. Indica los cambios en los precios de los productos de los mercados primarios para las materias primas utilizadas en fabricación.

El **índice de producción industrial** lo presenta el sistema de Reserva Federal. No es una medida monetaria, pero presenta los cambios en el volumen de producción industrial de la nación. El período de base actualmente es 1977.

Existen numerosos índices en el mercado de valores. Quizá el más conocido es el **índice de Dow Jones**. Este índice abarca una selección de 30 acciones industriales para representar casi 1,800 acciones transadas en la Bolsa de Valores de Nueva York. El **índice agregativo de Standard & Poor's** de 500 acciones industriales también es ampliamente observado.

13.9 Usos del IPC (Índice de precios al consumidor)

Los movimientos en el IPC tienen un mayor impacto en muchas condiciones comerciales y en consideraciones económicas. El IPC con frecuencia se ve como una medida de la inflación en la economía. Las tasas anuales de inflación se miden por el cambio porcentual en el IPC de un año al siguiente. El índice de inflación de un año a otro es:

$$\frac{IPC_t - IPC_{t-1}}{IPC_{t-1}} \times 100$$

en donde IPC_t es el IPC en el período t, y el IPC_{t-1} es el IPC en el período anterior.

La tabla 13.16 muestra el IPC de 1986 a 1997 utilizando 1982-1984 como período de base. Las cifras se tomaron del *Federal Reserve Bulletin,* publicado mensualmente por Board of Governors del sistema de Reservas Federales. La tasa de inflación para 1987 sería por ejemplo:

$$\frac{113.6 - 109.6}{109.6}(100) = 3.6\%$$

Tabla 13.16

IPC e índice de inflación

Año	ÍPC	Índice de inflación (%)	Año	IPC	Índice de inflación (%)
1986	109.6		1992	140.3	3.0
1987	113.6	3.6	1993	145.3	3.6
1988	118.3	4.1	1994	148.2	1.9
1989	124.3	5.1	1995	152.4	2.8
1990	127.2	2.3	1996	156.9	3.0
1991	136.2	7.1	1997	158.6	1.1

Los cambios en el IPC también se toman como medida del costo de vida. Sin embargo se argumenta que tal práctica es cuestionable. El IPC no refleja ciertos costos o gastos tales como impuestos, ni tampoco explica los cambios en la calidad de los productos disponibles. Además, el IPC no incluye algunos otros artículos valiosos en la estructura económica, como el aumento en el tiempo de esparcimiento por parte del trabajador promedio o las mejoras en la diversidad de bienes de los cuales pueden escoger los consumidores. Sin embargo, el IPC con frecuencia se menciona en la prensa popular como medida del costo de vida.

El IPC con frecuencia es la base de los ajustes en las tasas salariales, los pagos del Seguro Social, e incluso en los contratos de alquiler y arrendamiento con opción de compra. Muchos contratos laborales contienen ajustes del costo de vida (COLAs) que estipulan que un incremento en el IPC de una cantidad previamente acordada automáticamente disparará el alza en los niveles salariales de los trabajadores.

El IPC también puede utilizarse para **deflactar** una serie de tiempo. Deflactar una serie elimina el efecto de los cambios en el precio y expresa la serie en dólares constantes. Con frecuencia los economistas diferencian entre los dólares nominales (o corrientes) y los dólares reales (*o constantes*). Si una serie de tiempo tal como el ingreso anual durante varios años, se expresa en términos de dólares de 1982, se dice que dicho ingreso es un ingreso real. Se supone que el ingreso en dinero (nominal) es como el que se muestra en la tabla 13.17. Por ejemplo, en 1994 en realidad se ganó US$ 42,110. Parecería que las cosas estuvieran bien financieramente. El ingreso incrementó de US$42,110 a US$53,500 durante dicho período. Sin embargo, los precios también han ido subiendo. Para obtener una medida de cuánto se ha incrementado el ingreso en términos reales, se debe deflactar el ingreso corriente. Esto se logra dividiendo su ingreso en dinero por el IPC y multiplicando por 100. El resultado es su ingreso real expresado en dólares constantes (reales) de un año base dado.

Tabla 13.17
Ingreso monetario y real para los años seleccionados

Año	Ingreso monetario	IPC (1982-84 = 100)	Ingreso real
1994	US$ 42,110	148.2	28,414
1995	46,000	152.4	30,183
1996	49,800	156.9	31,739
1997	53,500	158.6	33,732

Ingreso real Es el poder adquisitivo del ingreso monetario.

$$\text{Ingreso real} = \frac{\text{Ingreso monetario}}{\text{IPC}} \times 100$$

Ganó US$42,110 en 1994, pero como se observa en la tabla 13.17, equivalía tan sólo a US$28,414 en precios de 1982-1984. Es decir, manteniendo estos precios constantes a nivel de 1982-1984, se está ganando un equivalente de tan sólo US$28,414

Los economistas comúnmente deflactan el producto interno bruto (PIB) para obtener una medida del incremento de la producción real de la nación. El **producto interno bruto** es el valor monetario de todos los bienes y servicios finales producidos por una economía. Al deflactar el PIB con el tiempo, los economistas eliminan todo incremento debido a la inflación de los precios, y llegan a una medida del incremento verdadero en la producción de los bienes y servicios disponibles para el consumo.

PIB real Medida del valor de la producción de la nación en dólares constantes en algún período base; omite toda fluctuación o variación debida a los precios cambiantes.

$$\text{PIB real} = \frac{\text{PIB nacional}}{\text{IPC}} \times 100$$

Ejercicios de la sección

14. Los costos de los ingredientes utilizados por Hobson Industries para fabricar dulces se presentan aquí para los meses seleccionados. Desarrolle y explique un índice de precios simple para cada ingrediente, utilizando el mes de mayo como período base.

	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
Azúcar	US$5.12	US$5.89	US$6.12	US$6.03	US$6.29
Base de goma	1.15	1.20	2.03	1.96	1.84
Aceite de maíz	0.97	1.04	1.09	1.15	1.25

15. Los precios minoristas para la sopa y las nueces se dan a continuación. Calcule el índice de precios agregativo para ambos productos, utilizando 1995 como período base. Interprete los resultados.

	1993	1994	1995	1996	1997
Sopa	US$2.03	US$2.12	US$2.35	US$2.45	US$2.50
Nueces	0.79	0.83	0.94	1.02	1.15

16. Durante los últimos tres años en State University, la dieta de Sammy no ha sufrido cambios. Los precios y cantidades para los tres productos que constituyen las principales harinas de Sammy se expresan más adelante. Calcule y compare el índice de Laspeyres y el índice de Paasche con 1997 como año base.

	Precios			Cantidades		
	1996	1997	1998	1996	1997	1998
Pizza	US$3.00	US$4.50	US$5.00	500	700	850
Bebida	4.00	4.50	4.50	300	350	400
Galletas Pretzel	1.50	2.50	3.00	100	100	90

Problemas resueltos

1 *a.* Ralph Rhodes desea utilizar las técnicas de suavizamiento para promediar y pronosticar los niveles de inversión de capital que su empresa ha realizado durante los últimos años. Calculó promedios móviles tanto para tres como para cuatro años. El promedio móvil de cuatro años debe centrarse de manera subsiguiente debido a que contiene un número par de términos.

Año	Inversión (US$1,000) (Y)	PM de tres períodos	PM de cuatro períodos	PM de cuatro períodos centrado
1985	73.2			
1986	68.1	71.37		
1987	72.8	72.27	72.50	72.33
1988	75.9	73.50	72.15	72.30
1989	71.8	72.33	72.45	71.85
1990	69.3	69.70	71.25	70.20
1991	68.0	68.27	69.15	68.91
1992	67.5	68.47	68.68	69.16
1993	69.9	70.20	69.65	70.56
1994	73.2	72.80	71.48	72.15
1995	75.3	73.80	72.83	
1996	72.9			

Utilizando el PM de tres períodos, 73.8 es la estimación del promedio a largo plazo alrededor del cual todas las observaciones tienden a caer y como tal, es el pronóstico para todo período futuro. El PM de cuatro períodos produce un estimado de 72.15.

2. Durante los últimos años, las condiciones del negocio para Rainbow Enterprises han sido difíciles. El CEO ha recolectado los totales trimestrales del número de empleados que han sido despedidos durante los últimos cuatro años.

a. El CEO quisiera proyectar el número de despidos para el primer y segundo trimestres de 1998, utilizando un análisis de tendencia lineal.

Período	Despidos (Y)	$t(X)$	XY	X^2
1994-I	25	1	25	1
II	27	2	54	4
III	32	3	96	9
IV	29	4	116	16
1995-I	28	5	140	25
II	32	6	192	36
III	34	7	238	49
IV	38	8	304	64
1996-I	35	9	315	81
II	37	10	370	100
III	37	11	407	121
IV	39	12	468	114
1997-I	38	13	494	169
II	42	14	588	196
III	44	15	660	225
IV	45	16	720	256
	562	136	5,187	1,496

$$SCx = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}$$

$$= 1{,}496 - \frac{(136)^2}{16}$$

$$= 340$$

$$SCxy = \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n}$$

$$= 5.187 - \frac{(136)(562)}{16}$$

$$= 410$$

$$b_1 = \frac{410}{340}$$

$$= 1.206$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$$

$$= 35.13 - 1.206(8.5)$$

$$= 24.88$$

Para el primer trimestre de 1998,

$$\hat{Y}_t = 24.88 + 1.206(17)$$

$$= 45.38$$

Para el segundo trimestre de 1998,

$$\hat{Y}_t = 24.88 + 1.206(18)$$
$$= 46.59$$

b. El CEO ahora desea desarrollar los índices estacionales para el número de despidos.

Período	Despidos	PM centrado	Razón con PM
1994-I	25		
II	27		
III	32	28.625	1.1179
IV	29	29.625	0.9789
1995-I	28	30.500	0.9180
II	32	31.875	1.0039
III	34	33.875	1.0037
IV	38	35.375	1.0742
1996-I	35	36.375	0.9622
II	37	36.875	1.0034
III	37	37.375	0.9900
IV	39	38.375	1.0163
1997-I	38	39.875	0.9530
II	42	41.500	1.0120
III	42		
IV	45		

El PM de cuatro períodos (debido a que se utilizan datos trimestrales) se calcula y se centra, seguido por la razón con PM. La razón media con PM se determina luego para cada trimestre. Debido a que las medias suman 4.0111, la razón de normalización es 4/4.011 = 0.997. Los índices estacionales se obtienen multiplicando cada razón media de PM por 0.997.

	1994	1995	1996	1997	Media	Índices estacionales
I		0.9180	0.9622	0.9530	0.9444	0.9416
II		1.0039	1.0034	1.0120	1.0064	1.0034
III	1.1179	1.0037	0.9900		1.0372	1.0341
IV	0.9789	1.0742	1.0163		1.0231	1.0200
					4.0111	3.9991 ≈ 4

c. El CEO de Rainbow desea determinar los despidos si se eliminan los factores estacionales. Los niveles desestacionalizados de despidos para 1994-I y 1994-II son respectivamente,

$$\frac{25}{0.9416} = 26.55 \text{ empleados}$$

y

$$\frac{27}{1.0034} = 26.91 \text{ empleados}$$

d. Los ejecutivos de Rainbow consideran que los movimientos generales en su ciclo de negocios influyen en la necesidad de despedir empleados. Deciden calcular los componentes cíclicos para cada período de tiempo.

(1) Período de tiempo	(2) Despidos	(3) Proyección de tendencias	(4) Índice estacional	(5) Norma estadística	(6) Componente-irregular	(7) Componente cíclico
1994-I	25	26.08	0.9416	24.56	101.80	
II	27	27.29	1.0034	27.38	98.61	
III	32	28.49	1.0341	29.46	108.62	100.5
IV	29	29.70	1.0200	30.29	95.73	99.61
1995-I	28	30.90	0.9416	29.10	96.24	98.73
II	32	32.11	1.0034	32.22	99.32	99.01
III	34	33.32	1.0341	34.46	98.68	101.51
IV	38	34.52	1.0200	35.21	107.92	102.55
1996-I	35	35.73	0.9416	33.64	104.03	102.01
II	37	36.93	1.0034	37.06	99.85	100.06
III	37	38.14	1.0341	39.44	93.81	98.15
IV	39	39.35	1.0200	40.14	97.17	97.64
1997-I	38	40.55	0.9416	38.18	99.52	98.34
II	42	41.76	1.0034	41.90	100.23	99.33
III	44	42.96	1.0341	44.42	99.04	
IV	45	44.17	1.0200	45.05	99.88	

Toman un PM de cuatro períodos de los valores cíclicos irregulares para producir justo el componente cíclico en la columna (7). Para 1994-III, el despido de 32 empleados representa el 100.5% de la tendencia.

e. Si los despidos en 1998-I son 46, ¿cuántos despidos puede esperar Rainbow para 1998? Debido a que el primer trimestre representa típicamente un período en el cual los despidos son de tan sólo 94.16% del promedio para todo el año, los despidos trimestrales basados en 46 para 1998-I serían

$$\frac{46}{0.9416} = 48.85$$

Para todo el año, los despidos serían de un total de (48.85)(4) = 195 empleados.

f. En un esfuerzo final por controlar el número de despidos necesarios, los ejecutivos de Rainbow desean obtener cifras desestacionalizadas para cada período de tiempo. Ellos las obtienen dividiendo el número real de despidos por el índice estacional apropiado (trimestralmente). Una lista parcial de los resultados aparece a continuación.

Año-trimestre	Despidos	Índice estacional	Despidos desestacionalizados
1994-IV	25	0.9416	26.55
II	27	1.0034	26.91
III	32	1.0341	30.94
IV	29	1.0200	28.43
1995-I	28	0.9416	29.74

3. **Índices de Laspeyres y de Paasche**. Su empresa fabrica tres grados de lubricantes. Los precios y cantidades vendidas para cada uno son las siguientes:

	Precios			Cantidades		
Grado	Oct.	Nov.	Dic.	Oct.	Nov.	Dic.
A	US$3.00	US$3.30	US$4.00	250	320	350
B	2.00	2.10	2.10	150	200	225
C	4.00	4.50	3.64	80	90	70

a. Calcule el índice de Laspeyres con el mes de octubre como base.

$P_{Oct}Q_{Oct}$	$P_{Nov}Q_{Oct}$	$P_{Dic}Q_{Oct}$
750	825	1,125.0
300	330	315.0
320	360	291.2
1,370	1,515	1,731.2

$$L = \frac{\Sigma(P_R \times Q_B)}{\Sigma(P_B \times Q_B)}(100)$$

Octubre:

$$L_{Oct} = \frac{1,370}{1,370}(100) = 100$$

Noviembre:

$$L_{Nov} = \frac{1,515}{1,370}(100) = 110.58$$

Diciembre:

$$L_{Dic} = \frac{1,731.2}{1,370}(100) = 126.4$$

b. Calcule el índice de Paasche con el mes de octubre como base

$P_{Oct} \times Q_{Oct}$	$P_{Nov} \times Q_{Nov}$	$P_{Dic} \times Q_{Dic}$	$P_{Oct} \times Q_{Nov}$	$P_{Oct} \times Q_{Dic}$
750	1,056	1,575.0	960	1,050
300	440	472.5	400	450
320	405	254.8	360	280
1,370	1,901	2,302.3	1,720	1,780

$$P = \frac{\Sigma(P_R \times Q_R)}{\Sigma(P_B \times Q_R)}(100)$$

Octubre:

$$P_{Oct} = \frac{1,370}{1,370}(100) = 100$$

Noviembre:

$$P_{\text{Nov}} = \frac{1{,}901}{1{,}720}(100) = 110.52$$

Diciembre:

$$P_{\text{Dic}} = \frac{2{,}302.3}{1{,}780}(100) = 129.34.$$

Lista de fórmulas

[13.1]	$Y_{t+1} = Y_t$	Modelo intuitivo de proyección
[13.2]	$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t$	Proyecta el valor en una serie de tiempo utilizando suavizamiento exponencial.
[13.3]	$CME = \dfrac{\Sigma(F_t - A_t)^2}{n - 1}$	Calcula el cuadrado medio del error.
[13.4]	$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t$	Estima la recta de tendencia
[13.5]	$SCx = \Sigma X^2 - \dfrac{(\Sigma X)^2}{n}$	Suma de cuadrados de X utilizada para calcular la recta de tendencia.
[13.6]	$SCxy = \Sigma XY - \dfrac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{n}$	Sumas de los productos cruzados *de X* y*Y* utilizadas para calcular la recta de tendencia.
[13.7]	$b_1 = \dfrac{SCxy}{SCx}$	Calcula la pendiente de la recta de tendencia
[13.8]	$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}$	Calcula el intercepto de la recta de tendencia.
[13.9]	$IP_R = \dfrac{P_R}{P_B} \times 100$	Un índice de precios simple; mide el cambio relativo en el precio de un solo producto o servicio desde el período de base hasta el período de referencia.
[13.10]	$IP_R = \dfrac{\Sigma P_R}{\Sigma P_B}(100)$	Un índice de precios agregativo; calcula el índice de varios productos o servicios.
[13.11]	$L = \dfrac{\Sigma(P_R \times Q_B)}{\Sigma(P_B \times Q_B)}(100)$	El índice de Laspeyres utiliza como ponderaciones las cantidades en el año de base.
[13.12]	$P = \dfrac{\Sigma(P_R \times Q_R)}{\Sigma(P_B \times Q_R)}(100)$	El índice de Paasche utiliza como ponderaciones cantidades en el año de referencia.

Ejercicios del capítulo

17. Cars-R-Us ha reportado ventas (en US$1,000s) durante los últimos tres años así:

Mes	1996	1997	1998	Mes	1996	1997	1998
Enero	17.2	18.1	16.3	Julio	24.2	23.9	22.7
Febrero	18.7	19.2	17.3	Agosto	25.7	26.2	25.0
Marzo	19.7	20.3	18.5	Septiembre	21.2	22.0	21.9
Abril	20.2	21.5	20.3	Octubre	19.3	18.0	17.3
Mayo	21.7	22.0	21.0	Noviembre	22.7	19.7	21.2
Junio	23.1	24.7	25.0	Diciembre	19.3	17.3	16.2

a. Grafique los datos. ¿Parece que hay alguna tendencia en los datos? ¿Hay alguna variación cíclica o estacional?

b. Calcule un promedio móvil de 12 meses. ¿Cuál componente o componentes reflejan estos valores?

18. Calcule los índices estacionales para cada mes utilizando los datos de Cars-R-Us del ejercicio anterior.

19. En el ejercicio 17, ¿cuáles son las cifras de ventas estacionales corregidas para los últimos seis meses de 1998?

20. En el ejercicio 17, ¿cuáles son los valores desestacionalizados para los últimos seis meses de 1998? ¿Cómo los interpretaría?

21. *Business Monthly* reportó recientemente el valor en dólares de los "beneficios extra" recibidos por los ejecutivos durante los últimos años. Estos datos no incluyen dicha porción de asistencia médica de los ejecutivos pagada por el patrono, y están corregidos según la inflación. Utilice el análisis de tendencia lineal para predecir el valor para el año 2000. ¿Qué tan bien explica el modelo la tendencia en los niveles de beneficio?

Año	Beneficio	Año	Beneficio
1980	US$3,200	1989	US$4,280
1981	3,640	1990	4,450
1982	3.850	1991	4.500
1983	3,700	1992	4,490
1984	3,920	1993	4,560
1985	3,880	1994	4,680
1986	3,950	1995	4,790
1987	4,100		
1988	4,150		

22. Los inventarios de Bake-O-Donuts durante los últimos dos años fueron:

Mes	1995	1996	Mes	1995	1996
Enero	US$87	US$95	Julio	US$80	US$83
Febrero	93	102	Agosto	73	79
Marzo	102	112	Septiembre	93	84
Abril	112	115	Octubre	102	89
Mayo	93	99	Noviembre	115	92
Junio	82	90	Diciembre	112	91

a. Utilice un promedio móvil de 12 períodos para eliminar las variaciones estacionales.

b. Calcule los índices estacionales.

c. ¿Cuáles son los niveles de existencias corregidos estacionalmente?

23. Mopeds, Inc., está preocupado por la caída en las ventas. Si las ventas mensuales caen por debajo de US$9,000 la oficina regional del noreste debe cerrarse. Según las cifras que aparecen a continuación, ¿es probable que esto ocurra dentro de los siguientes cinco meses? Las cifras están en miles.

					1996						
E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
18	17.3	16.9	18.1	16.8	16.3	15.1	14.5	14	14.5	14	13.1
					1997						
13.9	13.1	12.8	12.4	11.8	11.9	11.7	11.5	11.1	11.2	11.2	11.1

24. Utilizando los datos del ejercicio anterior, calcule los índices estacionales.

25. Utilizando los datos de Mopeds, Inc., ¿cuál es la fuerza de la relación entre las ventas y el tiempo? Represente la recta de tendencias para los datos reales.

26. Del modelo de regresión que calculó en el ejercicio sobre Mopeds, Inc., ¿cuál es el cambio mensual promedio en las ventas?

27. John Wolf considera que el suavizamiento exponencial con un valor α de 0.8 puede proyectar mejor las existencias del mes de septiembre para su empresa de suministros médicos. Su hermano y socio considera que un valor α de 0.4 debería utilizarse. ¿Cuál es el pronóstico en cada caso? ¿Quién está en lo cierto, con base en los valores que aparecen a continuación de existencias por mes?

Inventarios	E	F	M	A	M	J	J	A
(US$100)	41	48	37	32	45	43	49	38

28. El único carnicero del pueblo Three Finger Louis (Luis tres dedos), está preocupado sobre el volumen de clientes morosos que debe pasar cada mes a sus cuentas incobrables. A continuación aparecen las cantidades en dólares para tres años.

1995											
14.1	13.7	12.1	13.1	13.5	9.1	7.2	6.1	8.7	10.1	11.8	12.2
1996											
15.2	14.1	13.2	13.9	14.0	9.5	7.2	6.5	9.1	11.5	12.2	13.4
1997											
13.7	12.5	11.8	12.0	13.0	8.7	6.3	6.0	8.2	9.8	10.9	11.8

a. Represente gráficamente los datos. ¿El factor estacional parece existir? (Considere una "estación" como un mes).

b. Utilice un promedio móvil de 12 meses para suavizar la variación estacional.

c. Calcule los índices estacionales.

d. Desestacionalice los datos.

e. Represente gráficamente los datos originales y los datos desestacionalizados.

29. Packer Industries está preocupado porque las ventas pueden caer por debajo de US$100,000 en diciembre. Utilizando los datos que aparecen a continuación en miles de dólares, ¿cuál es su proyección? Primero represente gráficamente los datos.

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
42.7	57.3	68.3	76.8	84	88.1	90	90.1

30. *U.S. News & World Report* afirmó que las proyecciones realizadas por el Ministerio de Comercio de Estados Unidos para los ingresos medianos de los trabajadores de tiempo completo eran los siguientes

Año	Ingresos (miles de dólares)	Año	Ingresos (miles de dólares)
1990	24.28	2020	90.94
1995	30.26	2025	113.33
2000	37.71	2030	171.23
2005	47.00	2035	176.00
2010	58.56	2040	219.33
2015	73.00		

a. Represente gráficamente los datos

b. Calcule el modelo de tendencia

c. ¿Cuál es la proyección para el año 2050?

31. Milles Products registró las utilidades que aparecen en la tabla.

a. Utilice el suavizamiento exponencial para pronosticar las utilidades futuras. Primero, fije $\alpha = 0.2$, luego en 0.9.

b. ¿Qué valor α produce una estimación más confiable?

c. ¿Cómo hubiera podido conocer esto de antemano?

Semana	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Utilidades (US$1,000)	10	25	3	15	2	27	5

32. Los datos sobre el consumidor suministrados por el Ministerio de Comercio de Estados Unidos para el verano de 1998 revelaron lo siguiente:

		Precios		
	Unidad	**1996**	**1997**	**1998**
Carne de res	1 Libra	US$3.12	US$3.89	US$3.92
Leche	1 Galón	2.10	2.42	2.51
Pollo	1 Libra	1.95	2.10	2.12
Pan	1 Molde	0.99	0.89	1.12

Calcule e interprete el índice simple para cada producto utilizando 1996 como período base.

33. Dados los datos del problema anterior, calcule:

a. El incremento porcentual en el precio de cada producto para:

1996 a 1997

1996 a 1998

1997 a 1998

b. El incremento puntual porcentual para cada producto para:

1996 a 1997

1996 a 1998

1997 a 1998

34. A continuación se presentan los costos de la estadía de un solo día en el hospital. Utilice 1993 como año base y calcule el índice simple. Interprete el índice obtenido para 1990.

1990	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**
US$356	US$408	US$512	US$589	US$656	US$689

35. Sammy Studd desea comprar todo un guardarropa completo de ropa de atletismo para el verano. Él ha recolectado los datos que aparecen a continuación y se sorprende de cómo han cambiado los precios durante los últimos tres años. Calcule e interprete el índice de precios agregativo para los cuatro productos, utilizando 1996 como año base.

	1996	1997	1998
Zapatos	US$89.90	US$115.12	US$125.00
Sudaderas	52.50	65.50	75.50
Pantalonetas	25.75	35.95	45.90
Medias	12.10	10.00	9.50

36. Los precios de una nueva línea de muñecas de juguete producidas por The Krazy Kid Kollection aparecen a continuación. Utilizando 1994-1995 como período base, calcule un índice de precios simple para los tres juguetes:

	1994	1995	1996
Killer Joe	US$17.90	US$21.50	US$25.00
Pyro Phil	15.00	25.00	29.95
Maniac Mark	10.00	11.00	12.00

37. Bell Electronic desea analizar los cambios en los precios para tres de sus productos durante los últimos tres años. Aquí se proporcionan los datos necesarios:

	Precios			Cantidades		
Producto	**1996**	**1997**	**1998**	**1996**	**1997**	**1998**
A	US$10.00	US$15.50	US$20.00	150	170	160
B	3.00	5.00	7.50	55	68	120
C	69.00	75.00	75.00	100	90	85

38. Calcule e interprete los índices de Laspeyres y de Paasche utilizando 1996 como período base. Usando los datos del ejercicio anterior calcule el índice de Fisher.

39. Pam McGuire, director de operaciones de Columbia Records, compiló los siguientes datos sobre los costos de grabación y el número de veces que se utilizó cada artículo durante los últimos tres años para tres artículos que se utilizan comúnmente en el negocio de grabación.

	Costo por uso			Frecuencia de uso		
	1996	**1997**	**1998**	**1996**	**1997**	**1998**
Costos de estudio	US$120	US$145	US$165	30	35	37
Equipo de grabación	420	530	620	40	43	46
Acompañamiento	300	250	250	50	63	72

Sam O'Donnell, director de procedimientos estadísticos, debe calcular un índice de Laspeyres y un índice de Paasche, utilizando 1996 como base, y luego debe determinar la tasa en la cual se han incrementado los costos cada año bajo ambos índices, así como la tasa de inflación durante los tres años.

40. Del ejercicio 39, ¿cuál índice es el que probablemente mide mejor el incremento en los costos de Columbia? ¿Por qué? Sustente su respuesta.

41. Just Pizza compró las cantidades de ingredientes a los precios que aparecen en la siguiente tabla. Janet Jackson, gerente de Just Pizza, está preocupada por el incremento en los precios. Desarrolle los índices de Laspeyres y de Paasche para Janet, utilizando enero como base.

	Precio/Libra				Libras utilizadas (100's)			
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Queso	2.10	2.15	2.20	2.25	10	12	15	12
Peperoni	1.18	1.20	1.25	1.31	8	10	8	10
Salchichas	1.25	1.31	1.35	1.42	7	6	7	7

42. Utilizando los datos de Janet del ejercicio anterior, ¿el índice de Paasche muestra la tasa a la cual los precios incrementan o disminuyen?

Ejercicios por computador

Spark Industries ha estado experimentando una caída en las utilidades durante los últimos años. Mientras que el precio de sus productos ha permanecido estable, el número de empleados necesarios para mantener la producción ha presentado una tendencia alcista pronunciada, haciendo que los costos laborales incrementen dramáticamente.

Para refrenar esta tendencia indeseable, usted ha sido encargado de analizar los niveles de precios de Sparks y el número de empleados. Ingrese al archivo SPARK en su disco de datos. Contiene 50 observaciones de datos trimestrales para el precio minorista de su producto (PRICE) y para el número de empleados (EMPL).

Usted debe utilizar técnicas de suavizamiento para proyectar los precios futuros y proporcionar una descomposición completa de los datos de series de tiempo para los empleados. Prepare sus hallazgos en un reporte estadístico como se describe en el apéndice I.

PUESTA EN ESCENA

En la sección Escenario, a comienzos de este capítulo, se explicó cómo el señor Dickson utiliza el análisis estadístico en la toma de decisiones. Como propietario y CEO da una importancia considerable a la planeación cuidadosa y al tiempo de sus operaciones.

El señor Dickson le ha contratado como consultor estadístico externo para que le proporcione valiosa información sobre su negocio, la cual él considera será de gran utilidad en la formulación de planes futuros. Específicamente, su tarea es predecir las utilidades utilizando un promedio móvil de cuatro períodos con base en los datos que se presentan más adelante.

Además, usted debe comparar esta proyección a la obtenida a través del suavizamiento exponencial. El Sr. Dickson no ha especificado un valor α para la constante de suavizamiento y espera que usted determine cuál valor es óptimo.

Finalmente, las ventas de la empresa también son una gran preocupación para el Sr. Dickson. Dados los datos suministrados aquí, usted debe desarrollar e interpretar una recta de tendencia así como también descomponer las series de tiempo, desglosando cada componente individualmente. Presente su reporte final al Sr. Dickson en forma de reporte estadístico como se describe en el apéndice I. Incluya todos los resultados relevantes así como su interpretación.

Período de tiempo	Utilidades (US$00)	Ingresos (US$000)	Período de tiempo	Utilidades (US$00)	Ingresos (US$000)
1995-I	25	10	1997-I	32	25
II	29	12	II	28	20
III	24	15	III	33	26
IV	28	14	IV	31	32
1996-I	31	17	1998-I	24	34
II	27	19	II	35	38
III	24	17	III	28	41
IV	28	21	IV	25	45

Del escenario a la vida real

El Sr. Dickson, el propietario industrial mencionado en la sección Escenario a comienzos del capítulo, considera que los cambios en el clima económico global afectan los valores de sus utilidades y los ingresos por concepto de ventas. De hecho, podría investigar el grado en el que la economía en general afecta el valor de sus utilidades, ajustándolas a los cambios en el nivel de precios global, utilizando el IPC (índice de precios al consumidor) publicado por el Ministerio de Trabajo de Estados Unidos. También puede comparar sus niveles de ventas tanto con el producto interno bruto (PIB) como con las ventas finales de todos los productos terminados de Estados Unidos, utilizando los índices publicados por el Ministerio de Comercio de Estados Unidos.

Estos índices están disponibles en Internet. Para localizar los datos del IPC, se dirige hacia el sitio de estadísticas del Ministerio de Trabajo (*http:/stats.bls.gov:80/*). Una vez allí, se selecciona el área de "Data" (Datos). Luego se hace clic en "Most Requested Series" (Serie más solicitada). En la página siguiente, haga clic en "Overall Most Requested Series" (Series más solicitadas en total). La siguiente página permite seleccionar el índice, los años abarcados, y el formato de entrega de datos que se desee. Desplácese hacia abajo hacia el encabezado "Price Indexes" (Índice de precios) y seleccione IPC para todos los Consumidores Urbanos 1982-1984 = 100. Más adelante en esta página, escoja los años para su análisis, por ejemplo 1987-1997. Por último, en esa misma página, seleccione la tabla de su escogencia bajo el encabezado "Format" (Formato). Esto completa su solicitud de datos. Haciendo clic en "Retrieve" (Recuperar) se producen los datos del IPC que le interesan.

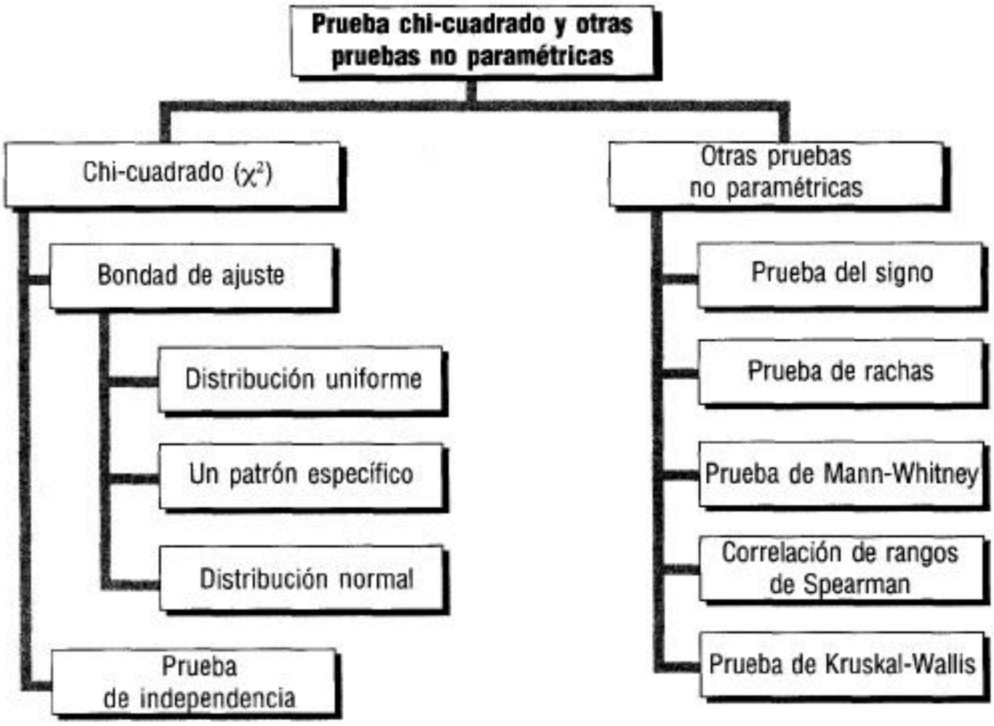
PIB y ventas finales de productos se encuentran en el sitio del Ministerio de Comercio (*http://www.doc.gov*). En el home page (página de presentación haga clic en "Commerce Web Sites (ordenados por agencia)". Luego haga clic en "Bureau of Economic Analysis – BEA (Agencia de Análisis Económico). Haga clic en "National". Desplácese hacia el encabezado "Historical time series" (Serie de tiempo histórico) y haga clic en "Tables" (Tablas). Allí se puede decidir si hacer clic en "GDP and final sales, annually" (PIB y ventas finales, anualmente) o "GDP and final sales, Quarterly" (PIB y ventas finales trimestralmente) para los datos de su interés.

14

Prueba chi-cuadrado y otras pruebas no paramétricas

Plan del capítulo

Muchas de las pruebas que se estudiaron en los capítulos anteriores requirieron de supuestos básicos antes que se pudiera realizar la prueba. Se asume que la población estaba distribuida normalmente o que las varianzas se ajustaban a patrones particulares. Cuando tales supuestos no pueden hacerse, o no se logra el conocimiento esencial sobre la población, se tiene que confiar en las pruebas no paramétricas analizadas en este capítulo.



ESCENARIO

Durante muchos años la pizzería de Mama ha sido un sitio muy frecuentado por los estudiantes de una universidad cercana. Sin embargo, este año Mama ha enfrentado una fuerte competencia de Dante, un nuevo negocio que abrió al otro lado del campus. Dante ofrece un extenso menú que atrae a muchos estudiantes interesados en probar nuevos platos.

Mama decidió ampliar su selección para no perder sus clientes en manos de la competencia que ha incursionado en el mercado y el cual había sido exclusivamente suyo. Mama reconoce que necesitará tomar muchas decisiones delicadas que sólo pueden tomarse después de considerar las consecuencias.

Para tomar tales decisiones, Mama le ha contratado a usted como asistente estadístico para analizar el mercado, evaluar las alternativas y diseñar un plan para ganar de nuevo su prominencia como proveedor principal de las necesidades que tienen los estudiantes de harina. Usted se da cuenta que esta tarea importante necesitará de su experiencia en estadística en toda su extensión.

Mama acepta pagarle con alimento y bebida durante el resto del semestre si usted puede ayudarle. Estimulado por

esta generosa propuesta, usted decide proporcionar a Mama el mejor consejo posible.

Después de pensarlo cuidadosamente, usted decide qué datos debe recolectar, cómo debe organizarlos y qué pruebas exactas utilizará para proporcionar a Mama la información necesaria para tomar tales decisiones. Usted también es consciente de que los supuestos necesarios para realizar las pruebas estadísticas que ha estudiado hasta el momento ya no son válidos y que esta tarea exigirá que confíe en las pruebas no paramétricas que se estudian en este capítulo.

14.1 Introducción

Los capítulos anteriores presentaron muchas pruebas de hipótesis. Se realizaron pruebas tanto para las medias poblacionales como para las proporciones poblacionales. En algunos casos el tamaño de la muestra era mayor que 30, mientras que en otras la muestra era pequeña. Se analizaron las pruebas para una sola población y las pruebas que comparaban dos o más poblaciones.

Sin embargo, todas estas situaciones de pruebas presentaron una característica común: necesitaban de ciertos supuestos respecto a la población. Por ejemplo, las pruebas t y las pruebas F requerían el supuesto de que la población estuviese distribuida normalmente. Debido a que tales pruebas dependen de postulados sobre la población y sus parámetros, se denominan **pruebas paramétricas**.

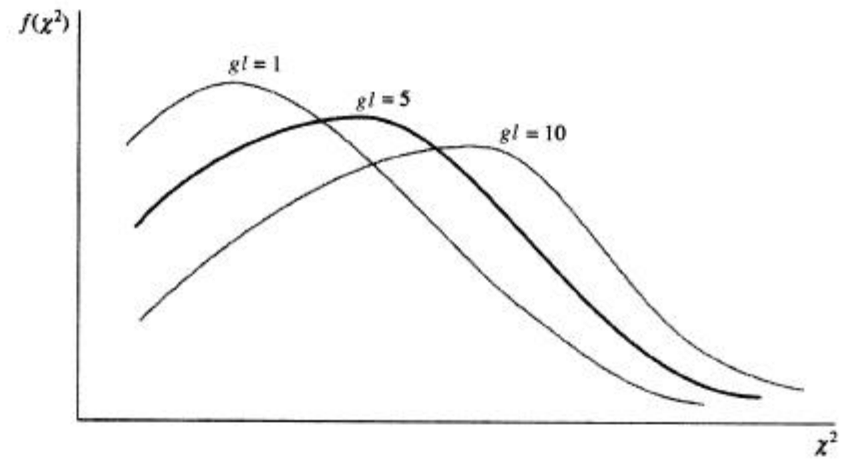
En la práctica, surgen muchas situaciones en las cuales simplemente no es posible hacer de forma segura ningún supuesto sobre el valor de un parámetro o sobre la forma de la distribución poblacional. La mayoría de las pruebas descritas en los capítulos anteriores no son aplicables. Más bien se deben utilizar otras pruebas que no dependan de un solo tipo de distribución o de valores de parámetros específicos. Estas pruebas se denominan **pruebas no paramétricas** (o libres de distribución). Este capítulo analiza varias de estas herramientas estadísticas.

Pruebas no paramétricas Son procedimientos estadísticos que pueden utilizarse para contrastar hipótesis cuando no son posibles los supuestos respecto a los parámetros o a las distribuciones poblacionales.

14.2 Distribución chi-cuadrado (χ^2)

Una de las herramientas no paramétricas más útiles es la prueba chi-cuadrado (χ^2). Al igual que la distribución *t*, la distribución chi-cuadrado es toda una familia de distribuciones. Existe una distribución chi-cuadrado para cada grado de libertad. La figura 14.1 muestra que a medida que se incrementa el número de grados de libertad, la distribución chi-cuadrado se vuelve menos sesgada. Las dos aplicaciones más comunes de chi-cuadrado son 1) pruebas de bondad de ajuste y 2) pruebas de independencia. Se analizarán a su tiempo.

Figura 14.1
Distribución chi-cuadrado (χ^2)



A. Pruebas de bondad de ajuste

Con frecuencia, las decisiones en los negocios requieren que se pruebe alguna hipótesis sobre la distribución poblacional desconocida. Por ejemplo, se puede plantear la hipótesis que la distribución poblacional es uniforme y que todos los valores posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir. Las hipótesis que se probarían son:

H_0: La distribución poblacional es uniforme.
H_A: La distribución poblacional no es uniforme.

La prueba de bondad de ajuste se utiliza entonces para determinar si la distribución de los valores en la población se ajusta a una forma en particular planteada como hipótesis –en este caso, una distribución uniforme. De la misma manera que con todas las pruebas estadísticas de esta naturaleza, los datos muestrales se toman de la población y éstos constituyen la base de los hallazgos.

Pruebas de bondad de ajuste Medidas sobre qué tan cerca se ajustan los datos muestrales observados a una forma de distribución particular planteada como hipótesis. Si el ajuste es razonablemente cercano, puede concluirse que sí existe la forma de distribución planteada como hipótesis.

Si existe gran diferencia entre lo que realmente se observa en la muestra y lo que se esperaría observar si la hipótesis nula fuera correcta, en tal caso es menos probable que la hipótesis nula sea verdadera. Es decir, la hipótesis nula debe rechazarse cuando las observaciones obtenidas en la muestra difieren mucho del patrón que se espera que ocurra si la distribución planteada como hipótesis sí se presenta.

Por ejemplo, si se hace rodar un dado bueno, es razonable plantear como hipótesis un patrón de resultados tal que cada resultado (números del 1 al 6) ocurra aproximadamente un sexto de las veces. Sin embargo, si un porcentaje significativamente grande o significativamente pequeño de números pares ocurre, puede concluirse que el dado no está balanceado adecuadamente y que la hipótesis es falsa. Es decir, si la diferencia entre los patrones de eventos que en realidad se observaron y el patrón de eventos que se espera que ocurra si la hipótesis nula es correcta, prueba ser demasiado grande como para atribuirlo a un error de muestreo, y debe concluirse que la población presenta una distribución distinta de la especificada en la hipótesis nula.

Para contrastar la hipótesis relativa a una distribución poblacional, se debe analizar la diferencia entre las expectativas con base en la distribución planteada como hipótesis y los datos reales que aparecen en la muestra. Esto es precisamente lo que hace la prueba chi-cuadrado de bondad de ajuste. Determina si las observaciones muestrales "se ajustan" a las expectativas. La prueba toma la siguiente forma:

Prueba chi-cuadrado
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad [14.1]$$

en donde O_i es la frecuencia de los eventos observados en los datos muestrales

E_i es la frecuencia de los eventos esperados si la hipótesis nula es correcta

K es el número de categorías o clases

La prueba tiene $K - m - 1$ grados de libertad, en donde m es el número de parámetros a estimar. El impacto exacto de m será más evidente a medida que la discusión progrese.

Vale la pena notar que el numerador de la fórmula [14.1] mide la diferencia entre las frecuencias de los eventos observados y las frecuencias de los eventos esperados al cuadrado. Cuando estas diferencias son grandes, haciendo que χ^2 se incremente, debería rechazarse la hipótesis nula.

1. Prueba para un ajuste uniforme Chris Columbus, director de mercadeo de Seven Seas, Inc., tiene la responsabilidad de controlar el nivel de existencias para cuatro tipos de botes vendidos por su firma. En el pasado ha ordenado nuevos botes bajo la premisa de que los cuatro tipos son igualmente populares y la demanda de cada tipo es la misma. Sin embargo, recientemente las existencias se han vuelto más difíciles de controlar, y Chris considera que debería probar su hipótesis respecto a una demanda uniforme. Sus hipótesis son:

H_0: La demanda es uniforme para los cuatro tipos de botes.

H_A: La demanda no es uniforme para los cuatro tipos de botes.

Suponiendo uniformidad en la demanda, la hipótesis nula presume que de una muestra aleatoria de botes, los navegantes de fin de semana comprarían un número igual de cada tipo. Para probar esta hipótesis, Chris selecciona una muestra de $n = 48$ botes vendidos durante los últimos meses. Si la demanda es uniforme, puede esperar que $48/4 = 12$ botes de cada tipo se vendan. La tabla 14.1 muestra esta expectativa junto con el número de cada tipo que en realidad se vendió. Se nota que $\Sigma(O_i) = \Sigma(E_i)$. Chris debe determinar ahora si los números vendidos realmente en cada una de las categorías $K = 4$ está lo suficientemente cerca de lo que se esperaría si la demanda fuese uniforme. La fórmula [14.1] da

$$\chi^2 = \frac{(15-12)^2}{12} + \frac{(11-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(12-12)^2}{12}$$
$$= 1.17$$

El valor 1.17 se compara con un valor crítico de χ^2 tomado de la tabla H en el apéndice III. Debido a que no existen parámetros que tengan que estimarse, $m = 0$ y hay $K - 1 = 3$ grados de libertad. Si Chris deseara probar al nivel del 5%, se encontraría, como lo muestra la figura 14.2, que $\chi^2_{0.05,3} = 7.815$.

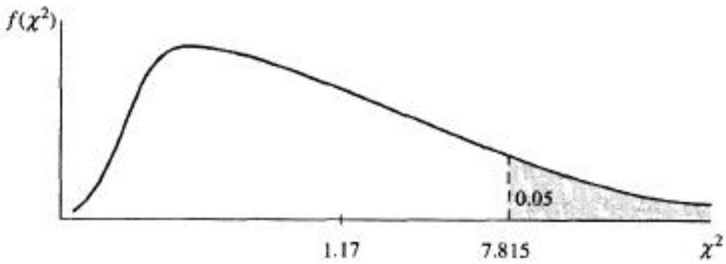
Regla de decisión: "No rechazar si $\chi^2 \leq 7.815$. Rechazar si $\chi^2 > 7.815$".

Gracias a que $1.17 < 7.815$, la hipótesis nula de que la demanda es uniforme no se rechaza. Las diferencias entre lo que se observó en realidad, O_i, y lo que Chris esperaba observar si la demanda fuera la misma para los cuatro tipos de botes, E_i, no son lo suficientemente grandes como para refutar la hipótesis nula. Las diferencias no son significativas y pueden atribuirse simplemente a un error de muestreo.

Tabla 14.1
Registro de ventas de Seven Seas

Tipo de bote	Ventas observadas (O_i)	Ventas esperadas (E_i)
Pirates' Revenge	15	12
Jolly Roger	11	12
Bluebeard's Treasure	10	12
Ahab's Quest	12	12
	48	48

Figura 14.2
Prueba chi-cuadrado (χ^2) para Seven Seas



Puede utilizarse Minitab para realizar estos cálculos. Simplemente ingrese los datos para las frecuencias observadas en la primera columna y los datos de las frecuencias esperadas en la segunda. En la ventana de sesiones, digite:

```
MTB> LET K1 = SUM ( (C1 - C2) **2/C2)
MTB> PRINT K1.
```

La primera línea le dice a Minitab que calcule la fórmula [14.1]. La segunda le pide a Minitab reportar el estadístico chi-cuadrado. Utilizando los datos de los botes de Chris, se devuelve el valor de 1.16667.

El valor p para la prueba es el área que está a la derecha de los hallados muestrales de 1.17, tal como se observa en la figura 14.2. Se puede observar solamente que es mayor al 5%. Minitab también calculará el valor p mediante

```
MTB> CDF K1 K2;
SUBC> CHISQUARE 1.
MTB> LET K3 = 1 - K2
MTB> PRINT K3.
```

Minitab le devolverá el valor p de 0.280087.

2. Prueba de ajuste a un patrón específico En el ejemplo de los botes, Chris asumió que la demanda de los cuatro tipos era la misma. Los valores para las frecuencias esperadas eran por ende las mismas. Sin embargo, surgen muchos casos en los cuales las frecuencias se prueban contra un patrón determinado, en el cual las frecuencias esperadas no son todas iguales. En su lugar deben determinarse así:

Frecuencias esperadas $$E_i = np_i \qquad [14.2]$$

en donde n es el tamaño de la muestra

p_i es la probabilidad de cada categoría como se especificó en la hipótesis nula

El ejemplo 14.1 lo muestra.

Ejemplo 14.1

El John Dillinger First National Bank, en Nueva York, trata de seguir una política de extender un 60% de sus créditos a empresas comerciales, un10% a personas naturales y un 30% a prestatarios extranjeros.

Para determinar si la política se estaba siguiendo, Jay Hoover, vicepresidente de mercadeo, selecciona aleatoriamente 85 créditos que se aprobaron recientemente. Encuentra que 62 de tales créditos se otorgaron a negocios, 10 a personas naturales, y 13 a prestatarios extranjeros. Al nivel del 10%, ¿parece que el patrón de cartera deseado se preserva? Pruebe la hipótesis de que

H_0: Se mantuvo el patrón deseado: 60% son créditos comerciales, 10% son préstamos personales y 30% son créditos extranjeros.

H_A: El patrón deseado no se mantuvo.

Solución

Si la hipótesis nula es correcta, el Sr. Hoover esperaría que el 60% de los 85 créditos de la muestra sean créditos comerciales. De manera que para la primera categoría, $E_i = np_i = (85)(0.60) = 51$ créditos comerciales. Además, esperaría que $(85)(0.10) = 8.5$ de los créditos fueran otorgados a personas naturales y $(85)(0.30) = 25.5$ créditos a clientes extranjeros. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Tipo de crédito	Frecuencias observadas (O_i)	Frecuencias esperadas (E_i)
Comercial	62	51.0
Personal	10	8.5
Extranjero	13	25.5
	85	85.0

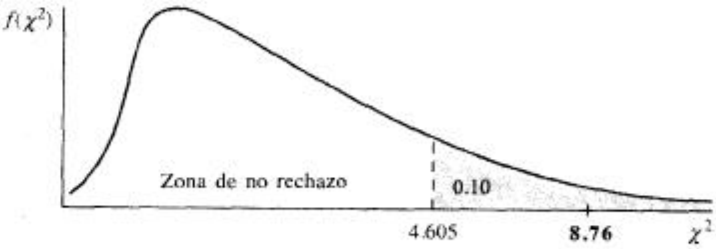
El valor χ^2 es

$$\chi^2 = \frac{(62 - 51)^2}{51} + \frac{(10 - 8.5)^2}{8.5} + \frac{(13 - 25.5)^2}{25.5}$$
$$= 8.76$$

De nuevo, no se estimaron parámetros y $m = 0$. Con α al 10% y $K = 3$ categorías de crédito (comerciales, privados y extranjeros), existen $K - m - 1$ o $3 - 0 - 1 = 2$ grados de libertad. El Sr. Hoover encuentra de la tabla H del apéndice III que el valor crítico de $\chi^2_{0.10,2} = 4.605$.

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 \leq 4.605$. Rechazar si la hipótesis nula $\chi^2 > 4.605$".

Como lo muestra la figura, la hipótesis nula debería rechazarse debido a que $8.76 > 4.605$.



Interpretación

Las diferencias entre lo que el Sr. Hoover observó y lo que esperaba observar si el patrón de crédito deseado se alcanzaba era demasiado grande como para ocurrir por simple azar. Existe sólo un 10% de probabilidad de que una muestra de 85 créditos seleccionados aleatoriamente pudieran producir las frecuencias observadas aquí demostradas, si el patrón deseado en la cartera de crédito del banco se estuviera manteniendo.

---

3. Prueba de normalidad Las especificaciones para la producción de tanques de aire utilizados en inmersión requieren que los tanques se llenen a una presión promedio de 600 libras por pulgada cuadrada (psi). Se permite una desviación estándar de 10 psi. Las especificaciones de seguridad permiten una distribución normal en los niveles de llenado. Usted acaba de ser contratado por Aqua Lung, un importante fabricante de equipos de inmersión. Su primera tarea es determinar si los niveles de llenado se ajustan a una distribución normal. Aqua Lung está seguro de que la media de 600 psi y la desviación estándar de 10 psi prevalecen. Sólo queda por probar la naturaleza de la distribución. En este esfuerzo se mide $n = 1{,}000$ tanques y se halla la distribución presentada en la tabla 14.2 Sus hipótesis son:

H_0: Los niveles de llenado están distribuidos normalmente.

H_A: Los niveles de llenado no están distribuidos normalmente.

Igual que antes, la prueba requiere comparar estas observaciones reales con las que usted esperaría encontrar si prevaleciera la normalidad. Para determinar estas frecuencias esperadas, usted debe calcular las probabilidades de que los tanques seleccionados aleatoriamente tengan los niveles de contenido en los intervalos presentados en la tabla 14.2. La probabilidad de que un tanque caiga en el primer intervalo es $P(0 < X < 580)$. El problema que

Tabla 14.2
Niveles de llenado para los tanques de buceo

PSI	Frecuencia real
0 y por debajo de 580	20
580 y por debajo de 590	142
590 y por debajo de 600	310
600 y por debajo de 610	370
610 y por debajo de 620	128
620 y por encima	30
	1,000

se enfrenta está representado en la figura 14.3(a). Usted debe determinar el área sombreada bajo la curva. Así:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{580 - 600}{10}$$

$$= -2, \text{ o un área de } 0.4772$$

Entonces

$$P(0 < X < 580) = 0.5000 - 0.4772 = 0.0228$$

Existe un poco más del 2% de probabilidad de que ningún tanque seleccionado aleatoriamente tenga un nivel inferior a 580 psi si los contenidos promedio son de 600 psi con una desviación estándar de 10 psi y están distribuidos normalmente. Para el segundo intervalo, la probabilidad de que un tanque seleccionado aleatoriamente tenga un nivel de contenido entre 580 y 590 es $P(580 < X < 590)$, y se presenta en la figura 14.3 (b).

$$Z_1 = \frac{580 - 600}{10}$$

$$= -2, \text{ o un área de } 0.4772$$

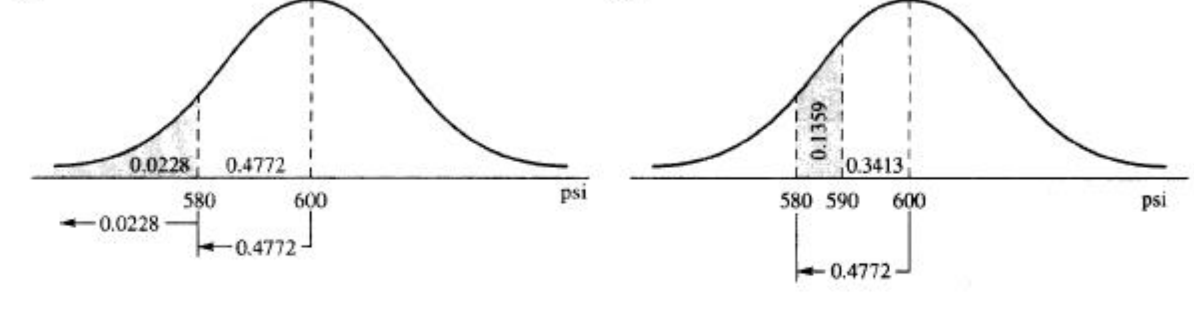
$$Z_2 = \frac{590 - 600}{10}$$

$$= -1, \text{ o un área de } 0.3413$$

Entonces

$$P(580 < X < 590) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

Figura 14.3 Probabilidades de los contenidos de los tanques



Las probabilidades de los intervalos restantes se calculan de forma similar y se muestran en la tabla 14.3, junto con las frecuencias esperadas. Igual que antes, las frecuencias esperadas son $E_i = np_i$. Para el primer intervalo éste se convierte en (1,000)(0.0228) = 22.8. Se desea probar la hipótesis al nivel del 5%. Debido a que tanto la media poblacional como la desviación estándar son dadas y no tienen que estimarse, $m = 0$. Existen $K = 6$ clases en la tabla de frecuencias, de manera que los grados de libertad son $K - 1 = 5$. Se encuentra que el valor crítico χ^2 es $\chi^2_{0.05,5} = 11.07$.

Tabla 14.3
Probabilidades de los niveles de llenado

PSI	Frecuencia real (O)	Probabilidades (p)	Frecuencia esperada(E)
0 y por debajo de 580	20	0.0228	22.8
580 y por debajo de 590	142	0.1359	135.9
590 y por debajo de 600	310	0.3413	341.3
600 y por debajo de 610	370	0.3413	341.3
610 y por debajo de 620	128	0.1359	135.9
620 y por encima	30	0.0228	22.8
	1,000	1.0000	1000.0

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si χ^2 es menor que 11.07. Rechazar la hipótesis nula si χ^2 es mayor que 11.07".

Utilizando la fórmula [14.1] se tiene que

$$\chi^2 = \frac{(20 - 22.8)^2}{21.5} + \frac{(142 - 135.9)^2}{135.9} + \cdots + \frac{(30 - 22.8)^2}{21.5}$$
$$= 8.63$$

Como se muestra en la figura 14.4, la hipótesis nula no debería rechazarse. Las diferencias entre lo que se observó y lo que se espera observar si los contenidos estuvieran distribuidos normalmente con una media de 600 y una desviación estándar de 10 pueden atribuirse al error de muestreo.

Figura 14.4
Prueba chi-cuadrado de normalidad

Si la media poblacional y la desviación estándar no fueran conocidas, se hubieran tenido que estimar de los datos muestrales de la tabla 14.2. Entonces m sería 2, y los grados de libertad serían $K - 2 - 1$ o $6 - 2 - 1 = 3$.

Advertencia: La prueba chi-cuadrado de bondad de ajuste es confiable sólo si todo E_i es por lo menos 5. Si una muestra tiene un $E_i < 5$, debe combinarse con clases adyacentes para garantizar que todas las categorías $E_i \geq 5$. Si se ha seleccionado una muestra de tan sólo $n = 100$ en lugar de 1,000 tanques de inmersión, el E_i para la primera clase hubiese sido $E_i = np_i = (100)(0.0228) = 2.28$ en lugar de 22.8. Esta primera clase se combinaría con la segunda clase de manera que $E_i \geq 5$. De igual forma, la clase 6 tiene un $E_i = 2.28$ y se combinaría con la clase 5. Claro que los grados de libertad se reducen de manera correspondiente.

¿Qué pasaría si se fija la primera clase en "570 y por debajo de 580" y la última en "620 y por debajo de 630" para mantener todos los intervalos iguales? Muy poco. $P(X_i)$ no sería igual a 1, y $\Sigma(E_i)$ no sería igual a $\Sigma(O_i)$. Sin embargo, sería totalmente posible hacerlo.

De nuevo, Minitab producirá los resultados deseados. La pantalla de Minitab 14.1 contiene los comandos de entrada y el resultado. El valor p es $0.00329876 < 0.05$, llevando al rechazo de la hipótesis nula.

Pantalla en Minitab 14.1

```
MTB> let k1 = sum ( (c1 - c2) **2/c2)   [Calculates the chi-square value]
MTB> print k1                           (Calcula el valor chi-cuadrado)

Data Display

K1     8.63444      [The chi-square value]
MTB > cdf k1 k2;
SUBC> chisquare 1.                      Calculates the p-value
MTB > let k3 = 1 - k2                   (Calcula el valor p)
MTB > print k3

Data Display

K3     0.00329876 [The p-value]
MTB >                (Valor p)
```

B. Tablas de contingencia. Una prueba de independencia

Vale la pena destacar que en todos los problemas vistos hasta ahora, había un solo un factor que captaba el interés. Sin embargo, chi-cuadrado también permitirá la comparación de dos atributos para determinar si existe una relación entre ellos. Un minorista desea descubrir si existe una relación entre los niveles de ingreso de los consumidores y su preferencia por su producto. Los gerentes de producción siempre se interesan por la relación que pueda existir entre la productividad de sus empleados y el tipo o grado de capacitación que recibieron.

Wilma Keeto es la directora de investigación de productos en Dow Chemical. En su proyecto actual, la señorita Keeto debe determinar si existe alguna relación entre la clasificación de efectividad que los consumidores asignan a un nuevo insecticida y el sitio (urbano o rural) en el cual se utiliza. De los 100 consumidores a quienes se les practicó la encuesta, 75 vivían en zonas urbanas y 25 en zonas rurales. La tabla 14.4 resume las clasificaciones hechas por cada consumidor en una tabla de contingencia como las que se presentaron en el capítulo 4.

La tabla tiene $f = 3$ filas y $c = 2$ columnas. Existen $fc = 6$ celdas en la tabla. Por ejemplo, vale la pena observar que 31 clientes clasificaron el producto "por encima del promedio", 20 de ellos estaban en zonas urbanas.

Tabla 14.4
Tabla de contingencia de Dow Chemical

	Atributo B - Ubicación		
Atributo A - Clasificación	**Urbano**	**Rural**	**Total**
Por encima del promedio	20	11	31
Promedio	40	8	48
Por debajo del promedio	15	6	21
Total	75	25	100

La señorita Keeto desea comparar el atributo B (ubicación) con el atributo A (clasificación del producto). Sus hipótesis son

H_0: La clasificación y la ubicación son independientes

H_A: La clasificación y la ubicación no son independientes.

Si la ubicación no tiene ningún impacto en la clasificación de efectividad, entonces el porcentaje de residentes urbanos que calificaron el producto "por encima del promedio" debería ser igual al porcentaje de residentes rurales que clasificaron el producto "por encima del promedio". Este porcentaje a su vez debería ser igual al de todos los usuarios que calificaron el producto "por encima del promedio".

Como lo muestra la tabla 14.4, el 31% de todos los 100 usuarios clasificaron el producto "por encima del promedio". Luego el 31% de los 75 residentes urbanos y el 31% de los 25 residentes rurales deberían dar esta clasificación si la clasificación y la ubicación son independientes. Estos valores de (75)(0.31) = 23.3 y (25)(0.31) = 7.75 dan las frecuencias esperadas E_i para cada celda, como se observa en la tabla 14.5

Tabla 14.5
Frecuencias de la clasificación

	Atributo B		
Atributo A	**Urbano**	**Rural**	**Totales**
	O_i=20	O_i=11	31
Por encima del promedio	**E_i=23.3**	**E_i=7.75**	
	O_i=40	O_i=8	48
Promedio	E_i=36	E_i=12	
	O_i=15	O_i=6	21
Por debajo del promedio	E_i=15.8	E_i=5.25	
Total	75	25	100

Los E_i restantes se calculan de forma similar y se presentan en la tabla 14.5. Por ejemplo, 48% de los 100 usuarios clasificaron el producto como "promedio". Por tanto, si la hipótesis nula es correcta, el 48% de los 75 clientes urbanos también deberían clasificar el producto como "promedio", y el 48% de los 25 consumidores rurales deberían registrar una clasificación de "promedio". Los E_i se calculan como (75)(0.48) = 36 y (25)(0.48) = 12. De igual forma, debido a que 21 de los 100 usuarios, o 21% clasificaron el producto "por debajo del promedio", entonces 21% de las 75 personas que viven en centros urbanos (E_i = 15.8) y 21% de los 25 que vive en zonas rurales (E_i = 5.25) deberían proporcionar una clasificación "por debajo del promedio".

Probar las hipótesis requiere una comparación de O_i y E_i sobre las fc =6 celdas, utilizando la ecuación:

Prueba chi-cuadrado
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{rc} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad [14.3]$$

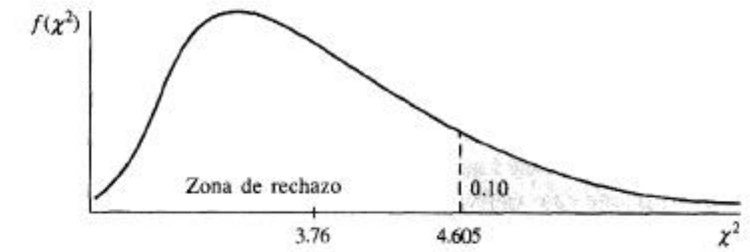
Para el problema actual, Wilma encuentra que:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(20-23.3)^2}{23.3} + \frac{(11-7.75)^2}{7.75} + \frac{(40-36)^2}{36} \\ &\quad + \frac{(8-12)^2}{12} + \frac{(15-15.8)^2}{15.8} + \frac{(6-5.25)^2}{5.25} \\ &= 3.76\end{aligned}$$

La prueba tiene $(f-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2$ grados de libertad. Si Wilma fija $\alpha = 10\%$, $\chi^2_{0.10,2} = 4.605$. Como lo muestra la figura 14.5, la hipótesis nula no se rechaza de acuerdo con la regla de decisión:

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 \leq 4.605$. Rechazar si $\chi^2 > 4.605$".

Figura 14.5
Prueba chi-cuadrado de independencia



La pantalla de Minitab 14.2 se obtiene colocando los datos de los clientes urbanos en la columna 1 y los de los residentes rurales en la columna 2 y luego haciendo clic en **STAT > TABLES > CHISQUARE TEST**.

Pantalla en Minitab 14.2

Chi-square test (Prueba chi-cuadrado)

```
Expected counts are printed below observer counts (Los conteos esperados se imprimen
debajo de los conteos del observador)
          C1        C2     Total
1         20        11        31
       23.25      7.75

2         40         8        48
       36.00     12.00

3         15         6        21
       15.75      5.25
Total     75        25       100

Chisq =  0.454 + 1.363 +
         0.444 + 1.333 +
         0.036 + 0.107 = 3.738
df = 2, p = 0.155
```

The top number in each cell is O_i. (El número superior en cada celda es O_i.)
The bottom number is E_i. (El número inferior es E_i.)

Vale la pena anotar que informan el valor chi-cuadrado de 3.738 y el valor p de 0.155.

El ejemplo 14.2 proporciona una ilustración adicional.

Ejemplo 14.2

Hedonistic Auto Sales desea determinar si existe alguna relación entre el ingreso de los clientes y la importancia que dan al precio de los automóviles de lujo. Los gerentes de la compañía desean probar la hipótesis de que

H_0: Ingreso e importancia del precio son independientes.

H_A: Ingreso e importancia del precio no son independientes.

Solución

Los clientes están agrupados en tres niveles de ingreso y se les pide asignar un nivel de significancia para poner precio a la decisión de compra. Los resultados se muestran en la siguiente tabla de contingencia. Debido a que 182/538 = 33.83% de todos los que respondieron a la encuesta agregan un nivel de importancia "grande" al precio, entonces si el ingreso y el precio no están relacionados, se esperaría que 33.83% de ellos, en cada clasificación de ingresos respondan que el precio era de "gran" importancia. Por tanto, los E_i para un nivel de importancia "bajo" son (198)(0.3383) = 66.98, (191)(0.3383) = 64.62, y (149)(0.3383) = 50.41.

	Atributo B: Ingreso			
Atributo A: Nivel de importancia	**Bajo**	**Medio**	**Alto**	**Total**
Grande	O_i=83	O_i=62	O_i=37	182
	E_i=66.98	E_i=64.62	E_i=50.41	
Moderado	O_i=52	O_i=71	O_i=49	172
	E_i=63.32	E_i=61.06	E_i=47.64	
Poco	O_i=63	O_i=58	O_i=63	184
	E_i=67.72	E_i=65.32	E_i=50.96	
Totales	198	191	149	538

De forma similar, 172/538 = 31.97% de todos quienes respondieron clasificaron el precio como moderadamente importante. Por ende los E_i para la categoría de "moderado" son 198(0.3197) = 63.32, 191(0.3197) = 61.06, y 149 (0.3197) = 47.64.

Para la categoría de "poco", los datos muestran que 184/538 = 34.20% de todos los clientes daban poca importancia al precio. Por consiguiente los E_i son (198)(0.342) = 67.72, (191)(0.342) = 65.32, y (149)(0.342) = 50.96.

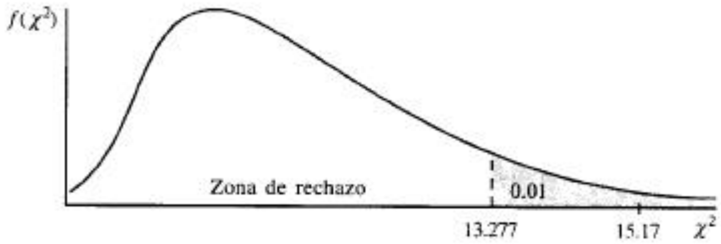
Chi-cuadrado es

$$\chi^2 = \frac{(83-66.98)^2}{66.98} + \frac{(62-64.62)^2}{64.62} + \frac{(37-50.41)^2}{50.41} + \frac{(52-63.32)^2}{63.32} + \cdots + \frac{(63-50.96)^2}{50.96}$$

$$= 15.17$$

Si se determina α en 1%, y con $(f-1)(c-1) = (3-1)(3-1) = 4$ grados de libertad. $\chi^2_{0.01,4} = 13.277$. Como se observa en la figura, la regla de decisión es:

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 \leq 13.277$. Rechazar si $\chi^2 > 13.277$".



Interpretación

La hipótesis nula se rechaza. Existe sólo un 1% de probabilidad de que si no existe relación entre ingreso y significancia del precio, las diferencias entre Q_i y E_i serían lo suficientemente grandes como para producir un chi-cuadrado más grande que 13.277. Existe evidencia de una relación entre el ingreso de los clientes y la importancia dada al precio de un auto de lujo.

El resto de este capítulo está dedicado a diferentes pruebas no paramétricas. Varias de tales pruebas se analizan para ilustrar: 1) cuándo debería utilizarse la prueba, 2) el propósito principal y la aplicación de la prueba, y 3) la interpretación de la prueba. Se explora

La prueba de signo

La prueba de rachas

La prueba U de Mann-Whitney

La prueba de correlación de rangos de Spearman

La prueba de Krustal-Wallis

Se comenzará con la prueba de signo.

Ejercicios de la sección

1. El vicepresidente de operaciones del First National Bank argumenta que los tres tipos de crédito – créditos para autos, créditos a estudiantes y créditos para propósitos generales– se conceden a los clientes en las mismas proporciones. Para probar su hipótesis, usted recolecta datos sobre 200 créditos recientes y se encuentra que 55 fueron créditos para autos, 47 para estudiantes y el resto para propósitos generales. Al nivel del 5%, ¿qué le diría usted al vicepresidente?

2. Dados los resultados del ejercicio anterior, usted acredita que los préstamos otorgados a los clientes se ajustan a un patrón tal que la mitad son para propósitos generales y el resto se dividen de manera equitativa entre los dos tipos de créditos restantes. Utilizando la muestra del problema anterior, ¿qué concluye al nivel del 5%?

3. A los compradores del centro comercial local se les pide calificar un nuevo producto en una escala continua que comienza en cero. Con base en los siguientes datos agrupados, ¿puede usted concluir al nivel del 5% que los datos están distribuidos normalmente, con una media de 100 y una desviación estándar de 25?

Calificación	Frecuencia
Menos de 50	1
50-70	51
70-90	112
90-110	151
110-130	119
130-150	43
150-170	21
Más de 170	2

4. Los analistas de Federated Stores plantean la hipótesis de que los ingresos de sus clientes están distribuidos normalmente. Con base en los datos suministrados aquí, ¿qué conclusión saca al nivel del 1%?

Ingreso(US$1,000)	Frecuencia
Menos que 35	1
35-40	4
40-45	26
45-50	97
50-55	96
55-60	65
60-65	8
65-70	2
Por encima de 70	1

5. TransWorld Airways desea determinar si existe alguna relación entre el número de vuelos que las personas toman y su ingreso. ¿A qué conclusión llega al nivel del 1% con base en los datos para 100 viajeros en la tabla de contingencia?

	Frecuencia de vuelos		
Ingreso	Nunca	Rara vez	Con frecuencia
Menos de US$30,000	20	15	2
US$30,000-50,000	8	5	1
US$50,000-70,000	7	8	12
Más de US$70,000	2	5	15

14.3 Prueba del signo

Una prueba no paramétrica utilizada comúnmente para tomar decisiones comerciales es la **prueba del signo**. Esta prueba es la más usada con frecuencia para contrastar la hipótesis comparando dos distribuciones poblacionales, y por lo general implica el uso de pares correspondientes. Se supone que se tienen datos antes y después para una muestra y se desean comparar estos conjuntos de datos correspondientes. Se hace restando las observaciones por pares en un conjunto de datos de las del segundo, y se nota el signo algebraico que resulta. No se tiene interés en la magnitud de la diferencia, sino sólo en si resulta un signo más o un signo menos.

La prueba del signo es la contraparte no paramétrica de la prueba t para pares correspondientes. La prueba t requiere la suposición de que las poblaciones están normalmente distribuidas. En muchos casos, esta suposición no es posible. La prueba del signo es útil en estos casos.

La hipótesis nula establece que no existe diferencia en los conjuntos de datos. Si esto es cierto, entonces un signo más y un signo menos son igualmente probables. La probabilidad de que ocurra cualquiera es de 0.50. Una prueba de dos colas es:

$$H_0: m = p$$
$$H_A: m \neq p$$

en donde m y p son los números de signos menos y de signos más, respectivamente. Una prueba de una sola cola es:

$$H_0: m \leq p$$
$$H_A: m > p$$

o

$$H_0: m \geq p$$
$$H_A: m < p$$

Prueba del signo Prueba diseñada para probar la hipótesis que compara las distribuciones de dos poblaciones.

Debido a que existen dos posibles resultados, un signo menos y un signo más, y a la probabilidad de que cada uno siga constante ensayo tras ensayo, se puede utilizar la distribución binomial.

Se supone que usted está trabajando como analista de mercado y desea medir la efectividad de un juego promocional del producto de su empresa. Antes del juego promocional, usted selecciona 12 tiendas minoristas y registra las ventas del mes, redondeando o aproximando al US$100 más próximo. Durante el segundo mes, el juego promocional se complementa y se registran de nuevo las ventas. La tabla 14.6 muestra estos niveles de ventas, junto con el signo algebraico que resulta cuando las ventas del segundo mes se restan de las del primer mes. Un signo más registrado en la última columna significa que las ventas bajaron durante el segundo mes.

Tabla 14.6
Ventas para doce tiendas minoristas

Tienda	Antes del juego	Durante el juego	Signo
1	US$42	US$40	+
2	57	60	-
3	38	38	0
4	49	47	+
5	63	65	-
6	36	39	-
7	48	49	-
8	58	50	+
9	47	47	0
10	51	52	-
11	83	72	+
12	27	33	-

Se asume además que usted desea probar la hipótesis de que la promoción incrementó las ventas al nivel del 5%. Si las ventas subieron en el segundo mes cuando la promoción estaba vigente, entonces al restar dichas ventas del primer mes produciría signos menos. Luego se esperaría que el número de signos menos, m, excediera el número de signos más, p. Es decir , $m > p$. Esta afirmación no contiene un signo igual y por tanto es la hipótesis alternativa, produciendo una prueba con cola a la derecha:

$$H_0: m \leq p$$
$$H_A: m > p$$

Ahora se debe preguntar, ¿"Qué haría que se rechazara la hipótesis nula?" Debido a que la hipótesis nula establece que $m \leq p$, entonces o 1) un número significativamente grande de signos menos o 2) un número significativamente pequeño de signos más resultaría en el rechazo de la hipótesis nula. Es decir, la hipótesis nula se rechaza si m es demasiado grande o si p es demasiado pequeño.

La tabla 14.6 muestra 6 signos menos y 4 signos más para un total de $n = 10$ signos. Los valores que resultan en una diferencia de cero se ignoran. Las observaciones 3 y 9 por consiguiente se eliminan y no se consideran. Luego, se determina la probabilidad de seis o más signos menos o de cuatro o menos signos más si las probabilidades de ambos son $\pi = 0.50$. Si esta probabilidad es menor que el valor α seleccionado, los resultados de la muestra son significativos y se rechaza la hipótesis nula. Sin embargo, si la probabilidad de los resultados muestrales es mayor que α, los resultados pueden atribuirse a un error de muestreo; no se rechaza la hipótesis nula. Es decir, que si los resultados muestrales observados realmente tienen probabilidad de ocurrir, no se interpretan como un hallazgo significativo y no se puede rechazar la hipótesis nula.

De la tabla C del apéndice III, la probabilidad de seis o más signos menos es

$$\begin{aligned} P(m \geq 6 \mid n = 10, \pi = 0.5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - 0.6230 \\ &= 0.3770 \end{aligned}$$

Claro que si se obtienen seis o más signos menos, se debe haber obtenido cuatro o menos signos más. Por consiguiente la probabilidad de cuatro o menos signos más es también 0.3770:

$$P(p \leq 4 \mid n = 10, \pi = 0.5) = 0.3770$$

Este valor de 0.3770 es la probabilidad de obtener seis o más signos menos (o cuatro o menos signos más) si π, la probabilidad de ocurrencia de cualquier signo en cualquier ensayo es de 0.50. Se nota que si el número de signos menos fuera inusualmente grande, se refutaría la hipótesis nula. Sin embargo, 6 no es un número grande. La probabilidad de obtener seis o más signos es muy alta: 37.7%. Debido a que la probabilidad de su ocurrencia es mayor que un α de 5%, el evento de seis signos menos no se considera grande, y la hipótesis nula de que H_0:$m \geq p$ no se rechaza.

Si la promoción fuera efectiva, habría un número grande de signos menos, y la hipótesis nula de que $m \leq p$ se rechazaría. Pero como se ha visto, seis signos menos no es un número inusualmente grande, y no se puede considerar que la promoción fue exitosa.

Si una prueba se basara en la prueba con cola a la izquierda, la hipótesis sería

$$H_0: m \geq p$$
$$H_A: m < p$$

Si m es inusualmente pequeña, o p es inusualmente grande, se rechazaría la hipótesis nula. Se supone que un experimento con $n = 12$ ensayos da cinco signos menos y siete signos más. Se tendría entonces que hallar la probabilidad de obtener cinco o menos signos menos, o la probabilidad de obtener siete o más signos más. Si la probabilidad es menos que el α seleccionado, se rechaza la hipótesis nula.

El ejemplo 14.3 ilustra una prueba de dos colas. El único ajuste es que α debe dividirse por dos. Las hipótesis son

$$H_0: m = p$$
$$H_A: m \neq p$$

Las hipótesis se prueban comparando $\alpha/2$ a cualquiera de entre 1) la probabilidad de que el signo que ocurrió con menos frecuencia pueda ocurrir muchas veces o menos, o 2) la probabilidad de que el signo que ocurrió más frecuentemente pueda ocurrir muchas veces o más.

Ejemplo 14.3

Honda probó la resistencia al uso de dos tipos de bandas de rodamiento de los neumáticos en su motocicleta Nighthawk (halcón nocturno). Se seleccionaron diez motos aleatoriamente. Los mecánicos montaron los neumáticos con un tipo de banda en el frente, y la otra banda de rodamiento atrás. Después de manejar las motocicletas un número de millas especificado bajo las condiciones establecidas, produjeron un desgaste entre 0 y 40 cada neumático. Una calificación más alta indicó un mejor neumático. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Los analistas de Honda desean probar la hipótesis de que no hay diferencia en las clasificaciones de desgaste al nivel del 10%. Las hipótesis son

$$H_0: m = p$$
$$H_A: m \neq p$$

	Clasificación de desgaste		
Neumáticos	**Tipo de banda 1**	**Tipo de banda 2**	**Signo**
1	32	37	-
2	27	25	+
3	21	21	0
4	13	17	-
5	25	29	-
6	38	39	-
7	17	23	-
8	29	33	-
9	32	34	-
10	34	37	-

Solución

La observación 3 se ignora porque la diferencia es cero. Existe un signo más y ocho signos menos. Honda puede calcular la probabilidad de que uno o menos signos más puedan ocurrir o la probabilidad de que ocho o más signos menos puedan ocurrir. Concentrándose en el número de signos más, se tiene de la tabla C (apéndice III), que

$$P(p \leq 1 \mid n = 9, \pi = 0.5) = 0.0195$$

Claro, que se obtiene la misma respuesta si se utiliza el número de signos menos en la prueba:

$$P(m \geq 8 \mid n = 9, \pi = 0.5) = 1 - P(m \leq 7) = 1 - 0.9805 = 0.0195$$

Debido a que $\alpha/2 = 0.10/2 = 0.05 > 0.0195$, se rechaza la hipótesis nula.

Interpretación

Si la hipótesis nula es cierta, y $m = p$, existe sólo 1.95% de probabilidad de obtener uno o menos signos más (u ocho o más signos menos). Existe menos de $\alpha/2 = 0.05$% de probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta. Se puede concluir que existe una diferencia en las clasificaciones de desgaste. El tipo de rodamiento II es superior debido a que tuvo un número significativo de signos menos.

Si $n \geq 30$, es permisible utilizar la aproximación normal al binomio. Se asume que en el ejemplo anterior, Honda tuvo que tomar como muestra 40 motocicletas y obtuvo 8 signos más, 28 signos menos, y 4 diferencias cero. La compañía tendría $n = 36$ observaciones útiles.

Como se aprendió en el capítulo 8, si la prueba es de dos colas con $\alpha = 0.10$, el valor crítico de Z es 1.65.

Regla de decisión: "No rechazar si $-1.65 \leq Z \leq 1.65$. Rechazar si $Z < -1.65$ o $Z > 1.65$".

El valor de Z es

Valor de Z para prueba del signo con muestras grandes	$Z = \dfrac{k \pm 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$	[14.4]

en donde k es el número apropiado de signos más o menos y n es el tamaño de la muestra. Si $k < n/2$, se utiliza $k + 0.5$. Si $k > n/2$, se utiliza $k - 0.5$; es necesario ajustar k en 0.5 porque la distribución binomial representa datos discretos, mientras que la distribución normal se aplica a datos continuos.

Debido a que el ejemplo de Honda es una prueba de dos colas, se puede probar o el número de signos más o el número de signos menos. Al probar el número de signos más se tiene que:

$$Z = \frac{8 + 0.5 - (0.5)(36)}{0.5\sqrt{36}}$$
$$= -3.17$$

Al probar el número de signos menos se tiene que

$$Z = \frac{28 - 0.5 - (0.5)(36)}{0.5\sqrt{36}}$$
$$= 3.17$$

Debido a que $-3.17 < -1.65$, o $3.17 > 1.65$, se rechaza la hipótesis nula. Existe una diferencia en los dos tipos de neumáticos. El tipo II de rodamiento es superior.

Ejercicios de la sección

6. Dos propagandas de publicidad para computadores las califican 15 clientes potenciales para determinar si existe alguna preferencia. Los resultados se presentan aquí. Al nivel del 10%, ¿cuáles son los resultados?

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Publicidad 1	8	9	5	7	9	4	3	8	9	5	7	8	8	7	9
Publicidad 2	7	3	2	8	5	5	7	2	1	3	7	2	2	3	8

7. El fabricante de 10 tipos de alimentos en paquete plantea la hipótesis de que las ventas de cada producto con un alto contenido de grasa serán menores que las del mismo producto con reducción de grasa. Las ventas en miles de unidades aparecen en la siguiente tabla. Al nivel del 10%, ¿cuál es su conclusión?

Alimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Con grasa	10	12	14	18	17	18	5	21	6	8
Sin grasa	15	13	12	9	17	19	3	27	12	14

8. El brillo de la cristalería se mide en una escala de 1 a 100. Se prueban 20 vasos antes y después de ser tratados con un nuevo proceso. Si se resta el factor de brillo después del tratamiento, del de antes del tratamiento y da 5 signos positivos y 3 signos negativos, ¿existe alguna diferencia al nivel del 5%? ¿Cómo interpreta los resultados de la prueba?

9. Cincuenta empleados que han recibido capacitación especial forman parejas con otros 50 que son parecidos en cada aspecto pero que no recibieron capacitación. La productividad de quienes recibieron capacitación se resta de la de quienes no la recibieron, dando 15 signos positivos y 17 signos negativos. Al nivel del 5%, ¿el entrenamiento hace la diferencia?

14.4 La prueba de rachas

La importancia de la aleatoriedad en el proceso de muestreo se ha enfatizado en repetidas ocasiones. Ante la ausencia de aleatoriedad, muchas de las herramientas estadísticas en las cuales se confía son de poco uso o de ningún uso. Por consiguiente es necesario comprobar la aleatoriedad de las muestras. Se puede lograrlo utilizando una **prueba de rachas**.

Prueba de rachas Prueba no paramétrica de aleatoriedad en el proceso de muestreo.

Para realizar una prueba de rachas, se asigna a todas las observaciones en la muestra uno o dos símbolos. Una racha consiste en una secuencia de uno o más símbolos similares. Si se agrupan las observaciones en categorías de, por ejemplo A y B, se debe hallar las siguientes secuencias:

AA	BBB	A	BB	AAA	B
1	2	3	4	5	6

Existen seis rachas, cada una de las cuales consta de una o más observaciones

Racha Una serie continua de uno o más símbolos

Se supone que se seleccionan los empleados para un programa de entrenamiento. Si la selección no depende de si el empleado es de sexo masculino (*m*) o femenino (*f*), se esperaría que el género fuera un evento aleatorio. Sin embargo, si se detecta algún patrón en el género, se puede asumir que la aleatoriedad está ausente y que la selección se hizo, por lo menos en parte, con base en el género de un trabajador. Si existe un número inusualmente grande o inusualmente pequeño de rachas, se sugiere un patrón.

Se asume que el género de cada empleado se registra para hacer la selección y se prueba que es:

mmm	ffffff	mmm
1	2	3

Tres rachas ocurren en esta muestra. Existen tres hombres, seguidos de seis mujeres, y luego tres hombres. Parecería que las selecciones no están lo suficientemente combinadas, produciendo un patrón sistemático que implica una ausencia de aleatoriedad. Se asume entonces que el orden de la selección es:

m	f	m	f	m	f	m	f	m	f	m	f
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

De nuevo, parece existir un patrón que produce un número inusualmente grande de 12 rachas independientes.

> **Detección de un patrón** Si se presentan muy pocas o demasiadas rachas, puede estar ausente la aleatoriedad.

Un conjunto de hipótesis para probar es:

H_0: Existe aleatoriedad en la muestra.

H_A: No existe aleatoriedad en la muestra.

Para probar la hipótesis, se debe determinar si el número de rachas (r) es demasiado grande o demasiado pequeño. Las tablas M1 y M2 (apéndice III), muestran valores críticos para el número de rachas si α es 5%. Debido a que en la superficie de los ejemplos parecen no aleatorios, se toma un conjunto de selecciones menos evidente. Se supone que las selecciones fueron

m	fff	mmm	ff	mmm
1	2	3	4	5

Las selecciones parecen más aleatorias que los otros dos ejemplos porque no existe patrón evidente. Se nota que $n_1 = 7$ es el número de hombres y $n_2 = 5$ es el número de mujeres.

La tabla M1 muestra el número crítico mínimo de rachas para un valor α de 5%. Si el número de rachas es igual o menor que el valor mostrado en la tabla M1, se sugiere que al nivel del 5% hay muy pocas rachas como para confirmar la hipótesis nula de aleatoriedad. Debido a que $n_1 = 7$ y $n_2 = 5$, se halla el valor críticamente bajo que es 3. Debido a que el número de rachas excede este mínimo, entonces no hay un número significativamente bajo de rachas como para garantizar el rechazo de la hipótesis nula. La tabla M2 proporciona valores críticamente altos para r. Si el número de rachas en una muestra es igual a o mayor que estos valores, se puede concluir que existe un número extremadamente grande de rachas, lo que sugiere la ausencia de aleatoriedad. Para $n_1 = 7$ y $n_2 = 5$, la tabla M2 revela que el número máximo de rachas es 11. Si el número de rachas es superior a 11, existen demasiadas como para sustentar la hipótesis de aleatoriedad. Debido a que el número de rachas es menor que 11, no es significativamente alto y no se rechaza la hipótesis nula al nivel del 5%. Parece que la selección muestral es el resultado de la aleatoriedad.

Cuando los datos muestrales no caen naturalmente en una de las dos categorías posibles, se puede utilizar la mediana como medida para bifurcar los datos. Se asumen niveles de producción diarios en una mina de carbón seleccionada para un estudio estadístico, y éstos son, 31, 57, 52, 22, 24, 59, 25, 29, 27, 44, 43, 32, 40, 37, 60 toneladas. La mediana de 37 puede utilizarse como valor de referencia. Las observaciones caen o por encima (A) o por debajo (B) de 37, produciendo ocho rachas de:

31	57 52	22 24	59	25 29 27	44 43	32	40 60
B	AA	BB	A	BBB	AA	B	AA
1	2	3	4	5	6	7	8

Con $n_1 = 7$ para B y $n_2 = 7$ para A, la tabla M revela valores críticos de 3 y 13 rachas. Debido a que había ocho rachas, se asume que hay aleatoriedad y no se rechaza la hipótesis nula.

Otra aplicación de la prueba de rachas se encuentra en una prueba de aleatoriedad en el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) del análisis de regresión. Una propiedad básica del modelo de regresión MCO es que los errores son aleatorios. No debería existir un patrón en los signos de estos errores. El ejemplo 14.4 ilustra cómo puede utilizarse la prueba de rachas para probar esta condición.

Ejemplo 14.4

Una empresa investigadora de mercadeo desarrolló un modelo para predecir las ventas mensuales de un nuevo producto. Después de 17 meses, se calcularon los errores y se probó que se tenían los siguientes signos:

++++++	-----	++++	--
1	2	3	4

Al nivel del 5%, ¿parece haber aleatoriedad en los términos de error?

Solución

Existen $n_1 = 10$ signos más, $n_2 = 7$ signos menos, y $r = 4$ rachas. Las tablas M1 y M2 revelan los números mínimo y máximo críticos de rachas, respectivamente como 5 y 14. Las hipótesis son

H_0: La aleatoriedad prevalece

H_A: La aleatoriedad no prevalece.

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $5 < r < 14$. Rechazar si $r \leq 5$ o $r \geq 14$".

Debido a que $r = 4$, la hipótesis nula debería rechazarse al nivel del 5%.

Interpretación

El número de rachas es significativamente pequeño. Existen muy pocas rachas como para sustentar la hipótesis de aleatoriedad. La validez del modelo de regresión es cuestionable, y la empresa debería analizar las alternativas. El bajo número de rachas resulta del hecho de que los errores de un signo son seguidos por los errores de signos similares, lo que es un indicio de autocorrelación positiva.

Si tanto n_1 como n_2 son mayores que 20, la distribución de muestreo para r se aproxima a la normalidad. La distribución tiene una media de

Media de la distribución muestral del número de rachas
$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \qquad [14.5]$$

y una desviación estándar de:

Desviación estándar de la prueba de rachas
$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}} \qquad [14.6]$$

Estandarizar la distribución de rachas puede lograrse utilizando la desviación normal:

Desviación normal para la distribución de rachas	$Z = \dfrac{r - \mu_r}{\sigma_r}$	[14.7]

Una presentación de ventas realizada ante un grupo de 52 compradores potenciales culminó en 27 ventas, 25 no- ventas y 18 rachas. Al nivel de significancia del 1%, ¿la muestra es aleatoria?

H_0: La muestra es aleatoria

H_A: La muestra no es aleatoria

Al nivel del 1%, el valor crítico de Z para la prueba de dos colas es 2.58. Como se observa en la figura 14.6,

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $-2.58 \le Z \le 2.58$. Rechazar la hipótesis nula si $Z < -2.58$ o $Z > 2.58$".

Figura 14.6
Prueba de aleatoriedad en las ventas

Entonces, mediante la fórmula [14.5],

$$\begin{aligned}\mu_r &= \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1\\ &= \frac{2(27)(25)}{27 + 25} + 1\\ &= 26.96\end{aligned}$$

y mediante la fórmula [14.6]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}\\ &= \sqrt{\frac{[2(27)(25)][2(27)(25) - 27 - 25]}{(27 + 25)^2(27 + 25 - 1)}}\\ &= 3.56\end{aligned}$$

La desviación normal es

$$\begin{aligned}Z &= \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}\\ &= \frac{18 - 26.96}{3.56}\\ &= -2.52\end{aligned}$$

Existe evidencia insuficiente para rechazar la hipótesis nula. Pareciera que la muestra es aleatoria. Existe un 99% de probabilidad de que un proceso de muestreo aleatorio con 27 y 25 observaciones en 2 categorías, y con 18 rachas, dieran un Z entre $\pm$ 2.58.

El ejemplo 14.4 puede utilizarse para ilustrar cómo Minitab puede realizar una prueba de rachas. En la columna 1 de la ventana de datos, ingrese seis números 1 para los seis signos más, cinco números 2 para los cinco signos menos, cuatro números 1 para los siguientes cuatro signos más, y luego dos números 2 para los últimos dos signos menos. Haga clic **en STAT > NONPARAMETRICS> RUNS TEST**. Seleccione **Above** y **Below** e ingrese 1.5. Haga clic en ***OK.*** La impresión se presenta como la pantalla de Minitab 14.3. El valor p dice que se rechaza la hipótesis nula en cualquier valor α por encima de 0.0068.

Pantalla en Minitab 14.3

Runs test (Prueba de rachas)

```
C1

K =   1.5000

The observed no. of runs = 4 (No. de rachas observado)
The expected no. of runs = 9.2353 (No. de rachas esperado)
7    Observations above K 10 below (7 observaciones por encima K 10 por debajo)
* N Small -- Following approx. may be invalid (N pequeño -- Después de aproximación
puede no ser válido)
     The test is significant at 0.0068 (La prueba es significativa a 0.0068)
```

14.5 Prueba U de Mann-Whitney

La **prueba U de Mann-Whitney** (o simplemente la **prueba U**) contrasta la igualdad de dos distribuciones poblacionales. Se basa en la suposición de que dos muestras aleatorias se sacan independientemente de variables continuas. En su sentido más amplio, la hipótesis nula establece que las distribuciones de dos poblaciones son idénticas. Sin embargo, la prueba puede realizarse para analizar la igualdad de las dos medias o medianas poblacionales. Para contrastar la igualdad de las medias, se debe asumir que las poblaciones son simétricas y que tienen la misma varianza. Bajo tales condiciones la prueba U de Mann-Whitney sirve como alternativa no paramétrica de la prueba t, salvo que no requiere el supuesto de normalidad. Si el supuesto de simetría se elimina, la mediana reemplaza la media como estadístico de prueba.

Prueba U de Mann-Whitney Es la contraparte no paramétrica de la prueba t para muestras independientes. No requiere del supuesto de que las diferencias entre las dos muestras estén distribuidas normalmente.

Los datos están ordenados o clasificados del más bajo al más alto. No existe esfuerzo alguno en hacer pares, al igual que como se ha hecho cuando se han tomado dos muestras. (Observe que la prueba U de Mann-Whitney es la misma que la prueba de las sumas de rangos de Wilcoxon, pero difiere de la prueba de rangos de signos de Wilcoxon. La similitud en los nombres puede ser confusa.)

Para ilustrar la prueba U, se supone que una fábrica de cerámicas desea comparar el tiempo que toma a las piezas de barro enfriarse después de haber "ardido" en el horno mediante dos métodos diferentes.

Los alfareros queman las 12 piezas utilizando el método 1, y 10 utilizando el método 2. El número de minutos necesarios para que cada pieza se enfríe es el siguiente:

Método 1	27*	31	28	29	39	40	35	33	32	36	37	43
Método 2	34	24*	38	28	30	34	37	42	41	44		

Las observaciones se ordenan y se clasifican luego de más bajo a más alto como se muestra en la tabla 14.7. El valor 24 en el método 2 es el más bajo de las 22 observaciones y se le da el rango de 1, y 27 en el método 1 tiene un rango de 2. Los empates como 28, se promedian sobre los rangos correspondientes. El valor 28 es la tercera observación más baja, y ambos valores de 28 reciben una clasificación de 3.5. No existe rango de 4, debido a que dos observaciones tienen el rango de 3.5. La clasificación entonces se suma, produciendo ΣR_1 y ΣR_2.

Tabla 14.7
Rango de tiempos de enfriamiento

Método 1	Rango	Método 2	Rango
		24	1
27	2		
28	3.5	28	3.5
29	5		
		30	6
31	7		
32	8		
33	9		
		34	10.5
		34	10.5
35	12		
36	13		
37	14.5	37	14.5
		38	16
39	17		
40	18		
		41	19
		42	20
43	21		
		44	22
	$\Sigma R_1 = 130$		$\Sigma R_2 = 123$

Se calcula el estadístico U de Mann-Whitney para cada muestra de la ecuación, así:

Estadístico U de Mann-Whitney para la primera muestra

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1 \qquad [14.8]$$

y

Estadístico *U* de Mann-Whitney para la segunda muestra	$U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \Sigma R_2$	[14.9]

Los datos de la tabla 14.7 dan:

$$U_1 = (12)(10) + \frac{12(12+1)}{2} - 130$$
$$= 68$$

y

$$U_2 = (12)(10) + \frac{10(10+1)}{2} - 123$$
$$= 52$$

Se nota que $U_1 + U_2 = n_1n_2$ proporciona un chequeo rápido de su aritmética.

Si n_1 y n_2 son ambas por lo menos 10, la media y la desviación estándar de la distribución muestral para el estadístico *U* son:

Media de la distribución muestral para la prueba *U* de Mann-Whitney	$\mu_u = \frac{n_1n_2}{2}$	[14.10]

y

Desviación estándar de la distribución muestral para la prueba *U* de Mann-Whitney	$\sigma_u = \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}}$	[14.11]

En el caso actual se tiene que:

$$\mu_u = \frac{(12)(10)}{2}$$
$$= 60$$

y

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{(12)(10)(12+10+1)}{12}}$$
$$= 15.17$$

La distribución del estadístico U puede normalizarse mediante la fórmula:

Valor Z para normalizar la prueba U de Mann-Whitney	$Z = \dfrac{U_i - \mu_u}{\sigma_u}$	[14.12]

donde U_i es el valor de U apropiado, entre U_1 o U_2 dependiendo de la naturaleza de la prueba. Permite determinar cuál valor U es apropiado.

A. Prueba de dos colas

En el ejemplo de los hornos, la fábrica de cerámica puede querer probar la hipótesis de que los tiempos promedio de enfriamiento del método 1 y del método 2 son los mismos. Esto requiere una prueba de dos colas con las hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

En una prueba de dos colas, bien sea U_1 o U_2 pueden utilizarse en la fórmula [14.12]. Por tanto, utilizando arbitrariamente U_2, se tiene que

$$Z = \frac{52 - 60}{15.17}$$
$$= -0.53$$

Si $\alpha = 10\%$, la regla de decisión como se refleja en la figura 14.7, es

Regla de decisión: "No rechazar si $-1.65 \leq Z \leq 1.65$. Rechazar si $Z < -1.65$ o $Z > 1.65$".

Figura 14.7
Prueba de dos colas de los tiempos promedio de enfriamiento

Por tanto $Z = -0.53$ y está en la zona de no rechazo, la fábrica de cerámica puede concluir al nivel de significancia del 10% que los tiempos promedio de enfriamiento son los mismos para ambos métodos de cocción.

B. Prueba de una cola

Se supone que la fábrica consideró que el método 1 resultaría en un tiempo promedio de enfriamiento de $\mu_1 > \mu_2$. Entonces las hipótesis

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$
$$H_A: \mu_1 > \mu_2$$

requieren una prueba de una cola. Si se va a realizar una prueba con cola a la derecha, entonces el valor U de la fórmula [14.12] debe ser el mayor de los dos valores de U. Debido a que $U_1 = 68 > U_2 = 52$, U_1 se utiliza para calcular el valor Z. Si esta fuera una prueba con cola a la izquierda, el valor menor de U se utilizaría para calcular Z.

Dada la prueba con cola a la derecha se tiene que:

$$Z = \frac{68 - 60}{15.17}$$
$$= 0.53$$

Si $\alpha = 0.10$ se mantiene para esta prueba de una sola cola, la regla de decisión, como se presenta en la figura 14.8 es

Regla de decisión: "No rechazar si $Z \leq 1.28$. Rechazar si $Z > 1.28$".

Figura 14.8
Prueba de una cola para los tiempos promedio de enfriamiento

El valor Z de 0.53 claramente está en la zona de no rechazo. La fábrica no rechaza la hipótesis nula de que $\mu_1 \leq \mu_2$ y no puede concluir que el método 2 conlleva a tiempos de enfriamiento más rápidos.

La pantalla en Minitab 14.4 muestra los resultados de la prueba para la fábrica de cerámica mencionada anteriormente. Se proporcionan estimados puntuales y por intervalo para la diferencia en las medianas poblacionales. El valor de $W = 130.0$ es la suma de los rangos de la variable almacenada en la primera columna y puede utilizarse para calcular U_1 y U_2. El valor p de 0.4057 es mayor que el valor α seleccionado del 10% y por tanto, expresa que no se puede rechazar la hipótesis nula.

Pantalla en Minitab 14.4

Mann-Whitney confidence interval and test (Intervalo de confianza y prueba de Mann-Whitney)

```
C1          N= 12          Median=  34.00
C2          N= 11          Median=  37.00
Point estimate for ETA1-ETA2 is     -2.00
90.9 Percent C.I. for ETA1-ETA2 is (-7.00,3.00)(I.C. del 99 por ciento para ETA1 - ETA2).
W = 130.0
Test of ETA1 = ETA2 vs. ETA1 = ETA2 is significant at 0.4060
The test is significant at 0.4057 (adjusted for ties)(La prueba es significante a
0.4057 [teniendo en cuenta los empates])
```

Median = Mediana
Point estimate = Estimado puntual
ETA1 = U_1
ETA2 = U_2

Ejercicios de la sección

10. Al propietario de una popular taberna local para estudiantes de una universidad cercana, se le escuchó por casualidad decir que los clientes mujeres tendían a gastar menos que los hombres. Retado por el profesor de estadística quien ocupaba su espacio habitual al extremo del bar, el tabernero registró los gastos de 10 mujeres y 10 hombres. Los resultados en dólares aparecen en la siguiente tabla. ¿Esta afirmación se confirma al nivel del 10%?

Mujeres	5.12	3.15	8.17	3.42	3.02	4.42	3.72	2.12	5.72	4.87
Hombres	5.83	6.49	4.45	5.12	9.02	9.73	5.42	6.43	8.79	8.89

11. Rapid Roy probó dos tipos de combustible en su clásico deportivo, y notó la velocidad máxima que permitía cada combustible. Con base en los resultados presentados aquí en millas por hora, ¿existe alguna diferencia en la velocidad promedio que proporciona cada combustible al nivel del 1%?

Combustible 1	45	67	54	41	38	59	48	31	59	31	
Combustible 2	79	82	69	84	76	77	81	65	73	70	69

12. Los costos de vivienda de 42 residentes en Topeka, Kansas, se compararon con los de 35 residentes en Erie, Pennsylvania. Se clasificaron las observaciones, produciendo $\Sigma R_T = 1{,}833.5$ y $\Sigma R_E = 1{,}169.5$. Al nivel del 5%, ¿parece haber alguna diferencia en los costos promedios de vivienda en las dos ciudades?

13. Petroleum Transport envía petróleo crudo vía dos líneas de embarque, FreightWays y OverSeas. Últimamente, se ha vuelto evidente que algunos de los envíos llegan con menos petróleo del que aparece en la lista del manifiesto. Los recortes medidos en miles de barriles se descubrieron en 50 envíos de FreigtWays y 45 envíos de OverSeas. Los resultados se calificaron produciendo $\Sigma R_F = 1{,}434.5$ y $\Sigma R_0 = 1{,}258.5$. ¿Existe evidencia que sugiera que FreightWays tiene una reducción más grande?

14.6 Correlación de rangos de Spearman

El análisis anterior sobre regresión y correlación proporcionó los medios para medir la relación entre dos variables. Se aprendió cómo calcular e interpretar el coeficiente de correlación de Pearson y por ende medir la fuerza de la relación entre dos variables.

Sin embargo, este método requiere valores numéricos precisos y el supuesto de normalidad en la distribución de tales valores. En muchos casos, tal medida numérica no puede ser posible, y puede no existir confirmación para el supuesto de normalidad. En tales casos, no puede utilizarse el método de Pearson.

No obstante, se puede todavía clasificar sistemáticamente u ordenar las observaciones. Esta clasificación ordinal permite medir los grados de correlación entre dos variables utilizando el **coeficiente de correlación de rangos de Spearman**.

> **Correlación de rangos de Spearman** Medida de la relación entre dos variables que han sido clasificadas originalmente de más bajo a más alto (o de más alto a más bajo)

El año pasado, Amco Tech, un fabricante de microchips para computador en Estados Unidos, contrató a siete técnicos en computación. A los técnicos se les practicó un examen diseñado para medir sus conocimientos básicos. Después de un año de servicio, a su supervisor se le pidió clasificar el desempeño laboral de cada técnico. Los puntajes del examen y las clasificaciones del desempeño para los siete empleados aparecen en la tabla 14.8

Vale la pena observar que aunque el puntaje del examen es una medida cuantitativa de los conocimientos de los técnicos, la clasificación del desempeño es simplemente una medida ordenada por el supervisor para saber cuáles técnicos se estaban desempeñando laboralmente bien. Por tanto, el jefe de operaciones decide utilizar la correlación de rangos de Spearman para determinar si existe alguna relación entre los puntajes del examen y el desempeño laboral. El director debe desarrollar primero la clasificación para los puntajes del examen. Tales clasificaciones, junto con algunos cálculos necesarios aparecen en la tabla 14.9.

Tabla 14.8
Datos sobre técnicos de Amco Tech

Técnico	Puntaje en el examen	Clasificación del desempeño
J. Smith	82	4
A. Jones	73	7
D. Boone	60	6
M. Lewis	80	3
G. Clark	67	5
A. Lincoln	94	1
G. Washintong	89	2

Tabla 14.9
Clasificaciones de los técnicos de Amco Tech

Técnico	Puntaje en el examen	Clasificación en la prueba (X)	Clasificación por el desempeño (Y)	$X-Y=d_i$	$(X-Y)^2 = d_i^2$
J. Smith	82	3	4	-1	1
A. Jones	73	5	7	-2	4
D. Boone	60	7	6	1	1
M. Lewis	80	4	3	1	1
G. Clark	67	6	5	1	1
A. Lincoln	94	1	1	0	0
G. Washington	89	2	2	0	0
					$8=\Sigma d_i^2$

El director puede calcular entonces el coeficiente de correlación de rangos de Spearman, r_S, utilizando la fórmula [14.13]:

Coeficiente de correlación de Spearman
$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad [14.13]$$

donde d_i es la diferencia entre las clasificaciones para cada observación
n es el tamaño de la muestra

Entonces

$$r_S = 1 - \frac{(6)(8)}{7(7^2-1)}$$
$$= 0.857$$

Al recordar que un coeficiente de correlación cae entre −1 y 1, la muestra sugiere una relación fuerte, positiva entre el puntaje del examen del técnico y su clasificación del desempeño laboral.

Con frecuencia se desea comprobar la hipótesis de que el coeficiente de correlación poblacional, ρ_s, es cero. Es decir, se desea determinar la probabilidad de que, a pesar de los hallazgos de la muestra que sugieren una relación entre el puntaje y la clasificación, en realidad no existe tal relación y $\rho_s = 0$.

Para las muestras pequeñas ($n < 30$), la distribución de r_S no es normal, ni la prueba t es apropiada. Más bien debe utilizarse la tabla N del apéndice III. Los valores críticos de la tabla N se comparan con r_S para probar las hipótesis

H_O: $\rho_s = 0$; No existe relación entre las dos variables

H_A: $\rho_s \neq 0$; Existe relación entre las dos variables

Con la ayuda de la figura 14.9, la tabla N revela que si se prueba la hipótesis a $\alpha = 0.10$, una muestra de tamaño $n = 7$ tiene valores críticos de ± 0.6786.

Figura 14.9
Prueba de hipótesis para Amco Tech

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $-0.6786 \leq r_S \leq 0.6786$. Rechazar la hipótesis nula si $r_S < -0.6786$ o $r_S > 0.6786$.

El valor $r_s = 0.857$ está en la zona de rechazo de la derecha. Por tanto, se puede rechazar la hipótesis nula de $\rho_s = 0$ y concluir al nivel de significancia del 10% que existe una relación entre los puntajes de prueba y las clasificaciones del desempeño laboral.

Si $n > 30$, la distribución de r_S se aproxima a la normalidad con una media de cero y una desviación estándar de $1/\sqrt{n-1}$. El estadístico de la prueba Z es:

Desviación normal para la prueba de rangos de Spearman	$$Z = \frac{r_S - 0}{1/\sqrt{n-1}} = r_S\sqrt{n-1}$$	[14-14]

El ejemplo 14.5 lo muestra.

Ejemplo 14.5

Amco Tech está considerando si comercializar un disco duro para computadores de mesa. Se realiza un experimento con 32 discos duros seleccionados aleatoriamente para determinar si hay una relación entre el número de horas en las que se prueba un disco duro antes de la venta y el número de veces que el disco falla en el proceso de terminar de correr un programa de computación. De forma razonable, el gerente de la división de control de calidad espera que la tasa de fallas disminuya a medida que aumenta el número de horas en que se prueba el disco. Las horas de prueba y el número de fallas para los 32 discos, junto con las clasificaciones de cada variable, se presentan en la siguiente tabla. Para ambas variables, la observación más alta recibió la primera clasificación, y la más baja recibió la clasificación número 32.

Disco	Horas	Clasificación por horas *(X)*	Fallas	Clasificación por fallas (Y)	X - Y	(X - Y)²
1	100	1.0	2	32.0	-31.0	961.00
2	99	2.5	3	30.5	-28.0	784.00
3	99	2.5	3	30.5	-28.0	784.00
4	97	4.0	4	28.5	-24.5	600.25
5	96	5.5	4	28.5	-23.0	529.00
6	96	5.5	5	27.0	-21.5	462.25
7	95	7.0	8	21.5	-14.5	210.25
8	91	8.0	6	25.5	-17.5	306.25
9	89	9.0	7	23.5	-14.5	210.25
10	88	10.5	10	17.5	-7.0	49.00
11	88	10.5	8	21.5	-11.0	121.00
12	80	12.0	9	19.5	-7.5	56.25
13	79	13.0	9	19.5	-6.5	42.25
14	78	14.5	10	17.5	-3.0	9.00
15	78	14.5	11	15.5	-1.0	1.00
16	77	16.0	7	23.5	-7.5	56.25
17	75	17.5	12	13.5	4.0	16.00
18	75	17.5	13	12.0	5.5	30.25
19	71	19.0	11	15.5	3.5	12.25
20	70	20.5	14	11.0	9.5	90.25
21	70	20.5	12	13.5	7.0	49.00
22	68	22.5	6	25.5	-3.0	9.00
23	68	22.5	16	7.5	15.0	225.00
24	65	24.0	15	9.5	14.5	210.25
25	64	25.0	15	9.5	15.5	240.25
26	60	26.5	16	7.5	19.0	361.00
27	60	26.5	18	3.5	23.0	529.00
28	58	28.0	19	2.0	26.0	676.00
29	56	29.0	17	5.5	23.5	552.25
30	55	30.5	20	1.0	29.5	870.25
31	55	30.5	18	3.5	27.0	729.00
32	50	32.0	17	5.5	26.5	702.25
						10,484.00

Solución

$$r_S = 1 - \frac{6(10{,}484)}{32(32^2 - 1)}$$
$$= -0.922$$

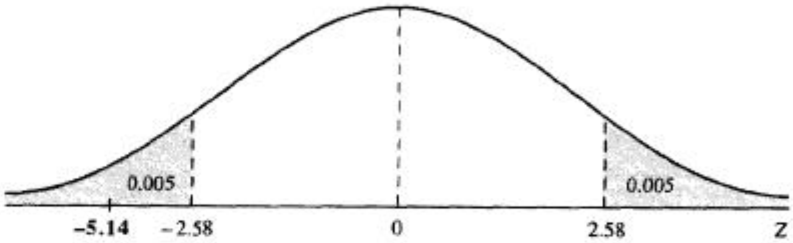
Sea $\alpha = 0.01$. A continuación sigue una prueba de hipótesis respecto al coeficiente de correlación poblacional:

$$H_0: \rho_s = 0$$
$$H_A: \rho_s \neq 0$$

El valor crítico de Z es ± 2.58. Entonces

$$Z = (-0.922)\sqrt{32 - 1}$$
$$= -5.14$$

Como se observa en la figura, debería rechazarse la hipótesis nula



Interpretación

el valor r_s de –0.922 indica una relación fuerte negativa entre horas y fallas. Entre más se pruebe un disco antes de ser utilizado, menos fallas experimentará al finalizar el programa completo.

Para utilizar Minitab, ingrese los datos para cada variable en columnas separadas. Clasifique cada una con MANIP > Rank. Luego haga clic en **STAT> BASIC STATISTICS > CORRELATION.** Minitab reportará r_s.

Ejercicios de la sección

14. Los economistas del Mid-West Research Institute están realizando un estudio para analizar la relación entre los ingresos de las personas y sus niveles de consumo. Once consumidores reportaron las siguientes cifras en miles de dólares. Al nivel de significancia del 5%, ¿el coeficiente de correlación de rangos de Spearman sugiere alguna relación?

Ingreso	97	58	69	47	58	38	91	67	68	47	48
Consumo	55	63	54	37	45	38	71	52	53	37	37

15. Al nivel del 10%, ¿existe una relación entre el tiempo de estudio en horas y las notas en el examen, de acuerdo con estos datos?

Tiempo	21	18	15	17	18	25	18	4	6	5
Nota	67	58	59	54	58	80	14	15	19	21

16. Las clasificaciones de las tasas de rendimiento de 50 acciones se comparan con las clasificaciones de su razón precio-ganancia produciendo $\sum d_i^2 = 19{,}412.5$. Al nivel del 5%, ¿qué puede concluir sobre una relación entre las dos variables de las acciones?

17. Ochenta y cinco hombres y 85 mujeres califican un producto produciendo $\sum d_i^2 = 10{,}010.25$. Al nivel de significancia del 1%, ¿existe alguna correlación entre las clasificaciones con base en el género?

14.7 Prueba de Kruskal-Wallis

La prueba U de Mann-Whitney sirve como la contraparte no paramétrica de la prueba t para dos muestras independientes; se utiliza para comparar dos poblaciones. Si se necesita comparar más de dos poblaciones, la **prueba Kruskal-Wallis** se aplica como extensión lógica de la prueba de Mann-Whitney, y se utiliza para probar la hipótesis respecto a la distribución de tres o más poblaciones. En este sentido, la prueba de Kruskal-Wallis funciona como la contraparte no paramétrica del diseño completamente aleatorizado utilizado en las pruebas ANOVA. Mientras que las pruebas ANOVA dependen del supuesto de que todas las poblaciones en comparación están distribuidas normalmente, la prueba Kruskal-Wallis no coloca esta restricción en la comparación.

Prueba de Kruskal-Wallis Es una prueba que compara tres o más poblaciones para determinar si existe una diferencia en la distribución de las poblaciones. Es análoga de la prueba F utilizada en las pruebas ANOVA.

La hipótesis nula establece que no hay diferencia en la distribución de k poblaciones bajo comparación. Las hipótesis entonces son:

H_0: Todas las k poblaciones tienen la misma distribución.

H_A: No todas las k poblaciones tienen la misma distribución.

La prueba requiere que las observaciones sean clasificadas, al igual que en la prueba de Mann-Whitney.

Para ilustrar. Supongamos que como nuevo gerente de cuentas de Pox Skin Ointment, debe comparar el tiempo que les toma a los tres clientes pagar los envíos de No-Flaw-Face Cream, un nuevo producto ofrecido por Pox. Se seleccionan aleatoriamente varias compras de cada cliente, junto con el número de días que cada uno se tomó en liquidar su cuenta. Los resultados aparecen en la tabla 14.10. El número de observaciones en todas las muestras no tienen que ser iguales.

Tabla 14.10
Número de días para pagar a Pox la entrega recibida

	Cliente		
Compra	**1**	**2**	**3**
1	28	26	37
2	19	20	28
3	13	11	26
4	28	14	35
5	29	22	31
6	22	21	
7	21		

Luego, cada observación debe clasificarse de más bajo a más alto. Al igual que con la prueba de Mann-Whitney, a los empates se les asigna un rango igual a la clasificación promedio para tales observaciones. Las clasificaciones luego se suman para todas las $k = 3$ muestras. La tabla 14.11 contiene los resultados. El estadístico Kruskal-Wallis es el siguiente:

Prueba de Kruskal-Wallis
$$K = \frac{12}{n(n+1)}\left[\Sigma\frac{R_i^2}{n_i}\right] - 3(n+1) \qquad [14.15]$$

en donde n_i es el número de observaciones en la i-ésima muestra
n es el número total de observaciones de todas las muestras
R_i es la suma de los rangos de la i-ésima muestra.

Tabla 14.11
Rangos para Pox

Cliente 1		Cliente 2		Cliente 3	
Días	**Rango**	**Días**	**Rango**	**Días**	**Rango**
		11	1		
13	2				
		14	3		
19	4				
		20	5		
21	6.5	21	6.5		
22	8.5	22	8.5		
		26	10.5	26	10.5
28	13				
28	13			28	13
29	15				
				31	16
				35	17
				37	18
	$\Sigma R_1=62$		$\Sigma R_2=34.5$		$\Sigma R_3=74.5$

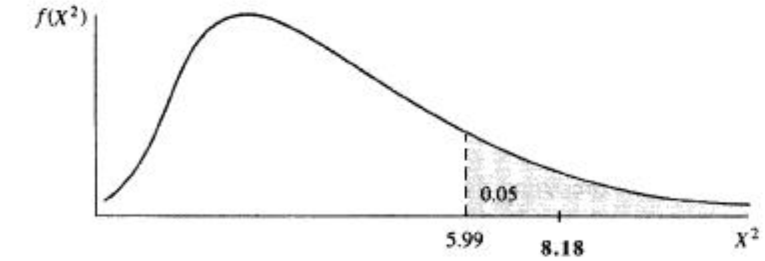
Luego se halla K utilizando la fórmula [14.15], así:

$$K = \frac{12}{18(18+1)}\left[\frac{(62)^2}{7} + \frac{(34.5)^2}{6} + \frac{(74.5)^2}{5}\right] - 3(18+1)$$
$$= 8.18$$

Ahora sólo resta comparar K con un valor crítico. La distribución de K es aproximada por una distribución chi-cuadrado con k - 1 grados de libertad. Si K excede el valor crítico de chi-cuadrado, se rechaza la hipótesis nula. La figura 14.10 lo ilustra. En caso de seleccionar un valor α de 5% en la prueba de Pox, el valor crítico de chi-cuadrado, dado es 3 - 1 = 2 grados de libertad se vuelve $\chi^2_{0.05,2} = 5.99$.

Regla de decisión: "No rechazar si $k \leq 5.99$. Rechazar si $k > 5.99$".

Figura 14.10
Prueba chi-cuadrado para Pox



Debido a que $k = 8.18 > 5.99$, se rechaza la hipótesis nula de que no hay diferencia en el tiempo que toma a tres clientes cancelar sus cuentas con Pox.

En el caso de que se rechace la hipótesis nula, el siguiente paso lógico es determinar cuáles diferencias son estadísticamente significativas y cuáles se deben a un error de muestreo. Es decir, una vez que se ha determinado que no todas las poblaciones tienen la misma distribución, se deben identificar las poblaciones que son significativamente diferentes. Este es en gran parte el proceso como en el cual se utilizaron los métodos de Tukey para detectar diferencias significativas en el estudio de ANOVA. De la misma manera que con el método de Tukey, éste involucra una comparación de todos los pares posibles.

Primero se debe calcular el rango promedio de cada muestra $\bar{R}_i$ dividiendo la suma del rango de la muestra por el número de observaciones en dicha muestra. Para la primera muestra es:

$$\bar{R}_1 = \frac{62}{7} = 8.86$$

De igual forma, $\bar{R}_2 = \dfrac{34.5}{6} = 5.75$ y $\bar{R}_3 = \dfrac{74.5}{5} = 14.9$. Las diferencias absolutas se hallan

$$|\bar{R}_1 - \bar{R}_2| = |8.86 - 5.75| = 3.11$$
$$|\bar{R}_1 - \bar{R}_3| = |8.86 - 14.9| = 6.04$$
$$|\bar{R}_2 - \bar{R}_3| = |5.75 - 14.9| = 9.15$$

Estos valores absolutos se comparan luego con un valor crítico para determinar si difieren significativamente. Este valor crítico C_k se calcula así:

Valor crítico para la prueba de Kruskal-Wallis

$$C_k = \sqrt{\chi^2_{\alpha,k-1}\left[\frac{n(n+1)}{12}\right]\left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right]} \qquad [14.16]$$

en donde $\chi^2_{\alpha,k-1}$ es el valor chi-cuadrado para probar la hipótesis original, 5.99 en este caso.

n_i y n_j son los tamaños de dos muestras en comparación

Si la diferencia real entre los rangos promedio de dos muestras es mayor que la diferencia crítica, se considera una diferencia significativa y se encuentra que las dos poblaciones son diferentes.

Si se tiene un diseño balanceado con muestras de igual tamaño, C_k será igual para todas las comparaciones por pares. Si el diseño, como en este caso no es balanceado, debe calcularse un valor diferente para C_k por cada comparación. Para comparar el cliente 1 con el cliente 2 para Pox, C_k es

$$C_k = \sqrt{5.99\left[\frac{(18)(19)}{12}\right]\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{6}\right]}$$
$$= 7.27$$

Debido a que $|\bar{R}_1 - \bar{R}_2| = |8.86 - 5\text{–}75| = 3.11$ es menor que 7.27, las poblaciones 1 y 2 no difieren. De igual forma, C_k para las poblaciones 1 y 3 es 7.65. Debido a que la diferencia absoluta observada entre 1 y 3 es $6.04 < 7.65$, estas dos poblaciones no son diferentes. Finalmente, C_k para las poblaciones 2 y 3 es 7.91. La diferencia real entre 2 y 3 es $9.15 > 7.91$, y se dice que las poblaciones 2 y 3 son diferentes.

Puede utilizarse el subrayado común para resumir con base en los rangos promedio.

$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_3$
5.75	8.86	14.9

La pantalla de Minitab 14.5 proporciona los resultados de la prueba para Pox. $H = 8.18$ es el valor k que se calculó anteriormente. También se proporciona el valor p de 0.017 .

Pantalla en Minitab 14.5

```
Kruskal-Wallis Test (Prueba de Kruskal-Wallis)

 LEVEL    NOBS      MEDIAN         AVE. RANK    Z VALUE
(Nivel)           (Mediana)  (Rango promedio)  (Valor Z)
      1      7       22.00               8.9      -0.41
      2      6       20.50               5.7      -2.11
      3      5       31.00              14.9       2.66
OVERALL     18                           9.5
(Global)
H = 8.18   d.f. = 2   p = 0.017
H = 8.24   d.f. = 2   p = 0.017 (adjusted for ties)(teniendo en cuenta los empates)
```

Debe ser evidente ahora que es posible utilizar ciertas pruebas no paramétricas cuando los supuestos esenciales necesarios para tales procedimientos estadísticos estudiados en capítulos anteriores no se pueden mantener. Ante la ausencia de condiciones específicas como la población distribuida normalmente, tales pruebas no paramétricas pueden ser el único camino de acción apropiado.

La tabla 14.12 compara las pruebas no paramétricas con sus contrapartes paramétricas. Cuando es apropiado, se suministra el análogo paramétrico para cada prueba no paramétrica. La tabla también indica los supuestos requeridos por las pruebas paramétricas que no son necesarias para realizar la contraparte no paramétrica.

Tabla 14.12 Comparación de las pruebas paramétricas y no paramétricas

Prueba no paramétrica	Propósito	Supuesto no necesario	Contraparte paramétrica
Signo	Prueba para la ubicación de la distribución poblacional	Distribución normal de las poblaciones	Prueba *t* para pares
Rachas	Prueba para aleatoriedad		Ninguna
U Mann-Whitney	Compara dos muestras independientes	Diferencia entre muestras es normal	Prueba *t* para muestras independientes
Kruskal-Wallis	Compara tres o más muestras	Medias muestrales distribuidas normalmente	Prueba *F* ANOVA
Rango de Spearman	Prueba para la relación entre dos variables clasificadas ordinalmente	Distribución de ambas variables es normal	Coeficiente de correlación de Pearson

Ejercicios de la sección

18. Recientemente, Bytec, Inc., ha tenido un problema con el ausentismo de los empleados en sus tres plantas de producción. Con base en los siguientes datos, tomados durante un período de seis días, sobre el número de empleados que estaban ausentes, ¿al nivel de significancia del 5% parece que hay una diferencia en el número de empleados que no llegan a trabajar? Si usted rechaza la hipótesis nula, realice una comparación por pares completa, con un subrayado común.

	Número de empleados ausentes
Planta 1	25,36,38,31,29,33
Planta 2	31,28,39,41,21,20
Planta 3	29,28,22,26,24,20

19. Para probar un nuevo alimento para mascotas, Puppy Love alimenta a cuatro grupos de cachorros de 10 semanas de edad con diferentes combinaciones de comida. Después de tres semanas se registra el incremento de peso. ¿Existe una diferencia significativa en los incrementos de peso al nivel del 5%? Si usted rechaza la hipótesis nula, realice una comparación completa por pares con subrayado común.

	Incremento en el peso (libras)
Mezcla 1	3,6,9,5,6
Mezcla 2	3,4,8,9,7
Mezcla 3	10,8,9,8,7
Mezcla 4	8,10,11,8,8

20. Security Investments utiliza tres métodos para seleccionar las acciones para sus portafolios. Al nivel del 5%, ¿existe una diferencia en las tasas de rendimiento para cada método con base en estos datos? Si usted rechaza la hipótesis nula, realice una comparación por pares completa con el subrayado común.

	Tasas de rendimiento (porcentajes)
Portafolio 1	14,12,10,15,13
Portafolio 2	9,6,8,5,5
Portafolio 3	6,8,5.9.7

Problemas resueltos

1. Ser o no ser - Un problema de control de calidad Según *U.S. News & World Report*, un laboratorio en Atlanta está procesando el veneno de serpiente para utilizarlo en la investigación médica. Se están probando cinco métodos para determinar cuál método tiene menos probabilidad de contaminar el veneno procesado. Si se prueba que una solución venenosa está contaminada, se marca con el símbolo "2B". Cada método produce 25 ampolletas de veneno cada día. Las ampolletas de cada método de procesamiento se empacan en cajas para ser enviadas a las instalaciones donde se realiza la investigación médica.

Para los propósitos del autor se supone que los científicos del laboratorio consideran que la contaminación está distribuida normalmente, pero otros argumentan que está distribuida binomialmente. Se contrata un consultor estadístico para analizar los patrones de defectos.

a. ¿La contaminación es uniforme? Se selecciona la producción durante un período de 100 días para cada método de procesamiento, y se anota qué método produjo las ampolletas menos contaminadas en ese día. Si las tasas de contaminación fueran uniformes, los científicos esperarían que cada método produjera las ampolletas menos contaminadas sobre un número igual de días. Por tanto, $E_i = n/k = 100/5 = 20$. Ambas, las frecuencias observadas y esperadas, se muestran en la tabla adjunta. Por ejemplo, en 34 de los 100 días, el método 1 produjo las ampolletas menos contaminadas de veneno de serpiente. Las hipótesis son:

H_0: Las tasas de contaminación son uniformes.

H_A: Las tasas de contaminación no son uniformes.

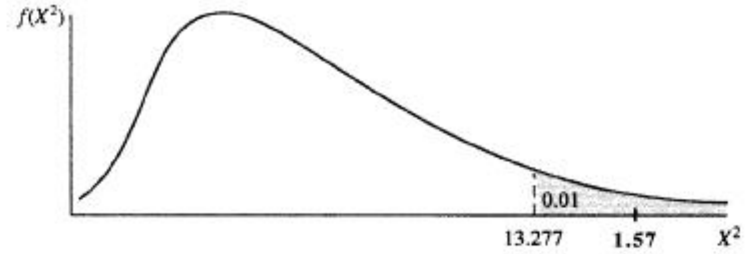
Método de procesamiento	E_i	O_i	$(O_i - E_i)^2$	$(O_i - E_i)^2 / E_i$
1	20	34	196	9.80
2	20	17	9	0.45
3	20	14	36	1.80
4	20	12	64	3.20
5	20	23	49	0.45
	100	100		15.70

Con $K - 1 = 4$ grados de libertad, la tabla H (apéndice III) muestra que una prueba del 1% revela un valor crítico de χ^2 – el valor de $\chi^2_{0.01,4} = 13.277$. Como lo muestra la figura, la regla de decisión es:

Regla de decisión: "No rechazar si $\chi^2 \leq 13.277$. Rechazar si $\chi^2 > 13.277$".

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$
$$= 15.7$$

Debido a que $15.7 > 13.277$, se rechaza la hipótesis nula. La tasas de contaminación no parecen ser uniformes.



b. ¿La contaminación es binomial? Los científicos del laboratorio quienes apoyan la idea de un patrón de contaminación binomial argumentan que 5% de las ampolletas producidas están contaminadas. Dada la tasa del 5%, el consultor estadístico va a comprobar las siguientes hipótesis:

H_0: Las tasas de contaminación son binomiales

H_A: Las tasas de contaminación no son binomiales

La prueba se aplica primero al método 1. Cada caja contiene $n = 25$ ampolletas. Si existe una distribución binomial en las tasas de contaminación con $\pi = 0.05$ como argumentan los científicos, la probabilidad de que cualquier caja contenga un número dado de ampolletas contaminadas, X, se encuentra en la tabla binomial. Por ejemplo, si $n = 25$ y $\pi = 0.05$, la probabilidad de que una caja contenga cero ampolletas contaminadas puede encontrarse en la tabla C (apéndice III) como $P(X = 0 \mid n = 25, \pi = 0.05) = 0.2744$. La probabilidad de que sólo una de las 25 ampolletas esté contaminada puede encontrarse en la tabla C como $P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0.6424 - 0.2740 = 0.3650$, y así sucesivamente. Por tanto, el número esperado de cajas de las 100 muestras que contienen cero ampolletas contaminadas es $nP_i = (100)(0.2774) = 27.74$ cajas. Para efectos de determinar $P(x)$ de la tabla binomial, $n = 25$ porque hay 25 ampolletas en cada caja. Para determinar el número de cajas con x ampolletas contaminadas, $n = 100$ debido a que son 100 cajas.

Los valores de E_i y O_i aparecen en la siguiente tabla. La primera tabla muestra que 31 de las 100 cajas del método 1 tuvieron cero ampolletas contaminadas:

Número de ampolletas contaminadas	O_i	$P(X)$	E_i
0	31	0.2774	27.74
1	32	0.3650	36.50
2	24	0.2305	23.05
3	10	0.0930	9.30
4	2	0.0269	2.69
5 o más	1	0.0072	0.72
	100		

Sin embargo, algunos de los valores de E_i son menores que 5. Las últimas tres clases deben combinarse para corregirlo. La segunda tabla es el resultado:

Número de ampolletas contaminadas	O_i	$P(X)$	E_i	$(O_i-E_i)^2/E_i$
0	31	0.2774	27.74	0.3831
1	32	0.3650	36.50	0.5548
2	24	0.2350	23.50	0.0106
3 o más	13	0.1226	12.26	0.0447
	100			0.9932

Si $\alpha = 0.05, \chi^2_{0.05,3} = 7.815$

Regla de decisión: "No rechazar si $\chi^2 \leq 7.815$. Rechazar si $\chi^2 > 7.815$".

Debido a que $\chi^2 = 0.9932$, no se rechaza la hipótesis nula. Las tasas de contaminación parecen estar distribuidas en forma binomial.

2. **La prueba del signo - Un caso de control de calidad** En un esfuerzo por mejorar su producto, una empresa que vende productos de pastelería pide a 15 degustadores calificar su pan de harina de trigo entre 0 y 10 antes y después de un leve cambio en los ingredientes. Los resultados se muestran parcialmente en la siguiente tabla:

Degustador	Calificación antes	Calificación después	Signo
1	7	8	-
2	6	6	0
3	9	8	+
4	5	7	-
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
15	8	7	+

En total se registraron ocho signos más, cinco signos menos y dos diferencias de cero. La empresa desea probar a un nivel del 5% si existe alguna diferencia. Por tanto:

$$H_0: m = p$$
$$H_A: m \neq p$$

Entonces,

$$P(m \leq 5 \mid n = 13, \pi = 0.50) = 0.2905$$

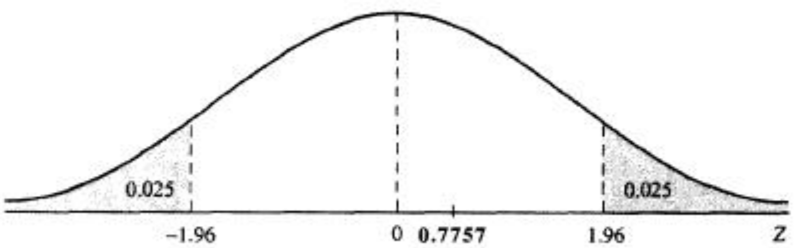
La probabilidad de obtener a lo sumo cinco signos menos dado que $m = p$ es mayor que $0.05/2 = 0.025$. La empresa no rechaza la hipótesis nula.

Si el tamaño de la muestra hubiera sido superior a 30, la fórmula [14.4] de Z se hubiera utilizado.

3. **Prueba U de Mann-Whitney para las medias** Dos despliegues publicitarios se utilizan para ayudar las ventas de un producto. La primera termina en ventas diarias de 110, 117, 82, 95, 123, 79, 92, 102, 108, y 113. El segundo despliegue produjo ventas de 111, 85, 97, 117, 111, 89, 118, 121, y 109. ¿Parece que al nivel del 5%, $\mu_1 = \mu_2$?

Despliegue 1	Rango	Despliegue 2	Rango
79	1	85	3
82	2	89	4
92	5	97	7
95	6	109	10
102	8	111	12.5
108	9	111	12.5
110	11	117	15.5
113	14	118	17
117	15.5	121	18
123	19		
	$90.5 = \Sigma R_1$		$99.5 = \Sigma R_2$

Si se fija α en 5%, el valor crítico de Z es ± 1.96.



$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1$$

$$= (10)(9) + \frac{10(10 + 1)}{2} - 90.5$$

$$= 54.5$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \Sigma R_2$$

$$= (10)(9) + \frac{9(9+1)}{2} - 99.5$$

$$= 35.5$$

$$\mu_u = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$= 45$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

$$= 12.247$$

$$Z = \frac{U_i - \mu_u}{\sigma_u}$$

$$= \frac{54.5 - 45}{12.247}$$

$$= 0.7757$$

La muestra sugiere que la hipótesis nula no se rechaza, y que ambos despliegues publicitarios tienen el mismo efecto en las ventas.

4. **Correlación de rangos de Spearman** A una consultora financiera se le pide evaluar las calidades de inversión de ocho acciones. Ella utiliza la tasa de dividendo de la acción, tal como se informó en *The Wall Street Journal*, y un potencial del índice para el potencial de crecimiento asignado a cada acción por una empresa inversionista de Nueva York. Los datos que se presentan aquí se utilizan para determinar si puede existir una relación entre dividendos y potencial de crecimiento:

Acción	Tasa de dividendo (%)	Rango del dividendo (X)	Índice de crecimiento	Rango del crecimiento (Y)	X - Y	$(X - Y)^2$
1	4.20	7	40	6	1	1
2	8.12	2	20	8	-6	36
3	7.20	5	60	4	1	1
4	3.20	8	35	7	1	1
5	8.00	3	85	1	2	4
6	12.73	1	70	2	-1	1
7	7.90	4	50	5	-1	1
8	6.20	6	65	3	3	9
						54

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(54)}{8(8^2 - 1)}$$

$$= 0.357$$

Si $\alpha = 0.10$, pruebe

$$H_0\colon \rho_S = 0$$
$$H_A\colon \rho_S \neq 0$$

La tabla N (apéndice III) revela un valor crítico de 0.6190. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula.

Lista de fórmulas

[14.1] $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$ Se utiliza chi-cuadrado para comparar las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas si la hipótesis nula es correcta.

[14.2] $$E_i = np_i$$ Las frecuencias esperadas son aquellas que se aguardan que sucedan si la hipótesis nula es correcta.

[14.4] $$Z = \frac{k \pm 0.5 - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$$ Valor Z para una prueba de signos de muestras grandes.

[14.5] $$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$$ Media de la distribución muestral del número de rachas.

[14.6] $$\sigma_r = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$$ Desviación estándar para la prueba de rachas.

[14.7] $$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$ Desviación normal para la distribución de rachas.

[14.8] $$U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1$$ El estadístico U de Mann-Whitney para la prueba de igualdad de dos poblaciones.

[14.10] $$\mu_u = \frac{n_1n_2}{2}$$ Media de la distribución muestral del estadístico U de Mann-Whitney.

[14.11] $$\sigma_u = \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$ Desviación estándar del estadístico U de Mann-Whitney.

[14.12] $$Z = \frac{U_i - \mu_u}{\sigma_u}$$ Normalización del estadístico U de Mann-Whitney.

[14.13] $$r_S = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$ Pruebas del coeficiente de correlación de rangos de Spearman para toda relación entre variables clasificadas por rangos.

[14.14] $$Z = r_s\sqrt{n - 1}$$ Desviación normal de la prueba de rangos de Spearman con muestras grandes.

[14.15] $$K = \frac{12}{n(n + 1)}\left[\Sigma\frac{R_i^2}{n_i}\right] - 3(n + 1)$$ La prueba de Kruskal-Wallis se utiliza para comparar tres o más poblaciones.

[14.16] $$C_k = \sqrt{\chi^2_{\alpha,k-1}\frac{n(n + 1)}{12}\left[\frac{1}{n_i} = \frac{1}{n_j}\right]}$$ Determina el valor crítico en una prueba de Kruskal-Wallis para las comparaciones por pares.

Ejercicios del capítulo

21. Su supervisor le ha pedido determinar si existe una relación entre el tipo de técnica de presupuesto de capital que utiliza una empresa y su ingreso neto después de impuestos. Los datos que usted recolecta relacionan tres técnicas: el valor actual, la tasa interna de retorno, y el índice de rentabilidad, con cuatro niveles de ingreso: US$0 a US$3'000,000, US$3'000,000 a US$6'000,000, US$6'000,000 a US$9'000,000, y por encima de US$9'000,000. Se ha tabulado el número de empresas que caen en las categorías conjuntas. ¿Qué herramienta estadística utilizaría para detectar alguna relación?

22. Usted debe comparar los niveles de gastos promedio de tres grupos de consumidores, pero no puede asumir que las poblaciones están distribuidas normalmente o que sus varianzas son iguales. ¿Qué herramienta estadística debería utilizar?

23. Como gerente regional de una empresa minorista, usted desea determinar si los niveles de ingreso de las personas y sus patrones de consumo están relacionados. ¿Qué herramienta estadística debería utilizar?

24. Un economista de una compañía internacional de valores recolectó datos sobre los niveles de consumo de 25 personas, antes y después de que el gobierno federal anunciara un gran incremento en los impuestos. ¿Qué herramienta estadística permitirá al economista determinar si el impuesto afectó el consumo promedio?

25. Usted debe seleccionar una muestra de los clientes de su empresa con base en el género. ¿Cómo puede determinar si un procedimiento muestral es aleatorio?

26. Su asistente estadístico ha obtenido datos sobre dos muestras independientes tomadas para comparar las edades de las personas. Si no puede asumirse que las poblaciones son normales, ¿cuál prueba debería utilizarse?

27. ¿Por qué se utilizan las pruebas no paramétricas? ¿Por qué no se confía siempre en las pruebas paramétricas ya que éstas son más fuertes?

28. ¿Qué se mide con una prueba de signo?

29. ¿Qué mide una prueba de rachas?

30. Cite su propio ejemplo en el cual se necesite la prueba de Spearman y describa exactamente qué es lo que usted está midiendo en su ejemplo.

31. Un banco en Des Moines desea determinar si la distribución de los clientes es uniforme a lo largo de la semana. Una encuesta descubre que el número de clientes de lunes a viernes son 150, 179, 209, 79 y 252. Al nivel del 5%, ¿parece que existe una distribución uniforme?

a. Plantee la hipótesis

b. Plantee la regla de decisión.

c. Realice la prueba y tome sus determinaciones.

32. El profesor Showers argumenta que la distribución de notas por parte de sus alumnos es de 5% en calificación A, 20% en B, 30% en C, 40% en D y el resto en F. Si este es el caso, su decano le ha prometido un aumento del 15% en su salario. Al nivel del 1%, ¿el profesor obtiene su aumento si las 100 notas seleccionadas aleatoriamente son: 7 de A, 20 de B, 27 de C, 36 de D y 10 de F?

33. Creative Floorings ha decidido ordenar sus suministros en volumen si el tamaño de tapetes que se colocan en las casas está distribuido normalmente. Ayude a los gerentes de la compañía a tomar su decisión con base en los siguientes datos muestrales. Sea α 1%.

Yardas cuadradas (100's)	Número de casas de este tamaño
Hasta 5	97
5 a 10	137
10 a15	245
15 a 20	256
20 a 25	154
25 y más	111

34. la tabla de frecuencia que aparece a continuación registra ventas diarias para 200 días. ¿En $\alpha = 0.05$, las ventas parecen estar distribuidas normalmente?

Ventas	Frecuencia
40 hasta 60	7
60 hasta 80	22
80 hasta 100	46
100 hasta 120	42
120 hasta 140	42
140 hasta 160	18
160 hasta 180	11
180 hasta 200	12

35. "Ciudadanos para un medio no violento" proporcionó datos que luego se publicaron en una emisión reciente de *U.S. News & World Report* sobre el número de actos de violencia que se ve en ciertos tipos de programas de televisión. La organización reclamaba que tales actos ocurrían con igual frecuencia en todos los tipos de programas. Pruebe este reclamo al nivel del 10%.

Tipo de programa	Actos de violencia
Drama	42
Películas viejas	57
Dibujos animados	83
Policías/Detectives	92
Comedias	38
Noticias	81

36. Greenpeace (Paz verde), el grupo de conservación mundial, exigió una sanción de las Naciones Unidas por la matanza de bebés foca en lo que se denominó los "meses de alta mortalidad". Finlandia, que todavía permite tales "masacres", afirmó que la actividad era consistente durante todo el año y no variaba de mes a mes. Dados los datos de 1997, suministrados por Greenpeace, ¿a qué conclusión llega usted? Sea α 1%

Mes	Número de muertes
Enero	112
Febrero	89
Marzo	156
Abril	104
Mayo	165

37. El gerente de producción de AAA, Inc., debe garantizar que su mezcla de productos se ajuste a un sistema particular de cuotas. Se le indica que debe ajustarse a un patrón que produce 30% de productos de seda, 20% de lana, 10% de algodón, y 40% de cuero. De las últimas 200 unidades producidas, 65 eran de seda, 45 de lana, 25 de algodón, y 65 de cuero. Al nivel del 5%, ¿debería ajustarse al patrón de producción actual? Plantee la hipótesis.

38. Una cadena minorista tiene seis puntos de venta. Ha venido esforzándose mucho para alcanzar niveles de ventas similares en todas las seis tiendas. La empresa de publicidad que maneja la gestión promocional afirma que en este momento, cada tienda debería reportar ventas iguales. Si las ventas no son iguales, la cadena minorista ha decidido acabar su asociación con la agencia publicitaria. ¿Qué decisión se debería tomar con base en los datos que aparecen a continuación? Plantee su hipótesis. Sea $\alpha = 0.01$.

Tienda	Ventas (US$100')
1	42
2	37
3	53
4	51
5	45
6	47

39. La tienda por departamentos Macy's, de Nueva York, recientemente hizo un estudio para determinar si había alguna relación entre el estado civil del cliente y su volumen de compras en dólares. Los resultados aparecen en la siguiente tabla. ¿Cuál es su conclusión al nivel de significancia del 5%?

	Volumen en dólares				
	<10	10-19	20-29	30-39	40-49
Casado	32	23	15	12	14
Divorciado	51	17	10	15	13
Soltero	21	19	29	35	39
Viudo	18	15	19	10	9

40. El Ministerio de Hacienda de Estados Unidos ha estimado que el "incremento en los honorarios típicos del contribuyente necesarios para balancear el presupuesto está distribuido uniformemente en todos los estados". La emisión del 28 de febrero de 1994 de *U.S. & World Report* publicó las siguientes estadísticas:

Estado	Incremento del contribuyente promedio (10 primeros estados)
Connecticut	US$1,100
New Jersey	952
New York	877
Massachusetts	852
DC	851
Maryland	840
Nevada	828
Illinois	822
Washington	809
California	789

Al nivel del 5%, ¿el Ministerio de Hacienda puede ser apoyado?

41. The General Store determinará las fechas de ventas con base en la distribución de los rendimientos. Dados los siguientes datos, al nivel del 5% ¿parece que los rendimientos son normales? Se sabe que la media es 25.6 y σ es 10.1.

Ingreso/Mes (US$100's)	Número de meses
Hasta 10	10
10 a 20	23
20 a 30	30
30 a 40	25
40 y más	12

42. Se consideran los siguientes datos sobre los tiempos de finalización de trabajos, los cuales se tomaron de una población con una media de 18 y una desviación estándar de 4.

Tiempos (horas)	Número de trabajos
Hasta 10	10
10 a 15	101
15 a 20	223
20 a 25	146
25 y más	20

a. Al nivel del 5%, ¿puede concluirse que los tiempos están distribuidos normalmente?

b. ¿En qué difieren los resultados si el primer intervalo es "5 a 10"? y el último es "25 a 30"?

43. El economista jefe de la Oficina de Ingreso Estatal debate con su supervisor quien argumenta que los pagos de impuestos están distribuidos normalmente. Los datos de 2,000 contribuyentes proporcionan los siguientes resultados. Al nivel del 1%, ¿el supervisor está en lo cierto?

Pago de impuestos (US$10's)	Contribuyentes
Hasta 15	248
15 a 30	232
30 a 45	489
45 a 60	512
60 a 75	263
75 y más	256

44. *Runner's World* informó que una encuesta realizada por Converse, sobre personas que para hacer ejercicio hacían trote de forma regular, produjo los siguientes resultados. La intención del estudio era determinar si las distancias eran independientes de la preferencia de los deportistas en cuanto a un producto similar al gel utilizado en los talones de sus zapatillas para trotar. Al nivel del 1%, ¿parece existir alguna relación? Plantee la hipótesis.

Distancia/semana (millas)	Prefieren gel	No prefieren gel	No opinan
<3	14	5	27
3-6	18	5	17
7-10	12	8	8
10-13	17	12	5
>13	19	8	2

45. Los datos sobre años de experiencia y calificaciones de la eficiencia, para 431 empleados en XYZ, Inc., aparecen en la siguiente tabla. ¿Se puede concluir que estos atributos son independientes el uno del otro? Sea $\alpha = 5\%$.

	Eficiencia			
Experiencia en años	**Pobre**	**Bueno**	**Excelente**	**Superior**
<5	14	18	12	17
5-10	18	13	27	42
11-16	16	32	24	37
17-22	24	28	21	32
>22	17	15	14	10

46. Los resultados de un estudio realizado por la Asociación Norteamericana de Mercadeo para determinar la relación entre la importancia que dan a la publicidad los propietarios de tiendas y el tamaño de la tienda que poseen, aparecen en la siguiente tabla. ¿Parece que todos los propietarios de tiendas ponen el mismo énfasis a la publicidad? Sea $\alpha = 0.10$. Plantee la hipótesis

	Publicidad		
Tamaño	**Importante**	**No importante**	**No opinan**
Pequeña	20	52	32
Mediana	53	47	28
Grande	67	32	25

47. Una compañía embotelladora en Atlanta está interesada en los efectos de tres métodos que utilizan para la higiene de los contenedores de vidrio. Califica los contenedores para determinar si la higiene es independiente del método. Al nivel de significancia del 10%, ¿cuál es su conclusión con base en los datos en la tabla?

	Nota de higiene		
Método	**Aceptable**	**Marginal**	**No aceptable**
A	140	132	63
B	89	74	44
C	104	98	50

48. A ocho sujetos de prueba se les pide calificar un producto antes y después de ver un comercial sobre el mismo. Las calificaciones se presentan en la siguiente tabla, en donde una calificación de 10 es la mejor. Sea $\alpha = 0.10$ y utilice una prueba de signo para la hipótesis de que el comercial mejoró la calificación del producto. Plantee la hipótesis.

	Calificaciones	
Sujeto de prueba	**Antes del comercial**	**Después del comercial**
1	8	9
2	7	6
3	5	6
4	5	5
5	5	4
6	7	8
7	6	7
8	6	8

49. Un compuesto químico se agrega a una solución a base de aceite, esperando incrementar sus calidades de lubricación. Veinte soluciones, 10 con el compuesto y 10 sin éste, se comparan respecto a su capacidad para lubricar la maquinaria. Cada uno es calificado en una escala de 0 a 10, siendo 10 la mejor. Con base en los datos de la tabla, ¿parece que el compuesto incrementa la lubricación? Sea $\alpha = 0.10$. Plantee la hipótesis. ¿Cuál es su conclusión respecto al valor del compuesto químico?

	Grado de lubricación	
Solución	**Sin compuesto**	**Con compuesto**
1	8	4
2	7	8
3	5	2
4	6	9
5	9	5
6	4	4
7	9	2
8	8	6
9	7	6
10	6	7

50. Shytel, Inc., ofrece servicios de comunicación en todo el mundo con dos satélites, el *Falcon* y el *Eagle*. El director ejecutivo de Shytel considera que *Eagle* presenta demoras mayores en la transmisión. Los tiempos de transmisión aparecen en minutos en la siguiente tabla. Al nivel del 5%, ¿parece que el director ejecutivo está en lo cierto? Plantee su hipótesis.

Tiempos de transmisión (minutos)		
Falcon	**Eagle**	**Signo**
5.2	4.7	+
8.6	7.9	+
9.0	9.7	-
4.3	8.4	-
6.2	3.7	+
7.9	7.3	+

51. Clyde Bloomquist ha propuesto un cambio en la política corporativa respecto a la recolección de cuentas por cobrar. Considera que reducirá el tiempo necesario para obtener el pago de deudas pendientes de los acreedores. Los registros de la compañía demuestran que ocho de los acreedores tomaron el número de días que aparecen en la tabla, antes y después del cambio de política para remitir los fondos vencidos. ¿Está Clyde en lo cierto? ¿Debería mantenerse el cambio de política? Sea $\alpha = 0.10$. Plantee la hipótesis

Acreedor	Antes	Después
1	18	12
2	27	22
3	32	31
4	23	24
5	31	28
6	36	24
7	18	16
8	35	25

52. A los compradores de un gran centro comercial en Dayton, se les preguntó cuál de las dos marcas de yogur preferían. Cuarenta y dos respondieron que el Swedish Heaven, 31 escogieron Merry Melody, y 12 no expresaron ninguna preferencia. Si la tienda local de yogur ofreciera una sola marca, ¿cuál sería la mejor? Sea $\alpha = 0.10$ Plantee la hipótesis.

53. Un fabricante utiliza piezas o del proveedor A o del proveedor B para hacer sus productos. Un chequeo de la producción de ayer revela que el orden en el que se utilizaron las partes de estos proveedores era:

AA	BBB	AAA	B	A	BB	AA	BB

¿Parece que las partes se están utilizando aleatoriamente? Sea $\alpha = 0.05$. Plantee su hipótesis y su conclusión.

54. Smile Bright vende crema de dientes en tubos de 17 onzas. La gerencia espera que los excedentes y faltantes en el contenido sea aleatorio. Si no lo son, la gerencia asume que algo está mal con el sistema de llenado y cerrará la línea de producción. ¿Debería cerrarse la línea si los recipientes miden 16.8, 18.2, 17.3, 17.5, 16.3, 17.4, 16.1, 16.9, 17, 18.1, 17.3, 16.2, 17.3, y 16.8 onzas? Sea $\alpha = 0.05$.

55. Se registraron los ingresos de ventas de los últimos 37 días. Usted verá que tales valores están por debajo de la mediana con una "B" y los que están por encima con una "A". Al contar los resultados, usted encuentra 18 de "A", 19 de "B" con 10 rachas. Su política es incrementar la publicidad si los ingresos no están distribuidos aleatoriamente. ¿Debería incrementar la publicidad? Plantee la hipótesis. Sea $\alpha = 0.05$.

56. Acme Plumbing licita en trabajos de construcción para edificaciones en la ciudad. Si los contratos los otorga la ciudad sin consideración política, Acme no debería presentar ningún patrón bien sea que se acepte o se rechace su propuesta. Para las últimas 63 licitaciones, Acme ha tenido 32 aceptadas y el resto rechazadas, con 27 rachas. Al nivel del 5%, ¿parece que las propuestas se asignan con base en la política? Plantee la hipótesis, la regla de decisión y su conclusión.

57. Gladys Glucose ofrece a los visitantes del parque helado con sabor a vainilla y chocolate. Las últimas 73 ventas fueron 40 helados de vainilla y 33 de chocolate, con 16 rachas. Si las ventas no son aleatorias, Gladys pasará su camión de helados al zoológico local. ¿En dónde debería poner su negocio? Sea $\alpha = 0.05$.

58. Una gran compañía contrató 52 hombres y 41 mujeres, resultando 32 rachas. Si la ausencia de aleatoriedad en el proceso de contratación indica discriminación, ¿puede alegarse que la compañía discrimina por sexo en sus prácticas de contratación? Sea $\alpha = 0.10$.

59. Durante un período de 12 días, Gladys Glucosa vendió 4, 11, 5, 7, 10, 13, 12, 5, 9, 6, 2 y 1 galones de vainilla y 19, 4, 6, 8, 18, 17, 17, 15, 3, 16, 14 y 0 galones de chocolate. Utilizando la prueba U de Mann-Whitney, ¿ella puede concluir que vende en promedio la misma cantidad de ambos sabores? Sea $\alpha = 0.01$.

60. El director de mercadeo de Software, Inc., trató 15 discos de computador con una solución especial para reducir el desgaste. Se utilizó una segunda solución para tratar otros 15 discos, y todos fueron evaluados con base en el desgaste. Los que fueron tratados con la primera solución mostraron un desgaste mejorado, medido en horas de uso de 65, 73, 82, 52, 47, 51, 85, 92, 69, 77, 84, 68, 75, 74 y 89 horas. Los sometidos a la segunda solución reportaron tiempos de desgaste aumentados de 73, 84, 91, 87, 90, 71, 72, 93, 99, 98, 89, 88, 79, 88 y 98 horas. Al nivel del 10%, ¿el director puede concluir que existe alguna diferencia en los factores de desgaste mejorados?

61. El gerente de control de calidad de una gran planta en Denver, da dos manuales de operaciones a dos grupos de empleados. Luego, a cada grupo se le prueba sobre los procedimientos de operaciones. Los puntajes aparecen en la siguiente tabla. El gerente siempre ha considerado que el manual 1 proporciona una mejor base de conocimientos para los nuevos empleados. Compare los puntajes promedio de la prueba de los empleados que aquí se presentan y reporte su conclusión. Plantee las hipótesis. Sea $\alpha = 0.05$.

Puntajes de la prueba de los empleados														
Manual 1	87	97	82	97	92	90	81	89	90	88	87	89	93	
Manual 2	92	79	80	73	84	93	86	88	91	82	81	84	72	74

62. Para hacer vigas I para la construcción de grandes edificios se utilizan dos procesos de fabricación. Se prueba cada viga I y se registra su resistencia a la tensión. Veintitrés vigas elaboradas con el primer proceso dan $\Sigma R_1 = 690$, y 27 vigas fabricadas con el segundo proceso produce $\Sigma R_2 = 585$. Un ingeniero constructor argumenta que el primer proceso produce vigas que por lo menos tienen la resistencia a la tensión observada en las vigas hechas con el segundo proceso. Al nivel del 5%, ¿está en lo cierto?

63. Un economista agrícola trata 50 acres de tierra con el químico Docide, para incrementar el rendimiento del cultivo. Otros 50 acres se tratan con Mildolmine, y se miden los rendimientos. $\Sigma R_D = 2,125$ y $\Sigma R_M = 2,925$. El economista le dice a los agricultores que el Docide, que es el químico más económico, producirá un rendimiento mayor que el Mildolmine. Al nivel del 10%, ¿el economista está en lo cierto? Plantee las hipótesis.

64. *Personnel Management* publicó un artículo que describe los esfuerzos realizados por una empresa manufacturera en Toledo para evaluar a sus supervisores. A los empleados se les pidió calificar a sus supervisores en una escala de 10 a 100. A continuación se presenta un subconjunto de los resultados obtenidos para tres de las áreas de trabajo. Determine si existe una diferencia en las clasificaciones recibidas por los supervisores. Plantee las hipótesis, la regla de decisión y su conclusión. Sea α 5%.

Taller	Oficina	Puerto de carga
40	63	50
52	59	52
63	55	63
81	61	55
72	48	71
72	53	45
	49	

65. El contratista local en plomería tomó como muestra un total de 48 llamadas para determinar cuál de los cuatro tipos de accesorios de plomería producen más problemas. A continuación se presentan los resultados:

Modelo de accesorio	Número de fallas
1	15
2	11
3	10
4	12

Al nivel de significancia del 1%, ¿la falla de los accesorios parecen estar distribuidos normalmente? Plantee sus hipótesis, la regla de decisión y la conclusión.

66. Se analizan cuatro métodos para tratar las varillas de acero y determinar si hay alguna diferencia en la presión que las varillas pueden soportar antes de romperse. Los resultados de las pruebas que miden la presión en libras antes que se doblen las varillas se muestran en la siguiente tabla. Practique la prueba, complete con las hipótesis, la regla de decisión y la conclusión. Sea α 1%.

Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
50	10	72	54
62	12	63	59
73	10	73	64
48	14	82	82
63	10	79	79

67. La compañía productora del Segundo Mejor Yogur del Mundo pregunta a 60 personas cuál de los cuatro sabores nuevos prefieren. Veintiuno escogen el de coco, 13 escogieron ciruelas pasas con cubierta de salsa de tomate, 10 seleccionaron mostaza con mantequilla de maní y 16 manifestaron su inclinación por la esencia de atún. ¿Parece haber alguna preferencia entre los sabores por parte de los clientes? Sea α el 10%. Plantee las hipótesis y su conclusión.

68. Para obtener un crédito extra en su curso de estadística, Bárbara debe determinar si hay alguna diferencia en el número promedio de horas que los alumnos de primer año pasan estudiando, los estudiantes de segundo año, los estudiantes de penúltimo año y los de último año de su universidad. Su investigación reveló lo siguiente:

Primer año	Segundo año	Penúltimo año	Ultimo año
20	18	22	29
29	9	19	31
10	12	21	27
17	15	31	22
15	14	42	18
23	22	22	31
27			

Ayude a Bárbara a ganar un crédito extra en estadística planteando sus hipótesis y la conclusión. Sea α 10%.

69. Como gerente de producción de Sports Wear, Inc., Beverlee Hills debe garantizar que las tallas de su nueva línea de ropa deportiva se produzcan de acuerdo con un patrón predeterminado. La investigación de mercado indica que los clientes prefieren 20% extra grande, 30% grande, 25% mediana, y 25% pequeña. Una muestra aleatoria de 145 prendas revela 32 extra grandes, 40 grandes, 41 medianas, y 32 pequeñas. Al nivel del 5%, ¿parece que se están manteniendo las proporciones deseadas de tamaños?

70. La señorita Hills del ejercicio anterior, debe determinar si los hábitos de gastos de varios grupos demográficos son los mismos. Ella analiza el tamaño de las compras típicas, medidas en dólares, de cuatro grupos: hombres casados (HC), mujeres casadas (MC), hombres solteros (HS) y mujeres solteras (MS). Encuentra la siguiente información:

HC	MC	HS	MS
US$50	US$20	US$19	US$87
17	23	32	20
23	82	66	95
48	46	72	34
63	13	41	11

Al nivel de significancia del 1%, ¿parece que existe una diferencia en los hábitos de gastos de estos cuatro grupos?

71. Dos analistas financieros clasifican según su valor de inversión siete emisiones de bonos corporativos. Los resultados aparecen en la siguiente tabla. Utilizando las clasificaciones como muestra, calcule la prueba de correlación por rangos de Spearman para determinar si existe alguna correlación entre las prácticas de estos dos analistas al nivel del 10%.

Corporación	Rangos del primer analista	Rangos del segundo analista
1	4	3
2	3	4
3	1	2
4	2	5
5	7	6
6	6	1
7	5	7

72. Dos compañías que compran flotas de camiones para uso industrial, califican seis modelos de camión en una escala de 1 a 10. Calcule el coeficiente de rangos de Spearman para determinar al nivel del 1% si las calificaciones son independientes:

Modelo	Calificación por parte de la primera compañía	Calificación por parte de la segunda compañía
1	8	9
2	7	6
3	5	8
4	7	5
5	3	7
6	2	8

73. Todos los 50 estados están clasificados por dos agencias de viajes según su preferencia como destino vacacional. Los resultados revelan $\sum d^2 = 22{,}712$. Pruebe la independencia en las clasificaciones al nivel del 10%.

74. Las mejores 10 firmas de la lista de los 500 mejores de la revista Fortune fueron calificadas por la AFL-CIO y por un grupo gerencial con base en la calidad del sistema de cuidado de la salud que cada compañía proporciona a sus empleados. Utilizando los resultados que se proporcionan a continuación, determine al nivel del 5% si existe alguna correlación en las prácticas de calificación de los gremios y de la gerencia.

Empresa	Calificación gremial	Calificación según la gerencia	Empresa	Calificación gremial	Calificación según la gerencia
1	5	6	6	6	4
2	8	10	7	1	8
3	2	3	8	9	1
4	7	9	9	3	2
5	4	7	10	10	5

75. Setenta y tres empleados son calificados por dos gerentes con base en sus niveles de productividad. Calcule el coeficiente de rangos de Spearman para determinar si las calificaciones son independientes al nivel del 1% con $\sum d^2 = 78{,}815$.

PUESTA EN ESCENA

Para ayudar a Mama a resolver su problema con Dante, como se describió en la sección Escenario, primero se debe determinar las preferencias de los estudiantes en cuanto a los sabores de las pizzas. Al preguntar a 135 estudiantes, se encuentra que 47 prefieren peperoni, 63 salchicha y 21 queso, mientras que 4 prefieren la pizza vegetariana. Mama considera que tales preferencias están distribuidas normalmente, mientras que usted considera que es más probable que se ajusten a un patrón descrito como 35%, 45%, 15% y 5%, respectivamente.

Se trata de ajustar una distribución normal a los gastos de los estudiantes con base en la encuesta, la cual produjo los patrones descritos en la siguiente tabla de frecuencias. ¿Qué descubre?

Gasto	Frecuencia
US$0 y menos de US$5	4
US$5 y menos de US$10	11
US$10 y menos de US$15	45
US$15 y menos de US$20	47
US$20 y menos de US$25	25
US$25 y más	3

También puede determinarse si existe alguna relación entre las preferencias de los estudiantes por las pizzas grande (G), mediana (M) o pequeña (P) y su condición como estudiantes graduados (GR) o sin graduar (SG). Los datos presentan el siguiente resultado:

	G	M	P
SG	51	19	9
GR	22	15	19

Mama está interesada en saber si existe una diferencia en el número promedio de veces por semana que los no graduados comen fuera, en comparación con los estudiantes graduados. Tomando un subconjunto de 10 graduados y 10 no graduados de la muestra de 135 estudiantes, se encuentra que tales números son:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No graduado	6	9	11	8	6	12	15	5	7	9
Graduado	3	0	8	4	2	2	5	4	1	0

¿Qué le dirá usted a Mama?

Finalmente, usted debe determinar si existe alguna relación entre los no graduados con el número de veces por semana que un estudiante come en Mama's, y su ingreso. Los diez estudiantes no graduados reportan ingresos por semana de US$50, US$60, US$80, US$55, US$45, US$90, US$100, US$50, US$55 y US$60, respectivamente.

Prepare su informe a Mama en forma de reporte estadístico, tal como se describe en el apéndice I.

Del escenario a la vida real

Como analista de mercado de la sección Escenario, a comienzos de capítulo, probablemente usted deseará reunir la información sobre el menú de las compañías en franquicia como Pizza Hut y Domino's. Sus ofertas en su área o en sectores universitarios similares en otras partes del condado puede proporcionar nuevas ideas para que usted las pruebe y ganar colaboración para los resultados de su encuesta.

Usted puede revisar los menús de Pizza Hut en (*http://www.pizzahut.com.hk*). En la página de presentación haga clic en la casilla de pizza animada. Luego haga clic en "Full Menu". Allí usted se puede poner en contacto con diferentes áreas para observar la variedad de pizzas que ofrecen, así como los menús para pasta, para entradas y para bebidas. Explore estas áreas. ¿Desea ver alguna combinación de pizzas especiales de interés potencial en su mercado local? ¿Ya las ha incluido en la encuesta que está realizando para la pizzería Mama's? Algunas de las entradas son atractivas y razonables en su mercado local como para ofrecerlas dentro del funcionamiento de Mama's? ¿Cómo puede ayudar al negocio un menú extenso?

Usted puede analizar lo que ofrece Domino's en (*http//www.dominos.com*). En la página de presentación haga clic en "Explore" (Explorar). En la página siguiente haga clic en "Pizza Fest". Desplácese hacia abajo al enlace "Top 10!" y haga clic en él. Después de ver esta información, desplácese hacia la parte inferior de la página y haga clic en "Pizza Oven". La columna izquierda proporciona más información sobre un menú más extenso que en Top 10! Responda las mismas preguntas que se plantearon para Pizza Hut.

¿Cuáles de estos sitios son más útil para usted y por qué?