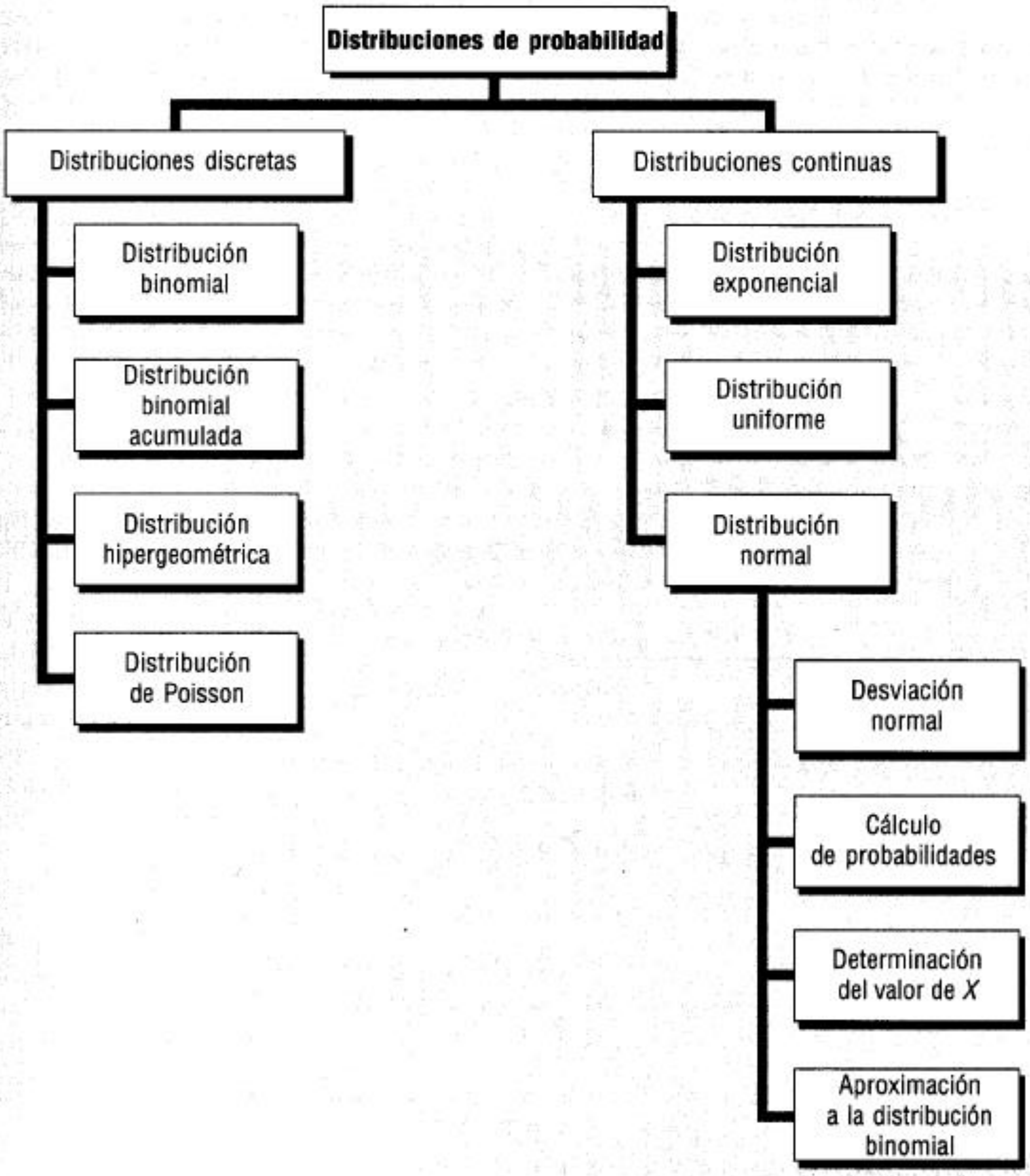
Plan del capítulo

Este capítulo analiza cómo pueden utilizarse las distribuciones de probabilidad para solucionar muchos problemas de negocios. En las ilustraciones se utilizan variables tanto discretas como continuas.

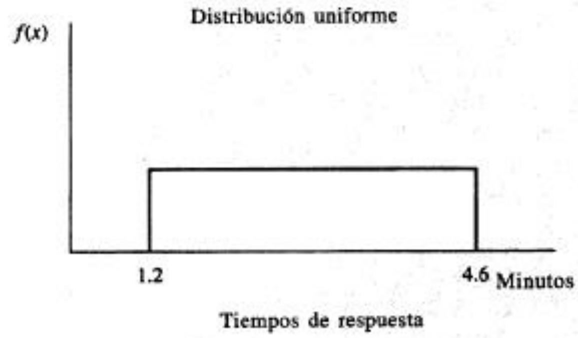


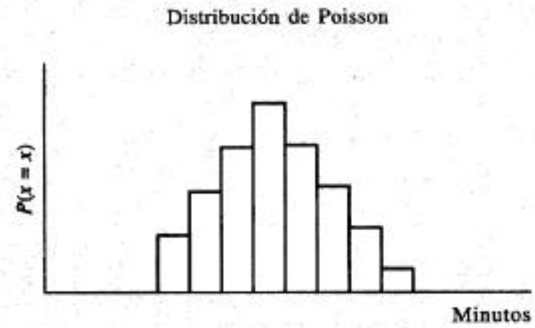
ESCENARIO

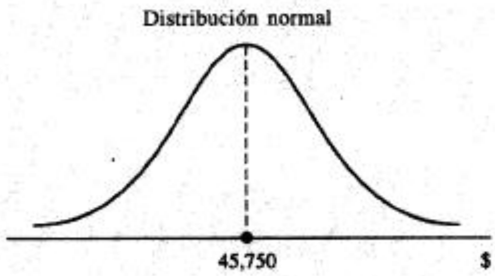
Un estudio de factibilidad realizado por profesores de la Escuela de Negocios de la Universidad de Bradley (*College of Business at Bradley University*) en Peoria, Illinois, reveló que los viernes y sábados en la noche el tiempo de respuesta a las llamadas al número 911 oscilaba entre 1.2 y 4.6 minutos y se comprobó que estaban distribuidas uniformemente. Las llamadas tenían la distribución de Poisson y alcanzaron una tasa promedio de 9 por hora. Si la policía de la ciudad tuviera que responder más de 3 llamadas, en cualquier momento podrían acudir a la policía estatal para solicitarles ayuda.

El alcalde de la ciudad deseaba reducir el tiempo promedio de respuesta a 2 minutos. Se estimaba que el costo de más patrullas, máquinas de bomberos y personal sería de US$575,000 por cada reducción de 30 segundos. El costo debía ser asumido por un impuesto predial a las casas cuyo valor en el avalúo catastral estuviera por encima de US$70,000. Las casas en Peoria tienen un avalúo catastral promedio de US$45,750 con una desviación estándar de US$15,110 y parecía estar distribuido normalmente. En el momento del estudio había 42,089 casas en los límites de la ciudad.

El estudio presentado a la alcaldía estaba diseñado para evaluar la respuesta de la ciudad a las emergencias, así como también la factibilidad de lograr la meta de reducción en el tiempo de respuesta que quería el alcalde. El reporte final necesitó de la aplicación de numerosas distribuciones de probabilidad así como de una evaluación del potencial de promulgar un sobrecargo al impuesto predial para financiar las mejoras del programa.







5.1 Introducción

En el capítulo anterior se analizó el concepto de probabilidad. El objetivo era determinar la probabilidad de un evento. En este capítulo definiremos las variables aleatorias y utilizaremos las leyes de probabilidad. Una **variable**

aleatoria es una variable cuyo valor es el resultado de un evento aleatorio. Se supone que se lanza una moneda tres veces y se anota el número de caras que se obtienen. Los posibles resultados son 0 caras, 1 cara, 2 caras, o 3 caras. La variable aleatoria es el número de caras que se obtienen, y los posibles resultados son los valores de la variable aleatoria. Como segundo ejemplo, los pesos de envío del agua mineral en contenedores oscilaban aleatoriamente entre 10 a 25 libras. Los pesos reales de los contenedores, en libras, son los valores de la variable aleatoria "peso".

Tal y como lo sugieren estos dos ejemplos, las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas. Una **variable aleatoria discreta** puede asumir sólo ciertos valores, con frecuencia números enteros, y resulta principalmente del conteo. El número de caras en el experimento del lanzamiento de la moneda es un ejemplo de una variable aleatoria discreta. Los valores de la variable aleatoria se restringen sólo a ciertos números: 0, 1, 2, y 3. El resultado del lanzamiento de un dado, el número de camiones que llegan por hora al puerto de carga, y el número de clientes que están en fila para sacar sus libros favoritos, son otros ejemplos de variables aleatorias discretas.

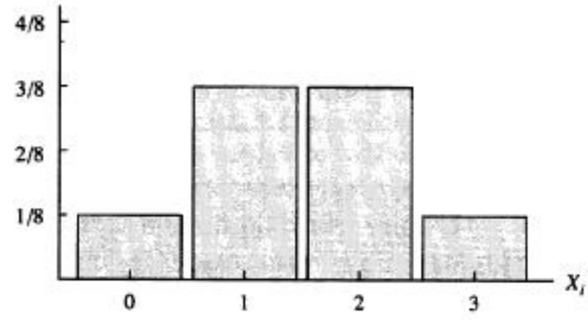
Una **variable aleatoria continua** resulta principalmente de la medición y puede tomar cualquier valor, al menos dentro de un rango dado. Los pesos del agua mineral es un ejemplo, debido a que los contenedores pueden tomar cualquier valor entre 10 y 25 libras. Otros ejemplos de variables aleatorias continuas incluyen la estatura de los clientes en una tienda de ropa, los ingresos de los empleados en un centro comercial local y el tiempo transcurrido entre la llegada de cada cliente a la biblioteca. En cada caso, la variable aleatoria puede medirse con cualquier valor, incluyendo fracciones de la unidad. Aunque las unidades monetarias no pueden dividirse en un número continuo o infinito de subdivisiones (el dólar puede subdividirse sólo 100 veces), comúnmente se tratan como distribuciones continuas de probabilidad.

Una **distribución de probabilidad** es un despliegue de todos los posibles resultados de un experimento junto con las probabilidades de cada resultado. Del trabajo realizado en el capítulo 4, se puede determinar que la probabilidad de lanzar una moneda tres veces y de obtener (1) ninguna cara es 1/8, (2) 1 cara es 3/8, (3) 2 caras es 3/8 y (4) 3 caras es 1/8. Esta distribución de probabilidad se presenta en la tabla 5.1 la cual muestra todos los resultados posibles y sus probabilidades. Vale la pena destacar que las probabilidades suman 1. La misma información también puede mostrarse gráficamente como en la figura 5.1

Tabla 5.1
Distribución discreta de probabilidad para el número de caras

Resultado (caras)	Probabilidad
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1

Figura 5.1
Distribución de probabilidad para el número de caras



Distribución de probabilidad Es una lista de todos los resultados posibles de algún experimento y de la probabilidad relacionada con cada resultado.

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome algún valor específico, x_i, se escribe $P(X = x_i)$. Por tanto, la probabilidad de que los tres lanzamientos de una moneda resulten en dos caras es $P(X = 2) = 3/8$. Vale la pena notar que $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ y $\sum P(X = x_i) = 1$.

5.2 Media y la varianza de las distribuciones discretas

Así como en el capítulo 3 se calculó la media de un conjunto de datos, también se puede determinar la media de una distribución de probabilidad. La media aritmética de una distribución de probabilidad se llama el **valor esperado** $E(X)$, y se halla multiplicando cada resultado posible por su probabilidad y sumando los resultados, tal y como se muestra en la fórmula (5.1).

Media o valor esperado de una distribución de probabilidad discreta

$$\mu = E(X) = \Sigma[(x_i)P(x_i)] \qquad [5.1]$$

en donde x_i son los resultados individuales.

La distribución de probabilidad para el experimento de lanzar un dado se muestra en las primeras dos columnas de la tabla 5.2. La columna (3) ilustra el cálculo del valor esperado para el experimento utilizando la fórmula (5.1). Cada resultado se multiplica por su respectiva probabilidad, y los resultados se suman, produciendo $\mu = E(X) = 3.5$. Esto sugiere que si se lanza un dado ¿se puede esperar obtener 3.5? Difícilmente. Significa que si se promedian los resultados de los lanzamientos del dado (teóricamente, un número infinito), se obtendrá 3.5.

Tabla 5.2
Distribución discreta de probabilidad para el lanzamiento de un dado

(1) Solución (x_i)	(2) $P(x_i)$	(3) $(x_i)\cdot P(x_i)$	(4) $(x_i-\mu)^2\cdot P(x_i)$
1	1/6	1/6	$(1-3.5)^2\cdot 1/6 = 1.042$
2	1/6	2/6	$(2-3.5)^2\cdot 1/6 = 0.375$
3	1/6	3/6	$(3-3.5)^2\cdot 1/6 = 0.042$
4	1/6	4/6	$(4-3.5)^2\cdot 1/6 = 0.042$
5	1/6	5/6	$(5-3.5)^2\cdot 1/6 = 0.375$
6	1/6	6/6	$(6-3.5)^2\cdot 1/6 = 1.042$
	1.00	$3.5 = \mu = E(X)$	$2.92 = \sigma^2$

Valor esperado El valor esperado de una variable aleatoria discreta es la media ponderada de todos los posibles resultados en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados.

La varianza de una distribución de probabilidad es conceptualmente la misma que la varianza que se calculó en el capítulo 3. Es el promedio de las desviaciones al cuadrado con respecto de la media. La varianza puede escribirse como:

Varianza de una distribución de probabilidad	$\sigma^2 = \Sigma[(x_i - \mu)^2 P(x_i)]$	[5.2]

La fórmula (5.2) mide la diferencia entre cada uno de los resultados y su media. Tales diferencias se elevan al cuadrado y se multiplican por sus respectivas probabilidades. Luego se suman los resultados. La columna (4) de la tabla 5.2 revela, $\sigma^2 = 2.92$.

La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.92} = 1.71$. La varianza y la desviación estándar tienen la misma interpretación que se les dio en el capítulo 3. Miden la dispersión de los resultados alrededor de su media. La varianza se expresa en unidades al cuadrado, pero la desviación estándar se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria y por ende con frecuencia tiene una interpretación más racional.

Ejemplo 5.1

El número de casas que Ponder Real Estate vendió mensualmente varió de 5 a 20 junto con la frecuencia de cada nivel de ventas que aparece en las dos primeras columnas de la tabla que se muestra a continuación.

(1) Número de meses	(2) Casas (x_i)	(3) $P(x_i)$	(4) $(x_i)\ P(x_i)$	(5) $(x_i - \mu)^2\ P(x_i)$
3	5	3/24 = 0.125	0.625	$(5-10.912)^2$ (0.125) = 4.369
7	8	7/24 = 0.292	2.336	$(8-10.912)^2$ (0.292) = 2.476
4	10	4/24 = 0.167	1.670	$(10-10.912)^2$ (0.167) = 0.139
5	12	5/24 = 0.208	2.496	$(12-10.912)^2$ (0.208) = 0.246
3	17	3/24 = 0.125	2.125	$(17-10.912)^2$ (0.125) = 4.633
2	20	2/24 = 0.083	1.660	$(20-10.912)^2$ (0.083) = 6.855
24		1.000	10.912 = μ	18.718 = σ^2

El Sr. Ponder espera que estas cifras reflejen un incremento en el número promedio de ventas, por encima del 7.3 que vendió en meses anteriores, y una reducción en la variabilidad de las ventas mensuales que habían sido de $\sigma = 5.7$. De lo contrario, él ha decidido vender el negocio y convertirse en un bufón de rodeo. ¿Qué consejo puede ofrecerle al Sr. Ponder?

Solución

Se debe determinar la probabilidad de cada nivel de ventas tal y como se muestra en la columna (3). Por ejemplo, en 3 de los 24 meses, se vendieron 5 casas: $P(x_i = 5) = 0.125$. El valor esperado o media se calcula multiplicando las probabilidades por sus respectivos niveles de venta. Esto se muestra en la columna (4) como $\mu = 10.912$ casas por mes. La variabilidad se mide por la varianza y se muestra en la última columna. La diferencia al cuadrado entre cada observación y la media de 10.912 se multiplica por las probabilidades apropiadas y se suman resultando $\sigma^2 = 18.718$ casas al cuadrado, con $\sigma = 4.236$ casas.

Interpretación

El Sr. Ponder puede tranquilizarse. Ha incrementado su promedio mensual de ventas y ha reducido su variabilidad. Debería quedarse en el negocio de finca raíz.

Ejercicios de la sección

1. Dé varios ejemplos tanto de distribuciones discretas de probabilidad como de distribuciones continuas de probabilidad que pueden aparecer comúnmente en un negocio. ¿Cuál es la diferencia entre una distribución discreta de probabilidad y una continua?

2. Las siguientes variables aleatorias ¿son discretas o continuas? En cada caso explique el porqué de su respuesta.
   a. Los carros vendidos por Harry el honesto.
   b. Los ingresos que gana Harry.
   c. Los tiempos de terminación de un trabajo en particular.
   d. Los empleados requeridos para completar dicho trabajo.

3. Calcule e interprete el valor esperado, la varianza, y la desviación estándar del experimento de lanzar una moneda tres veces y observe el número de caras.

4. El número de quejas de los empleados en Fidelity Services oscila entre 0 a 6 cada día como se muestra en la siguiente tabla. Calcule e interprete el valor esperado, la varianza y la desviación estándar.

Quejas	Número de días	Quejas	Número de días
0	3	4	2
1	4	5	1
2	3	6	4
3	6		

5. Para recolectar los datos de un proyecto de investigación, un estudiante de mercadeo en una universidad pequeña en el centro de Estados Unidos contó en 50 cursos de negocios el número de estudiantes que habían comprado recientemente discos compactos. En 12 clases no encontró estudiantes que hubieran hecho dicha compra, 3 estudiantes habían comprado en 8 clases, 4 habían comprado en 9 clases, 5 en 15 clases y 7 estudiantes, de las seis clases restantes habían aumentado sus colecciones de música. El estudiante deseaba comenzar su investigación resumiendo sus datos. ¿Cómo podría usted ayudarle?

Un gran número de decisiones empresariales depende de la distribución de probabilidad prevaleciente. Una de las más importantes es la distribución binomial.

5.3 La distribución binomial – una distribución discreta de probabilidad

El experimento de lanzar la moneda discutido anteriormente tiene sólo dos posibles resultados: (1) cara y (2) sello. La probabilidad de cada uno es conocida y constante de un intento (lanzamiento) al siguiente, y además el experimento puede repetirse muchas veces. Los experimentos de este tipo siguen una **distribución binomial**. Con base en el proceso de Bernoulli, llamado así por Jacob Bernoulli (1654-1705), miembro de una familia de matemáticos suizos, una distribución normal presenta cuatro propiedades:

- Sólo debe haber dos posibles resultados. Uno se identifica como éxito, y el otro como fracaso. Sin embargo, se advierte que estos términos no tienen ninguna connotación de "bueno" o "malo". Son completamente objetivos, y un "éxito" no implica necesariamente un resultado deseable.

- La probabilidad de un éxito, π, sigue siendo constante de un ensayo al siguiente, al igual que lo hace la probabilidad de fracaso, $1 - \pi$.
- La probabilidad de un éxito en un ensayo es totalmente independiente de cualquier otro ensayo.
- El experimento puede repetirse muchas veces.

Debe haber quedado claro por qué el lanzamiento de la moneda cumple con los requisitos de una distribución binomial.

Podrían citarse muchos ejemplos relacionados con los negocios. Los sindicatos laborales con frecuencia desean saber cuántos trabajadores: (1) están interesados en unirse al sindicato; (2) quienes no están interesados. Los banqueros pueden hacer encuestas a los expertos en economía sobre si las tasas de interés: (1) aumentarán o (2) no aumentarán. El personal de mercadeo desea saber si una persona: (1) prefiere o (2) no prefiere cierto producto. La aplicación de la distribución binomial al campo de los negocios es casi ilimitada.

Una distribución binomial Cada ensayo en una distribución binomial termina en sólo uno de dos resultados mutuamente excluyentes, uno de los cuales se identifica como un éxito y el otro como un fracaso. La probabilidad de cada resultado permanece constante de un ensayo al siguiente.

Si se conoce la probabilidad de que un ensayo determinado producirá un éxito, es posible estimar cuántos éxitos habrá en un número dado de ensayos. Por ejemplo, si se conoce la probabilidad de que un solo trabajador esté interesado en unirse al sindicato, entonces puede estimarse la probabilidad de que un número determinado de trabajadores de la fuerza laboral estaría interesado en unirse. La probabilidad de que de n número de trabajadores, un número x dado, esté interesado en unirse al sindicato es

La fórmula binomial

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\pi^x(1-\pi)^{n-x} = {}_nC_x(\pi)^x(1-\pi)^{n-x} \qquad [5.3]$$

Aunque a simple vista la fórmula parece intimidante, no se desespere. Las probabilidades para diferentes valores de π, x y n ya se han calculado y se han tabulado en el apéndice III, tabla B, al final del libro.

Consideremos la siguiente situación: un gerente de crédito de *American Express* ha descubierto que $\pi = 10\%$ de los usuarios de tarjeta no paga el monto completo de la deuda durante un mes dado. Desea determinar la probabilidad que de $n = 20$ cuentas seleccionadas de manera aleatoria, $x = 5$ de las cuentas no sean pagadas. Esto puede expresarse como $P(X = 5 \mid n = 20, \pi = 0.10)$, lo cual se lee como "la probabilidad de cinco éxitos dado que hay 20 ensayos y la probabilidad de un éxito de cualquier ensayo es del 10%".

La probabilidad de que 5 cuentas de las 20 muestreadas sigan sin ser canceladas se puede calcular utilizando la fórmula (5.3). En donde $n = 20$, $X = 5$, y $\pi = 0.10$, entonces se tiene

$${}_{20}C_5(0.10)^5(0.90)^{20-5} = (15504)(0.00001)(0.2058911) = 0.0319$$

Si la probabilidad de que no se pague una cuenta cualquiera en su totalidad es $\pi = 0.10$, entonces existe un 3.19% de oportunidad de que exactamente 5 de 20 cuentas seleccionadas de manera aleatoria tengan un saldo a favor.

Esta información se obtiene más fácilmente utilizando la tabla B. Vale la pena destacar que las dos primeras columnas en la tabla muestran los posibles valores para n y x. Ubique el valor de 20 para n debido a que hay 20 ensayos (cuentas) en el experimento. Debido a que el gerente de crédito busca la probabilidad de que $x = 5$ éxitos (cuentas no pagadas), localice la fila que contenga los valores de probabilidad para $x = 5$. Proceda a lo largo de la fila hasta encontrar la columna encabezada con $\pi = 0.10$. Allí se encontrará el valor 0.0319, la respuesta a la pregunta del gerente de crédito.

Consideremos otro ejemplo de distribución binomial. Se tiene que el personal de ventas de Widgets, Inc., hace una venta al 15% de los clientes a los que visitan. Si un miembro del personal de ventas llama a 15 clientes hoy ¿cuál es la probabilidad de que venda exactamente dos aparatos? Dado $\pi = 0.15$, $n = 15$ y $x = 2$, ubique el valor para $n = 15$, luego la fila que pertenezca a $X = 2$. En la fila encabezada por la columna $\pi = 0.15$, encontrará $P(x = 2 \mid n = 15, \pi = 0.15) = 0.2856$. Existe un 28.56% de oportunidad de que se hagan exactamente dos ventas de las 15 llamadas.

Ejemplo 5.2

De acuerdo con el Periódico de Educación Superior (*Journal of Higher Education*), el 40% de todos los bachilleres trabajan durante el verano para ganar dinero para la educación universitaria correspondiente al siguiente período de otoño. Si 7 bachilleres se seleccionan de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (*a*) 5 tengan trabajos en el verano, (*b*) ninguno trabaje, (*c*) todos trabajen?

Solución

a. Ubique el valor de $n = 7$ y $\pi = 0.40$. La fila correspondiente a $x = 5$ da un valor de 0.0774. Existe un 7.74% de probabilidad de que 5 de 7 bachilleres hayan tomado trabajos de verano para ganar el dinero para su educación.

b. Dado $n = 7$ y $\pi = 0.40$, la probabilidad de que ninguno trabaje se muestra en la tabla como $P(x = 0) = 0.0280$.

c. La probabilidad de que todos los estudiantes trabajen parece ser $P(x = 7 \mid, \pi = 0.4) = 0.0016$.

Interpretación

Es poco probable que ninguno de los estudiantes trabaje.

La tabla binomial incluye los valores de π sólo hasta 0.5. ¿Qué debe hacerse si la probabilidad de un éxito es mayor? Supongamos que el 70% de todos los residentes de Flatbush tiene sus computadores enlazados con internet. ¿Cuál es la probabilidad de que de los 10 residentes seleccionados aleatoriamente, 6 estén "conectados"? ya que $\pi > 0.5$, no se puede utilizar la tabla B (Apéndice III) sin algún ajuste. Sin embargo, si la probabilidad de un éxito (un residente esté conectado a Internet) es $P(S) = 0.70$, la probabilidad de que no esté enlazado es $P(\bar{S}) = 0.30$. Además, si 6 de los 10 residentes son usuarios de internet, entonces 4 no lo son. Es decir, 6 éxitos a $\pi = 0.70$ es *lo mismo* que 4 fracasos a $\pi = 0.30$. En lugar de hallar x éxitos en π, se halla $n - x$ fracasos a $1.00 - \pi$.

Esta práctica puede ilustrarse construyendo dos arreglos ordenados como los que se ven aquí, uno de 0 a 10 a $\pi = 0.70$ y uno de 10 a $\pi = 0.30$.

0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	($\pi = 0.70$)
10	9	8	7	6	5	**4**	3	2	1	0	($\pi = 0.30$)

Esto revela más claramente que $P(X = \mathbf{6} \mid n = 10, \pi = \mathbf{0.70}) = P(X = \mathbf{4} \mid n = 10, \pi = \mathbf{0.30})$. De la tabla B (Apéndice III) esto se ve como 0.2001.

A. La media y la varianza de una distribución binomial

Antes se mostró cómo determinar la media y la varianza de una distribución discreta utilizando las fórmulas (5.1) y (5.2). Sin embargo, si sólo hay dos resultados posibles, como en la distribución binomial, la media y la varianza pueden determinarse más fácilmente:

Media de una distribución binomial	$E(X) = \mu = n\pi$	[5.4]

y

Varianza de una distribución binomial	$\sigma^2 = n\pi(1-\pi)$	[5.5]

Para los residentes de Flatbush, si $n = 10$, $E(X) = (10)(0.70) = 7$. De las 10 personas seleccionadas aleatoriamente, se esperaría que 7 estuvieran inscritas en internet. La varianza es $\sigma^2 = (10)(0.70)(0.30) = 2.1$ y la desviación estándar es $\sigma = 1.45$.

B. Distribuciones binomiales acumuladas

Dados los datos del ejemplo 5.2 para los trabajos de verano de los estudiantes, se supone que se desea determinar la probabilidad de que 3 o menos estudiantes trabajaron. Este problema implica una distribución binomial *acumulada* debido a que se está interesado en un *rango* de valores (0 a 3) en lugar de un solo número específico. El siguiente arreglo ordenado ilustra este punto. La probabilidad del evento A (0 a 3 trabajan) es $P(A) = P(X) \leq 3)$.

$$\overbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3}^{\text{Evento A}} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \qquad (\pi = 0.40)$$

En la tabla B (apéndice III), esto puede hallarse sumando $P(X=0) + P(X=1) + P(X=3) + P(X=3) = 0.7102$. Por motivos de conveniencia, estas sumas se compilan en la tabla C, la cual muestra la probabilidad del número de éxitos que es igual a *o menor que* cierta cantidad. En nuestro caso actual, se tiene que $P(X \leq 3 \mid n = 7, \pi = 0.40) = 0.7102$.

Vale la pena recordar que la tabla C proporciona la probabilidad de que el número de éxitos sea igual a o menor que cierta cantidad. Se supone que se desea conocer $P(A) = P(X \geq 5)$. La tabla C no dará directamente la probabilidad de que un número de éxitos sea igual a *o mayor que* alguna cantidad. Observando el arreglo ordenado se tiene que

$$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{Evento } \bar{A}} \quad \overbrace{5 \quad 6 \quad 7}^{\text{Evento A}} \qquad (\pi = 0.40)$$

Si el evento A es $P(X \geq 5)$, entonces $\bar{A}$ es 4 o menos, lo cual puede hallarse en la tabla C. Se sabe que $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Entonces, $P(X \geq 5 \mid n = 7, \pi = 0.40) = 1 - P(X \leq 4 \mid n = 7, \pi = 0.40)$. De la tabla C, se observa que este es $1 - 0.9037 = 0.0963$. La probabilidad de que por lo menos 5 de 7 estudiantes tengan trabajo en verano es del 9.63%.

Se supone que se necesitaba determinar la probabilidad de que entre 3 y 5 estudiantes inclusive, trabajaron. De nuevo el arreglo prueba que es de utilidad.

$$\underbrace{\underbrace{0 \quad 1 \quad 2}_{P(X \leq 2) = 0.4199} \quad \overbrace{3 \quad 4 \quad 5}^{\text{Evento A}}}_{P(X \leq 5) = 0.9812} \quad 6 \quad 7 \qquad (\pi = 0.40)$$

$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0.9812 - 0.4199 = 0.5613$

$P(3 \leq X \leq 5 \mid n = 7, \pi = 0.40)$ debe determinarse en dos pasos. Primero se determina la probabilidad de que el número de estudiantes con trabajos sea de 0 a 5 (lo que incluye el intervalo de 3 a 5 que es el que se busca), y luego se resta la probabilidad de que el número de estudiantes emprendedores sea 2 o menos. Luego $P(3 \leq X \leq 5) = P(0 \leq X \leq 5) - P(0 \leq X \leq 2) = 0.9812 - 0.4199 = 0.5613$.

Si $\pi > 0.50$, se necesitan dos arreglos ordenados. Se asume que el 80% de los graduados tomaron trabajos de verano. Debe construirse un arreglo para $\pi = 0.80$ y uno para $\pi = 0.20$.

Evento A								
0	1	2	3	4	5	6	7	$(\pi = 0.80)$
7	6	5	4	3	2	1	0	$(\pi = 0.20)$
Evento A				Evento $\bar{A}$				

Si, al igual que antes, se desea la probabilidad de que 3 o menos estudiantes trabajen, se debe hallar $P(A) = P(X \leq 3 \mid n = 7, \pi = 0.80)$. Debido a que la tabla C no contiene valores para $\pi > 0.50$, se debe regresar al arreglo ordenado para $\pi = 1 - 0.80 = 0.20$. Se observa que la probabilidad 3 o menos trabajen con $\pi = 0.80$ es la *misma* que la probabilidad de que 4 o más no trabajen. Es decir, si 3 de 7 trabajan, 4 no; si 2 de 7 trabajan, 5 no, y así sucesivamente. Así, $P(A)$ también es igual a $P(X \geq 4 \mid n = 7, \pi = 0.20)$. Sin embargo, todavía se tiene un problema. La tabla C no dará directamente la probabilidad de que X sea igual a o mayor que algún valor, como 4 en este caso. La solución a este dilema persistente es la misma que la anterior: se halla la probabilidad de A, es decir, 3 o menos, y se resta de 1. $P(X \leq 3 \mid n = 7, \pi = 0.80) = 1 - P(X \leq 3 \mid n = 7, \pi = 0.20) = 1 - 0.9667. = 0.0333$.

C. Usando el computador

Tanto Minitab como Excel calculan fácilmente las probabilidades binomiales. Al utilizar Minitab para determinar las probabilidades de los trabajos de verano del ejemplo 5.2, ingrese los valores para X en las celdas de la columna (1) (o en cualquier otra columna). En este caso, ingrese 5, 0, y 7 en las primeras tres celdas de la columna (1). Luego escoja **Calc > Probability Distributions > Binomial > Probability**. Ingrese el número de ensayos, 7 en este caso, en la casilla de **Number of Trials**, 0.40 en la casilla de **Probability of a Success**, y *C1* (en donde se ingresó anteriormente los valores para X) en la casilla de **Input Column**. La impresión resultante se ve en la pantalla 5.1. Si se ha seleccionado **Cumulative Probability** en lugar de **Probability** antes mencionada, Minitab habrá devuelto las probabilidades acumuladas tal y como aparecen en la tabla C.

Pantalla de Minitab 5.1

Probability density function (Función de densidad de probabilidad)

```
Binomial con n = 7 y p = 0.400000
       X     P(X=x)
    5.00     0.0774
    0.00     0.0280
    7.00     0.0016
MTB >
```

Excel funciona de forma similar. Se coloca el cursor en la celda de la hoja de trabajo en donde se desea que aparezca la respuesta. Luego se selecciona **Insertar > Función > Estadísticas** (de la casilla de categoría de funciones) > **Distr.Binom** (de la casilla nombre de función). Se hace clic en **Aceptar**. Se ingresa 5 en la casilla de **Núm-éxito** (para 5 éxitos), 7 en la casilla de **Ensayos**, 0.4 en la casilla de **Prob-éxito**, y Falso en la casilla de **Acumulado**. Seleccione **Aceptar**. La respuesta aparecerá en la casilla de **Valor** en la esquina superior derecha y en la celda que se haya designado en la hoja de trabajo. Si se ha ingresado Verdadero en la casilla de **Acumulado**, la probabilidad acumulada para 5 éxitos se reportará tal y como aparece en la tabla C.

Ejercicios de la sección

6. ¿Cuáles son las cuatro características de una distribución binomial? Dé por lo menos tres ejemplos relacionados con negocios.

7. El 10% de los discos de computador producidos por un nuevo proceso salen defectuosos. Si hay 20 discos en una caja:

   a. ¿Cuántos esperaría usted que salieran defectuosos?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de discos defectuosos sea igual al número esperado que usted determinó en su respuesta a la parte *a*?

8. Del problema anterior, ¿cuál variación se encontraría en los discos defectuosos de una caja a otra?

9. Sólo 20% de los empleados de la población civil que está en una base militar restringida porta su identificación personal. Si llegan 10 empleados, cuál es la probabilidad de que el guardia de seguridad encuentre:

   a. ¿Ocho empleados con identificación?

   b. ¿Cuatro empleados con identificación?

   c. ¿Por lo menos 4 empleados con identificación?

   d. ¿A lo sumo 5 empleados con identificación?

   e. ¿Entre 4 y 7 empleados inclusive con identificación?

10. Responda la pregunta anterior si 60% de todos los empleados portan identificación.

11. Usted ha contratado 8 recepcionistas telefónicas para que tomen los pedidos telefónicos para una línea de productos deportivos que su empresa está comercializando. Una recepcionista está ocupada el 30% del tiempo catalogando un pedido. Usted no desea que la probabilidad de que una llamada del cliente se reciba con una señal de ocupado exceda del 50%. ¿Debería usted contratar más recepcionistas si 3 clientes llaman?

12. Un estudiante debe obtener por lo menos el 60% en un examen de verdadero y falso con 18 preguntas por responder. Si el estudiante lanza una moneda para determinar la respuesta a cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante pase?

5.4 La distribución hipergeométrica

Como se acaba de explicar, la distribución binomial es apropiada sólo si la probabilidad de un éxito permanece constante para cada intento. Esto ocurre si el muestreo se realiza con reemplazo o de una población finita (o muy grande). Sin embargo, si la población es pequeña y ocurre el muestreo sin reemplazo, la probabilidad de un éxito variará. Si la probabilidad de un éxito no es constante, la **distribución hipergeométrica** es de especial utilidad. La función de probabilidad para la distribución hipergeométrica es:

Distribución hipergeométrica
$$P(x) = \frac{{}_rC_x \; {}_{N-r}C_{n-x}}{{}_NC_n} \qquad [5.6]$$

en donde
- N es el tamaño de la población
- r es el número de éxitos en la población
- n es el tamaño de la muestra
- x es el número de éxitos en la muestra

La distribución hipergeométrica Si se selecciona una muestra sin reemplazo de una población finita conocida y contiene una proporción relativamente grande de la población, de manera que la probabilidad de éxito sea perceptiblemente alterada de una selección a la siguiente, debe utilizarse la distribución hipergeométrica.

Supongamos que en un establo de caballos de carrera hay $N = 10$ caballos, y $r = 4$ de ellos tienen una enfermedad contagiosa. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una muestra de $n = 3$ en la cual $x = 2$ caballos enfermos?

$$
\begin{aligned}
P(X = 2) &= \frac{{}_4C_2 \; {}_{10-4}C_{3-2}}{{}_{10}C_3} \\
&= \frac{6 \times 6}{120} \\
&= 0.30
\end{aligned}
$$

Existe un 30% de probabilidad de seleccionar tres caballos de carreras, dos de los cuales están enfermos.

Ejemplo 5.3 Uso de la distribución hipergeométrica para analizar la discriminación

En un caso reciente en el Distrito de Johnson en Kansas City, tres mujeres entablaron una demanda contra una empresa de servicios locales, por discriminación de sexos. De las nueve personas que eran elegibles para un ascenso, cuatro eran mujeres. Tres de las nueve personas recibieron en realidad el ascenso; pero sólo una de ellas era mujer. Las otras tres mujeres elegibles demandaron. Una consideración importante en el caso, unida con la probabilidad de que de las tres personas que recibieron ascenso sólo una mujer fuera seleccionada por casualidad. Es decir, si el género no era un factor, ¿cuál es la probabilidad de que no más que uno de los tres ascensos fuera asignado a una mujer?

Solución

Un consultor económico especializado en asuntos legales fue llamado por el abogado defensor para refutar los cargos. El economista calculó la probabilidad de que ante la ausencia de discriminación, sólo una de las mujeres sería ascendida en su cargo. Este cálculo se basó en que

$N = 9$; el número de personas elegibles para ser ascendidas

$r = 4$; el número en la población identificado como éxitos (mujeres)

$n = 3$; tamaño de la muestra (quienes fueron seleccionados para el ascenso)

$x \leq 1$; el número de éxitos (mujeres) en la muestra.

La probabilidad de que no más que una mujer fuera ascendida es $P(X = 0) + P(X = 1)$.

$$
P(X = 1) = \frac{{}_4C_1 \, {}_5C_2}{{}_9C_3} = \frac{4 \times 10}{84} = 0.4762
$$

$$
P(X = 0) = \frac{{}_4C_0 \, {}_5C_3}{{}_9C_3} = \frac{1 \times 10}{84} = 0.1190
$$

Por tanto, $P(X \leq 1) = 0.4762 + 0.1190 = 0.5952$.

Interpretación

Había casi un 60% de probabilidad, sin considerar el género que, no más de una mujer fuera ascendida. Con base en tales hallazgos, como con otras pruebas presentadas en el caso, la corte dictaminó que no había suficiente evidencia de discriminación.

A. Uso del computador

Excel funciona casi como magia en la solución de las distribuciones hipergeométricas. Simplemente haga clic en **INSERTAR > FUNCIÓN > ESTADÍSTICAS > DISTR. HIPERGEOM**. Luego ingrese los valores para x, n, r y N. La respuesta aparecerá en la casilla **Valor**.

Ejercicios de la sección

13. Como subgerente de su empresa de materias primas, usted debe contratar 10 personas entre 30 candidatos, 22 de los cuales tienen títulos universitarios. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 de los que usted contrate tengan un título?

14. De los 15 altos ejecutivos de un negocio de importaciones y exportaciones, se seleccionan 12 para ser enviados al Japón a estudiar un nuevo proceso de producción. Ocho de los ejecutivos ya tienen algo de entrenamiento en el proceso. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 de los enviados tengan algo de conocimiento sobre el proceso antes de partir para el lejano oriente?

15. Cuarenta trabajadores de su oficina han recibido nuevos computadores. Veintisiete tienen la nueva tecnología MMX. Si se seleccionan 10 aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que 3 estén equipados con MMX?

16. Una encuesta de la revista *Fortune* (marzo 17 de 1997) sirve como fuente para este problema, que su supervisor le solicita que resuelva. De los 10 empleados hombres, 7 tenían esposas que también trabajaban. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo un esposo tenga una esposa que esté empleada fuera de casa si se seleccionan 3 trabajadores al azar?

17. Del problema anterior, la encuesta reveló que 6 de los 10 empleados ganaban más de US$95,000 al año. De los 3 seleccionados, ¿cuál es la probabilidad de que todos tres ganen más de US$95,000?

5.5 La distribución de Poisson

Una variable aleatoria discreta de gran utilidad en la medición de la frecuencia relativa de un evento sobre alguna unidad de tiempo o espacio es la **distribución de Poisson**. Con frecuencia se utiliza para describir el número de llegadas de clientes por hora, el número de accidentes industriales cada mes, el número de conexiones eléctricas defectuosas por milla de cableado en un sistema eléctrico de una ciudad, o el número de máquinas que se dañan y esperan ser reparadas.

> **Distribución de Poisson** Ideada por el matemático francés Simeon Poisson (1781 – 1840), la distribución de Poisson mide la probabilidad de un evento aleatorio sobre algún intervalo de tiempo o espacio.

Son necesarios dos supuestos para la aplicación de la distribución de Poisson:

- La probabilidad de ocurrencia del evento es constante para dos intervalos cualesquiera de tiempo o espacio.
- La ocurrencia del evento en un intervalo es independiente de la ocurrencia de otro intervalo cualquiera.

Dados estos supuestos, la función de probabilidad de Poisson puede expresarse como

Función de probabilidad de Poisson	$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$	[5.7]

en donde x es el número de veces que ocurre el evento

μ es el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo o de espacio

e = 2.71828, la base del logaritmo natural.

Supongamos que se está interesado en la probabilidad de que exactamente 5 clientes lleguen durante la siguiente hora (o en cualquier hora dada) laboral. La observación simple de las últimas 80 horas ha demostrado que 800 clientes han entrado al negocio. Por tanto, $\mu = 10$ por hora. Utilizando la fórmula (5.7),

$$P(5) = \frac{(10)^5 \times 2.71828^{-10}}{5!} = 0.0378$$

Debido a que esta fórmula es poco práctica, las probabilidades para los valores seleccionados se dan en la tabla D. Diríjase al extremo superior de la tabla hasta encontrar $\mu = 10$. Baje por esa columna hasta la fila en donde está x = 5. Allí usted encontrará 0.0378. Existe 3.78% de oportunidad de que exactamente 5 clientes ingresen a la tienda durante la siguiente hora.

Una compañía de pavimentación local obtuvo un contrato con el Ayuntamiento para hacer mantenimiento a las vías de un gran centro urbano. Las vías recientemente pavimentadas por esta compañía demostraron un promedio de dos defectos por milla, después de haber sido utilizadas durante un año. Si el condado sigue con esta compañía de pavimentación, ¿cuál es la probabilidad de que se presenten 3 defectos en cualquier milla de vía después de haber tenido tráfico durante un año?

$$P(1) = \frac{2^3 \times 2.71828^{-2}}{3!} = 0.1804$$

o 18.04%. Para utilizar la tabla D, halle la columna en donde $\mu = 2$ y la fila en donde $x = 3$. Allí encontrará el valor de 0.1804.

Se supone por el momento que se desea conocer la probabilidad de 3 defectos en 0.5 millas. Debido a que se da la media en ocurrencias por *una milla* (2 por milla) es necesario ajustar μ de acuerdo con la estipulación en el problema de 0.5 millas. Se debe determinar qué porcentaje es 0.5 millas de una milla = 0.5/1 = 0.5. Entonces la media en ocurrencias para este problema es $\mu = (0.5)$ (2 ocurrencias) = 1. Si el promedio es de 2 por milla, va a ser 1 por media milla. Por tanto, $P(X = 3 \mid \mu = 1) = 0.0613$. Vale la pena observar el ejemplo 5.4, especialmente la parte *c*.

También debe notarse que si en el problema los valores exceden los rangos limitados en la tabla D, es posible trabajar el problema con calculadoras manuales recordando la regla de exponentes : $e^{-\mu} = 1/e^{\mu}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(X = 3 \mid \mu = 1) &= \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \\ &= \frac{1^3\, 2.71828^{-1}}{3!} \\ &= \frac{(1)\left[\frac{1}{2.71828^1}\right]}{3!} \\ &= 0.0613 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4 Una distribución de Poisson para estudiantes prudentes

El profesor Bradley anima a sus estudiantes de estadística a "actuar de forma prudente" consultando al tutor si tienen alguna pregunta mientras se preparan para el examen final. Parece que la llegada de los estudiantes a la oficina del tutor se ajusta a una distribución de Poisson, con un promedio de 5.2 estudiantes cada 20 minutos. El profesor Bradley está preocupado porque si muchos estudiantes necesitan los servicios del tutor, puede resultar un problema de congestión.

a. El tutor debe determinar la probabilidad de que cuatro estudiantes lleguen durante cualquier intervalo de 20 minutos, lo cual podría causar el problema de congestión que teme el profesor Bradley. Si la probabilidad excede el 20%, se contratará un segundo tutor.

b. El tutor debe calcular la probabilidad de que más de cuatro estudiantes lleguen durante algún período de 20 minutos. Si es mayor que el 50%, las horas de oficina del tutor se aumentarán, permitiendo a los estudiantes extender el horario en las que vienen a ver al tutor.

c. Si la probabilidad de que más de siete estudiantes lleguen durante un período cualquiera de 30 minutos excede 50%, el mismo profesor Bradley ofrecerá tutoría adicional.

Solución

a. $P(X = 4 \mid \mu = 5.2) = 0.1681$

b.
$$\begin{aligned} P(X > 4 \mid \mu = 5.2) &\\ &= 1 - P(X \leq 4 \mid \mu = 5.2) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] \\ &= 1 - [0.0055 + 0.0287 + 0.0746 + 0.1293 + 0.1681] \\ &= 0.5938 \end{aligned}$$

c. Se tiene que $\mu = 5.2$ por cada 20 minutos. La estipulación del profesor cubre un período de 30 minutos. Se debe determinar qué porcentaje es 30 de 20:30/20 = 1.5.

Entonces, μ para cada 30 minutos es 5.2(1.5) = 7.8. Así, pues:

$$\begin{aligned} P(X > 7 \mid \mu = 7.8) &= 1 - [P(X \leq 7)] \\ &= 1 - [P(X = 0) + \cdots + P(X = 7)] \\ &= 0.5188 \end{aligned}$$

Interpretación

Debido a que $P(X = 4) = 0.1681 < 20\%$, un segundo tutor es innecesario. $P(X > 4) = 0.5938 > 50\%$; las horas de oficina del tutor se extenderán. Y $P(X > 7) = 0.5188 > 50\%$; el profesor Bradley ayudará en la tarea de tutoría.

A. Uso del computador

Las probabilidades de Poisson pueden obtenerse también utilizando Minitab y Excel. Se supone que se desea determinar la probabilidad de que 4 estudiantes lleguen a la oficina del tutor de la parte *a* del ejemplo 5.4. Para obtener las probabilidades de Poisson con Minitab, ingrese 4 en la columna (1) de la hoja de trabajo. Seleccione **Calc >Probability Distribution> Poisson > Probability**. Ingrese 5.2 en la casilla de **Mean** y C1 en la casilla de **Input Column**.

Para utilizar Excel, seleccione **Insertar > Función > Estadísticas> Poisson**. Haga clic en **Aceptar**. Ingrese 4 en la casilla **x**, 5.2 en la casilla **Media** y Falso en la casilla **Acumulado**. La respuesta aparecerá en la casilla de **Valor** en la esquina superior derecha.

Ejercicios de la sección

18. A un conmutador de la oficina principal de la compañía llegan llamadas a un promedio de dos por minuto y se sabe que tienen distribución de Poisson. Si el operador está distraído por un minuto, cuál es la probabilidad de que el número de llamadas no respondidas sea:

a. ¿Cero?

b. ¿Por lo menos una?

c. ¿Entre 3 y 5, inclusive?

19. ¿Cuáles serían las probabilidades en el ejercicio 18 si el operador se distrae por 4 minutos?

20. Un proceso de fabricación utilizado para hacer artefactos plásticos Incas presenta una tasa de defectos de 5 por cada 100 unidades. Las unidades se envían a los distribuidores en lotes de 200. Si la probabilidad de que más de 3 salgan defectuosos supera el 30%, usted planea vender en su lugar, camisetas Grateful Dead. ¿Cuál artículo agregará usted al inventario?

21. Usted compra partes para bicicleta de un proveedor en Toledo que tiene 3 defectos por cada 100 partes. Usted está en el mercado para comprar 150 partes pero no aceptará una probabilidad de más del 50% de que más de dos partes sean defectuosas. ¿Usted le compraría a dicho proveedor?

5.6 La distribución exponencial

Como se acaba de observar, la distribución de Poisson es una distribución discreta que mide el número de ocurrencias sobre algún intervalo de tiempo o espacio. Describe por ejemplo, el número de clientes que pueden llegar durante algún período determinado. Por el contrario, la **distribución exponencial** es una distribución continua. Mide el paso del tiempo entre tales ocurrencias. Mientras que la distribución de Poisson describe las tasas de llegada (de personas, camiones, llamadas telefónicas, etc.) dentro de algún período dado, la distribución exponencial estima el lapso entre tales arribos. Si el número de ocurrencias tiene distribución de Poisson, el lapso entre las ocurrencias estará distribuido exponencialmente.

La probabilidad de que el lapso sea menor que o igual a cierta cantidad x es

Distribución exponencial $$P(X \leq x) = 1 - e^{-\mu t} \qquad [5.8]$$

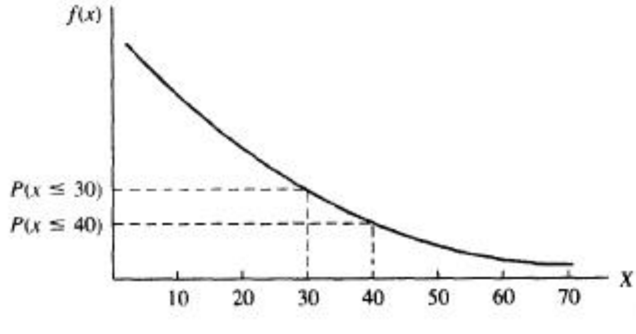
en donde t es el lapso de tiempo

e es la base del logaritmo natural 2.71828

μ es la tasa promedio de ocurrencia

La distribución de una variable aleatoria exponencial se muestra en la figura 5.2. La curva en continuo descenso muestra que con el paso del tiempo X aumenta, y la probabilidad disminuye.

Figura 5.2
Distribución exponencial



La probabilidad de que pasen 30 minutos entre ocurrencias excede la probabilidad de que pasen 40 minutos: $P(X \leq 30) > P(X \leq 40)$. Esto se debe a que *siempre* deben pasar 30 minutos antes que pasen 40.

Así como se tiene que ajustar la tasa promedio de llegada para ajustar la estipulación de Poisson, es necesaria una corrección para la distribución exponencial. Sin embargo, aquí es más fácil ajustar el valor para el tiempo t en la fórmula (5.8) para ajustar el marco de tiempo estipulado en el problema. Se asume que la tasa promedio de llegada de los clientes es $\mu = 1.5$ por hora y se desea saber la probabilidad de que no más de dos horas transcurran entre llegadas. Usando la fórmula (5.7), t es 2. Entonces $P(X \leq 2) = 1 - e^{-(1.5)(2)} = 1 - e^{-3}$. La solución puede hallarse en la mayoría de las calculadoras manuales como $e^{-3} = 1/e^{3} = 0.0498$. Se puede querer hacer uso de la tabla de Poisson (tabla D) así como se hizo con la solución de los problemas de Poisson. El secreto es establecer que $x = 0$, la tabla D revela que $e^{3} = 0.0498$. La probabilidad de que no más de dos horas transcurran entre la llegada de los clientes es $1 - 0.0498 = 0.9592$. Existe 95.02% de probabilidad de que el segundo cliente ingrese a las dos horas o menos del primero si la tasa promedio de llegadas es de 1.5 por hora.

Los camiones llegan al puerto de carga a una tasa de $\mu = 2$ por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no más de 30 minutos transcurran entre llegadas? La tasa promedio de llegada está dada por hora, o 60 minutos, y el problema se plantea en minutos (30 de ellos). Para evitar "el asunto de las manzanas y las naranjas" se debe hallar *qué porcentaje de 60 minutos son 30*. Así $t = 30/60 = ½$. Entonces, $P(X \leq 30 \text{ minutos}) = 1 - e^{-(2)(1/2)} = 1 - e^{-2}$ utilizando una calculadora o confiando en la tabla D estableciendo que $x = 0$, se tiene que $1 - 0.1353 = 0.8647$.

Ejemplo 5.5

Cross City Cab Company programa sus taxis para que lleguen al aeropuerto local en una distribución de Poisson con una tasa promedio de llegada de 12 por hora. Usted acaba de aterrizar en el aeropuerto y debe llegar al centro a cerrar un gran negocio. Cuál es la probabilidad de que usted tenga que esperar máximo 5 minutos para conseguir un taxi? Su jefe es un tirano que no tolerará la falla, de manera que si la probabilidad de que pase otro taxi dentro de 5 minutos es menor al 50%, usted alquilará un carro para el viaje a la oficina.

Solución

Asumiendo lo peor, que el último taxi acaba de irse, usted debe determina $P(X \leq 5 \text{ minutos})$. Debido a que $\mu = 12$ por 60 minutos, usted debe determinar a qué porcentaje son 5 minutos de $60{:}5/60 = 1/12$. Por lo tanto, $t = 1/12$ y $P(X \leq 5) = 1 - e^{-(12)(1/12)} = 1 - e^{-1}$. Con una calculadora o utilizando la tabla D se determina $P(X \leq 5) = 1 - 0.3679 = 63.21\%$.

Interpretación

Usted puede relajarse y esperar el taxi, hay una probabilidad de 63.21% (>50%) de que llegue uno dentro de 5 minutos. Mientras espera el taxi, debe considerar que la probabilidad de que llegue uno entre 5 y 10 minutos es igual a $P(X \leq 10)$- $P(X \leq 5)$. Usted también puede desear matar el tiempo revisando sus reglas algebraicas de exponentes en caso de que el exponente para e no funcione de manera conveniente para un agradable y respetable número entero como ocurrió anteriormente. Vale la pena recordar que $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ y $e^{-0.4} = e^{-4/10} = 1/\sqrt[10]{e^4}$.

A. Usando el computador

Excel nuevamente prueba su valor al calcular probabilidades exponenciales. Simplemente haga clic en **Insertar > Función >Estadísticas> Distr. exp**. Una vez ingresado el valor *ajustado* de t en la casilla **x**, la media en la casilla de **Lambda** y Verdadero en la casilla de **Acum**, entonces de inmediato la respuesta aparece en la casilla de **Valor**.

Ejercicios de la sección

22. Los aviones llegan al pequeño aeropuerto en Puerto Vallarta, México, a una proporción de dos por hora. Tomará una hora reparar una rampa utilizada para desembarcar pasajeros. ¿Cuál es la probabilidad de que un avión llegue mientras que la rampa está en reparación?

23. El computador principal de la universidad queda fuera de línea tres veces por semana. El profesor Mundane debe completar un proyecto esta semana que requiere del computador. ¿Cuál es la probabilidad de que el computador esté fuera de línea toda la semana?

24. En el ejercicio 23, ¿cuál es la probabilidad de que el computador esté fuera de línea por cualquier período de dos semanas?

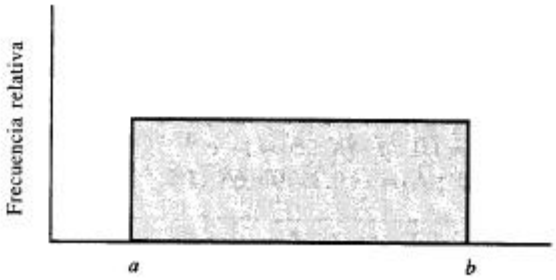
25. Durante un día de trabajo típico de 8 horas, los computadores utilizados para vigilar la etapa de enfriamiento en la producción de neumáticos para autos señala que la temperatura no se mantiene de forma apropiada en 30 oportunidades. El Sr. Radial, director ejecutivo de la compañía, está por hacer una inspección de la planta durante 30 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que esté allí cuando se active la señal del computador?

26. En el ejercicio 25, ¿cuál es la probabilidad de que la visita del Sr. Radial sea interrumpida por la señal del computador?

5.7 La distribución uniforme

La **distribución de probabilidad uniforme** es una distribución en la cual las probabilidades de todos los resultados son las mismas. El experimento de lanzar un dado ilustrado en la tabla 5.2 es uno de los ejemplos. Todos los seis resultados tenían 1/6 de probabilidad de ocurrencia. La figura 5.3 muestra una distribución uniforme en la cual todos los resultados sobre el rango total de posibilidades de distribución son igualmente posibles, desde el mínimo de a hasta el máximo de b.

Figura 5.3
Distribución uniforme



Distribución uniforme En una distribución uniforme las probabilidades son las mismas para todos los posibles resultados.

La media o valor esperado de una distribución uniforme está a mitad de camino entre sus dos puntos extremos. Así:

Media de una distribución uniforme
$$E(x) = \mu = \frac{a + b}{2} \qquad [5.9]$$

en donde a y b son los valores más bajo y más alto, respectivamente.

La varianza es:

Varianza de una distribución uniforme de probabilidad	$\sigma^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$	[5.10]

El área total bajo la curva, como en el caso de todas las distribuciones de probabilidad, debe ser igual a 1 o 100%. Debido a que el área es la altura por el ancho, la altura es

$$\text{Altura} = \frac{\text{Área}}{\text{Ancho}}$$

y por tanto

$$\text{Altura} = \frac{1}{b-a} \qquad [5.11]$$

en donde b - a es el ancho o rango de la distribución.

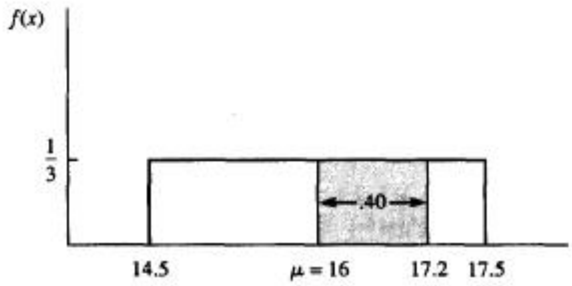
Suponga que los contenidos de las latas de 16 onzas de fruta enlatada producida por Del Monte oscila entre 14.5 y 17.5 onzas y se ajusta a una distribución uniforme. Esto se muestra en la figura 5.4. La media es

$$\mu = \frac{14.5 + 17.5}{2} = 16 \text{ onzas}$$

y la altura es

$$\text{Altura} = \frac{1}{17.5 - 14.5} = 1/3$$

Figura 5.4
Distribución uniforme de los productos enlatados



Asuma que Del Monte desea saber la probabilidad de que una sola lata pese entre 16 y 17.2 onzas. Este valor está dado por el área dentro de ese rango tal y como se muestra en la figura 5.4. La probabilidad de que una observación única esté comprendida dentro de dos valores X_1 y X_2 es

Probabilidad de que una observación caiga entre dos valores	$P(X_1 \le X \le X_2) = \dfrac{X_2 - X_1}{\text{rango}}$	[5.12]

Para la lata de Del Monte, se tiene

$$P(16 < X < 17.2) = \frac{17.2 - 16}{17.5 - 14.5}$$
$$= 0.40$$

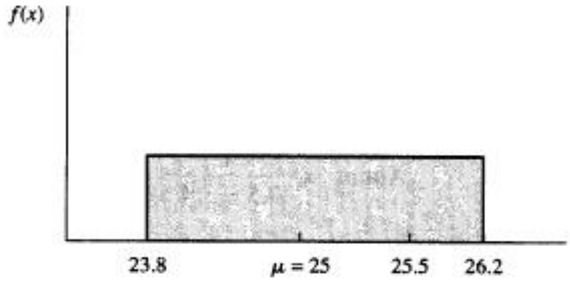
Ejemplo 5.6

Dow Chemical produce un fertilizante inorgánico para césped, para aquellos quienes fertilizan su pasto en casa, de manera que lo puedan podar con más frecuencia. Este tipo de fertilizante se vende en bolsas con un peso uniformemente distribuido, con una media de 25 libras y un rango de 2.4 libras. Harry Homeowner necesita 23 libras para fertilizar su césped, pero duda si comprar sólo una bolsa ya que se desvía de las 25 libras en un rango de 2.4 libras. También tiene curiosidad sobre la probabilidad de comprar una bolsa con más de 25.5 libras.

Solución

Si las bolsas tienen un promedio de 25 libras sobre un rango de 2.4 libras, entonces la mitad de ese rango, o 1.2 libras, debe estar por debajo de 25, y la otra mitad, por encima de 25 libras. Por consiguiente, el peso mínimo será 25 - 1.2 = 23.8 libras y el peso máximo es 25 + 1.2 = 26.2 libras, como se observa en la figura. La probabilidad de seleccionar una sola bolsa que contenga entre 25.5 y 26.2 libras es

$$P(25.5 < X < 26.2) = \frac{26.2 - 25.5}{2.4} = 0.2917$$



Interpretación

Harry no tiene que preocuparse. La bolsa más liviana que podría comprar pesa 23.8 libras. Definitivamente comprará por lo menos las 23 libras que necesita para su césped. Además, la probabilidad de seleccionar una bolsa con más de 25.5 libras es 29.17%.

A. Usando el computador

Minitab puede utilizarse de manera efectiva para determinar probabilidades uniformes. Ingrese los valores para los cuales desea hallar las probabilidades en la Columna (1). Haga clic en **Calc. > Probability Distribution>Uniform > Cumulative Probability**. Ingrese los valores más bajo y más alto y C1 en la casilla de **Input Column**.

Ejercicios de la sección

27. Generalmente le toma entre 1.2 y 1.7 horas aproximadamente hacer su tarea de estadística. Los tiempos están distribuidos de manera uniforme. ¿Qué tan probable es que usted termine a tiempo para reunirse con sus amigos dentro de 1.4 horas?

28. Las latas de alimento para perros Happy-Tale tienen un promedio de 16 onzas, con un rango de 4.2 onzas.

a. ¿Cuál es la lata más pequeña en onzas que usted puede comprar para Weiner, su perro de raza poodle toy? ¿Cuál es la lata más grande que usted puede comprar para su perro lobo llamado Killer?

b. ¿Si usted selecciona una lata al azar, cuál es la probabilidad de que pese entre 15.8 y 16.5 onzas?

29. El agua utilizada por Auto-Brite para lavar los carros es de 30 galones por carro. Lo menos que se utiliza son 27 galones, y su uso está distribuido uniformemente. Una encuesta muestra que los carros no quedan limpios a menos que se utilicen 32 galones de agua en la lavada. ¿Qué porcentaje de carros que salen de Auto-Brite queda limpios?

30. El tiempo requerido para conseguir una pista en una bolera local oscila entre 23.5 y 40.5 minutos. Asumiendo una distribución uniforme, si la probabilidad de que usted tenga que esperar más de 30 minutos excede del 60%, usted piensa jugar golf. ¿Cuál bolsa debería colocar en su baúl, la bolsa de golf o la de bolos?

31. Debido a que usted decidió jugar golf, dada su respuesta a la pregunta anterior, usted aprende que el tiempo promedio para jugar 18 hoyos en esta cancha es de 4.2 horas. La persona que completó este trayecto más rápidamente fue Rapid Roy Parr, quien tomó 2.9 horas. Si los tiempos están distribuidos uniformemente, ¿cuál es la probabilidad de que usted termine a tiempo para llegar a casa para ver el juego de fútbol entre Pittsburgh Steelers y Denver Broncos que comienza en 4 horas?

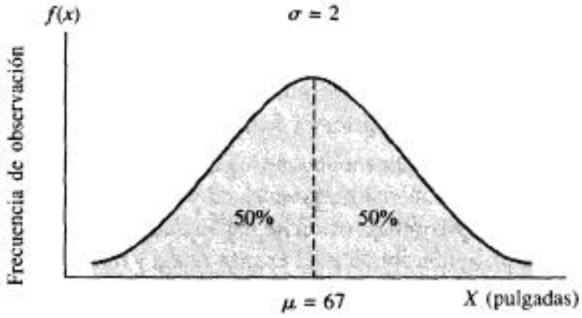
5.8 La distribución normal

De todas las distribuciones de probabilidad que se analizarán, la distribución normal es la más importante. En el capítulo 3 se hizo una introducción a la naturaleza básica de la distribución normal, su característica simétrica en forma de campana y la forma como se relacionaba con la regla empírica. En este momento debe recordarse que la distribución normal es una distribución continua (no discreta). Se utiliza para reflejar la distribución de variables tales como estaturas, pesos, distancias y otras medidas que son divisibles infinitamente. Tales variables continuas generalmente son el resultado de la medida.

Consideremos un caso en el cual ToppsWear, un gran fabricante de ropas, desea estudiar la distribución en la estatura de las personas. Topps Wear reconoció que el público estaba en constante cambio en su tamaño físico y en sus proporciones. En un esfuerzo por producir la ropa de mejor ajuste, la gerencia sintió que se necesitaba un análisis completo de las tendencias actuales en los tamaños de moda. Se supone que si Topps Wear fuera a medir las estaturas de todos sus clientes potenciales, encontrarían que las estaturas están distribuidas normalmente alrededor de una media de 67 pulgadas. Es decir, que mientras que la estatura promedio es de 67 pulgadas, algunas personas son más altas y algunas más bajas. Esta dispersión por encima y por debajo de la media podría medirse mediante la desviación estándar que se calculó en el capítulo 3. Se asume que la desviación estándar en las estaturas de los clientes es de 2 pulgadas.

Una gráfica de estas estaturas produciría la habitual forma de campana. La figura 5.5 muestra esta gráfica, colocando las observaciones individuales en el eje horizontal, y la frecuencia con la cual cada una de estas

Figura 5.5
Distribución normal de las estaturas para Topps Wear

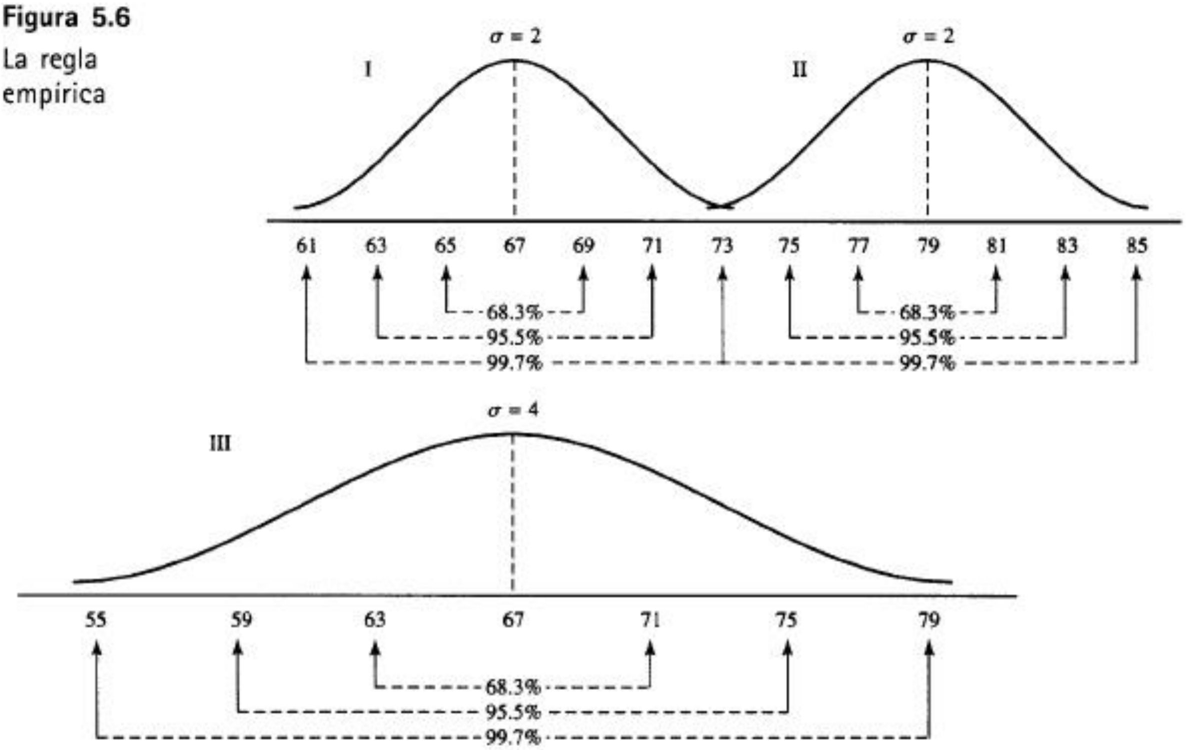


observaciones ocurrieron en el eje vertical. Si los valores son todavía normales (ej: distribuidos normalmente), entonces aparecerá la curva en forma de campana. Vale la pena recordar que más del 50% de las observaciones (estaturas) están por encima de la media y el 50% de éstas están debajo de la media. Similarmente el 50% de toda el área bajo la curva normal está a la derecha de la media y el 50% de esta área está a la izquierda de la media. Esto se observa también en la figura 5.5.

A. Comparación entre distribuciones normales

La forma y posición de una distribución normal están determinadas por dos parámetros: su media μ y su desviación estándar σ. La figura 5.6 muestra tres distribuciones normales diferentes de las tallas que ToppsWear puede encontrar en su estudio sobre las tendencias de la moda. La primera (I) corresponde a las distribuciones descritas anteriormente, las cuales tienen una media de $\mu = 67$ y una desviación estándar de $\sigma = 2$. Está centrada en 67 con la mitad de las observaciones por encima de 67 y la mitad por debajo. La desviación estándar de 2 indica el grado en el cual las observaciones están dispersas por encima y por debajo de 67.

Figura 5.6
La regla empírica



La segunda distribución (II) tiene una media más alta, de $\mu = 79$, pero la misma desviación estándar de $\sigma = 2$. Por tanto, está centrada más hacia la derecha, directamente encima de 79. Pero como tiene el mismo grado de dispersión ($\sigma = 2$), toma la misma forma que la primera distribución.

Una tercera distribución (III) tiene la misma media que la primera ($\mu = 67$) y por tanto está centrada en el mismo sitio. Sin embargo, su medida de dispersión es más grande, tal y como lo indicó la desviación estándar de $\sigma = 4$. Las observaciones varían por encima y por debajo de dicha media de 67 hasta un grado mayor que las observaciones de la primera distribución. Por tanto, la distribución III es más plana y más dispersa por encima y por debajo de la media de 67.

A pesar de sus diferencias, las tres son distribuciones normales. Son simétricas y en forma de campana. Además, como conjuntos de datos normalmente distribuidos, la regla empírica que se analizó en el capítulo 3 se aplica a cada distribución. La **regla empírica** especifica que, sin considerar el valor de la media o la desviación estándar,

El 68.3% de todas las observaciones está a una desviación estándar de la media.

El 95.5% de todas las observaciones está a dos desviaciones estándar de la media.

El 99.7% de todas las observaciones está a tres desviaciones estándar de la media.

La figura 5.6 ilustra la regla empírica. Vale la pena destacar que para los tres conjuntos de datos, sin considerar el valor de μ o σ, el 68.3% de todas las observaciones está a un σ de μ. Comparando la primera distribución (I) con la tercera (III). Debido a que la tercera distribución está altamente dispersa, es necesario tomar un intervalo más amplio para incluir la misma proporción de observaciones. Mientras que la primera distribución incluye el 68.3% de todas las observaciones dentro del intervalo 65 a 69, la tercera distribución comprende este mismo porcentaje sólo dentro de un intervalo más amplio de 63 a 71.

Incluir un cierto porcentaje de todas las observaciones dentro de un intervalo, significa también abarcar el mismo porcentaje de toda el área que está debajo de la curva dentro de dicho intervalo. Por tanto, mientras que el intervalo de 65 a 69 contiene el 68.3% de todas las observaciones en la primera distribución, ese mismo intervalo también contiene el 68.3% de toda el área que está debajo de la curva normal.

B. La desviación normal

Puede existir un número infinito de distribuciones normales posibles, cada una con su propia media y su desviación estándar. Ya que obviamente no se puede analizar un número tan grande de posibilidades, es necesario convertir todas estas distribuciones normales a una forma estándar. Esta conversión a la **distribución normal estándar** se efectúa con la **fórmula de conversión** (o fórmula- Z)

La desviación normal o fórmula-Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad [5.13]$$

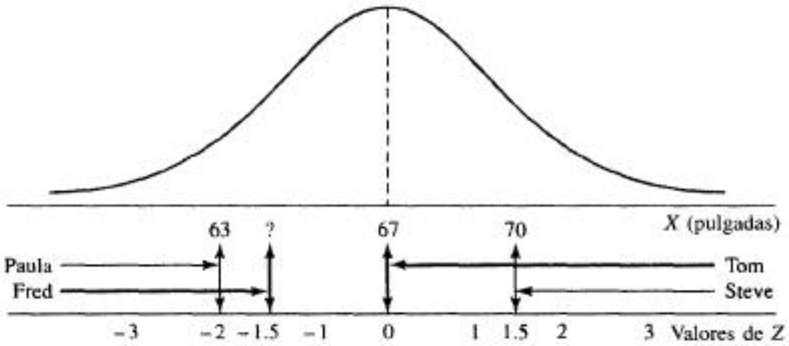
en donde Z es la **desviación normal** y X es algún valor específico de la variable aleatoria. Después de este proceso de conversión, la media de la distribución es 0 y la desviación estándar es 1. Es decir, sin considerar lo que valen la media y la desviación estándar, se miden en las unidades originales en la distribución, después de que se ha aplicado la fórmula de conversión la media es 0 y la desviación estándar es 1.

La figura 5.7 ilustra el uso de los datos de ToppsWear. El eje superior mide las observaciones de estatura X en pulgadas. La media es $\mu = 67$ pulgadas, y la desviación estándar es $\sigma = 2$ pulgadas. El eje inferior refleja estas estaturas en términos de sus valores de Z.

Tom Typical mide 67 pulgadas, la estatura promedio de todos los consumidores en el mercado de ropas de ToppsWear. Utilizando la fórmula (5.13), el valor de Z relacionado con una estatura de $X = 67$ es

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{67 - 67}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Figura 5.7
Conversión de estaturas de los clientes



Esto se puede observar en el eje inferior, o eje Z, en la figura 5.7. Después de aplicar la fórmula de conversión, se encuentra que la estatura promedio de 67 pulgadas tiene un valor de Z de 0. Si se quisiera convertir la estatura de todos los clientes en todo el mercado, se encontraría que todos los valores resultantes de Z tendrían una media de cero y una desviación estándar de 1.

Z, la *desviación normal*, se define como "el número de desviaciones estándar a las que una observación está de la media". Paula Petite mide 63 pulgadas. Su valor de Z es

$$Z = \frac{63 - 67}{2}$$
$$= -2$$

Como lo muestra la figura 5.7, 63 pulgadas están a 4 pulgadas, o 2 desviaciones estándar por debajo de la media. Convirtiendo $X = 63$ pulgadas a su valor de Z resulta -2.00.

> **Valor de Z** Es el número de desviaciones estándar a las que una observación está por encima o por debajo de la media.

Steve Stretch mide 70 pulgadas. La figura 5.7 revela que convertir 70 pulgadas a un valor de Z resulta

$$Z = \frac{70 - 67}{2}$$
$$= 1.5$$

El valor de Z de Steve es 1.5. El está a 3 pulgadas o 1.5 desviaciones estándar por encima de la estatura promedio de 67 pulgadas. ¿Cuánto mide Fred si su valor de Z es –1.5?

C. Cálculo de probabilidades con la desviación normal

Estandarizar una distribución normal permite determinar más fácilmente la probabilidad de que ocurra cierto evento. El personal de ToppsWear puede hallar la probabilidad de que un solo cliente tenga entre 67 y 69 pulgadas de estatura, $P(67 \leq X \leq 69)$, simplemente hallando el área que está bajo la curva normal entre 67 y 69. Es decir, si se conoce el área se conocerá la probabilidad.

Considerándolo en este sentido, se supone que se está disparando a un objetivo o blanco, el cual tiene dos tercios pintado de verde y un tercio pintado de rojo. Se tiene la misma oportunidad de darle a un punto del objetivo como a cualquier otro punto. No necesariamente debe dar en el centro, sólo al objetivo en general. La probabilidad de que pegue en la parte verde es dos tercios. ¿Por qué? Debido a que dos tercios del área están pintados de verde. Si se conoce el área se conoce la probabilidad. Lo mismo puede decirse para el área que está bajo la curva normal.

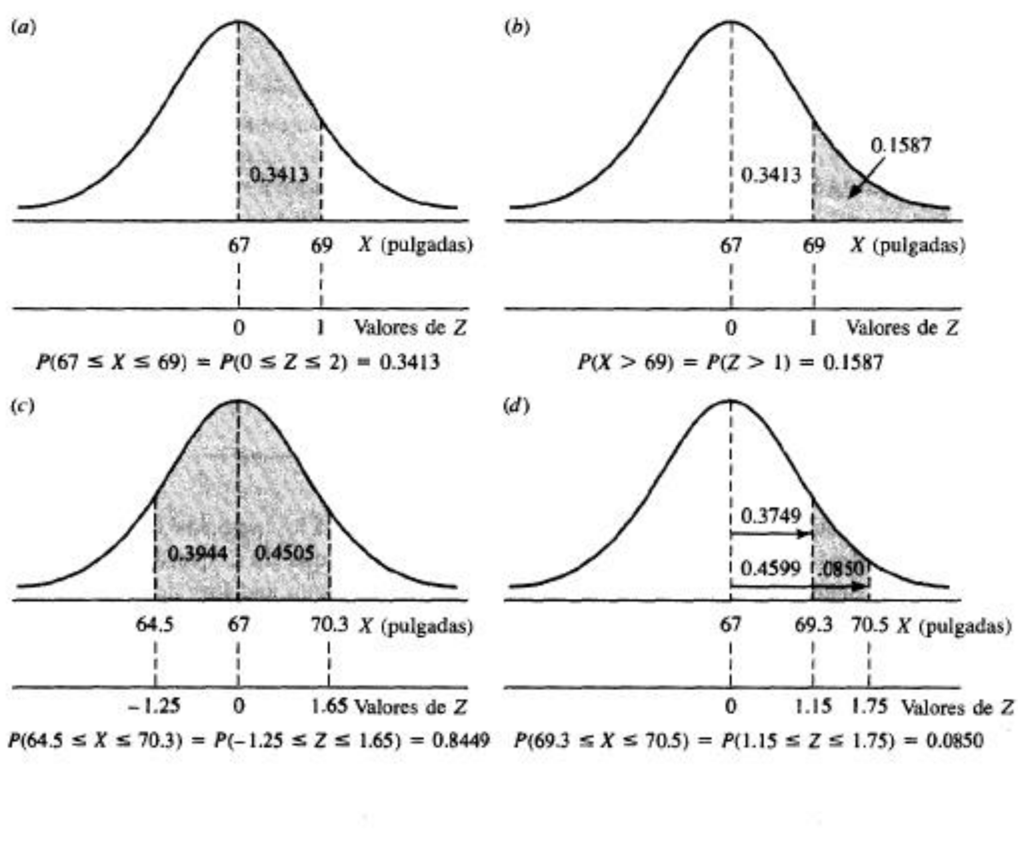
El área relacionada con un valor de Z dado puede hallarse en la tabla E del apéndice III. La figura 5.8(a) ilustra este proceso. Se desea saber el área que está entre 67 y 69. El valor de Z para 69 es

$$Z = \frac{69 - 67}{2}$$
$$= 1.00$$

La tabla E proporciona el área bajo la curva *desde la media hasta algún valor por encima o por debajo de ésta*. Ésta es justamente el área que se quiere. En la tabla E, se halla el valor de Z para 1.0 Se va hacia la derecha a la siguiente columna que comienza con 0.00 para obtener $Z = 1.00$. Allí se encontrará la entrada 0.3413. Es decir, el 34.13% del área que está bajo la curva está entre 67 y 69. Hay 34.13% de probabilidad de que un cliente seleccionado aleatoriamente mida entre 67 y 69 pulgadas.

Aunque la tabla E muestra solamente el área desde la media hasta algún valor por encima o por debajo de ella, otras probabilidades pueden hallarse fácilmente. Suponiendo que ToppsWear debe determinar la probabilidad de que un cliente mida más de 69 pulgadas. Como lo muestra la figura 5.8(b), ya se ha establecido que el 34.13% de todos los clientes miden entre 67 y 69 pulgadas. Además, también se sabe que el 50% de todos los clientes está por encima de la media de 67. Esto deja 0.5000 - 0.3413 = 0.1587 en el área de la cola que va más allá de 1.00. Hay un 15.87% de probabilidad que un cliente escogido aleatoriamente mida más de 69 pulgadas.

Figura 5.8
Áreas debajo de la curva normal



La figura 5.8(*c*), la cual busca el área comprendida entre 64.5 y 70.3, requiere que se calculen los valores de Z. Como la tabla dará solamente el área de la media hasta algún valor por encima o por debajo de ella, deben determinarse las áreas (1) entre 64.5 y 67 y (2) entre 67 y 70.3 y adicionarlas.

$$Z = \frac{64.5 - 67}{2}$$
$$= -1.25$$

Un valor de Z de 1.25 (se puede ignorar el signo negativo ya que la curva es simétrica y la mitad de la derecha es igual a la mitad de la izquierda) da un área de 0.3944. Para el área comprendida entre 67 y 70.3, se halla

$$Z = \frac{70.3 - 67}{2}$$
$$= 1.65$$

La tabla E revela que el área es 0.4505. Por tanto, $P(64.5 \leq X \leq 70.3) = 0.3944 + 0.4505 = 0.8449$. La probabilidad de que un cliente tenga entre 64.5 y 70.3 pulgadas de estatura es del 84.49%.

Determinar $P(69.3 \leq X \leq 70.5)$ también requiere dos cálculos de Z, como se muestra en la figura 5.8 (*d*). Se debe determinar el área de 67 a 70.5, la cual incluye el área que se desea y una que no se desea. Luego se calcula el área comprendida entre 67 y 69.3 y se resta:

$$Z = \frac{70.5 - 67}{2}$$
$$= 1.75$$

Un valor de Z de 1.75 da un área de 0.4599. Entonces,

$$Z = \frac{69.3 - 67}{2}$$
$$= 1.15$$

lo que produce un área de 0.3749. Entonces $P(69.3 \leq X \leq 70.5) = 0.4599 - 0.3749 = 0.0850$.

Vale la pena notar que entre mayor sea el valor de Z, menor será el área en la cola de la distribución. La tabla E muestra que a medida que Z se aproxima a 3.99, el área abarcada es de virtualmente el 50% por encima de la media, dejando muy poco en la cola más allá de $Z = 3.99$. Por tanto, $P(Z > 3.99) \approx 0$.

Incidentalmente, $P(X < x) = P(X \leq x)$, en donde x es cualquier valor dado. Esto se debe a que la distribución normal es una distribución continua. Existe un número infinito de posibles valores que puede tomar X. Por tanto, *incluir* el valor de x no incrementa la probabilidad de que el evento ocurra.

Ejemplo 5.7

TelCom Satellite presta servicios de comunicación a los negocios del área metropolitana de Chicago. Los funcionarios de la compañía han aprendido que la transmisión satélite promedio es de 150 segundos, con una desviación estándar de 15 segundos. Los tiempos parecen estar distribuidos normalmente.

Para estimar de manera apropiada la demanda del cliente por sus servicios y establecer una estructura de tarifas que maximice las utilidades corporativas, TelCom debe determinar qué tan probable es que algunas llamadas se presenten. El director de servicios desea que usted proporcione estimados de la probabilidad de que una llamada dure:

a. Entre 125 y 150 segundos.

b. Menos de 125 segundos.

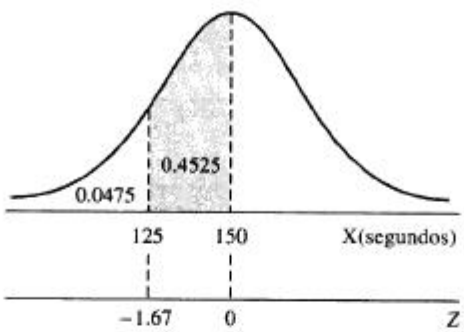
c. Entre 145 y 155 segundos.

d. Entre 160 y 165 segundos.

Solución

a.

$$Z = \frac{125 - 150}{15}$$
$$= -1.67$$

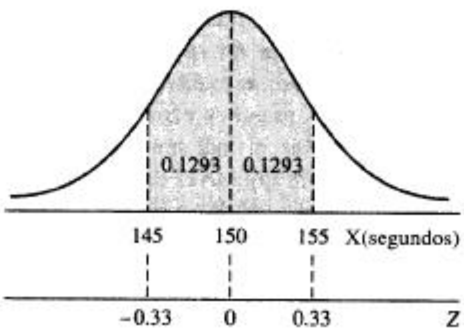


De la tabla E, un valor Z de 1.67 da un área de 0.4525. Por tanto, la probabilidad de que una transmisión dure entre 125 y 150 segundos es del 45.25%.

b. Si el 45.25% del área está entre 125 y 150, entonces $0.5000 - 0.4525 = 0.0475$, o el 4.75% de todas las transmisiones requieren menos de 125 segundos. La probabilidad de que cualquier transmisión seleccionada aleatoriamente requiera 125 segundos o menos es del 4.75%.

c.

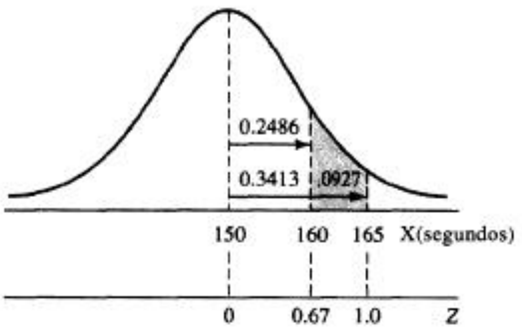
$$Z = \frac{145 - 150}{15}$$
$$= -0.33$$



Dado $Z = -0.33$, el área que está entre 145 y 150 es 0.1293. Debido a que 155 está a una distancia por encima de la media de 150 igual a la que 145 está por debajo de la media, el área entre 150 y 155 también es 0.1293. Por tanto, $P(145 \leq X \leq 155) = 0.1293 + 0.1293 = 0.2586$.

d.

$$Z = \frac{165 - 150}{15}$$
$$= 1$$



Con $Z = 1$, el área es 0.3413. Para hallar el área entre 150 y 160,

$$Z = \frac{160 - 150}{15}$$
$$= 0.67$$

para un área de 0.2486. Por tanto, $P(160 \leq X \leq 165) = 0.3413 - 0.2486 = 0.0927$.

Interpretación

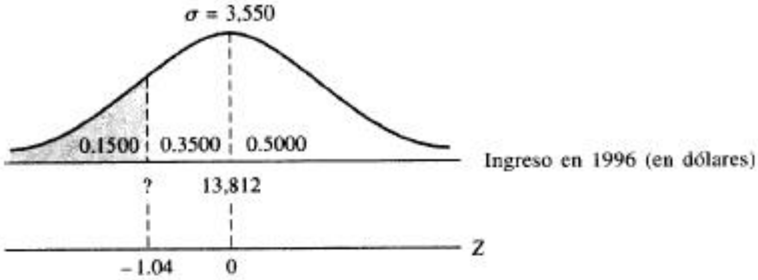
Con base en estas probabilidades, es posible para TelCom desarrollar un sentido de la demanda por sus servicios que le ayudará a establecer políticas respecto al uso de los servicios por parte de los clientes, así como también una estructura de tarifas óptima que TelCom pueda cobrar.

D. Cálculo de un valor X a partir de una probabilidad conocida

En la sección anterior se pidió calcular una probabilidad dado un valor de *X*. Es decir, que se proporcionaba el valor *X* para la variable aleatoria, y se debía hallar el área comprendida entre dicho valor y la media. Sin embargo, algunas veces se puede saber cuál probabilidad se requiere, y debe determinarse qué valor de *X* dará dicha probabilidad. Por ejemplo, se asume que los asesores económicos del presidente proponen un programa de bienestar social para ayudar a los desfavorecidos, el cual consta de un pago monetario al 15% de los más pobres de la nación. Entonces surge la pregunta sobre qué nivel de ingresos separa el 15% más pobre del resto de la gente. En 1996, el ingreso promedio por persona, medido en dólares, en el año de 1982 era de US$13,812. Se asume una desviación estándar de US$3,550. Esto se muestra en la figura 5.9. ¿Existe algún nivel de ingreso que aparezca como "?" que separe el 15% más pobre del 85% restante? Se asume que los ingresos están distribuidos normalmente.

Como se muestra en la figura 5.9, se conoce el área y se busca el valor correspondiente para *X* que está representado por un signo de interrogación. En problemas anteriores se calculó un valor de *Z* y se utilizó para

Figura 5.9
Ingresos del 15% más pobre



buscar el área en la tabla. En esta oportunidad se tiene un área y se puede utilizar la tabla E para buscar el valor correspondiente de Z. Aunque se está interesado en el valor de 0.15, se busca 0.3500 (0.5 – 0.15), ya que sólo el área de la media a algún valor por encima o por debajo de ella está dado en la tabla. Se busca en la estructura interna de la tabla E el área de 0.3500. Lo más próximo que se obtiene es 0.3508, lo que corresponde a un valor de Z de 1.04. (La extrapolación puede utilizarse cuando se requiere un grado mayor de exactitud). Debido a que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

y a que se halló un valor Z de 1.04, se tiene que

$$-1.04 = \frac{X - 13{,}812}{3{,}550}$$

Cuando se despeja X y se halla X = US$10,120. Cualquiera con un ingreso de US$10,120 o menos recibirá el subsidio del gobierno.

Vale la pena destacar el signo negativo para el valor de Z. El signo algebraico Z no fue importante en problemas anteriores simplemente porque se utilizó el valor de Z para buscar un área en la tabla E. Sin embargo, éste no es nuestro caso. En esta ocasión, el valor de Z se utiliza para cálculos matemáticos adicionales para despejar X. Por consiguiente, su signo sí es de importancia. La regla general es que si se trabaja con el área a la izquierda de la media, el signo siempre es negativo.

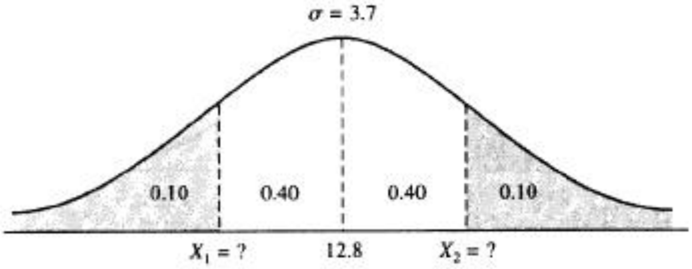
Ejemplo 5.8 Mejorando la prevención urbana contra incendios

Se ha creado una comisión estatal para reducir los tiempos de respuesta de tres estaciones de bomberos. Un grupo de expertos intenta identificar los departamentos de bomberos cuyos tiempos de respuesta estén en el 10% más bajo, o quienes toman más del 90% de todas las estaciones de bomberos en el estudio. Los del primer grupo sirven como modelos para las unidades menos eficientes del segundo grupo.

Los datos muestran que los tiempos promedio de respuesta para una cierta clase de estaciones de bomberos es de 12.8 minutos, con una desviación estándar de 3.7 minutos.

Solución

Se asume que los tiempos de respuesta están distribuidos normalmente; la figura adjunta ilustra el problema. Deben determinarse dos tiempos de respuesta. El primero es tan corto que sólo el 10% de todas las unidades contra incendios llegan al sitio del incendio dentro de dicho lapso. El segundo, es tan largo que sólo el 10% de las unidades toman el mayor tiempo. La fórmula Z se utiliza para determinar cada valor de X. Para establecer el tiempo de respuesta más rápido, se observa 0.4000 en la estructura interna de la tabla E. Aunque se está interesado en el 10% más bajo, se busca 0.4000,



ya que la tabla así está diseñada. La entrada 0.3997 es el valor más próximo y da un valor de Z de 1.28.

Debido a que se está buscando el valor para X en la cola izquierda, el valor de Z se da en el signo negativo apropiado.

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$$

$$-1.28 = \frac{X_1 - 12.8}{3.7}$$

$$X_1 = 8.06$$

y

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}$$

$$1.28 = \frac{X_2 - 12.8}{3.7}$$

$$X_2 = 17.54$$

El valor de Z para X_2 está dado en un signo positivo debido a que se busca un valor en la cola derecha que es mayor que la media.

Interpretación

En esta clasificación sólo el 10% de las estaciones de bomberos respondió a las llamadas en menos de 8.06 minutos. Estas unidades de bomberos servirán como programas modelo para el 10% de las estaciones de bomberos cuyos recorridos superan los 17.54 minutos.

E. Aproximación normal a la distribución binomial

La distribución binomial involucra una serie de n ensayos que pueden producir (1) un éxito o (2) un fracaso. La probabilidad de un éxito se indica como π. Las respuestas pueden hallarse a menudo en la tabla binomial o utilizando la fórmula binomial, fórmula (5.3). Sin embargo, si n es demasiado grande, puede exceder los confines de cualquier tabla y la fórmula puede ser excesivamente engorrosa. Debe diseñarse un método alternativo. La solución puede hallarse con el uso de la distribución normal para aproximar la distribución binomial. Esta aproximación se considera lo suficientemente precisa si $n\pi \geq 5$ y $n(1 - \pi) \geq 5$ y si π está próximo a 0.50.

Se considera un sindicato laboral en el cual el 40% de los miembros está a favor de una huelga. Si se seleccionan 15 miembros de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que 10 apoyen un paro? Para la tabla binomial se halla

$$P(X = 10 \mid n = 15, \ \pi = 0.40) = 0.0245$$

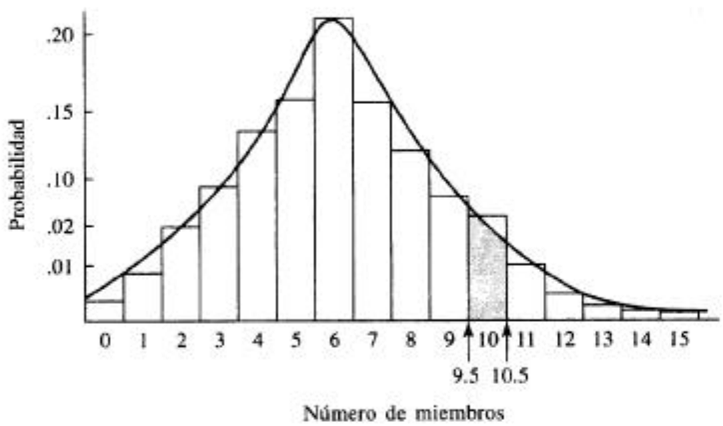
Si no se pudiera utilizar la tabla, podría aproximarse a la respuesta utilizando la distribución normal. Primero se debe hallar la media μ y la desviación estándar σ de la distribución normal así

$$\mu = n\pi \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{n(\pi)(1-\pi)}$$

En este caso, $\mu = (15)(0.40) = 6$ y $\sigma = \sqrt{15(0.40)(0.60)} = 1.897$.

Debido a que existe un número infinito de valores posibles en una distribución normal (o en cualquier distribución continua), la probabilidad de que la variable aleatoria sea exactamente igual a algún valor específico como 10, es cero. Cuando se utiliza una distribución continua para estimar una variable aleatoria discreta, es necesario un leve ajuste. Este ajuste, llamado *factor de corrección de continuidad*, requiere que se trate la probabilidad de exactamente 10 miembros como el intervalo entre 9.5 miembros y 10.5 miembros. Esto se ilustra en la figura 5.10, la cual muestra las probabilidades para cada valor de la variable aleatoria (número de miembros) tomada de la tabla B.

Figura 5.10
Aproximación normal a la binomial



La probabilidad de que exactamente 10 miembros estén a favor de una huelga está representado por el área del rectángulo centrado en 10. Vale la pena destacar que el rectángulo se extiende de 9.5 a 10.5. La curva normal está superpuesta sobre los rectángulos.

Utilizando la distribución normal para hallar $P(9.5 \leq X \leq 10.5)$, se tiene

$$Z = \frac{9.5 - 6}{1.897} = 1.85$$

para un área de 0.4678, y

$$Z = \frac{10.5 - 6}{1.897} = 2.37$$

para un área de 0.4911. Entonces, $P(9.5 \leq X \leq 10.5)$, = 0.4911 – 0.4678 = 0.0233, lo cual es una aproximación muy cercana al 0.0245 que se encuentra en la tabla B.

Ejercicios de la sección

32. Los paquetes de cereal Cheerios de General Mills vienen en cajas de 36 onzas que tienen una desviación estándar de 1.9 onzas. Se piensa que los pesos están distribuidos normalmente. Si se selecciona una caja aleatoriamente, cuál es la probabilidad de que la caja pese:

a. ¿Menos de 34.8 onzas?

b. ¿Más de 34.8 onzas?

c. ¿Entre 34.3 onzas y 38.9 onzas?

d. ¿Entre 39.5 onzas y 41.1 onzas?

33. Como ingeniero constructor usted compra bolsas de cemento de un promedio de 50 libras, con una desviación estándar de 5.2 libras. Desde que usted tuvo el accidente escalando una montaña, el médico le dijo que no levantara nada que pesara más de 60 libras. ¿Debería usted cargar una bolsa?

34. Se publica que los frenos de los nuevos autos de la marca Lambourginis duran un promedio de 35,000 millas con una desviación estándar de 1,114 millas. Cuál es la probabilidad de que los frenos del auto que usted acaba de comprar le duren:

a. ¿Más de 35,000 millas?

b. ¿Menos de 33.900 millas?

c. ¿Menos de 37.500 millas?

d. ¿Entre 35,200 y 36,900 millas?

35. Los sobrecostos por actualización de computadores en su empresa tienen un promedio de US$23,500, con una desviación estándar deUS$9,400. Como director ejecutivo de la División de Investigación, usted no desea arriesgarse a más de 34% de probabilidad que el sobrecosto en una actualización propuesta recientemente exceda de US$25,000. ¿Debería ejecutar la actualización?

36. El promedio de los salarios en los bancos comerciales en Illinois es de US$22,87 por hora, con una desviación estándar de US$5.87. Cuál debe ser su salario por hora si desea ganar:

a. ¿Más que el 80% de todos los empleados?

b. ¿Más que el 30% de todos los empleados?

c. ¿Menos que el 20% de todos los empleados?

d. ¿Más que el 50% de todos los empleados?

37. Los empleados en Coopers-Price and Lybrand trabajan un promedio de 55.8 horas por semana, con una desviación estándar de 9.8 horas. Los ascensos son más probables para los empleados que están dentro del 10% de los que pasan más tiempo trabajando. ¿Cuánto debe trabajar usted para mejorar sus oportunidades de ascenso?

38. Los registros muestran que 45% de todos los automóviles producidos por Ford Motor Company contiene partes importadas de Japón. ¿Cuál es la probabilidad de que los próximos 200 carros, 115 contengan partes japonesas?

Problemas resueltos

1. Distribución binomial. Un fabricante en California le suministra un diseño prototipo para una pieza de aeronave que requiere su negocio. Este nuevo producto, que es enviado en lotes de $n = 12$, sufre de una tasa de defectos de 40%.

a. Si usted no desea un riesgo mayor del 10% en la probabilidad de que 5 de los 12 sean defectuosos ¿debería comprarle a ese distribuidor?

De la tabla B, $P(X = 5 \mid n = 12, \pi = 0.40) = 0.2270 > 10\%$. No compre.

b. Si usted no desea enfrentar un riesgo mayor del 20% de probabilidad de que más de 5 salgan defectuosos, debería comprarle a este proveedor?

De la tabla C, $P(X > 5 \mid n = 12, \pi = 0.40) = 1 - P(X \leq 5 \mid n = 12, \pi = 0.40) = 1 - 0.6652 = 0.3348 > 20\%$. Usted no debería comprarle a este proveedor.

2. **Distribución hipergeométrica** Una tienda de productos deportivos tiene en existencia $N = 20$ pares de botas para esquiar de las cuales $r = 8$ son de su talla. Si usted selecciona $n = 3$ pares que usted desea, ¿cuál es la probabilidad de que $x = 1$ le quede bien?

$$P(X = 1) = \frac{{}_rC_x \; {}_{N-r}C_{n-x}}{{}_NC_n}$$

$$= \frac{{}_8C_1 \; {}_{12}C_2}{{}_{20}C_3} = 0.4632$$

3. **Distribución de Poisson** El cable utilizado para asegurar las estructuras de los puentes tiene un promedio de 3 defectos por cada 100 yardas. Si usted necesita 50 yardas, ¿cuál es la probabilidad de que haya una defectuosa?

Debido a que la media está dada en términos de 100 yardas, se debe determinar qué porcentaje de 100 yardas es 50: $50/100 = 0.50$. Entonces, en número promedio de defectos por 50 yardas es $(3)(0.50) = 1.5$.

De la tabla D, $P(X = 1\ X \mid \mu = 1.5) = 0.3347$, o utilizando la fórmula,

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{1.5^1\, e^{-1.5}}{1!} = \frac{1.5^1 \dfrac{1}{e^{1.5}}}{1!} = 0.3347$$

4. **Distribución exponencial** Como gerente de Burguer Heaven, usted observa que los clientes entran a su establecimiento a razón de 8 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen más de 15 minutos entre la llegada de 2 clientes?

Aunque la razón media está dada originalmente como 8 por 60 minutos, se desea saber la probabilidad de que transcurran 15 minutos. Debe determinarse qué porcentaje de 60 minutos es 15: $15/60 = 0.25$. Así, t es 0.25 y $-\mu t = -8(.25) = -2$. Para determinar $P(X > 15)$, primero se debe hallar $P(X \leq 15)$ y restar de 1.00. Si se tiene que $x = 0$ y $\mu t = 2$, la tabla D muestra que $P(X \leq 15) = 1 - e^{-8(0.25)} = 1 - e^{2} = 1 - 0.1353 = 0.8647$. Entonces, $P(X > 15) = 1 - 0.8647 = 0.1353$.

Si se utiliza la fórmula (5.8) en lugar de la tabla,

$$P(X \leq 15) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-8(0.25)} = 1 - 0.1353 = 0.8647$$

$$P(X > 15) = 1 - 0.8647 = 0.1353.$$

Entonces,

5. **Distribución uniforme** Los tiempos de terminación de un trabajo oscilan entre 10.2 minutos a 18.3 minutos y se piensa que están distribuidos uniformemente. ¿Cuál es la probabilidad de que se requiera entre 12.7 y 14.5 minutos para realizar este trabajo?

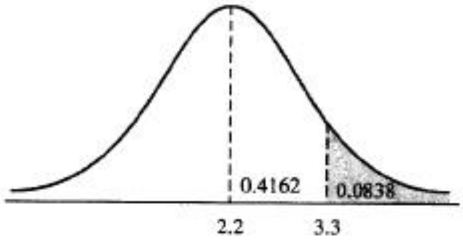
$$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \frac{(X_2 - X_1)}{\text{rango}} = \frac{14.5 - 12.7}{8.1} = 0.2222$$

6. **Distribución normal** El Ministerio de Agricultura de Estados Unidos en un estudio sobre cultivos ha detectado que las precipitaciones diarias en ciertos lugares de Hawaii parecen estar distribuidas normalmente con una media de 2.2 pulgadas durante la estación lluviosa. Se determinó que la desviación estándar era de 0.8 pulgadas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva más de 3.3 pulgadas en un día durante la estación lluviosa?

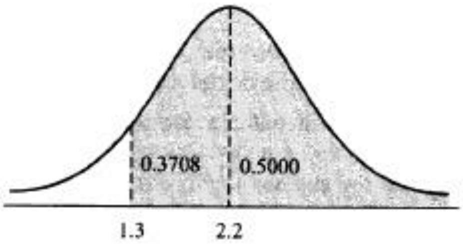
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{3.3 - 2.2}{0.8} = 1.38$$

Como se ve en la gráfica, un valor de Z de 1.38 da un área de 0.4162. Así, $P(X > 3.3) = 0.5000 - 0.4162 = 0.0838$.



b. Halle la probabilidad de que llueva más de 1.3 pulgadas

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1.3 - 2.2}{0.80} = -1.13$$

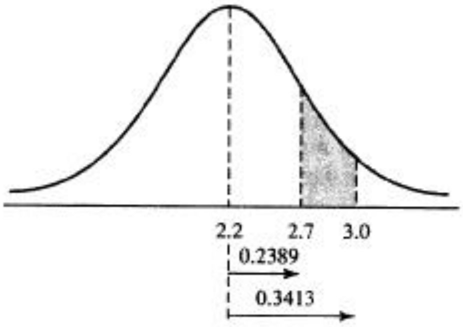


El valor de Z de -1.13 produce un área de 0.3708, y $P(X > 1.3) = 0.5000 + 0.3708 = 0.8708$.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que las precipitaciones estén entre 2.7 y 3.0 pulgadas?

$$Z_1 = \frac{3.0 - 2.2}{0.80} = 1.00 \qquad \text{para un área de } 0.3413$$

$$Z_2 = \frac{2.7 - 2.2}{0.80} = 0.63 \qquad \text{para un área de } 0.2357$$



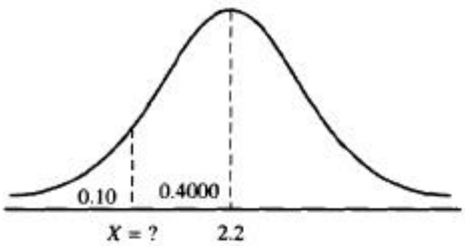
Por tanto, $P(2.7 \leq X \leq 3.0) = 0.3413 - 0.2357 = 0.1056$.

d. ¿Cuánta precipitación debe presentarse para exceder el 10% de las precipitaciones diarias?

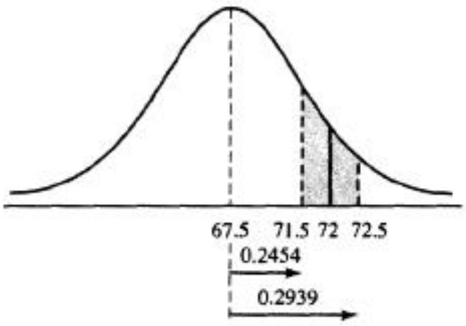
Como se observa en la gráfica, un área de 0.40 está relacionada con el valor de Z de -1.28. Por tanto,

$$-1.28 = \frac{X - 2.2}{0.80}$$

$$X = 1.176 \text{ pulgadas}$$



7. Aproximación normal a la distribución binomial El 45% de todos los empleados del centro de capacitación gerencial en Condor Magnetics tienen títulos universitarios. ¿Cuál es la probabilidad de que de los 150 empleados seleccionados aleatoriamente, 72 tengan título universitario?



La media y la desviación estándar son $\mu = (n)(\pi) = (150)(0.45) = 67.5$ $\sigma = \sqrt{(n)(\pi)(1-\pi)} = \sqrt{(150)(0.45)(0.55)} = 6.09$. $P(71.5 \leq X \leq 72.5)$ se halla como

$$Z_1 = \frac{72.5 - 67.5}{6.09} = 0.82 \qquad \text{para un área de } 0.2939$$

$$Z_2 = \frac{71.5 - 67.5}{6.09} = 0.66 \qquad \text{para un área de } 0.2454$$

$$P(71.5 \leq X \leq 72.5) = 0.2939 - 0.2454 = 0.0485$$

Lista de fórmulas

[5.1]	$\mu = E(X) = \Sigma[(x_i)P(x_i)]$	Media o valor esperado de una distribución discreta
[5.2]	$\sigma^2 = \Sigma[(x_i - \mu)^2 P(x_i)]$	Varianza de una distribución de probabilidad
[5.3]	$P(x) = {}_nC_x(\pi)^x - (1-\pi)^{n-x}$	Distribución binomial
[5.4]	$E(X) = \mu = n\pi$	Media de una distribución binomial
[5.5]	$\sigma^2 = n\pi(1-\pi)$	Varianza de una distribución binomial

[5.6]	$P(x) = \dfrac{{}_{r}C_{x}\ {}_{N-r}C_{n-x}}{{}_{N}C_{n}}$	Distribución hipergeométrica
[5.7]	$P(x) = \dfrac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!}$	Distribución de Poisson
[5.8]	$P(X \leq x) = 1 - e^{-\mu t}$	Distribución exponencial
[5.9]	$E(x) = \mu = \dfrac{a + b}{2}$	Valor esperado para una distribución uniforme
[5.10]	$\sigma^2 = \dfrac{(b - a)^2}{12}$	Varianza para una distribución uniforme
[5.11]	$\text{Altura} = \dfrac{1}{b - a}$	Altura de una distribución uniforme
[5.12]	$P(X_1 \leq X \leq X_2) = \dfrac{X_2 - X_1}{\text{Rango}}$	Probabilidad de que un valor caiga dentro de un cierto rango en una distribución uniforme
[5.13]	$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$	Desviación normal

Ejercicios del capítulo

39. Una empresa de transportes por carretera descubre que el 30% de sus envíos llega tarde. Si se programan ocho envíos, cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Tres lleguen tarde?

b. ¿Tres o más lleguen tarde?

c. ¿Tres o menos lleguen tarde?

d. ¿Entre tres y cinco inclusive lleguen tarde?

40. Una encuesta revela que el 60% de los hogares prefiere cierta marca de ropa deportiva. Si se hizo la encuesta en 12 hogares, cuál es la probabilidad de que esta ropa deportiva sea escogida por:

a. ¿Siete hogares?

b. ¿Menos de 6 hogares?

c. ¿Diez o más hogares?

d. ¿Más de 2 hogares?

41. Temps Ltda., despachó 9 trabajadores temporales diurnos hacia el Bank of America de San Francisco. Sólo 6 de ellos están realmente calificados para realizar el trabajo para el cual pueden ser asignados. El departamento de contabilidad selecciona aleatoriamente 5 de los 9 empleados. Cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Los 5 estén calificados?

b. ¿Cuatro estén calificados?

c. ¿Por lo menos 3 estén calificados?

42. La junta directiva de ABC, Inc. consta de 4 economistas, 3 contadores y 5 ingenieros. Si un comité de 7 miembros debe seleccionarse aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que dicho comité esté conformado por 2 economistas, 2 contadores y 3 ingenieros?

43. Los aviones llegan al aeropuerto O'Hare de Chicago a una razón promedio de 5.2 por minuto. Los controladores de tráfico aéreo pueden manejar de forma segura un máximo de 7 aviones por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que se arriesgue la seguridad del aeropuerto? Se cree que las llegadas tienen una distribución de Poisson.

44. *Business Week* reportó que el 80% de la población piensa que los salarios de los miembros del congreso son demasiado altos. Si 15 personas se seleccionan para conformar un comité para que decida por mayoría de votos si tales salarios deben aumentarse o no, ¿cuál es la probabilidad de que el voto sea no aumentar tales salarios?

45. Los camiones llegan a cargar a una razón de 9.3 por hora en promedio. El encargado del puerto sabe que si llegan 6 o menos camiones, sólo es necesario utilizar un puerto de carga. Si llegan más de 6, debe abrirse un segundo puerto. ¿Debe abrirse el segundo puerto?

46. Una compañía que presenta un 10% de defectos en su producción vende su producto en lotes de 15 unidades. Ofrece un descuento de US$100 si más de 3 unidades salen defectuosas. ¿Cuánto descuento debería esperar la compañía por cada 50 envíos?

47. Janet Powell es la contadora jefe de una gran tienda de ropa de un centro comercial. Ella hace la nómina para 11 empleados, pero 7 contienen errores. Martha Holt, la jefe de Janet, no está conforme con el trabajo de Janet y selecciona 5 registros de nómina para revisarlos. Se encuentra que 3 contienen errores. Janet se defiende diciendo que sólo tuvo 3 errores en los 11 registros. ¿Es éste un buen argumento?

48. El tiempo promedio entre fallas del nuevo bombillo de General Electric es de 10 semanas. ¿Cuál es la probabilidad de que un bombillo falle dentro de 15 semanas?

49. Los clientes ingresan a un restaurante local a una razón de 10 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran 30 minutos entre las llegadas de 2 clientes cualquiera?

50. Los pesos contenidos en las cajas de cereal están distribuidos de manera uniforme con una media de 35 onzas y un rango de 3.4 onzas.

a. ¿Cuál es el peso mínimo y máximo de las cajas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una sola caja contenga entre 32 y 33 onzas?

51. Durante los últimos 20 años Fred ha conducido todos los días para ir a su trabajo. Lo más rápido que ha hecho el viaje ha sido en 63 minutos. Lo máximo que se ha demorado ha sido 110 minutos. Si los tiempos de conducción están distribuidos uniformemente:

a. ¿Cuál es el tiempo promedio que Fred se toma?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que le tome 1.5 horas?

52. Los reportes muestran que se comenten 5 homicidios cada hora en las ciudades más grandes de la nación, y que la distribución se ajusta a una distribución de Poisson. Si esto es cierto, ¿cuál es la probabilidad de que en los próximos 30 minutos, asesinen a tres personas?

53. Un proceso de manufactura produce 1.2 defectos por cada 100 unidades de producción, y sigue una distribución de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que las siguientes 500 unidades presenten 3 defectos?

54. Normalmente se toma 2 semanas en entrenar a un trabajador para utilizar un taladro de banco. ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador pueda ser entrenado en 1.5 semanas?

55. En un esfuerzo por reducir costos, Wendy's International Inc., un popular restaurante de comida rápida, analizó la tendencia para que sus procesadores automáticos determinaran los pesos de la hamburguesa, en las hamburguesas de cuarto de libra. Se encontró que los pesos oscilaban entre 3.2 onzas y 4.9 onzas. Se asumió una distribución uniforme. ¿Qué porcentaje de hamburguesas tiene más de un cuarto de libra?

56. ¿La distribución normal es una distribución discreta o continua? Justifique su respuesta. Si 2 conjuntos de datos que están distribuidos normalmente tienen la misma media pero diferentes desviaciones estándar, ¿cómo se compararía el rango que comprende el 68.3% de todas las observaciones de un conjunto a otro? Haga las figuras necesarias para ilustrar cómo puede aplicarse la regla empírica en ambas distribuciones.

57. Los costos de producción mensual en una imprenta de Toledo son de $410 dólares en promedio, con una desviación estándar de $87 dólares. El gerente promete al propietario de la tienda mantener los costos por debajo de $300 dólares este mes. ¿Si los costos están distribuidos normalmente, el propietario puede creerle al gerente?

58. Una empresa de contabilidad de Dooit and Quick descubre que el tiempo que se toma para realizar un proceso de auditoría está distribuido normalmente, con un tiempo promedio de 17.2 días y una desviación estándar de 3.7 días. El Sr. Dooit promete iniciar un trabajo de auditoría para su firma dentro de 20 días, pero debe terminar una que ya ha comenzado. ¿Qué tan probable es que cumpla su promesa?

59. Los corredores de una maratón local terminaron el trayecto en un tiempo promedio de 180.3 minutos; $s = 25.7$. ¿Qué tan rápido deben correr para terminar dentro del primer 10%?

60. Los conectores eléctricos duran un promedio de 18.2 meses, y $s = 1.7$. El vendedor acepta reemplazar uno si éste falla dentro de los primeros 19 meses. De las 500 unidades, ¿cuántas debe reemplazar en promedio?

61. Las ventas promedio de Barry son de US$500, con $s = 15.2$. Gana una comisión de US$100 sólo si sus ventas exceden de US$530. En promedio, ¿cuál es la comisión por cada 25 ventas?

62. La producción diaria en una planta local tiene un promedio de 7,300 toneladas, con $s = 125$ toneladas. En promedio, de 100 días, ¿cuántas veces la producción excederá de 7,000 toneladas?

63. Las boletas diarias en una de las atracciones de Dollywood en Tenessee promedian US$1,012 con una desviación estándar de US$312. ¿Cuál es la probabilidad de que la atracción de hoy reciba más de US$1,000?

64. Los estudiantes inscritos en la Prueba de Aptitud Gerencial para Graduados obtienen 812 en promedio, con una desviación estándar de 145. Sólo quienes están entre el 20% de los mejores pueden aplicar a una beca específica. Gus Genius recibió un puntaje de 900 en la prueba. ¿Puede aplicar?

65. Las unidades de almacenamiento en Stor-N-Loc tienen un promedio de 82.3 pies cuadrados, con $s = 53.7$ pies cuadrados. ¿Cuántos pies cuadrados debe tener una unidad para que sea más grande que el 90% de todas las unidades?

66. De acuerdo con la *National Geographic*, el 32% de los australianos que viven en el interior bebe "tinnies", una clase de cerveza local. De los 500 australianos seleccionados aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 150 hayan bebido una tinnie?

67. El *Chicago Tribune* informó que el 69% de los rusos estaban peor económicamente después de la revolución. De los 800 seleccionados aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 580 experimenten condiciones más duras?

68. El *Chicago Tribune* informó que el 56% de los niños que tienen 7 años cree que la Cenicienta era una persona real. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos el 50% de 120 niños de 7 años crea lo mismo?

PUESTA EN ESCENA

Como respuesta a la solicitud del alcalde, como se establece en la sección Escenario a comienzos de este capítulo, los investigadores tienen que determinar el tiempo promedio de respuesta y la variación de tales tiempos de respuesta. También tenían que calcular la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda (1) 1,5 minutos, (2) 2 minutos, y (3) 3 minutos.

El alcalde también estaba interesado en la probabilidad de que la ayuda de la policía estatal sea necesaria así como la probabilidad de que transcurran 10 minutos y 15 minutos entre las llamadas. Los investigadores también tenían que fijar el costo para cada hogar con un avalúo catastral superior a US$70,000 para lograr la meta de reducción del tiempo de respuesta promedio a 2 minutos.

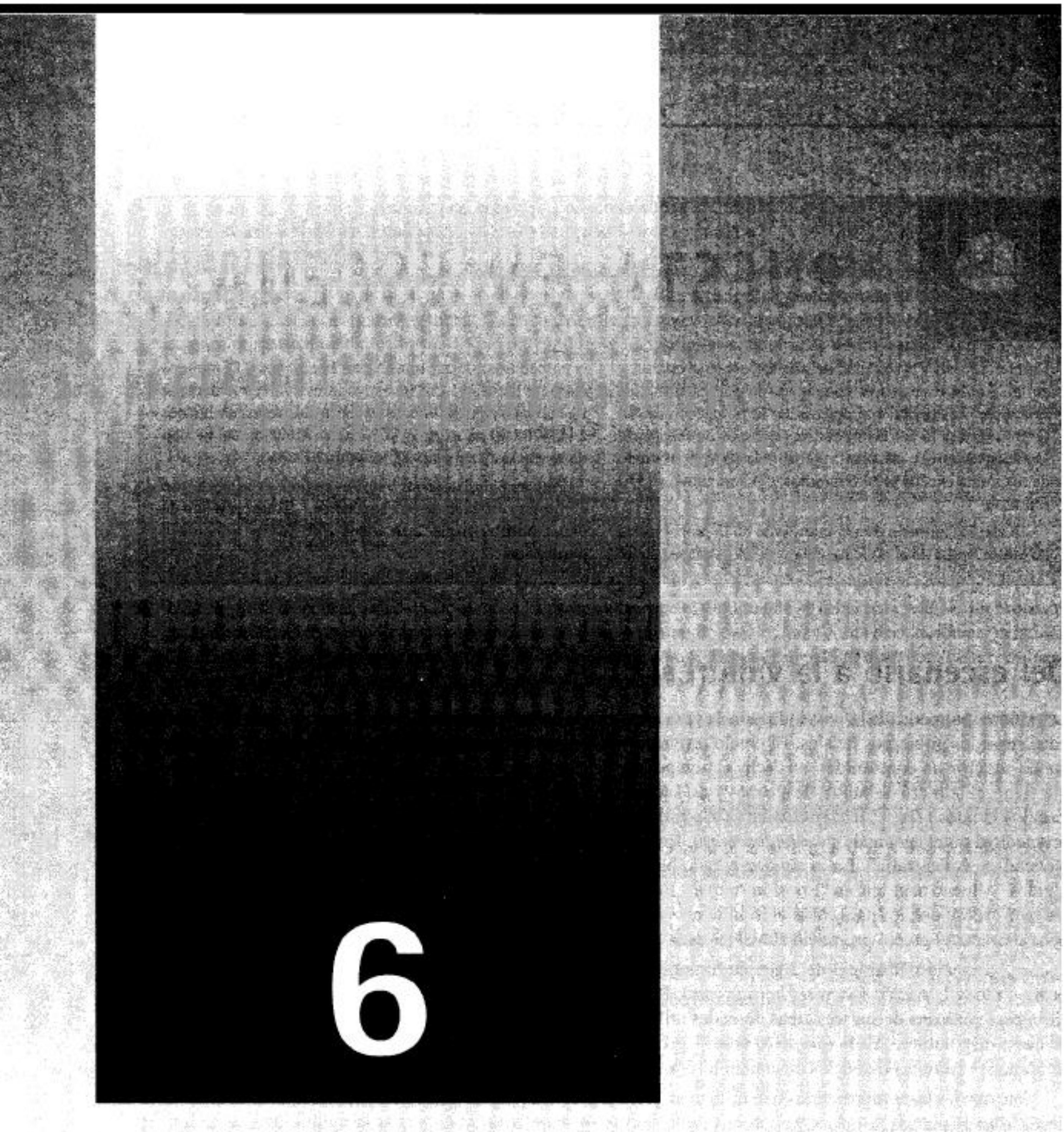
Prepare el informe que usted entregaría de acuerdo con el formato establecido en el apéndice I. Trate cada uno de estos puntos junto con otros que usted considere pertinentes.

Del escenario a la vida real

Los valores promedio de las viviendas son de gran importancia económica tanto para los consumidores individuales como para los gobiernos locales. El precio promedio de una casa de una familia es un indicador de cuánta casa puede adquirir un consumidor; es decir, el tiempo que tiene la casa de haber sido construida, los pies cuadrados que tiene, el número de baños, de alcobas y así sucesivamente. El Ministerio de Vivienda y Desarrollo Urbano de Estados Unidos (*The U.S. Department of Housing and Urban Development*) pone a disposición casas de valor promedio a nivel nacional (*www.huduser.org*). En este sitio, haga clic en "publicaciones", luego en "Mercado de Vivienda y demografía". En la siguiente lista, haga clic en "Condiciones del Mercado de Vivienda en Estados Unidos", y luego haga clic en "Emisión Actual". En la sección de Datos Históricos, las tablas 8A y 8B proporcionan los datos sobre precios para casas unifamiliares nuevas y existentes desde los años 60 hasta la actualidad. Vale la pena destacar el precio promedio actual de cada tipo.

La Asociación Nacional de Agentes Inmobiliarios proporciona una selección de listados de casas para la venta en toda la nación (*www.realtorads.com*). Piense en tres áreas del país en donde le gustaría vivir. En este sitio, para cada una de sus tres áreas deseadas utilice los precios promedios de vivienda nacional para ver la lista de casas disponibles. ¿Es lo que usted desea? ¿O preferiría algo más costoso o menos costoso? ¿Hay diferencias importantes entre las tres áreas en cuanto a la "cantidad de casa" que usted puede comprar al precio promedio?

Note que las tasas hipotecarias determinan en parte el precio de la casa que usted puede adquirir. El Directorio de Crédito Hipotecario (*Mortgage Loan Directory*) (*www.mortgageloan.com*) proporciona una selección de tasas hipotecarias actuales por estado.

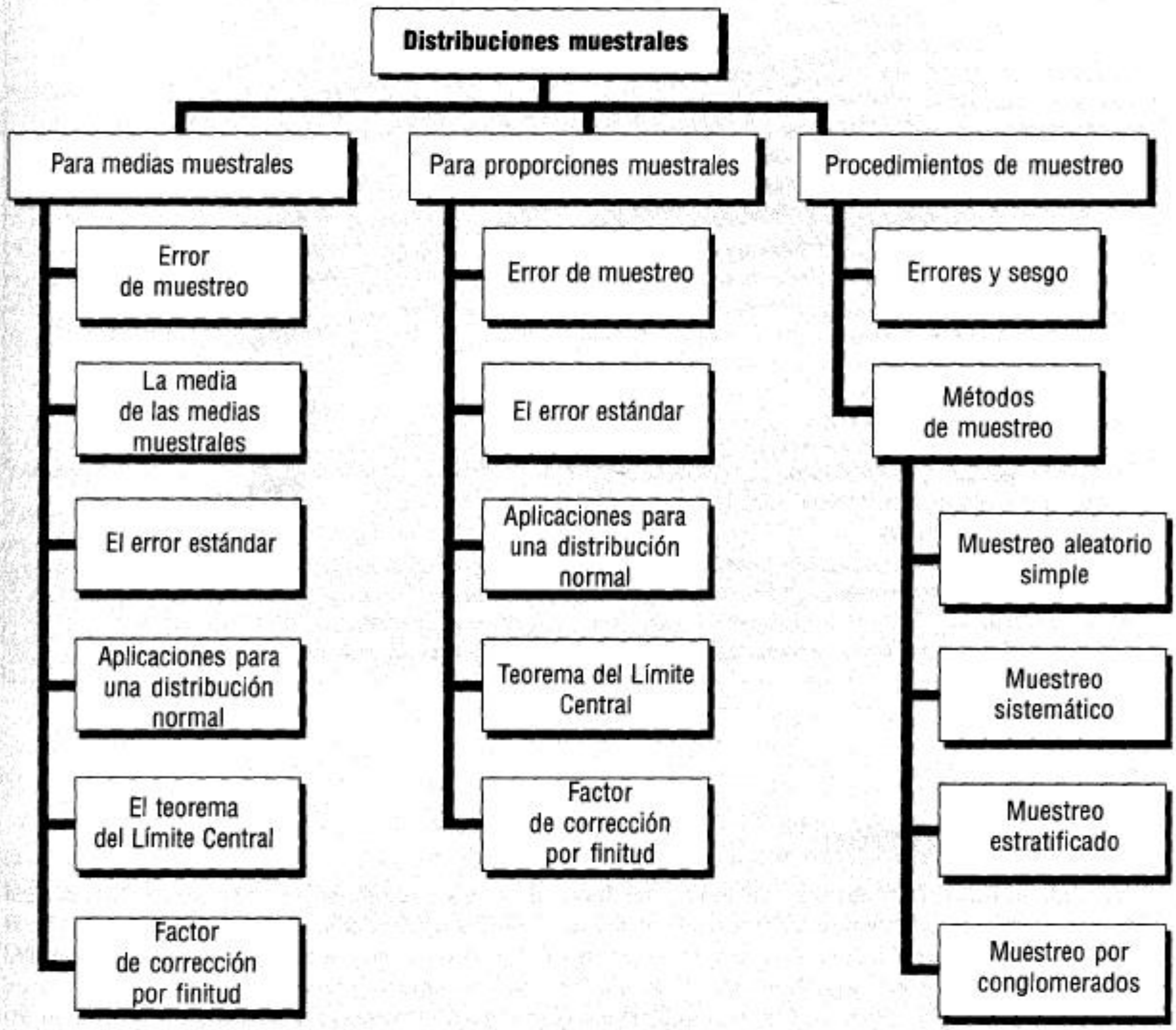


6

Distribuciones muestrales

Plan del capítulo

Este capítulo proporciona una introducción al concepto de muestreo y a la forma como se utilizan las muestras para hacer inferencias sobre la población.



ESCENARIO

Varios clientes adinerados lo han seleccionado como analista de inversiones para evaluar tres industrias ampliamente distintas. Su intención es identificar en cuál industria deben invertir. Actualmente están considerando la industria deportiva y de esparcimiento, la cual parece estar gozando de prosperidad durante períodos de recesión, debido a que la gente busca aliviar sus infortunios económicos. Los clientes anticipan un bajón en la economía durante los años venideros y por tanto sienten que los fondos invertidos en este sector podrían producir rendimientos significativos.

Debido al envejecimiento de la población y a la necesidad cada vez mayor de asistencia médica, la industria de la asistencia médica es un segundo sector de interés para sus clientes. La amenaza al sistema nacional de seguridad social y la falla al instituir un plan nacional de asistencia médica también ha estimulado el interés de los clientes en este sector como una oportunidad potencial de inversión. Al invertir en este campo, los clientes esperan capitalizar sobre una tendencia demográfica persistente y, al mismo tiempo, mitigar la creciente amenaza al bienestar de la población de la tercera edad de la nación.

Finalmente, desean una evaluación de un gran grupo de firmas que se concentra en la protección ambiental y en la preservación de los pantanos de la nación. Sienten que dicha inversión no sólo generaría recompensas financieras, sino que también proporcionaría una contribución importante para la posteridad para muchas generaciones del futuro.

Su análisis necesitará de la aplicación de gran parte de la información presentada en este capítulo sobre distribuciones muestrales y la probabilidad de carteras de inversión exitosas para estos clientes importantes.

6.1 Introducción

Generalmente las poblaciones son demasiado grandes como para ser estudiadas en su totalidad. Es necesario seleccionar una muestra representativa de un tamaño más manejable. Esta muestra se utiliza luego para sacar conclusiones sobre la población. Por ejemplo, se puede calcular la media muestral, el estadístico $\bar{X}$, y utilizarlo como un estimado de la media poblacional μ. El estadístico se utiliza como **estimador** del parámetro. Al confiar en una muestra para sacar alguna conclusión o inferencia sobre la población, se está en la **estadística inferencial**.

> **Estadística inferencial** La estadística inferencial involucra el uso de un estadístico para sacar una conclusión o inferencia sobre el parámetro correspondiente.

El proceso inferencial es extremadamente importante en muchos análisis estadísticos. En los capítulos 7 y 8 que tienen que ver con estimación y prueba de hipótesis, la estadística inferencial es esencial.

Sin embargo, el valor estadístico depende de la muestra tomada. De cualquier población dada de tamaño N, es posible obtener muchas muestras diferentes de tamaño n. Cada muestra puede también tener una media diferente. De hecho, es posible obtener una distribución completa de $\bar{X}$'s diferentes de varias muestras posibles.

6.2 Distribuciones muestrales

En un estudio de las 500 firmas que aparecen en la revista *Fortune* sobre los negocios más grandes de la nación, se puede tomar una muestra de $n = 50$. De esta muestra se puede calcular la tasa de rendimiento promedio $\bar{X}$ para estas 50 firmas. Esta media muestral serviría entonces como un estimado de μ, la tasa promedio de rendimiento de la población para todas las 500 firmas.

De esta lista de 500 firmas, sería posible obtener muchas muestras diferentes de tamaño 50. Específicamente se podría obtener ${}_{500}C_{50}$ muestras diferentes de tamaño $n = 50$. Debido a que ${}_{500}C_{50}$ es un número más bien grande, se asume en aras de la simplicidad de la discusión, que se tiene una población de $N = 4$ ingresos para cuatro estudiantes universitarios. Estos ingresos son de US\$100, US\$200, US\$300 y US\$400. El ingreso promedio puede calcularse como μ = US\$250. Sin embargo, para hacer las cosas aún más simples, se puede pensar que calcular la media de cuatro observaciones requiere mucho esfuerzo. Como alternativa, se decide seleccionar una muestra de $n = 2$ observaciones para estimar el μ "desconocido". Se podría entonces seleccionar aleatoriamente una muestra de ${}_4C_2 = 6$ posibles muestras. Estas seis muestras distintas y sus medias se muestran en la tabla 6.1

Tabla 6.1
Todas las muestras posibles de tamaño $n = 2$ de una población de $N = 4$ ingresos

Muestra	Elementos muestrales X_i	Medias muestrales $\bar{X}$
1	100,200	150
2	100,300	200
3	100,400	250
4	200,300	250
5	200,400	300
6	300,400	350

Salvo las muestras tercera y cuarta, cada muestra tiene una media diferente. Asumiendo que cada muestra tiene la misma probabilidad de ser seleccionada, la probabilidad de seleccionar una muestra que dé una $\bar{X}$ igual a la media poblacional de 250 es sólo 2/6 = 33.3%. Cuatro de las seis muestras resultarán con algún error en el proceso de estimación. Este **error de muestreo** es la diferencia entre μ y la media muestral que se utiliza para estimarlo, $(\bar{X} - \mu)$.

Error de muestreo Es la diferencia entre el parámetro poblacional y el estadístico de la muestra utilizado para estimar el parámetro.

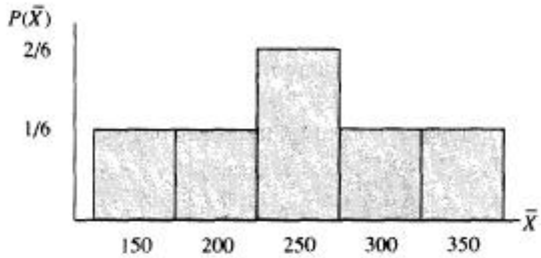
Debido simplemente al azar se puede seleccionar una muestra de $n = 2$ que conste de US\$100 y de US\$300. La media resultante de $\bar{X}$ = US\$200 produce un error de muestreo de US\$250 - US\$200 = US\$50. Por supuesto que nunca se puede calcular realmente el tamaño del error de muestreo debido a que la media poblacional sigue siendo desconocida. Sin embargo, se debe ser consciente de que es probable que ocurra algún error de muestreo.

Con una población de sólo $N = 4$, se puede enumerar cada media muestral posible que aparece en la tabla 6.1, junto con su respectiva probabilidad. Tal listado se le denomina una **distribución muestral**, y aparece en la tabla 6.2 y como histograma en la figura 6.1.

Tabla 6.2
Distribución muestral para muestras de tamaño $n = 2$ en una población de $N = 4$ ingresos

Media muestral $\bar{X}$	Número de muestras que dan $\bar{X}$	Probabilidad de $P(\bar{X})$
150	1	1/6
200	1	1/6
250	2	2/6
300	1	1/6
350	1	1/6
		1

Figura 6.1
Distribución muestral para muestras de tamaño $n = 2$ en una población de $N = 4$ ingresos



> **Distribución muestral** Es una lista de todos los valores posibles para un estadístico y la probabilidad relacionada con cada valor.

A. La media de las medias muestrales

Vale la pena notar que la distribución muestral de las medias muestrales es simplemente una lista de todas las medias muestrales posibles. Estas medias muestrales, al igual que *cualquier* lista de números, tienen una media denominada "la media de las medias muestrales" o la **gran media**. Esta media de las medias se calcula de la forma usual: las observaciones individuales (medias muestrales) se suman y el resultado se divide por el número de observaciones (muestras). Se utiliza $\bar{\bar{X}}$ (que se lee como X doble barra) como símbolo de la gran media,

La media de las medias muestrales
$$\bar{\bar{X}} = \frac{\Sigma\bar{X}}{K} \qquad [6.1]$$

en donde K es el número de muestras en la distribución muestral. Debido a que hay 6 muestras en la presente distribución muestral, se tiene que

$$\bar{\bar{X}} = \frac{150 + 200 + 250 + 250 + 300 + 350}{6} = 250$$

Además debe notarse que la media de la distribución muestral $\bar{X}$ es igual a la media de la población original μ = 250. Esto no es coincidencia. La media de la distribución muestral siempre será igual a la media poblacional ($\bar{\bar{X}} = \mu$). No debe confundirse n, el número de observaciones en una sola muestra, con K el número de muestras en la distribución muestral. De la población $N = 4$ en el caso actual, las muestras de tamaño $n = 2$ produjeron ${}_4C_2 = K =$ 6 muestras diferentes en la distribución muestral.

B. La varianza y el error estándar de las medias muestrales

La distribución de las medias muestrales también tiene una varianza. La varianza en las medias muestrales es como cualquier otra varianza. Mide la dispersión de las observaciones individuales (medias muestrales) alrededor de su media (la gran media). Además, esta varianza se calcula al igual que cualquier otra varianza. Es la media del cuadrado de las desviaciones con respecto a su media. Se halla

1. Determinando la cantidad por la cual cada una de las observaciones (medias muestrales) difiere de su media (la gran media).

2. Elevando al cuadrado tales desviaciones.

3. Promediando las desviaciones al cuadrado y dividiendo por el número de medias muestrales, K.

Así, donde $\sigma_{\bar{x}}^2$ es la varianza de la distribución de las medias muestrales, se tiene

Varianza de la distribución muestral de las medias muestrales

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\Sigma(\bar{X} - \bar{\bar{X}})^2}{K} = \frac{\Sigma(\bar{X} - \mu)^2}{K} \qquad [6.2]$$

Dadas las seis medias muestrales anteriores,

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(150 - 250)^2 + (200 - 250)^2 + (250 - 250)^2 + (250 - 250)^2 + (300 - 250)^2 + (350 + 250)^2}{6}$$

$$= 4{,}167 \text{ dólares al cuadrado}$$

Si se tuviera que sacar la raíz cuadrada de la varianza en la distribución de estas medias muestrales, se tendría el **error estándar de la distribución muestral**, $\sigma_{\bar{x}}$. Por tanto,

Error estándar de la distribución muestral de las medias muestrales

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} \qquad [6.3]$$

En el caso actual

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{4{,}167}$$

$$= 64.55 \text{ dólares}$$

El error estándar de la distribución muestral (o error estándar) es una medida de la dispersión de las medias muestrales alrededor de μ. Es análogo con la desviación estándar que se calculó en el capítulo 3, la cual medía la dispersión de las observaciones individuales alrededor de su media. Debido a que la diferencia entre $\bar{X}$ y μ es el *error de muestreo*, toda medida de la tendencia de la media muestral a desviarse de μ se le denomina acertadamente *error estándar*. Por tanto, el error estándar $\sigma_{\bar{x}}$ mide la tendencia a sufrir del error de muestreo en el esfuerzo por estimar μ.

Ejemplo 6.1

Las ventas en miles de dólares para East Coast Manufacturing (ECM) durante lo últimos 5 meses fueron de 68, 73, 65, 80 y 72. Asumiendo que estos cinco meses constituyen la población, la media claramente es $\mu = 71.6$. Como director de marketing de ECM, se desea estimar este μ "desconocido" tomando una muestra de tamaño $n = 3$. Se espera que el error de muestreo que es probable que ocurra sea relativamente pequeño. Realice la distribución muestral y haga comentarios sobre el posible error de muestreo

Solución

Hay ${}_5C_3 = 10$ muestras en la distribución muestral:

Número de la muestra	Elementos de la muestra $\bar{X}_i$	Media muestral $\bar{X}$	Número de la muestra	Elementos de la muestra $\bar{X}_i$	Media muestral $\bar{X}$
1	68,73,65	68.67	6	68,80,72	73.33
2	68,73,80	73.67	7	73,65,80	72.67
3	68,73,72	71.00	8	73,65,72	70.00
4	68,65,80	71.00	9	73,80,72	75.00
5	68,65,72	68.33	10	65,80,72	72.33

La distribución muestral es:

$\bar{X}$	$P(\bar{X})$
68.67	1/10
73.67	1/10
71.00	2/10
68.33	1/10
73.33	1/10
72.67	1/10
70.00	1/10
75.00	1/10
72.33	1/10

La media de la distribución muestral es

$$\bar{\bar{X}} = \frac{68.67 + 73.67 + 71.00 + 71.00 + \cdots + 72.33}{10} = 71.6 = \mu$$

La varianza y el error estándar de la distribución muestral son

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{\Sigma(\bar{X} - \mu)^2}{K} \\
&= \frac{(68.68 - 71.6)^2 + (73.67 - 71.6)^2 + \cdots + (72.33 - 71.6)^2}{10} \\
&= 4.31 \text{ miles de dólares al cuadrado}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sqrt{4.31} = 2.08 \text{ miles de dólares}$$

Interpretación

La media de la distribución muestral es igual a la media de la población original $\mu = 71.6$. Hasta aquí no hay sorpresa alguna. El error estándar, el cual mide el grado de dispersión de las 10 medias muestrales alrededor de μ, indica en cuánto puede variar la media muestral de la media poblacional. ¿Esto es lo que se tenía en mente cuando se esperaba un error de muestreo "relativamente pequeño?"

Como se habrá notado, la fórmula (6.2) requiere de mucha aritmética de tercer grado para calcular la varianza de la distribución muestral. Una aproximación cercana puede obtenerse mediante

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad [6.4]$$

y

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Claro que esto requiere la suposición que la varianza poblacional σ^2 sea conocida.

La fórmula (6.4) es apropiada sólo si el muestreo se realiza *con reemplazo*, o si la muestra se toma de una población muy grande (virtualmente infinita). Si el muestreo se realiza sin reemplazo y si el tamaño de la muestra es más del 5% de la población, $n > 0.05N$, debe aplicarse **el factor de corrección para poblaciones finitas** (fpc). La fórmula apropiada para el error estándar entonces es

Error estándar utilizando el fpc

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad [6.5]$$

en donde $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ es el fpc.

Si n es pequeño respecto a N (menos del 5%), el fpc se aproxima a 1 y por tanto es innecesario, pues multiplicar por 1 no cambia el valor del error estándar.

C. El impacto del tamaño de la muestra en el error estándar

Dada una población de tamaño $N = 1000$, se considera que ¿se obtendría un estimado más preciso de la media poblacional μ con una muestra de tamaño $n = 100$ o con una muestra de tamaño más grande de $n = 900$? Indiscutiblemente es probable un estimado más exacto con una muestra más grande. Esta suposición se verifica examinando la fórmula (6.3). Puede verse que a medida que n aumenta, $\sigma_{\bar{x}}$ disminuye. El hecho de que las muestras más grandes lleven a errores de muestreo más pequeños se vuelve cada vez más importante a medida que los autores progresan en el estudio de la estadística inferencial.

Ejercicios de la sección

1. Defina los siguiente términos en su propio lenguaje. Dé ejemplos de cada uno.

a. Distribución muestral.

b. Media de las medias.

c. Varianza y error estándar de la distribución muestral.

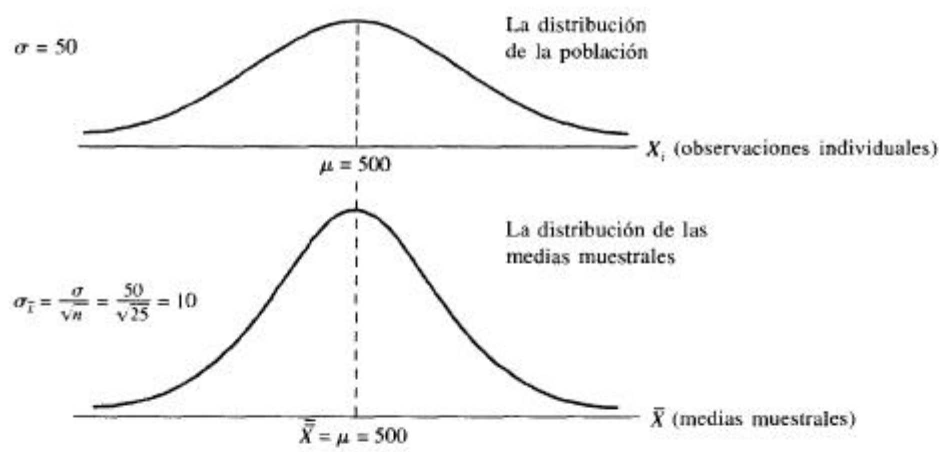
2. Una población de las producciones semanales de una fábrica en miles de toneladas es 200, 250, 150, 200 y 300. Realice una distribución muestral y calcule la media de las medias y el error estándar para las muestras de tamaño $n = 2$.
3. ¿Qué pasará con el error estándar del ejercicio anterior si $n = 3$? ¿Por qué hay diferencia?
4. Las muestras de $n = 40$ se toman de una población grande con una media de 100 y una desviación estándar de 25. Calcule e interprete el error estándar.
5. Repita el ejercicio anterior con $n = 100$. Discuta la diferencia.

6.3 Teorema del límite central

De la discusión que se ha realizado hasta el momento, es evidente que es posible tomar muchas muestras de un tamaño dado de cualquier población. Estas muestras dan pie a toda una distribución de medias muestrales. Si la población original está distribuida normalmente, la distribución de las medias muestrales también estará distribuida normalmente. Es decir, que todas las medias muestrales se graficarán como una distribución normal.

Esto se observa en la figura 6.2. La gráfica superior muestra que la distribución de las observaciones individuales X_i en la población está normalmente distribuida y centrada en una media de $\mu = 500$ y una desviación estándar $\sigma = 50$. Vale la pena notar que las observaciones individuales X_i están medidas en el eje horizontal.

Figura 6.2
Distribución de las medias muestrales de una población normal



La gráfica inferior de la figura 6.2 muestra la distribución de las medias muestrales que resultaran si se toman todas las muestras de tamaño $n = 25$. Las medias muestrales $\bar{X}_s$ se miden en el eje horizontal. Estas medias muestrales también están distribuidas normalmente y están centradas en la media poblacional debido a que $\bar{\bar{X}} = \mu = 500$. Es decir, la media de las medias muestrales es igual a la media de la población. Además la dispersión de la población original $\sigma = 50$ es mayor que la dispersión de las medias muestrales $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 50/\sqrt{25} = 10$. Las X_i están más dispersas que las $\bar{X}_s$ debido a que $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

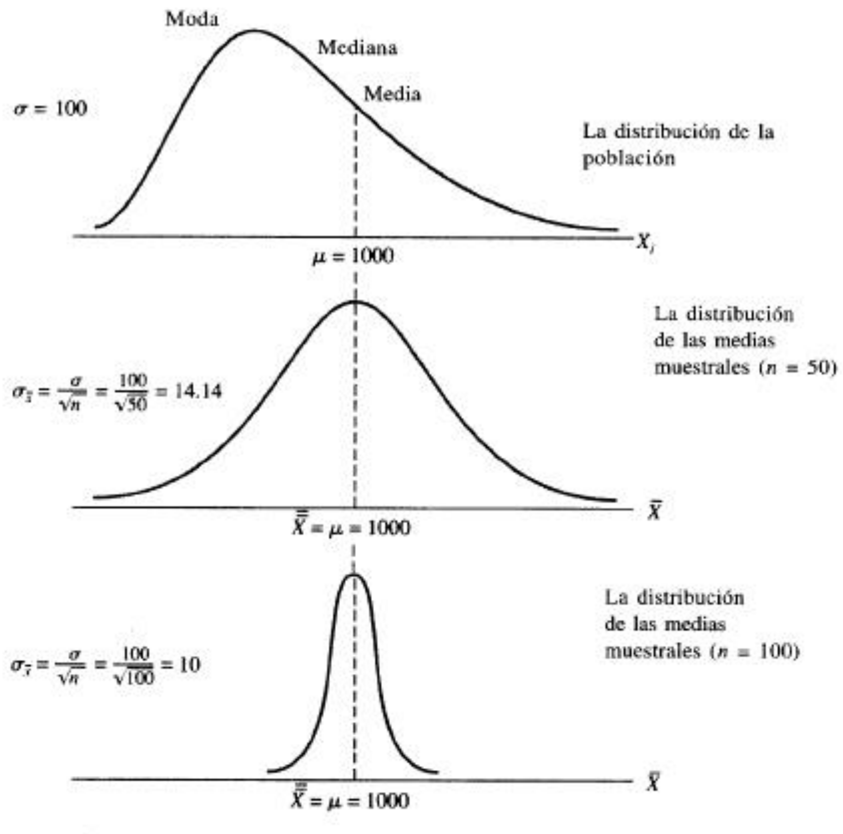
Surge una pregunta respecto a cómo sería la distribución de las medias muestrales si la población original no está distribuida normalmente. La respuesta la proporciona el **Teorema del Límite Central**. El teorema del límite central dice que para una población *cualquiera*, a medida que n aumenta, la distribución de las medias muestrales se aproxima a una distribución normal con una media de $\bar{\bar{X}} = \mu$ y un error estándar de $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Teorema del límite central A medida que *n* se vuelve más grande, la distribución de las medias muestrales se aproximará a una distribución normal con una media $\bar{\bar{X}} = \mu$ y un error estándar de $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$

Por tanto, incluso si la población no está distribuida normalmente, la distribución de muestreo de las medias muestrales será normal si n es lo suficientemente grande. La regla general es que si n es por lo menos 30, el teorema del límite central asegurará una distribución normal en las medias muestrales incluso si la población no es normal.

Observando la figura 6.3 se asume que la población en la gráfica superior, la cual no está distribuida normalmente, tiene una media de $\mu = 1000$ con una desviación estándar de $\sigma = 100$. La gráfica del centro muestra la distribución de las medias muestrales que resultarían si se tomaran las muestras de tamaño $n = 50$. La distribución de las medias muestrales está normalmente distribuida y centrada en $X = \mu = 1000$. Además, la dispersión de las medias muestrales, tal y como la mide el error estándar, es $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 100/\sqrt{50} = 14.14$. Vale la pena notar que las $\bar{X}_s$ están menos dispersas que las observaciones individuales en la población original: $\sigma > \sigma/\sqrt{n}$.

Figura 6.3
Distribución de las medias muestrales de una población no normal



La gráfica inferior de la figura 6.3 ilustra lo que le sucede a la distribución de $\bar{X}_s$ a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Si el tamaño de la muestra aumentó a $n = 100$, el error estándar se vuelve $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 100/\sqrt{100} = 10$. Las medias muestrales están compactadas más estrechamente alrededor de la media poblacional $\mu = 1000$. Como la mayoría de las medias muestrales están más cerca de la media poblacional, el error estándar que se obtiene en el esfuerzo por estimar μ es menor. Por esto, es probable que las muestras más grandes produzcan estimados más precisos de la media poblacional.

Ejercicios de la sección

6. Explique el teorema del límite central en sus propias palabras.
7. ¿Qué se entiende por desviación estándar de la población y por error estándar de la distribución muestral de las medias muestrales? ¿Cómo se relacionan y cómo se diferencian en cuanto a tamaño? Dibuje las gráficas en su respuesta.
8. ¿Qué pasa con el error estándar a medida que el tamaño de la muestra aumenta? Dibuje las gráficas para ilustrar.

6.4 Uso de la distribución muestral

La importancia de la discusión anterior puede reconocerse sólo si se recuerda que muchas decisiones se toman con base en los resultados muestrales. Un gerente administrativo puede tomar una muestra de un producto para determinar si cumple con ciertas especificaciones de producción. Un oficial del gobierno tomará una muestra de los residentes para decidir si cierto plan tributario o programa de bienestar social producirá los resultados deseados. Con frecuencia los académicos toman muestras de estudiantes para evaluar el impacto de los esfuerzos de instrucción.

Generalmente, las muestras tienen un impacto muy directo y consecuencial en las decisiones que se tomen. Por tanto, toda conclusión que se saque o todo conocimiento que se tenga respecto a una muestra es muy importante. Una aplicación muy común y de gran utilidad en una distribución muestral es la de determinar la probabilidad de que una media muestral clasifique dentro de un rango dado. Dado que la distribución muestral estará distribuida normalmente pues (1) la muestra se toma de una población normal, o (2) $n \geq 30$ y el teorema del límite central garantiza la normalidad en el proceso de muestreo, la desviación normal puede utilizarse para ganar información esencial para el proceso de toma de decisiones.

En el capítulo 5 se determinó la probabilidad de seleccionar una observación que estuviera dentro de un rango dado. Vale la pena recordar el ejemplo 5.7, cuando TelCom registró los mensajes telefónicos para sus clientes, los cuales promediaron 150 segundos, con una desviación estándar de 15 segundos. TelCom deseaba determinar la probabilidad de que una sola llamada durara entre 125 y 150 segundos. Esto se hizo utilizando la fórmula de conversión, o la fórmula – Z,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

en la cual X es una observación única de interés y σ es la desviación estándar poblacional.

Sin embargo, muchas decisiones en los negocios dependen de una muestra completa, no sólo de una observación. En este caso, la fórmula de conversión debe alterarse para explicar el hecho en el cual se está interesado, no sólo en una observación X sino en la media de varias observaciones X. Por tanto, cuando se hace el muestreo, la fórmula de conversión se vuelve

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad [6.6]$$

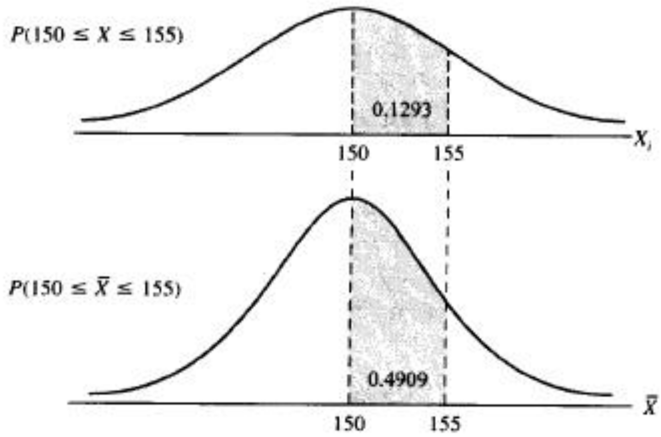
El valor de interés en el numerador no es una observación única X_i, sino la media de n observaciones. Además, el denominador no es la desviación estándar poblacional σ, sino el error estándar de la distribución muestral $\sigma_{\bar{x}}$. En lugar de determinar la probabilidad de la duración de una sola llamada, se puede calcular la probabilidad de que la media de n llamadas dure un cierto período de tiempo.

Por ejemplo, TelCom encuentra la probabilidad de que una sola llamada dure entre 150 y 155 segundos así

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{155 - 150}{15} = 0.33 \quad \text{para un área de } 0.1293$$

Por tanto, $P(150 \leq X \leq 155) = 0.1293$. Esto se muestra en la gráfica superior de la figura 6.4.

Figura 6.4
Probabilidades para TelCom



Se supone que TelCom desea ahora conocer la probabilidad de que la media de n = 50 llamadas esté entre 150 y 155 segundos.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{155 - 150}{\frac{15}{\sqrt{50}}} = 2.36 \quad \text{para un área de } 0.4909$$

Por tanto, $P(150 \leq \bar{X} \leq 155) = 0.4909$. Esto se observa en la gráfica inferior de la figura 6.4. La gran diferencia en las probabilidades se debe al hecho de que las medias muestrales están menos dispersas que las observaciones individuales y a que las $\bar{X}_s$ están más compactas alrededor de $\mu = 150$, como lo muestran las gráficas.

Muchas decisiones en los negocios dependen de los valores de las medidas estadísticas importantes. Considerando el ejemplo 6.2.

Ejemplo 6.2

TelCom planea instalar nuevos equipos que mejorarían la eficiencia de sus operaciones. Sin embargo, antes que los ejecutivos puedan decidir si dicha inversión será eficaz en función de los costos, deben determinar la probabilidad de que la media de una muestra de $n = 35$:

a. Esté entre 145 y 150.

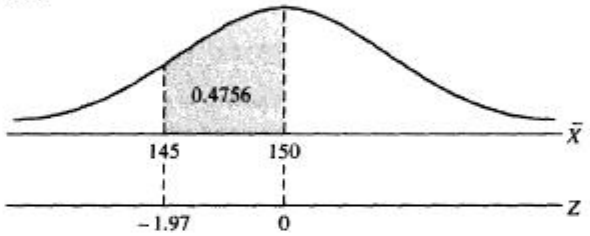
b. Sea mayor que 145.

c. Sea menor que 155.

d. Esté entre 145 y 155.

e. Sea mayor que 155.

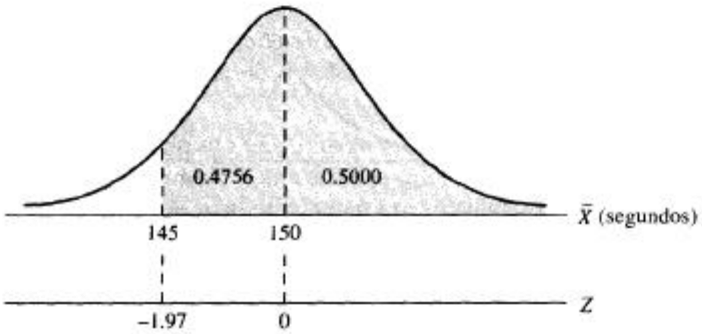
Solución a. $P(145 \leq \bar{X} \leq 150)$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{145 - 150}{15/\sqrt{35}} = -1.97 \text{ o un área de } 0.4756$$

$$P(145 \leq \bar{X} \leq 150) = P(-1.97 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.4756$$

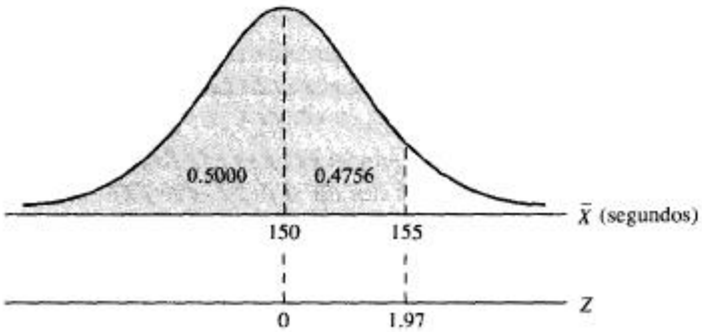
b. $P(\bar{X} \geq 145)$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{145 - 150}{2.54} = -1.97 \text{ o un área de } 0.4756$$

$$P(\bar{X} \geq 145) = P(Z \geq -1.97)$$
$$= 0.4756 + 0.5000$$
$$= 0.9756$$

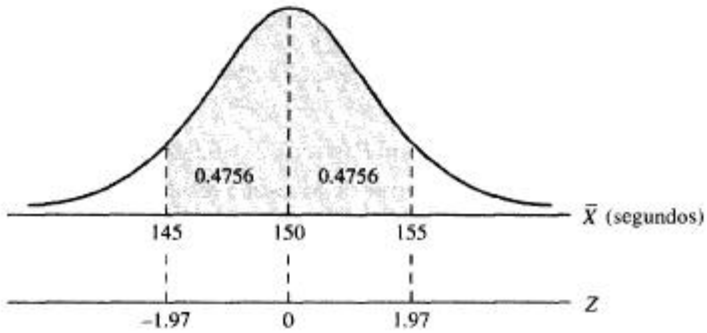
c. $P(\bar{X} \leq 155)$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{155 - 150}{2.54} = 1.97 \text{ o un área de } 0.4756$$

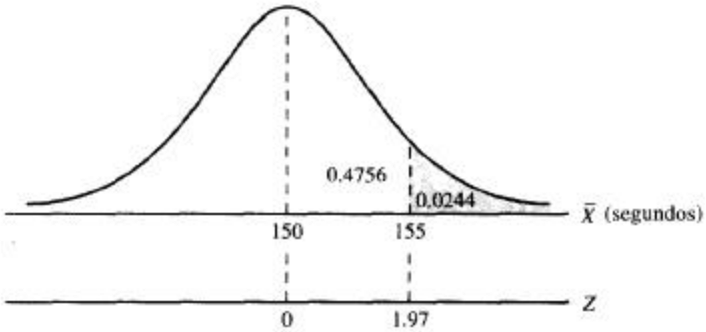
$$
\begin{aligned}
P(\bar{X} \leq 155) &= P(Z \leq 1.97) \\
&= 0.4756 + 0.5000 \\
&= 0.9756
\end{aligned}
$$

d. $P(145 \leq \bar{X} \leq 155)$. Debe hallarse el área entre 145 y 150, y sumarla al área entre 150 y 155.



$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{145 - 150}{2.54} = -1.97 \quad \text{o un área de } 0.4756 \\
Z_2 &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{155 - 150}{2.54} = 1.97 \quad \text{o un área de } 0.4756 \\
P(145 \leq \bar{X} \leq 155) &= P(-1.97 \leq Z \leq 1.97) \\
&= 0.4756 + 0.4756 \\
&= 0.9512
\end{aligned}
$$

e. $P(\bar{X} \geq 155)$



$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{155 - 150}{2.54} = 1.97 \quad \text{o un área de } 0.4756 \\
P(\bar{X} \geq 155) &= P(Z \geq 1.97) \\
&= 0.5000 - 0.4756 \\
&= 0.0244
\end{aligned}
$$

Interpretación

Con base en esta información, TelCom puede tomar decisiones más inteligentes respecto a la necesidad de nuevos equipos.

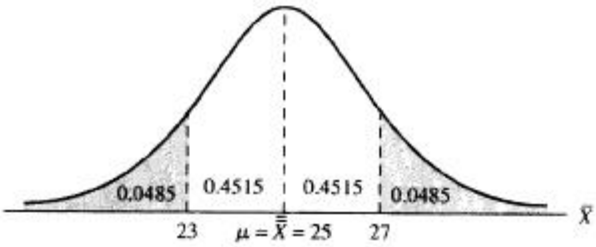
Si se puede predecir la probabilidad de que un cierto estadístico esté dentro de un rango dado, la toma de decisiones se vuelve más precisa y científica. Por ejemplo, es posible determinar la probabilidad de error considerando una población con una media de $\mu = 25$ y una desviación estándar de $\sigma = 8.5$. Como se muestra en la figura 6.5, si se toma una muestra de $n = 50$, se presentará un error de muestreo de 2 o más si la media muestral es 27 o más, o 23 o menos. Por tanto, $P(\text{error}) = P(\bar{X} \geq 27) + P(\bar{X} \leq 23)$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{27 - 25}{\frac{8.5}{\sqrt{50}}} = 1.66 \quad \text{para un área de } 0.4515$$

$P(X \geq 27) = 0.5000 - 0.4515 = 0.0485$. Entonces el $P(\text{error} \geq 2) = 0.0485 \times 2 = 9.7\ \%$.

Existe casi un 10% de probabilidad de que el error de muestreo resultante de un intento por estimar μ sea por lo menos dos.

Figura 6.5
La probabilidad de error



Ejemplo 6.3

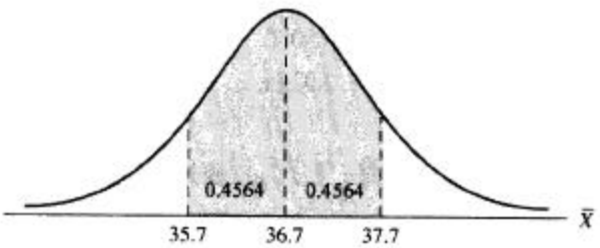
The Paper House vende invitaciones, sorpresas y otros productos de papelería para ocasiones festivas. Se asume que las horas semanales promedio que trabajan los empleados en la tienda es de $\mu = 36.7$, con una desviación estándar de $\sigma = 3.5$. Jill Ramsey, propietario de The Paper House, desea por lo menos un 90% de confiabilidad en que su estimado de las horas promedio trabajadas por empleado cada semana esté dentro de 1 hora de la media poblacional real. Se selecciona una muestra de $n = 36$ semanas. ¿Cuál es la probabilidad de que Ramsey no esté desilusionada con el estimado?

Solución

Como se observa en la siguiente figura, $P(\text{error} \leq 1) = P(35.7 \leq \bar{X} \leq 37.7)$.

$$Z = \frac{37.7 - 36.7}{\frac{3.5}{\sqrt{36}}} = 1.71 \quad \text{para un área de } 0.4564$$

$$P(35.7 \leq \bar{X} \leq 37.7) = 0.4564 \times 2 = 91.28\%$$



Interpretación

Existe un 91.28% de probabilidad de que el estimado de Ramsey esté dentro de un error tolerable de 1 hora.

Ejercicios de la sección

9. La población de millas recorridas por camioneros de Over the Road Van Lines presenta una media de 8,500, con una desviación estándar de 1,950. Si se toma una muestra de $n = 100$ conductores, cuál es la probabilidad de que la media sea:

a. ¿Mayor que 8,900?

b. ¿Menor que 8,000?

c. ¿Entre 8,200 y 8,700?

d. ¿Entre 8,100 y 8,400?

10. Las latas de gaseosa vendidas en Minute Mart tienen un promedio de 16.1 onzas, con una desviación estándar de 1.2 onzas. Si se toma una muestra de $n = 200$, cuál es la probabilidad de que la media sea:

a. ¿Menor que 16.27?

b. ¿Por lo menos 15.93?

c. ¿Entre 15.9 y 16.3?

11. Una encuesta realizada por la Asociación Nacional de Educación reveló que los estudiantes de último año de secundaria ven televisión un promedio de 37.2 horas por semana. Se asume una desviación estándar de 5.4 horas. En una muestra de $n = 500$ estudiantes, qué tan probable es que la media muestral sea:

a. ¿Más de 38 horas?

b. ¿Menos de 36.6 horas?

c. ¿Entre 36.4 y 37.9 horas?

12. El consumo diario de agua en Dry Hole, Texas, promedia los 18.9 galones por hogar, con una desviación estándar de 3.6 galones. El comisionado de la ciudad desea estimar esta media no conocida con una muestra de 100 hogares. ¿Qué tan probable es que el error de muestreo exceda los 0.5 galones?

6.5 La distribución de las proporciones muestrales

Aunque la discusión hasta ahora se ha concentrado exclusivamente en las medias, muchos asuntos de negocios tratan la proporción de la población π. Una firma de marketing puede querer averiguar si un cliente (1) compra o (2) no compra el producto. Un banco con frecuencia debe determinar si un depositante (1) pedirá o (2) no pedirá un crédito para auto. Muchas firmas deben determinar la probabilidad de que un proyecto para presupuestar capital (1) generará o (2) no generará un rendimiento positivo. En estos casos se utiliza la proporción muestral p para estimar el parámetro desconocido π.

El proceso de las proporciones muestrales es muy similar al de las medias. De cualquier población es posible obtener muchas muestras diferentes de un tamaño dado. Cada muestra tendrá su propia proporción de "éxitos", p. Sin embargo, al igual que con las medias, el valor esperado de la distribución muestral de las proporciones muestrales será igual a la proporción de éxitos en la población: $E(p) = \pi$.

Lugget Furniture pregunta a toda la población $N = 4$ clientes si vieron el anuncio publicitario de Lugget en el periódico de esta mañana. Se registró una respuesta de "sí" como éxito, y de "no" como fracaso. Los cuatro clientes respondieron S_1, N_2, N_3 y S_4. La proporción poblacional de éxitos es $\pi = 0.50$. Se tomaron muestras de tamaño $n = 2$, y la proporción de éxitos se registra en la tabla 6.3.

Tabla 6.3
Distribución de las proporciones muestrales

X_i	Número de éxitos	p (proporción de éxitos)
S_1, N_2	1	0.50
S_1, N_3	1	0.50
S_1, S_4	2	1.00
N_2, N_3	0	0.00
N_2, S_4	1	0.50
N_3, S_4	1	0.50
		3.00

El valor esperado (media) de la distribución muestral de la proporción muestral es

El valor esperado de la distribución muestral

$$E(p) = \frac{\Sigma p}{K} \qquad [6.7]$$

y el error estándar es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(\pi)(1 - \pi)}{n}} \qquad [6.8]$$

De la misma manera que con las medias, si $n > 0.05N$, se requiere el fpc y el error estándar se vuelve

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(\pi)(1 - \pi)}{n}}\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}} \qquad [6.9]$$

En este caso con Lugget Furniture

$$E(p) = \frac{\Sigma p}{K} = \frac{3}{6} = 0.50 = \pi$$

y, utilizando el fpc

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(\pi)(1 - \pi)}{n}}\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0.50)(1 - 0.50)}{2}}\sqrt{\frac{4 - 2}{4 - 1}}$$

$$= 0.289$$

Las herramientas recientemente desarrolladas para las proporciones muestrales permiten determinar las probabilidades que pueden ser muy útiles en la toma de decisiones importantes. Esto se logra aplicando la desviación normal a la distribución de proporciones muestrales:

$$Z = \frac{p - \pi}{\sigma_p} \qquad [6.10]$$

Ejemplo 6.4

BelLabs adquiere componentes para sus teléfonos celulares en lotes de 200 de una firma en Palo Alto. El componente tiene una tasa de defectos del 10%. Una política establecida recientemente por BelLabs establece que si el siguiente envío tiene:

a. Más del 12% de defectos, definitivamente buscará un nuevo proveedor.

b. Entre el 10 y el 12% de defectos, considerará un nuevo proveedor.

c. Entre el 5 y el 10% de defectos, definitivamente no conseguirá un nuevo proveedor.

d. Menos del 5% de defectos, incrementará sus pedidos.

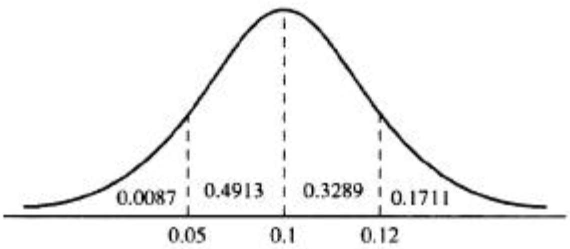
¿Cuál decisión es más probable que tome BelLabs?

Solución

Debido a que el tamaño de la población N no se suministra, se asume que BelLabs compra muchos componentes y el tamaño de la muestra de $n = 200$ es menor que 0.05N y el fpc por tanto no se necesita.

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{200}} = 0.021$$

a. $P(p > 0.12)$:



$$Z = \frac{0.12 - 0.10}{0.021} = 0.95 \quad \text{para un área de } 0.3289$$

$$P(p > 0.12){:}\ 0.5000 - 0.3289 = 0.1711$$

b. De la parte *a*, $P(0.10 \leq p \leq 0.12) = 0.3289$.

c. $P(0.05 \leq p \leq 0.10)$:

$$Z = \frac{0.05 - 0.10}{0.021} = -2.38 \quad \text{para un área de } 0.4913$$

d. De la parte *c*, $P(p < 0.05) = 0.0087$.

Interpretación

Como la parte *c* tiene la probabilidad más alta, BelLabs se quedará con su proveedor actual.

Ejercicios de la sección

13. Una encuesta de opinión a 1000 residentes de una ciudad grande investiga si se está a favor de un alza de impuestos para pagar un nuevo estadio deportivo. Si más del 85% apoya el impuesto se presentará un referendo en las siguientes elecciones en la ciudad. Si la proporción poblacional de todos los residentes que están a favor del impuesto es $p = 0.82$ o sea 82%, ¿cuál es la probabilidad de que se incluya en la siguiente votación?

14. El 30% de todos los empleados tienen capacitación avanzada. Si en una muestra de 500 empleados menos del 27% estaba preparado de forma adecuada, todos los nuevos contratados necesitarán registrarse en un programa de capacitación. ¿Cuál es la probabilidad de que se inicie el programa?

15. Con base en una muestra de 100 profesores, se realiza un estudio para analizar su preferencia sobre el programa de pensiones del Fondo Anual de Seguros – Fondo de Participación de Pensiones Universitarias (*Insurance Annuity Fund-College Retirement Equity Fund*) (TIAA-CREF) de los profesores que está a su disposición. Si menos del 60% está satisfecho con el TIAA-CREF, se encontrará una alternativa. Asumiendo $\pi = 65\%$, ¿cuál es la probabilidad de que sea complementado el plan actual?

16. La proporción de todos los clientes de Pizza Hut que comen en el sitio es del 75%. En una muestra de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que menos del 20% lleven su comida a casa?

17. El 60% de las reses de una manada grande tiene ántrax. De las 100 reses seleccionadas aleatoriamente ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 50 tengan que ser apartadas de la manada?

6.6 Métodos de muestreo

En repetidas ocasiones se ha enfatizado la necesidad de seleccionar una muestra representativa de la población. Una muestra que tergiverse la población presentará un error de muestreo y producirá estimados imprecisos de los parámetros de la población.

Hay dos fuentes básicas de error de muestreo. La primera es sencillamente mala suerte. Debido a la "cuestión suerte", la muestra puede contener elementos que no sean característicos de la población. El destino puede dictar que ciertas selecciones en la muestra sean atípicamente más grandes que la mayoría de los de la población y en tal caso resultaría una sobreestimación del parámetro. O quizás muchos de los elementos muestrales tienden a ser más pequeños de lo que típicamente se encuentra en la población y en tal caso resultaría una subestimación.

Una segunda fuente de error de muestreo es el *sesgo muestral*. El sesgo resulta de la tendencia a favorecer la selección de ciertas muestras sobre otras en la recolección de los datos de la muestra. Un ejemplo clásico del sesgo muestral ocurrió en las elecciones presidenciales de 1936. Franklin D. Roosevelt era el candidato demócrata contra Alf Landon, el candidato republicano. Una encuesta de los votantes realizada por *Literary Digest* (la cual hace mucho tiempo dejó de publicarse) reveló que Landon ganaría de manera arrolladora. Cuando pasó la humareda, después de las elecciones, los editores de *Literary Digest* intentaron determinar realmente ¡por qué pudieron estar tan equivocados!

Pronto descubrieron su equivocación. Al seleccionar gente para la muestra tomaron nombres de dos fuentes: el directorio telefónico y el propio registro electoral. Vale la pena recordar que en 1936 la nación se encontraba en medio de la Gran Depresión. La mayoría de las personas culpaba, acertada o equivocadamente, a los republicanos por su catástrofe económica y se rehusaron a votar por cualquiera que tuviera afiliación con ese partido. *Literary Digest* escogió personas que estaban siendo menos afectadas por las duras condiciones financieras y que podían adquirir un teléfono y una suscripción regular a la revista. Por tanto, las personas utilizadas en la encuesta *no* eran representativas de la nación como un todo. La muestra tendía a favorecer en su elección a los votantes que no estaban en contra de los republicanos de manera categórica. No es de sorprender entonces que la revista ya no esté en circulación.

Existen muchos otros ejemplos en los cuales la selección de la muestra puede terminar en error. Por tanto, es sabio garantizar que la recolección de los datos de la muestra siga un método que haya comprobado su capacidad para minimizar dicho error. Aunque un examen exhaustivo de los métodos de muestreo está más allá del alcance de este texto, se sugiere un breve vistazo a los procedimientos de muestreo en este punto.

A. Muestreo aleatorio simple

Como se ha visto, pueden seleccionarse diferentes muestras de cualquier población. Tomar una **muestra aleatoria simple** garantiza que cada muestra de algún tamaño dado tenga la *misma* probabilidad de ser seleccionada. Se asume que una cadena nacional de comidas rápidas desea seleccionar aleatoriamente 5 de los 50 estados para tomar muestras sobre el gusto de los consumidores. Una muestra aleatoria simple garantizará que las ${}_{50}C_5 =$ 2,118,760 muestras de tamaño, 5 tengan la misma probabilidad de ser utilizadas en el estudio.

Una muestra aleatoria simple puede obtenerse simplemente enumerando las observaciones sobre pedazos idénticos de papel, colocándolos en un sombrero y sacando el número deseado. Además, también puede utilizarse una *tabla de números aleatorios*. La tabla con frecuencia es generada por un computador en la cual cada uno de los 10 dígitos (0-9) tiene una probabilidad igual de ser seleccionado. Si se desea una tabla de tres dígitos, el computador puede seleccionar 4, 2, 7, 5, 2, 6, 1, 0, 5, y así sucesivamente, formando los números aleatorios 427, 526, y 105. Una tabla de números aleatorios se proporciona en la tabla A.

B. Muestreo sistemático

Una muestra sistemática se forma seleccionando cada *i*ésimo ítem de la población. Si se determina que i es igual a 10, una muestra sistemática consta de cada décima observación en la población. La población debe ordenarse o enumerarse en forma aleatoria.

La primera selección debe determinarse aleatoriamente, y si $i = 10$, entonces estará en alguna de las primeras 10 observaciones. El punto inicial exacto puede identificarse bien sea seleccionando un número entre 1 y 10 sacado de un sombrero, o utilizando una tabla de números aleatorios. En cualquiera de los casos se selecciona de allí en adelante cada décima observación.

El proceso de muestreo sistemático es ventajoso porque no requiere de un experto altamente calificado para contar hasta 10 y registrar el resultado. Además, el método permite flexibilidad ya que puede establecerse que i sea 10, 100, 1,000 o cualquier otro número deseado. La determinación del valor apropiado para i también es muy fácil. Si se desea seleccionar una muestra de tamaño 100 de una población de 1,000, i debe ser 10.

El peligro principal que debe evitarse es la ocurrencia de un patrón en el ordenamiento de la población. Por ejemplo, enumerar la población alfabéticamente asume una distribución aleatoria por todo el alfabeto.

C. Muestreo estratificado

Recientemente, el Ministerio de Agricultura de los Estados Unidos se interesó en el impacto de las condiciones de sequía sobre la producción de trigo. Especial preocupación causó la tasa de bancarrota que hacía que los granjeros perdieran su tierra. Se sentía que un conteo de los niveles de producción por parte de los agricultores de Kansas, Oklahoma, Nebraska y Dakota del Sur, los cuatro estados golpeados más duramente por la sequía, podrían probar que son útiles en el diseño de un programa de alivio. El ministerio decidió que debería tomarse una muestra de la cosecha de este año por varios cientos de agricultores de cada estado.

Sin embargo, se notó que el número de agricultores era muy diferente en cada estado. Si se tomaba una muestra aleatoria simple de los cuatro estados como un todo, podría incluir proporcionalmente pocos agricultores de algunos estados y demasiados de otros estados. Esto resultaría en una muestra no representativa, lo cual incrementaría el error de muestreo.

El Ministerio de Agricultura decidió tomar una **muestra estratificada** dividiendo a todos los agricultores en subgrupos o estratos (de ahí el *término muestreo estratificado*). En este caso, los subgrupos lógicos serían los cuatro estados en mención. La proporción de agricultores incluidos en la muestra de cada estado sería igual a las proporciones de todos los agricultores en cada estado: si los agricultores de Kansas constituían el 30% de todos los agricultores de todos los cuatro estados, entonces un 30% de los agricultores de la muestra serían seleccionados aleatoriamente de Kansas.

Se toma una muestra estratificada forzando las proporciones de la muestra de cada estrato para que esté conforme al patrón poblacional. Se emplea comúnmente cuando la población es heterogénea, o disímil, aunque ciertos subgrupos homogéneos puedan aislarse. De esta forma el investigador puede incrementar la precisión más allá de la obtenida por una muestra aleatoria simple de tamaño similar.

D. Muestreo por conglomerados

El muestreo por conglomerados, otra técnica alternativa, ofrece ciertas ventajas sobre otros métodos. Consiste en dividir toda la población en conglomerados, o grupos, y luego seleccionar una muestra de estos conglomerados. Todas las observaciones en estos conglomerados seleccionados están incluidas en la muestra. Para ilustrar, se considera el siguiente ejemplo. El Ministerio de Agricultura de los Estados Unidos, en su estudio sobre las condiciones de sequía, puede decidir que una muestra por conglomerados es preferible. Una muestra por conglomerados se toma identificando los condados en cada estado como conglomerados. Una muestra de estos condados (conglomerados) se selecciona luego aleatoriamente utilizando una tabla de números aleatorios o algún otro medio generalmente aceptado. Todos los agricultores seleccionados de esta manera en los condados están incluidos en la muestra. Este procedimiento con frecuencia es más fácil y rápido que el muestreo aleatorio simple o el estratificado. Por ejemplo, si es necesario viajar a cada finca de la muestra para observar los efectos de la sequía, es más fácil visitar varios agricultores en el mismo condado.

También es posible combinar el muestreo estratificado con el muestreo por conglomerados. En el ejemplo sobre agricultura, puede ser sabio seleccionar la muestra de un número de condados de cada estado, proporcional al número total de condados en los cuatro estados.

Ciertos problemas pueden surgir en el uso del muestro por conglomerados. Si un porcentaje anormalmente grande (o pequeño) de agricultores en un conglomerado seleccionado tiende a utilizar la irrigación para mejorar la producción del cultivo, los resultados de la muestra pueden estar sesgados.

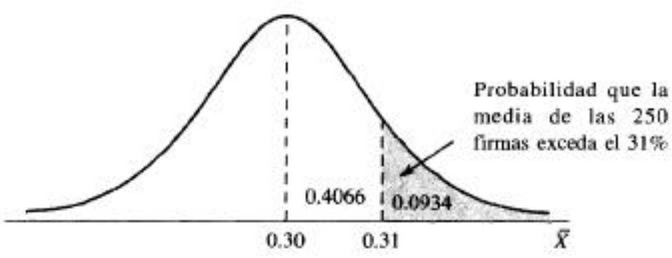
Esta discusión de ninguna manera explica los métodos de muestreo o los problemas que pueden surgir en el proceso de búsqueda de una muestra representativa a ser utilizada para sacar inferencias estadísticas. Un estudio sobre las técnicas de muestreo constituye todo un curso por sí mismo y va más allá del alcance de este texto. No obstante, debido a la importancia del proceso de muestreo, incluso el estudiante principiante debería ser consciente de los fundamentos sobre muestreo.

Problemas resueltos

1. Los registros de inversiones muestran que la tasa promedio de rendimiento para las firmas que están en la industria de bienes de consumo es del 30%, con una desviación estándar del 12%. Si se selecciona una muestra de 250 de tales firmas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de estas firmas exceda el 31%?

   Como lo muestra la gráfica, la probabilidad de que la media muestral esté entre el 30 y el 31% es

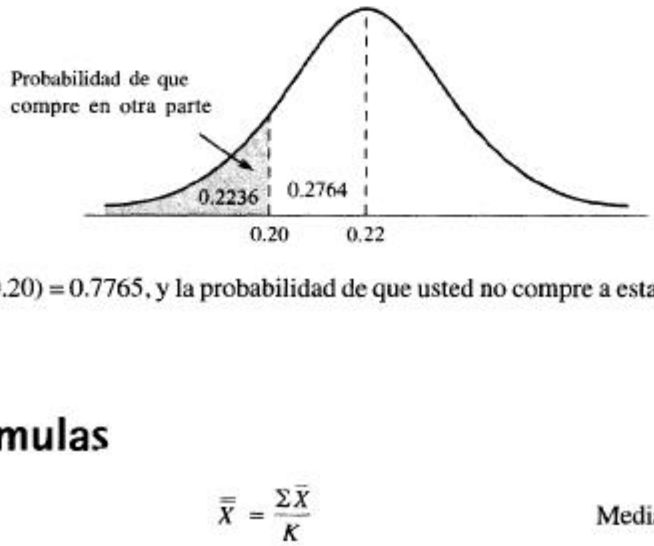
$$Z = \frac{0.31 - 0.30}{\frac{0.12}{\sqrt{250}}} = 1.32 \qquad \text{para un área de } 0.4066$$



Por tanto, $P(\bar{X} > 0.31) = 0.5000 - 0.4066 = 0.0934$

2. Sólo el 22% de todas las firmas en la industria de bienes de consumo comercializa sus productos directamente con el consumidor final. Si una muestra de 250 firmas revela una proporción de más del 20% que se compromete en el mercadeo directo, usted planea hacer su siguiente compra a las firmas de esta industria. ¿Qué tan probable es que usted gaste su dinero bien ganado en otra parte?

$$Z = \frac{0.20 - 0.22}{\sqrt{\dfrac{(0.22)(0.78)}{250}}} = -0.76 \quad \text{para un área de } 0.2764$$



Por tanto, $P(p > 0.20) = 0.7765$, y la probabilidad de que usted no compre a estas firmas es de $1.00 - 0.7765 = 0.2236$.

Lista de fórmulas

[6.1]	$\bar{\bar{X}} = \dfrac{\Sigma \bar{X}}{K}$	Media de las medias muestrales
[6.2]	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\Sigma(\bar{X} - \mu)^2}{K}$	Varianza de la distribución de las medias muestrales
[6.3]	$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2}$	Error estándar de la distribución de las medias muestrales
[6.4]	$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Error estándar de la distribución muestral
[6.5]	$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$	Error estándar con el factor de corrección para poblaciones finitas

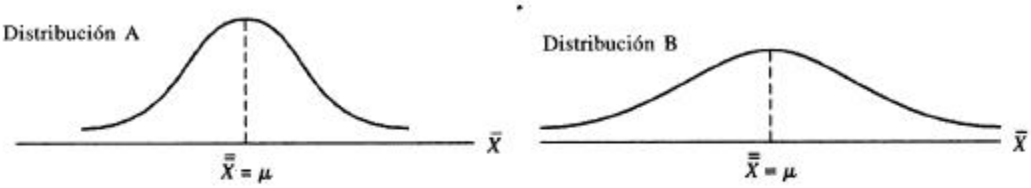
[6.6]	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	Desviación normal para medias
[6.7]	$E(p) = \dfrac{\Sigma p}{K}$	Valor esperado de las proporciones
[6.8]	$\sigma_p = \sqrt{\dfrac{(\pi)(1 - \pi)}{n}}$	Error estándar de las proporciones
[6.9]	$\sigma_p = \sqrt{\dfrac{(\pi)(1 - \pi)}{n}}\sqrt{\dfrac{N - n}{N - 1}}$	Error estándar con el factor de corrección para poblaciones finitas
[6.10]	$Z = \dfrac{p - \pi}{\sigma_p}$	Desviación normal para las proporciones

Ejercicios del capítulo

18. Si se toma una muestra en la cual $n < 30$, ¿qué problema podríamos tener al trabajar con ella?

19. Si se toman varias muestras de un tamaño dado en una población, ¿qué influirá en la variabilidad de las medias muestrales? ¿Qué le pasa a dicha variabilidad a medida que n aumenta?

20. De una sola población se forman dos distribuciones de muestreo tomando todas las posibles muestras de un tamaño dado para obtener una distribución muestral A, y todas las muestras posibles de un tamaño diferente para obtener una distribución muestral B. Tales distribuciones se representan gráficamente a continuación. ¿Cuál distribución contiene el tamaño de muestra más grande? ¿Cómo puede explicarlo?



21. Una población de las ventas semanales (en miles de dólares) en Blazing Salads, un restaurante vegetariano en Chicago, es 27, 32, 17, 21 y 32.

a. Calcule e interprete σ.

b. Determine $n = 2$ y desarrolle la distribución muestral.

c. Calcule e interprete $\sigma_{\bar{x}}$ y cómo se relaciona con σ?

d. Calcule e interprete μ.

e. Calcule e interprete $\bar{\bar{X}}$. ¿Cómo se compara con μ?

22. Utilizando los datos del ejercicio 21, determine $n = 3$ y

a. desarrolle la distribución muestral.

b. Calcule $\bar{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{x}}$. ¿Cómo difieren de los valores del ejercicio 21 y por qué?

23. Se toma una muestra de $n = 50$ de una población grande, con una media de 12.2 y una desviación estándar de 4.1 ¿Cuáles son la media y el error estándar de la distribución muestral de las medias muestrales?

24. Los clientes de Madison Hair Garden, una sala de belleza en Madison, Connecticut, son un promedio de 40.7 personas por día, con una desviación estándar de 12.9. Si se toma una muestra de 100 días, ¿cuál es la probabilidad de que el número promedio de clientes exceda de 43?

25. Jim Sears fabrica equipos para agricultura. Su trabajo requiere del uso de barras de acero que deben tener una longitud promedio de por lo menos 50 pulgadas. Las barras pueden comprarse a un distribuidor en Kansas City cuyas barras miden en promedio 47 pulgadas solamente, con una desviación estándar de 12 pulgadas, o de un proveedor en Dallas cuyas barras miden en promedio 49 pulgadas, con una desviación estándar de 3.6 pulgadas. Si Sears debe comprar 81 barras, ¿debería utilizar el proveedor en Kansas City o el de Dallas?

26. Según la revista *Business Week*, el promedio de los años de experiencia de los pilotos de aerolínea es de 25.2. Se asume una desviación estándar de 12 años. Este año usted debe tomar 36 vuelos comerciales. Usted espera que la experiencia promedio de los pilotos de los vuelos que usted tome sea superior a 30. ¿Qué tan probable es que $\bar{X} > 30$?

27. Los depósitos promedio en el First of America Bank en Peoria equivalen a US$7,012, con una desviación estándar de US$532 y están distribuidos normalmente.

a. Si se selecciona un depósito aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que exceda de US$6,911?

b. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de $n = 35$ depósitos, ¿cuál es la probabilidad de que la media exceda de US$6,911?

c. ¿Por qué al tomar una muestra se reduce su respuesta? Dibuje gráficas, una encima de la otra para ilustrarlo.

28. En promedio, el nivel de producción en una planta de manufactura local es de 47.3 unidades por día, con una desviación estándar de 12.7. El gerente de planta tomará una muestra de 100 días. Si la media muestral excede de 49, promete dar a todos los empleados una bonificación de Navidad. ¿Qué tan probable es que los empleados disfruten de una feliz navidad?

29. Los ingresos para los trabajadores de la línea de producción en Chicago tienen un promedio de US$21.15 por hora con una desviación estándar de US$5.15. Estos ingresos están sesgados a la izquierda. Describa la distribución muestral de los ingresos para el tamaño muestral de 100. Dibuje las distribuciones, tanto para la distribución original como para la distribución muestral.

30. Si el tamaño de la muestra del ejercicio 29 fuera 64, en qué se diferenciaría la distribución muestral? Grafique ambas.

31. Un mecánico local en promedio cobra US$110 por hacer una reparación determinada. Los registros muestran una desviación estándar de US$21.50 en cobros. Un cliente se quejó recientemente porque su factura de US$115.50 era excesiva. Después de un regateo considerable, el mecánico aceptó reembolsar el dinero si la muestra de 36 trabajos similares revelaban tener una facturación promedio menor que la del cliente. ¿Piensa usted que el mecánico fue sabio al ofrecer esta negociación?

32. Un proceso de manufactura produce unidades que miden en promedio 10 pulgadas de largo con una desviación estándar de 3.2 pulgadas. Si sólo pueden utilizarse las unidades que estén entre 9.5 y 10.5 pulgadas, ¿cuántas pueden descartarse de una muestra de 100?

33. En la clase de computadores que se da a los estudiantes de estadística de segundo nivel, los estudiantes tuvieron un promedio de 14.2 errores con una desviación estándar de 4.3

a. ¿Cuál es la probabilidad de que usted (o cualquier estudiante dado) tenga más de 13 errores en el curso si se sabe que los errores están distribuidos normalmente?

b. Si los errores no están distribuidos normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra de 36 estudiantes tenga un promedio superior a 13 errores?

c. ¿Por qué sus respuestas son diferentes? Dibuje las dos gráficas, una encima de la otra para ilustrar.

d. ¿Por qué se necesitó la suposición de normalidad en la parte *a* y no en la parte *b*?

34. La desviación estándar en cuanto a la cantidad de tiempo que se gasta en entrenar a un trabajador para realizar un trabajo es de 40 minutos. Se toma una muestra aleatoria de 64 trabajadores.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral exceda la media poblacional en más de 5 minutos?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea al menos mayor que la media poblacional en 8 minutos?

35. Se tomó una muestra aleatoria de 81 compras en una tienda local por departamentos para estimar la media de todas las compras. Se sabe que la desviación estándar poblacional es US$25.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral no sobrepase la media poblacional en más de US$4?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral subestime la media poblacional en menos de US$1?

36. El promedio del fondo de pensiones en TIAA, para una población de profesores, es de US$40,715, con una desviación estándar de US$19,015. Halle la probabilidad de que una muestra de 75 profesores produzca un error de muestreo menor que US$1,000.

37. Las cifras nacionales muestran que el 32% de todos los estudiantes pierde su primer examen de estadística. Si se seleccionan aleatoriamente 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que más de 40 lo pierdan?

38. Un proceso industrial genera el 8% de unidades defectuosas. Usted compra 100 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que menos del 10% sean defectuosas?

39. Del mismo proceso industrial mencionado en el ejercicio anterior, de nuevo usted compra 100 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que menos del 10% sean defectuosas?

40. Un productor de cámaras de video publica que el 28% de las cámaras de video vendidas en el mercado son de su marca. De las 150 ventas recientes, exactamente 40 fueron producidas por esta compañía. ¿Qué piensa de lo que dice la compañía?

41. Sus clientes requieren que por lo menos el 90% de sus productos no tenga defectos. Una muestra de 500 revela que 31 tiene defectos. ¿Cumple usted con las especificaciones de sus clientes?

42. El fabricante de un nuevo computador le comprueba que usted experimentará con su nuevo modelo sólo un 9% de reducción de tiempo en reparaciones y mantenimiento. Una revisión de su equipo actual revela que en las últimas 90 horas, 12 horas fueron de inactividad. ¿El nuevo computador es más confiable que el modelo actual?

43. Hay cinco cartas boca abajo sobre la mesa. Su amigo dice que posee percepción extrasensorial. Usted selecciona una carta aleatoriamente sin revelar su escogencia a su amigo. De 200 intentos, él identifica correctamente 54 cartas. ¿Usted cree que su amigo tiene tal percepción extrasensorial?

44. Una corporación va a hacer una nueva emisión de acciones. La ley exige que a los accionistas actuales se les debe dar la primera opción de compra de toda nueva emisión. La gerencia considera que el 45% de los accionistas actuales desearán comprar. Se selecciona una muestra aleatoria de 130 accionistas, 63 de los cuales expresan su deseo de comprar.

   a. ¿Cuál es el error estándar de la-proporción muestral?

   b. ¿Cuál es la media de la distribución de las proporciones muestrales?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener los resultados descritos en el problema si $\pi = 0.45$?

45. Sears ha determinado que el 17% de todas las compras hechas durante la época de navidad son devueltas. Si la tienda vende 150 video juegos, ¿cuál es la probabilidad de que máximo el 20% sea devuelto?

46. Sin elaborar el problema, explique qué pasaría a la respuesta del problema anterior si n se aumentara a 200. ¿Por qué?

PUESTA EN ESCENA

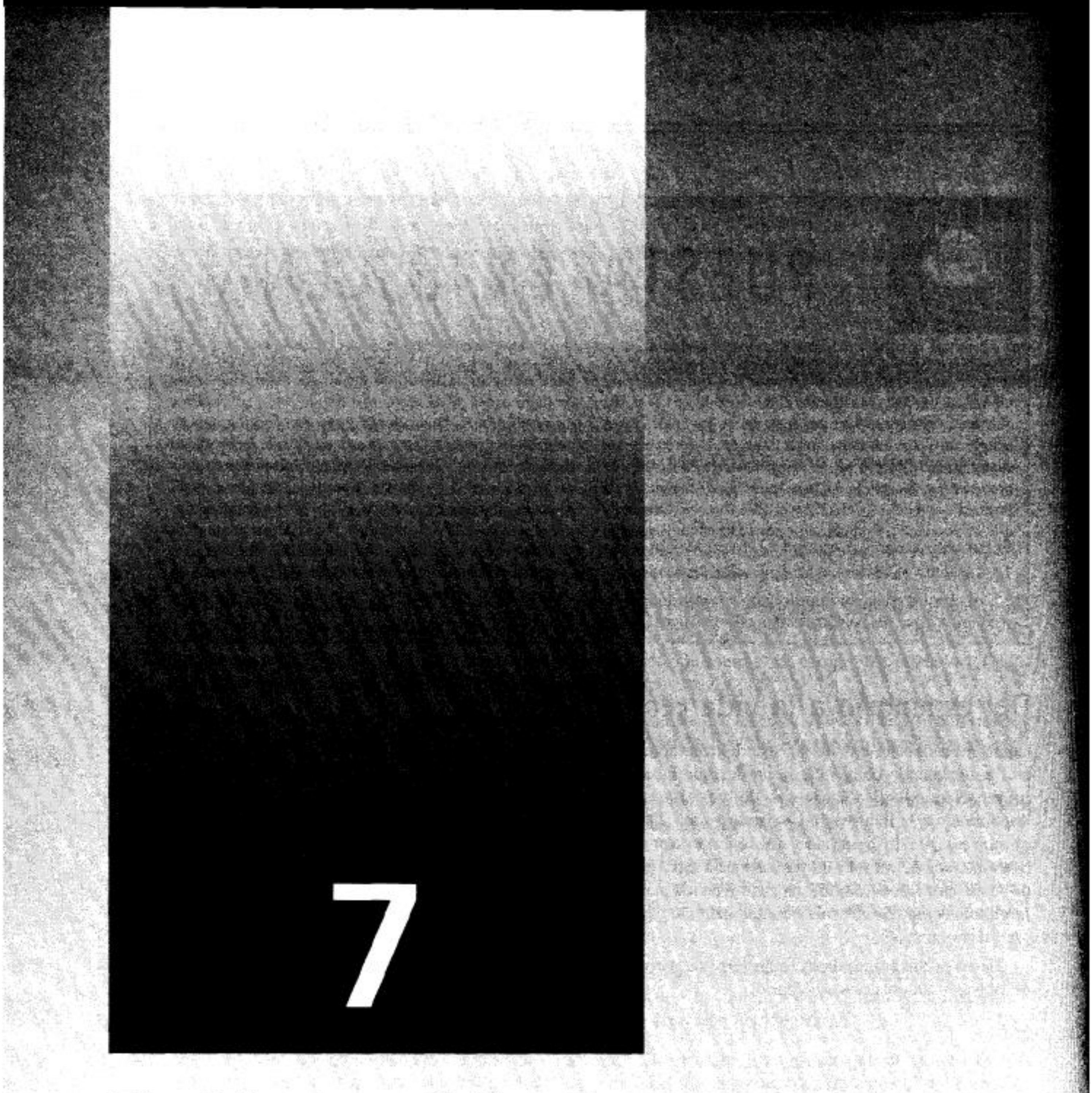
En la sección Escenario, a comienzos de este capítulo, usted tenía la responsabilidad de analizar tres industrias para identificar en cuál debían invertir sus fondos varios de sus clientes importantes. Los tres sectores en los cuales están interesados sus clientes son el sector deportivo y de esparcimiento, el campo de la asistencia médica y el de protección ambiental. Se supone que las tasas de rendimiento promedio son del 8%, el 23% y el 15% respectivamente, y que la desviación estándar en estos rendimientos son del 3%, el 5% y el 7%. Las tasas de bancarrota son del 12%, el 7.5% y el 3% en las tres industrias respectivamente.

Los clientes están preocupados por la tasa promedio de rendimiento que su inversión tendrá, así como por el riesgo de incumplimiento que tendrán que soportar debido a la bancarrota. Su análisis debe incluir sus estimados de las probabilidades de incumplimiento y las tasas potenciales de rendimiento. Sus clientes son inversionistas muy cuidadosos y están solicitando estimados de la probabilidad de algún error en su análisis. Usted planea tomar muestras de 50 firmas de la industria deportiva, 150 firmas de la industria de asistencia médica, y 250 firmas relacionadas con el manejo de la vida salvaje. Explique de forma completa y justifique toda suposición adicional que deba hacer para completar el análisis. Prepare su informe final de acuerdo con las reglas establecidas en el apéndice I sobre elaboración de reportes.

Del escenario a la vida real

Como inversionista individual, usted puede aprender mucho sobre compañías específicas en internet. Si usted está considerando compañías sobre las que usted ha escuchado, un buen sitio para comenzar su búsqueda de información es en los sitios web de las compañías. Los Marriott Hotels (*www.marriott.com*) es una empresa importante en la industria de esparcimiento. ¿Qué información proporciona su sitio web sobre los servicios al cliente? ¿Qué información sobre inversionistas se suministra en este sitio? De igual forma Aetna (*www.aetnaushc.com*) es un proveedor de asistencia médica importante. ¿Qué información se pone a disposición de sus clientes en este sitio? ¿A sus inversionistas? Finalmente, Environment One Corporation (*www.eone.com*) fabrica un equipo de control de contaminación. ¿Qué información pone a disposición de los clientes esta compañía? ¿A inversionistas?

Usted puede buscar datos financieros de corporaciones específicas en la base de datos Edgar de la Comisión de Bolsas y Valores (*www.sec.gov*).

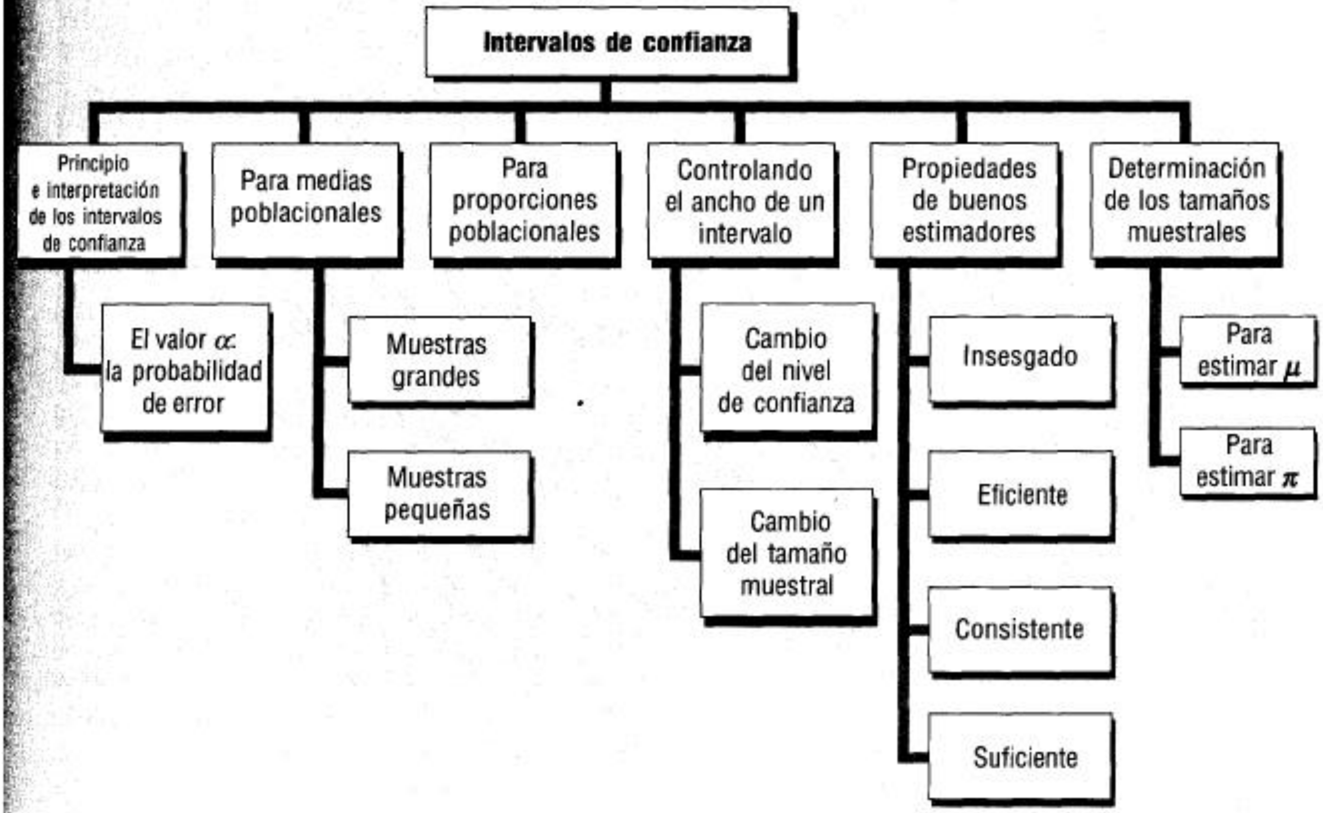


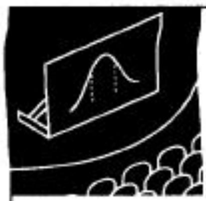
7

Estimación con intervalos de confianza

Plan del capítulo

El capítulo 6 mostró cómo las distribuciones muestrales de la media y de la proporción muestral pueden utilizarse para generar estimaciones puntuales de μ y π. Este capítulo muestra cómo pueden establecerse estimaciones por intervalo para estos dos parámetros y cómo pueden asignarse los niveles de confianza a estos intervalos.





ESCENARIO

En 1997 la Agencia Federal de Investigación (*Federal Bureau of Investigation*-FBI) implantó procedimientos revolucionarios para facilitar la captura de personas solicitadas por crímenes graves. Un vocero de la División de Estadísticas Criminales del FBI apareció en el programa en vivo *Larry King Live*, en la Red de Noticias por Cable (Cable News Network, CNN) para discutir los *procedimientos que harían más seguras las calles de la* ciudad. Ella mencionó varias estadísticas que el FBI había recolectado describiendo motivos, técnicas y frecuencia de los crímenes que ella consideraba que eran útiles para hacer el perfil de criminales que andan sueltos y que la agencia desea capturar.

Su discusión se centró en los esfuerzos de la agencia por mantener una gran base de datos sobre estadísticas criminales que pudieran utilizarse para predecir la actividad criminal y así poder anticipar dónde y cuándo puede ocurrir un acto ilegal. Ella mencionó varios casos que se habían resuelto, en gran parte gracias al trabajo realizado por estadísticos profesionales que proporcionaron estimaciones *sobre tasas de reincidencia de los infractores, así como* otras actividades que proporcionan alguna pista que ayude a su arresto. Esta información mostró ser de extrema utilidad para los agentes que trabajaban en el área y cuya función es ubicar a quienes están en la lista de los más buscados por el FBI.

7.1 Introducción

Actualmente se debe estar bien consciente de que las poblaciones son generalmente muy grandes como para ser estudiadas en su totalidad. Su tamaño requiere que se seleccionen muestras, las cuales se pueden utilizar más tarde para hacer inferencias sobre las poblaciones. Si un gerente de una tienda minorista desea saber sobre el gasto promedio de sus clientes durante el año anterior, podría encontrar difícil calcular el promedio de los cientos o quizá miles de clientes que pasaron por su tienda. Sería mucho más fácil estimar la media poblacional con la media de una muestra representativa.

Hay por lo menos dos tipos de estimadores que se utilizan más comúnmente para este propósito: un estimador puntual y un estimador por intervalo. Un **estimador puntual** utiliza un estadístico para estimar el parámetro en un solo valor o punto. El gerente de la tienda puede seleccionar una muestra de $n = 500$ clientes y hallar el gasto promedio de $\overline{X} =$ US\$37.10. Este valor sirve como una estimación puntual para la media poblacional.

Una **estimación por intervalo** especifica el rango dentro del cual está el parámetro desconocido. El gerente puede decidir que la media poblacional está en algún sitio entre US\$35 y US\$38. Tal intervalo con frecuencia va acompañado de una afirmación sobre el nivel de confianza que se da en su exactitud. Por tanto se llama **intervalo de confianza** (I.C.).

Estimador Un estimador puntual utiliza un número único o valor para localizar una estimación del parámetro. Un intervalo de confianza denota un **rango** dentro del cual puede encontrarse el parámetro, y el nivel de confianza que el intervalo contiene del parámetro.

En realidad hay tres niveles de confianza relacionados comúnmente con los intervalos de confianza: 99, 95, y 90%. No hay nada mágico sobre estos tres valores. Se podría calcular un intervalo de confianza del 82% si se deseara. Estos tres niveles de confianza, denominados **coeficientes de confianza**, son simplemente convencionales. El gerente mencionado anteriormente puede tener un 95% de confianza en que la media poblacional está entre US\$35 y US\$38.

Las estimaciones por intervalo gozan de ciertas ventajas sobre las estimaciones puntuales. Debido al error de muestreo, probablemente $\bar{X}$ no será igual a μ. Sin embargo, no hay manera de saber qué tan grande es el error de muestreo. Por tanto, los intervalos se utilizan para explicar esta discrepancia desconocida.

Se iniciará con una discusión sobre lo que es un intervalo de confianza y cómo interpretarlo.

A. El fundamento de un intervalo de confianza

Un intervalo de confianza tiene un **límite inferior de confianza** (LIC) y un **límite superior de confianza** (LSC). Estos límites se hallan calculando primero la media muestral, $\bar{X}$. Luego se suma una cierta cantidad a $\bar{X}$ para obtener el LSC, y la misma cantidad se resta de $\bar{X}$ para obtener el LIC. La determinación de dicha cantidad es el tema de este capítulo.

¿Cómo se puede construir un intervalo y luego argumentar que se puede tener un 95% de confianza en que contiene μ, si incluso no se sabe cuál es la media poblacional? Vale la pena recordar de la discusión anterior sobre la Regla Empírica que el 95.5% de todas las medias muestrales caen dentro de dos errores estándar de la media poblacional. Entonces la media poblacional está máximo a dos errores estándar del 95.5% de todas las medias muestrales. Por tanto, al comenzar con *cualquier* media muestral, si se pasa de dos errores estándar por encima de dicha media y dos errores estándar por debajo de ella, se puede tener un 95.5% de confianza en que el intervalo resultante contenga la media poblacional desconocida.

La discusión sobre distribuciones de muestreo mostró que de toda población se pueden obtener muchas muestras diferentes de un tamaño dado, cada una con su propia media. La figura 7.1 muestra seis de estas medias muestrales posibles. Si la muestra da $\bar{X}_1$, un intervalo que se extiende dos errores estándar por encima y dos errores estándar por debajo de $\bar{X}_1$ todavía incluye el valor desconocido de la media poblacional. De igual forma, si la muestra hubiese dado una media de $\bar{X}_2$, el intervalo resultante también incluiría la media poblacional. Vale la pena destacar que sólo $\bar{X}_3$ y $\bar{X}_5$ quedan tan lejos de la media poblacional que un intervalo de ± 2 errores estándar no incluye la media poblacional. Todas las otras muestras consideradas producirán un intervalo que contiene la media poblacional. Entonces, la clave para recordar es esta: como la media poblacional está a lo más a dos errores estándar para el 95.5% de todas las medias muestrales, entonces dada una media muestral cualquiera, se puede estar 95.5% seguro de que el intervalo de dos errores estándar alrededor de dicha media muestral contiene la media poblacional desconocida.

Si se desea construir un intervalo más convencional del 95% (en lugar del 95.5% discutido anteriormente), ¿cuántos errores estándar se debe mover por encima y por debajo de la media muestral? Como lo demuestra la figura 7.2, debido a que la tabla Z contiene valores sólo para el área que está por encima o por debajo de la media, se debe dividir el 95% por 2, produciendo 0.4750. Luego, se halla el valor de Z, correspondiente a un área de 0.4750, el cual es Z = 1.96. Así, para construir un intervalo de confianza del 95%, simplemente se especifica un intervalo de 1.96 errores estándar por encima y por debajo de la media muestral. Este valor del 95% es llamado **coeficiente de confianza**.

Figura 7.1
Posible intervalo de confianza del 95.5% para estimar μ

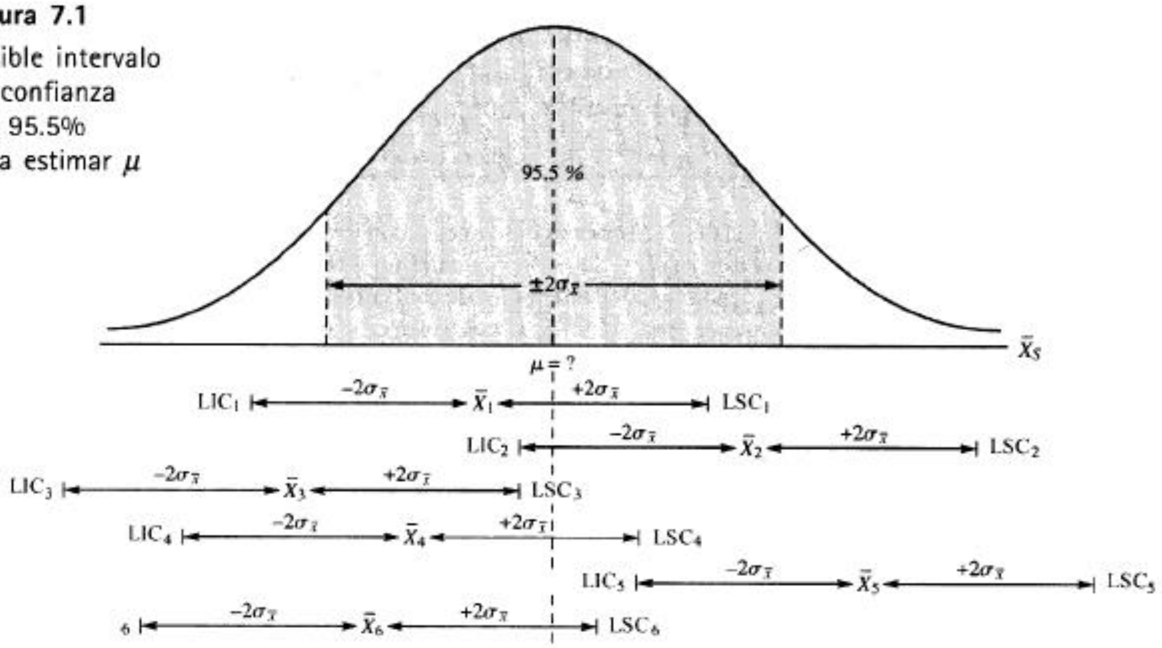
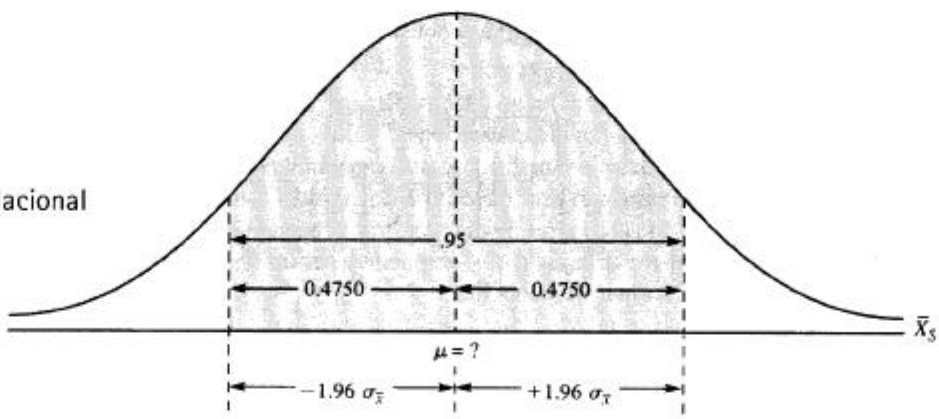


Figura 7.2
Intervalo de confianza del 95% para estimar la media poblacional



Coeficiente de confianza El coeficiente de confianza es el nivel de confianza que se tiene en el que el intervalo contenga el valor desconocido del parámetro.

Quizá se puede ilustrar mejor utilizando un ejemplo. Se comienza desarrollando una estimación por intervalo para la media poblacional con una muestra grande ($n \geq 30$).

7.2 Intervalo de confianza para la media poblacional – Muestras grandes

Uno de los usos más comunes de los intervalos de confianza es estimar la media poblacional. Un fabricante puede querer estimar la producción mensual promedio de su planta; un representante de mercadeo puede interesarse en la reducción en las ventas semanales promedio; el jefe financiero de una firma, que aparece entre las 500 mejores firmas en la revista *Fortune*, puede querer estimar los rendimientos trimestrales promedio que se tuvieron en operaciones corporativas. El número de circunstancias que se encuentran comúnmente en el mundo de los negocios y que requiere de una estimación de la media poblacional es casi ilimitado.

Se debe recordar que el intervalo se forma utilizando la media muestral como una estimación puntual para el cual se adiciona y se resta un cierto valor para obtener los límites superior e inferior del intervalo de confianza, respectivamente. Por tanto el intervalo es

Intervalo de confianza para estimar μ cuando σ es conocido	I.C. para estimar $\mu = \bar{X} \pm Z\sigma_{\bar{x}}$	[7.1]

Cuánto debe sumarse y restarse, depende en parte del nivel de confianza deseado, estipulado por el valor de Z en la fórmula (7.1). Un nivel de confianza del 95% requiere un valor de Z de 1.96 (0.95/2 = 0.4750). El área de 0.4750 corresponde a un valor de Z de 1.96.

Consideremos el caso de un promotor inmobiliario quien intenta construir un gran centro comercial. Puede estimar en el área el ingreso promedio por familia como indicador de las ventas esperadas. Una muestra de $n = 100$ familias da una media de $\bar{X}$ = US\$35,500. Se asume que la desviación estándar poblacional es σ = US\$7,200. Dado que $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se estima un intervalo del 95% como

$$\text{I.C. para estimar } \mu = 35{,}500 \pm (1.96)\frac{7{,}200}{\sqrt{100}}$$
$$= 34{,}088.80 \leq \mu \leq 36{,}911.20$$

A. Interpretación de un intervalo de confianza

El promotor puede interpretar los resultados de su intervalo de confianza de dos formas. La primera, y la más común, establece que el promotor tiene un "95% de confianza en que la media poblacional real desconocida esté entre US\$34,088.80 y US\$36,911.20". Aunque el valor real para la media poblacional sigue siendo desconocido, el promotor tiene un 95% de confianza en que esté entre estos dos valores.

La segunda interpretación reconoce que se pueden desarrollar muchos intervalos de confianza diferentes. Otra muestra probablemente produciría una media muestral diferente debido al error de muestreo. Con una $\bar{X}$ diferente, el intervalo tendría límite superior e inferior distintos. Por tanto, la segunda interpretación establece que si se construyen todos los ${}_NC_n$ intervalos de confianza, el 95% de ellos contendrá la media poblacional desconocida.

Si una segunda muestra da una media de US\$35,600 en lugar de US\$35,500, el intervalo es

$$\text{I.C. para estimar } \mu = \$35{,}600 \pm (1.96)\frac{\text{US\$}7{,}200}{\sqrt{100}}$$
$$= \text{US\$}34{,}188.80 \leq \mu \leq \text{US\$}37{,}011.20$$

El promotor puede estar un 95% seguro de que la media poblacional está comprendida entre US\$34,188.80 y US\$37,011.20. Si todos los intervalos posibles se construyeran con base en todas las medias muestrales diferentes, el 95% de ellas contendría la media poblacional desconocida.

Esto por supuesto significa que el 5% de todos los intervalos estaría errado – no contendrían la media poblacional–. Este 5%, hallado como (1 – coeficiente de confianza), es denominado el **valor alfa** y representa la probabilidad de error. El valor alfa es la probabilidad de que cualquier intervalo dado no contenga la media poblacional.

> **Valor alfa** Es la probabilidad de error o la probabilidad de que un intervalo dado no contenga la media poblacional desconocida.

B. Intervalo de confianza cuando σ es desconocida

La fórmula (7.1) requiere la suposición improbable que la desviación estándar poblacional σ es conocida. En el evento probable que σ sea desconocida, la desviación estándar de la muestra debe substituirse:

> Intervalo de confianza para estimar μ cuando σ es desconocida $\quad$ I.C. para estimar $\mu = \bar{X} \pm Zs_{\bar{x}}$ $\quad$ [7.2]

en donde $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$

Gerry Gerber, CPA, acaba de registrar las declaraciones de impuestos de sus clientes. Desea estimar la cantidad promedio que deben al Servicio de Renta Interna. De los 50 clientes que seleccionó en su muestra, la cantidad promedio que se adeudaba era de US\$652.68. Ya que la desviación estándar de todos sus clientes σ es desconocida, Gerber debe *estimar* σ con la desviación estándar de la muestra de s = US\$217.43. Si se desea un nivel del 99% de confianza, el valor de Z apropiado es 2.58 (0.99/2 = 0.4950). De la tabla Z, un área de 0.4950 revela que Z = 2.58. Utilizando la fórmula (7.2)

$$\begin{aligned}\text{I.C. para estimar } \mu &= \bar{X} \pm Zs_{\bar{x}}\\ &= \text{US\$}652.68 \pm 2.58\,\frac{\text{US\$}217.43}{\sqrt{50}}\\ &= \text{US\$}573.35 \leq \mu \leq 732.01\end{aligned}$$

El señor Gerber puede tener un 99% de confianza en que la cantidad promedio que deben todos sus clientes al Servicio de Renta Interna (SRI) está entre US\$573.35 y US\$732.01.

¿Qué pasaría a este intervalo si el señor Gerber estuviera dispuesto a aceptar un nivel de confianza del 95%? Con un valor de Z de 1.96, el intervalo sería

$$\text{US\$}652.68 \pm 1.96\,\frac{\text{US\$}217.43}{\sqrt{50}}$$

$$\text{US\$}592.41 \leq \mu \leq \text{US\$}712.96$$

Los resultados son tanto buenos como malos. Las buenas noticias son que el intervalo del 95% es más estrecho y ofrece mayor **precisión**. Un intervalo amplio no es especialmente útil. Revelaría muy poco si el profesor *le pidiera que la media del siguiente examen estuviera entre el 0 y el 100%. Entre más estrecho sea el intervalo, más* significativo es.

Las malas noticias son que el señor Gerber ahora está el 95% seguro de que el intervalo contiene en realidad μ. Aunque el intervalo es más preciso (más estrecho), la probabilidad de que contenga μ se ha reducido del 99 al 95%. El señor Gerber tuvo que abandonar algo de confianza y ganar más precisión.

La pantalla 7.1 muestra la impresión en Minitab de la declaración de impuestos del señor Gerber (TXRET). Haciendo clic en **Stat > Basic Statistics > 1-sample Z** e ingresando 99% para el **Confidence Interval Level** y 217.43 para **Sigma**, el señor Gerber obtiene su estimado por intervalo, el cual difiere sólo levemente por encima de sus cálculos manuales, debido a la aproximación.

Pantalla 7.1

```
MTB > ZIntervalo 99.0  217.434338 C1

Confidence intervals (Intervalos de confianza)

The assumed sigma (El sigma asumido) = 217
                                  Mean          StDev              SE Mean           C.I.
Variable                     N  (Media)(Desviación estándar)(Media SE) 99.0 % (I.C.)
TXRET (Declaración
de impuestos)               50  652.7          217.4              30.7  ( 573.4,  731.9)
```

Ejemplo 7.1

Checkered Cabs planea comprar una flota de nuevos taxis para sus operaciones en Miami. La decisión depende de si el rendimiento del auto en consideración es por lo menos 27.5 millas por galón de gasolina. Los 36 carros que prueba la compañía reportan una media de 25.6 millas por galón (MPG), con una desviación estándar de 3.5 MPG. A un nivel de confianza del 99%, ¿qué aconsejaría a Checkered que hiciera?

Solución

Se tiene que el intervalo de confianza I.C. para estimar $\mu = 25.6 \pm (2.58)\dfrac{3.5}{\sqrt{36}}$

$$= 24.10 \leq \mu \leq 27.11$$

Interpretación

Puede estar un 99% seguro de que las MPG promedio de este carro es menor que el mínimo de 27.5 requerido. Usted debería aconsejar a Checkered que busque un modelo alternativo.

Ejercicios de la sección

1. ¿En qué se diferencian las estimaciones puntuales de las estimaciones por intervalo?
2. Si la media poblacional es desconocida, ¿cómo es posible dar un nivel de confianza a su estimado por intervalo? Incluya una gráfica en su respuesta.
3. Un intervalo del 90% para estimar la ganancia promedio de peso de los ratones de laboratorio oscila entre 0.93 onzas y 1.73 onzas. ¿Cómo interpretaría estos resultados? ¿Qué valor de Z se utilizó en el estimado?
4. Cien latas de 16 onzas de la salsa de tomate Jake's Mom's tienen un promedio de 15.2 onzas. La desviación estándar poblacional en peso es de 0.96 onzas. ¿A un nivel de confianza del 95% las latas parecen estar llenas con un promedio de 16 onzas?
5. Para estimar el gasto promedio de los clientes en el McDonald's local, los estudiantes de una clase de estadística toman una muestra de 200 clientes y encuentran un gasto promedio de US$5.67, con una desviación estándar de US$1.10. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 95% para los gastos promedio de todos los clientes? Interprete sus resultados.

6. Un estudio realizado por los profesores en una universidad de Kansas está diseñado para ofrecer inferencias sobre las tasas de desempleo por condado en Estados Unidos. Una muestra de 200 condados reporta una tasa promedio del 6.2%, con una desviación estándar del 1.7%. A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál es el estimado de la tasa de desempleo promedio por condado en la nación? Interprete sus resultados.
7. Después de observar 50 programas de televisión seleccionados aleatoriamente, la Asociación Nacional de Educación (*National Education Association*, NEA) reportó un promedio de 32.7 actos de violencia en 1997. Asuma una desviación estándar muestral de 10.1. ¿Cuál sería su estimación al 95% del número promedio de actos violentos por programa que los niños ven en la televisión?
8. Un teatro de cine local desea desarrollar un intervalo para estimar las cajas promedio de palomitas de maíz que se venden por sala de cine. Si los registros llevados para 70 salas revelan un promedio de 54.98 cajas y una desviación estándar de 12.7, calcule e interprete un intervalo de confianza del 92% para la media poblacional.
9. Una muestra de 121 llamadas al número 900 que usted maneja tiene una duración promedio de 16.6 minutos y una desviación estándar de 3.63 minutos. Usted pretende discontinuar el servicio a menos que la duración promedio sea superior a 18 minutos. En el nivel de confianza del 90% ¿cuál es su decisión?
10. ¿Cuál sería su decisión en el problema anterior a un nivel de confianza del 95%? ¿Por qué son diferentes los intervalos?
11. ¿Cuál sería su decisión si el ejercicio 9 utilizara una muestra de 200 llamadas? ¿Por qué los intervalos son diferentes?

7.3 Intervalo de confianza para la media en el caso de muestras pequeñas – la distribución *t*

En todos los ejemplos anteriores, el tamaño de la muestra era mayor ($n \geq 30$). Sin embargo, no siempre puede ser posible obtener por lo menos 30 observaciones. Para una compañía de seguros que prueba la resistencia al impacto de los autos, destruir a propósito 30 vehículos de lujo puede volverse un poco costoso. Un investigador médico que prueba una nueva medicina puede no encontrar 30 personas dispuestas a actuar como conejillo de indias. *En muchos casos una muestra grande no es posible.*

Cuando debe tomarse una muestra pequeña, la distribución normal puede no aplicarse. El teorema del límite central asegura normalidad en el proceso de muestreo sólo si la muestra es grande. Cuando se utiliza una muestra pequeña, puede ser necesaria una distribución alternativa, la **distribución *t* Student** (o simplemente la distribución *t*). Específicamente, la distribución *t* se utiliza cuando se cumplen las tres condiciones: (1) la muestra es pequeña, (2) σ es desconocida, y (3) la población es normal o casi normal. Si σ es conocida, la distribución Z se usa inclusive si la muestra es pequeña. Además, si no puede asumirse una población normal, se aumenta el tamaño de la muestra para utilizar la distribución Z y de no ser posible se debe confiar en las pruebas *no paramétricas*.

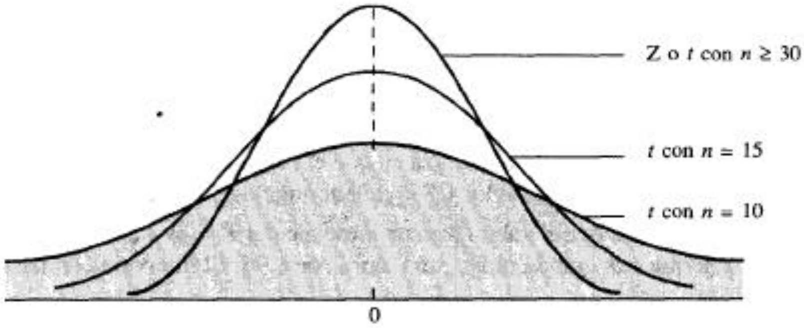
La distribución *t* Student fue desarrollada en 1908 por William S. Gosset (1876 – 1937), quien trabajó como experto cervecero para Guinnes Breweries en Dublin, Irlanda. Guiness no permitía que sus empleados publicaran su investigación, de manera que Gosset (a quien le gustaba "jugar con los números para relajarse") informó por primera vez sobre su distribución *t*, aunque publicó bajo el seudónimo de "Student" para proteger su trabajo.

Al igual que la distribución Z, la distribución *t* tiene una media de cero, es simétrica con respecto a la media y oscila entre $-\infty$ y $+\infty$. Sin embargo, mientras que la distribución Z tiene una varianza de $\sigma^2 = 1$, la varianza de la distribución *t* es mayor que 1. Por tanto, es más plana y más dispersa que la distribución Z. La varianza para la distribución *t* es

Varianza de la distribución *t*	$\sigma^2 = \dfrac{n-1}{n-3}$	[7.3]

En realidad la distribución t es una familia de distribuciones cada una con su propia varianza. La varianza depende de los *grados de libertad* (g.l.), definidos como el número de observaciones que se pueden escoger libremente. Es el número de observaciones menos el número de restricciones impuestas sobre tales observaciones, en donde una restricción es algún valor que tales observaciones deben poseer. Se asume que se tienen $n = 4$ observaciones que deben producir una media de 10. La media de 10 sirve como una restricción y hay $n - 1 = 3$ grados de libertad. Por tanto, se pueden escoger tres observaciones cualquiera; por ejemplo se puede escoger 8, 9 y 11. Después de que se seleccionan estos tres valores, ya no hay libertad para escoger la última observación. El cuarto valor *debe* ser 12 si se quiere tener un promedio de 10. Vale la pena destacar en la figura 7.3 que a medida que n aumenta, la distribución t se aproxima a la distribución Z. Es por esto que se puede utilizar la distribución Z cuando $n \geq 30$.

Figura 7.3
La familia de distribuciones t



Grados de libertad El número de observaciones menos el número de restricciones impuestas sobre tales observaciones.

Como se verá en breve, para todo conjunto de condiciones dadas la distribución t producirá un intervalo más amplio que la distribución Z, si ésta se utilizara. Este ancho adicional es necesario debido a que se pierde algo de precisión porque σ es desconocida y debe estimarse.

El estadístico t se calcula en gran parte como el estadístico Z.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{x}}} \qquad [7.4]$$

Reescribiendo (7.4) algebraicamente para expresarlo como un intervalo de confianza para estimar μ, se tiene que

Intervalo de confianza para estimar la media poblacional - muestras pequeñas

$$\text{I.C. para estimar } \mu = \bar{X} \pm (t)(s_{\bar{x}}) = \bar{X} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad [7.5]$$

El valor apropiado de t puede hallarse de la tabla F en el apéndice III. Para ilustrar, se asume que se desea un intervalo de confianza del 95% y se tiene una muestra de 20 observaciones. Debido a que $n = 20$, los grados de libertad son g.l. $= n - 1 = 19$. Bajando por la primera columna en la tabla F bajo "g.l." hasta 19. Se mueve a través de dicha fila hacia la columna encabezada por un nivel de confianza de 0.95 para las pruebas de dos colas. (Se ignoran las dos filas referentes a las pruebas de una cola. Estas se tratarán en el capítulo 8). La entrada resultante de 2.093 es el valor t apropiado para un intervalo de confianza del 95% con un tamaño muestral de 20 (g.l. = 19).

Consideremos el siguiente problema tomado de *The Wall Street Journal*. Una empresa de construcción fue culpada de inflar los comprobantes que registra para los contratos de construcción con el gobierno federal. El contrato estableció que un cierto tipo de trabajo debería promediar US$1,150. Por motivos de tiempo, los directivos de sólo 12 agencias del gobierno fueron llamados a dar testimonio ante la corte respecto a los comprobantes de la empresa. Si se descubrió a partir del testimonio una media de US$1,275 y una desviación estándar de US$235, ¿un intervalo de confianza del 95% apoyaría el caso legal de la empresa? Se asume que los montos de los comprobantes son normales.

Un nivel de confianza del 95% con g.l. = 12 -1 = 11 resulta de la tabla F un valor t de 2.201. Entonces

$$\begin{aligned}\text{I.C. para estimar } \mu &= \bar{X} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}\\ &= 1275 \pm (2.201)\frac{235}{\sqrt{12}}\\ &= 1275 \pm 149.31\\ \text{US\$}1{,}125.69 \leq \mu &\leq \text{US\$}1{,}424.31\end{aligned}$$

La corte puede tener un 95% de confianza en que el promedio de todos los comprobantes está entre US$1,125 y US$1,424. Este *intervalo contiene los US$1,150* acordados, fortaleciendo la defensa de la empresa.

Vale la pena destacar que el valor t para un intervalo del 95% es 2.201 (dado g.l. = 11), mientras que un intervalo del 95% de una muestra grande utiliza un valor Z de 1.96. El intervalo con base en un valor t es, por tanto, más amplio.

Ejemplo 7.2

El contrato laboral realizado entre United Auto Workers (UAW) y Ford Motor Company (FMC) requirió que la producción promedio para una sección de producción se realizara a 112 unidades por mes, por empleado. Surgieron desacuerdos entre UAW y FMC respecto a si se mantenía este estándar o no. El contrato laboral especificó que si los niveles de producción promedio se reducían por debajo de la cantidad estipulada de $\mu = 112$, a FMC se le permitiría tomar "acciones correctivas". Debido al costo implicado, sólo se evaluaron 20 trabajadores, resultando una media de 102 unidades. Se asume que se encontró una desviación estándar de 8.5 unidades y que los niveles de producción están distribuidos normalmente. ¿Un intervalo de confianza del 90% tiende a sugerir una contravención del contrato laboral, permitiendo así una acción correctiva?

Solución

Con un nivel de confianza del 90% y n - 1 19 g.l., la tabla F da un valor t de 1.729.

$$\begin{aligned}\text{I.C. para estimar } \mu &= \bar{X} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}\\ &= 102 \pm (1.729)\frac{8.5}{\sqrt{20}}\\ &= 102 \pm 3.29\\ 98.71 \leq \mu &\leq 105.29\end{aligned}$$

El nivel de producción promedio de 112 unidades, especificado en el contrato laboral, no está dentro del intervalo de confianza.

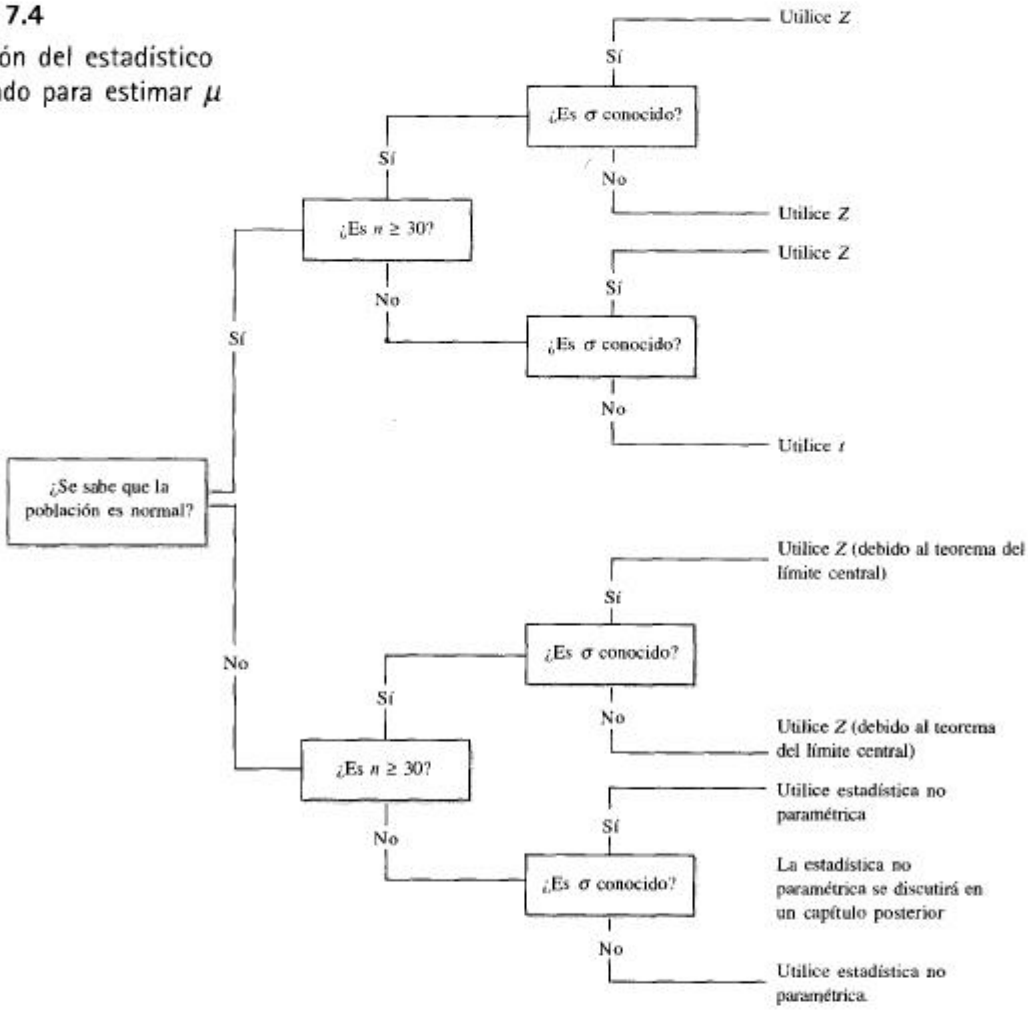
Interpretación

Hay un nivel de confianza del 90% en el que el contrato está siendo violado. FMC está en su derecho para interponer un recurso por retraso en la productividad.

Obviamente, decidir si utilizar un estadístico t o Z es crucial. La figura 7.4 ayudará en la selección del estadístico apropiado. Vale la pena recordar que la distribución t debería utilizarse cuando todas estas tres condiciones están presentes: (1) la población es normal, (2) se toma una muestra pequeña, y (3) σ es desconocido.

Figura 7.4

Selección del estadístico apropiado para estimar μ



Ejercicios de la sección

12. ¿Cuáles tres condiciones se deben cumplir antes de que se pueda utilizar la distribución t?

13. ¿En qué se diferencia la varianza de la distribución t de la de la distribución Z? Si un conjunto de datos tiene 17 observaciones, ¿cuál es la varianza de la distribución t?

14. The Lucky Lady, una tertulia estudiantil popular, vende vasos de cerveza de 16 onzas. Diez estudiantes compran un total de 22 vasos, y utilizando su propia taza de medida, estiman los contenidos promedio. La media muestral es de 15.2 onzas, con $s = 0.86$. ¿Con un nivel de confianza del 95% los estudiantes creen que su dinero lo vale? Interprete el intervalo.

15. Dell Publishings muestrea 23 paquetes para estimar el costo postal promedio. La media muestral es de US\$23.56, con $s =$ US\$4.65.

a. El editor senior de Dell espera mantener el costo promedio por debajo de US$23.00. Calcule e interprete el intervalo de confianza del 99%. ¿El editor estará satisfecho?

b. Compare los resultados de la parte *a* con el intervalo de confianza del 99%, si s = US$2.05. Explique por qué existe diferencia.

c. Manteniendo s = US$4.65, compare los resultados de la parte *a* con el intervalo del 95%. Explique la diferencia.

16. Las bonificaciones para 10 nuevos jugadores de la Liga Nacional de Fútbol se utilizan para estimar la bonificación promedio para todos los nuevos jugadores. La media muestral es de US$65,890 con s = US$12,300. ¿Cuál es su estimación con un intervalo del 90% para la media poblacional?

17. Una muestra de 25 llamadas a *Psychic Friends Network* (Red de Amigos Síquicos) revela un costo promedio de US$23.87. Si la desviación estándar es US$9.56, ¿cuál es la estimación con un intervalo del 98% para el costo promedio de todos los que llaman para conocer su futuro?

18. Greenleaf Lawn Care descubre que el costo promedio de adornar los jardines de 20 casas del área es de US$2,365, con s = US$983. Al nivel de confianza del 99%, ¿qué costo promedio estimaría usted para adornar los jardines de todas las casas del área?

7.4 Intervalo de confianza para la proporción poblacional

Las decisiones dependen con frecuencia de parámetros que son binarios, parámetros con sólo dos posibles categorías dentro de las cuales pueden clasificarse las respuestas. En este evento, el parámetro de interés es la *proporción* poblacional. Una empresa puede desear saber qué proporción de sus clientes paga a crédito en oposición a quienes utilizan efectivo. Las corporaciones con frecuencia están interesadas en qué porcentaje de sus productos son defectuosos en oposición al porcentaje que no es defectuoso, o qué proporción de sus empleados renuncian después de un año en contraste con la proporción que no renuncia después de un año. En cada uno de estos casos, existen sólo dos posibles resultados. Por tanto, la preocupación se concentra en la proporción de respuestas que queda dentro de uno de estos dos resultados.

En el capítulo anterior se encontró que si $n\pi$ y $n(1-\pi)$ son ambos mayores que 5, la distribución de las proporciones muestrales será normal y la distribución muestral de la proporción muestral tendrá una media igual a la proporción poblacional π y un error estándar de

El error estándar de la distribución muestral de las proporciones muestrales	$\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}$	[7.6]

Sin embargo, la fórmula (7.6) contiene π, el parámetro que se desea estimar. Por tanto, la proporción muestral p se utiliza como estimador de π.

La fórmula (7.6) puede replantearse como

Estimación del error estándar de la distribución de las proporciones muestrales	$s_p = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	[7.7]

El intervalo de confianza es entonces

Intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional	I.C. para estimar $\pi = p \pm Zs_p$	[7.8]

El gerente de una estación de televisión debe determinar en la ciudad qué porcentaje de casas tiene más de un televisor. Una muestra aleatoria de 500 casas revela que 275 tienen dos o más televisores. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90% para estimar la proporción de todas las casas que tienen dos o más televisores? Dados estos datos, $p = 275 / 500 = 0.55$, y

$$s_p = \sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{500}}$$
$$= 0.022$$

La tabla E da un valor de Z de 1.65 para un intervalo de confianza del 90%.

$$\text{I.C. para estimar } \pi = 0.55 \pm (1.65)(0.022)$$
$$= 0.55 \pm 0.036$$
$$0.514 \leq \pi \leq 0.586$$

El gerente puede tener un 90% de confianza que entre el 51.4% y el 58.6% de las casas de la ciudad tienen más de un televisor.

Ejemplo 7.3

Las empresas de búsqueda de ejecutivos se especializan en ayudar a las empresas a ubicar y asegurar talento para la alta gerencia. Tales firmas denominadas "cazadoras de cabezas" son responsables de la ubicación de muchos de los mejores directores ejecutivos de la nación. *Business Week* reportó recientemente que "uno de cada cuatro directores ejecutivos es una persona de fuera –un ejecutivo con menos de 5 años en la compañía que maneja–". Si en una muestra de 350 compañías de los Estados Unidos, 77 tienen directores ejecutivos de fuera, ¿un intervalo del 99% de confianza apoyaría la afirmación?

Solución

$$p = \frac{77}{350} = 0.22$$
$$s_p = \sqrt{\frac{(0.22)(0.78)}{350}} = 0.022$$
$$\text{I.C. para estimar } \pi = p \pm Zs_p$$
$$= 0.22 \pm (2.58)(0.022)$$
$$0.163 \leq \pi \leq 0.277$$

Interpretación

Se confía en que al nivel del 99% entre el 16.3% y el 27.7% de las empresas de Estados Unidos tienen directores ejecutivos de fuera. La afirmación está apoyada por tales descubrimientos, ya que el 25% está contenido dentro del intervalo.

Ejercicios de la sección

19. Qué es s_p y qué mide?

20. CNN informó que el 68% de todos los estudiantes de secundaria tenía computadores en sus casas. Si una muestra de 1,020 estudiantes revela que 673 tienen computadores caseros, ¿un intervalo del 99% apoya a CNN?

21. Como respuesta al nuevo furor de fumar cigarrillo que arrasa la nación, el Instituto Nacional del Corazón (National Heart Institute) practicó encuestas a mujeres para estimar la proporción de quienes fumaban un cigarrillo ocasionalmente. De las 750 mujeres que respondieron, 287 respondieron que sí lo hacían. Con base en estos datos, ¿cuál es su estimación al 90% para la proporción de todas las mujeres que participan de este hábito?

22. La Asociación Nacional de Viajes (National Travel Association) tomó muestras de las personas que tomaban vacaciones en Irlanda para estimar la frecuencia con la cual los norteamericanos visitaban Emerald Isle. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 96% para la proporción de turistas que son norteamericanos, si 1,098 de los 3,769 encuestados portaban pasaportes de Estados Unidos?

23. De los 1,098 turistas norteamericanos 684 habían registrado su viaje a través de un agente de viajes. Calcule e interprete el intervalo del 95% para la proporción de todos los norteamericanos que utilizan los servicios de agencias de viajes profesionales en Irlanda.

24. Si 896 de los turistas norteamericanos recomendaran al viaje a sus amigos, ¿qué porcentaje de todos los turistas norteamericanos harían lo mismo con un nivel del 99% de confianza?

25. Si 796 de los 1,098 turistas norteamericanos planean viajes para regresar a Irlanda, con un nivel de confianza del 92%, ¿qué proporción de todos los turistas norteamericanos repetirían sus vacaciones?

7.5 Control del ancho de un intervalo

Como se expresó anteriormente, es preferible un intervalo más estrecho debido a la precisión adicional que proporciona. Hay dos métodos principales para lograr un intervalo más preciso: (1) reducir el nivel de confianza y (2) incrementar el tamaño de la muestra.

A. Reducción del nivel de confianza

Ya se ha visto, en el intento del señor Gerber por estimar la declaración de impuestos promedio de sus clientes, que un incremento en la precisión puede obtenerse aceptando un nivel inferior de confianza. Su intervalo de confianza del 99% oscilaba entre US$573 y US$732, mientras que el intervalo del 95% era más estrecho de US$594 a US$712. Esto resultó del hecho que el intervalo de confianza del 99% requirió un valor de Z de 2.58 en lugar de 1.96 que utiliza el intervalo del 95%.

Sin embargo, había un costo involucrado en lograr esta precisión mayor: el nivel de confianza bajó a 95%, produciendo un 5% de probabilidad de error en lugar del 1% relacionado con el intervalo de confianza del 99%. ¿Existe alguna manera en la que se pueda reducir el intervalo sin sufrir una pérdida de confianza? Sí, incrementando el tamaño muestral.

B. Incremento del tamaño muestral

Incrementando el tamaño muestral se puede reducir el error estándar $\sigma/\sqrt{n}$. Si el tamaño muestral del señor Gerber se incrementa a 80, el intervalo del 99% presenta un grado de precisión similar al intervalo más estrecho del 95%, sin ninguna pérdida de confianza. Con $n = 80$, el intervalo del 99% es

$$\text{I.C. para estimar } \mu = \text{US\$}652.68 \pm 2.58\,\frac{\text{US\$}217.43}{\sqrt{80}}$$

$$\text{US\$}589.96 \leq \mu \leq \text{US\$}715.39$$

Esto está muy cercano al intervalo más preciso del 95% de US$592,41 a US$712,96, pero mantiene un nivel de confianza del 99%.

Infortunadamente, esta ventaja no se gana sin un precio. El tamaño más grande de la muestra significa más tiempo y más dinero que deben gastarse al recolectar y manejar los datos. De nuevo, debe tomarse una decisión. Se vuelve una decisión gerencial respecto a qué método tomar.

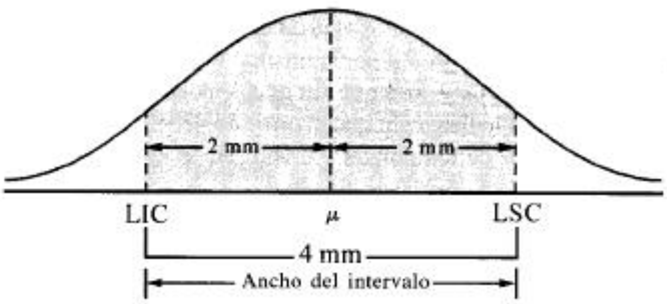
7.6 Determinación del tamaño apropiado de la muestra

El tamaño de la muestra juega un papel importante al determinar la probabilidad de error así como en la precisión de la estimación. Una vez que se ha seleccionado el nivel de confianza, dos factores importantes influyen en el tamaño muestral: (1) la varianza de la población σ^2 y (2) el tamaño del *error tolerable* que el investigador está dispuesto a aceptar. Mientras que el primer factor está más allá del control del investigador (no hay nada que se pueda hacer sobre la varianza de la población), sí es posible limitar el tamaño del error.

El tamaño del error que un investigador puede tolerar depende de qué tan crítico es el trabajo. Algunas tareas extremadamente delicadas requieren de resultados exactos: los procedimientos médicos vitales de los cuales dependen vidas humanas, o la producción de piezas de una máquina que deba cumplir medidas precisas, pueden tolerar sólo un pequeño error. En otros casos, los errores más grandes pueden tener consecuencias menos graves.

Se supone que en la fabricación de una pieza para los reproductores de discos compactos (CD), un error de 2 milímetros (mm) en el diámetro no causaría problema alguno; sin embargo, todo error superior a 2 mm resultará en un reproductor defectuoso. Si una pieza puede variar por encima y por debajo de algún diámetro deseado en 2 mm, se permite un intervalo de 4 mm. Todo intervalo dado es dos veces el error tolerable. Ver la figura 7.5 para observar una ilustración.

Figura 7.5
El error tolerable es la mitad del intervalo



En esta sección se considera la determinación del tamaño muestral apropiado bajo varias condiciones.

A. Tamaño de la muestra para estimar μ

Vale la pena recordar que la desviación normal Z puede expresarse como

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Esto puede reescribirse algebraicamente como

Tamaño muestral para intervalos de la media poblacional	$n = \dfrac{Z^2\sigma^2}{(\bar{X} - \mu)^2}$	[7.9]

en donde la diferencia entre la media muestral y la media poblacional ($\bar{X} - \mu$) es el error. En el ejemplo anterior de los reproductores de CD's, con un error tolerable de 2 mm, la fórmula (7.9) se escribiría como

$$n = \frac{Z^2\sigma^2}{(2)^2}$$

El valor de Z depende del nivel de confianza requerido. Esto deja por determinar sólo σ^2 para calcular el tamaño muestral apropiado. En el evento probable que σ^2 sea desconocido, puede estimarse mediante la desviación estándar muestral s, utilizando una **muestra piloto** de cualquier tamaño razonable ($n \geq 30$). La varianza calculada de esta muestra preliminar puede entonces utilizarse en la fórmula (7.9).

Por ejemplo, se asume que el fabricante de los reproductores de discos compactos desea construir un intervalo del 95% para el tamaño promedio de la pieza. Una muestra piloto ha revelado una desviación estándar de 6 mm. ¿Qué tan grande debería ser la muestra? Un intervalo del 95% da un valor de Z de 1.96. Por tanto,

$$n = \frac{(1.96)^2(6)^2}{(2)^2} = 34.5 \text{ o } 35$$

El fabricante debería seleccionar una muestra de 35 piezas. De esta muestra, un intervalo de 95% podría construirse para el tamaño promedio. El intervalo tendría un error no superior a 2 mm.

Ejemplo 7.4

El propietario de un centro de esquí en el sur de Winsconsin está considerando comprar una máquina para hacer nieve y ayudarle a la Madre Naturaleza a proporcionar una base apropiada para los entusiastas esquiadores. Si el promedio de nevadas parece insuficiente, piensa que la máquina debería pagarse muy pronto por sí misma. Planea estimar las pulgadas promedio de nieve que cae en el área, pero no tiene idea qué tan grande debería ser la muestra. Sólo sabe que desea un 99% de confianza en sus hallazgos y que el error no debe exceder de 1 pulgada. El propietario le promete tiquetes gratuitos de temporada. ¿Usted puede ayudarlo?

Solución

Usted comienza con una muestra piloto grande ($n \geq 30$) que produce una desviación estándar de 3.5 pulgadas. Por tanto,

$$\begin{aligned} n &= \frac{Z^2(s)^2}{(\text{error})^2} \\ &= \frac{(2.58)^2(3.5)^2}{(1)^2} \\ &= 81.5 \end{aligned}$$

u 82 nevadas durante los últimos años.

Interpretación

Ahora puede recolectar los datos sobre las últimas 82 nevadas que se utilizarán para estimar las nevadas promedio. Con esta información el propietario puede determinar si la Madre Naturaleza necesita ayuda. Lo más importante, usted puede pasar el resto del invierno esquiando gratuitamente.

B. Tamaño de la muestra para estimar π

En el capítulo 6 se encontró que

$$Z = \frac{p - \pi}{\sigma_p}$$

en donde

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}$$

Se puede reescribir esto para producir una expresión para el tamaño muestral

Tamaño muestral para intervalos para la proporción poblacional	$$n = \frac{Z^2(\pi)(1 - \pi)}{(p - \pi)^2}$$	[7.10]

en donde $(p - \pi)$ es la diferencia entre la proporción muestral y la proporción poblacional, y por tanto es el error.

La fórmula (7.10) requiere el valor de π. Sin embargo, π es el parámetro que se desea estimar y es desconocido. Este problema puede tratarse en una de las dos maneras. Se podría tomar una muestra piloto para obtener un valor preliminar para π, tal y como se hizo al determinar el tamaño muestral apropiado para la media. O se puede determinar que $\pi = 0.5$, para efectos de determinar el tamaño muestral. Frecuentemente se prefiere este método porque es muy "seguro" o conservador – garantizará el tamaño muestral más grande posible, dado cualquier nivel de confianza y error deseados–. Esta muestra más grande resulta del hecho que el numerador de la fórmula (7.10), el cual contiene $\pi(1 - \pi)$ es máximo (por tanto, n se maximizará) cuando $\pi = 1 - \pi = 0.5$. No existe valor distinto a 0.5 que pueda asignarse a π que haga más grande $\pi(1 - \pi)$. Si $\pi = 0.5$, entonces $\pi(1 - \pi) = 0.25$. Todo valor distinto a 0.5 resultaría en $\pi(1 - \pi) < 0.25$. Por tanto, n sería más pequeño.

Wally Simpleton está postulado para gobernador. Él desea estimar dentro de 1 punto porcentual la proporción de personas que votarán por él. También desea tener el 95% de confianza en sus hallazgos. ¿Qué tan grande debería ser el tamaño muestral?

$$\begin{aligned} n &= \frac{(1.96)^2(0.5)(0.5)}{(0.01)^2} \\ &= 9{,}604 \text{ votantes} \end{aligned}$$

Una muestra de 9,604 votantes permitirá a Wally estimar π con un error de un 1% y un nivel de confianza del 95%.

Ejemplo 7.5

El consejo de la ciudad está planeando una ley que prohíbe fumar en edificios públicos incluyendo restaurantes, tabernas, y teatros. Sólo estará exenta la vivienda privada. Sin embargo, antes que dicha ley se lleve ante el consejo, este organismo desea estimar la proporción de residentes quienes apoyan dicho plan. La carencia de toda habilidad estadística obliga al consejo a contratarlo como consultor. Su primer paso será determinar el tamaño muestral necesario. Se le dice que su error no debe exceder del 2% y usted debe estar 95% seguro de sus resultados.

Solución

Debido a que no se tomó previamente una encuesta piloto, usted debe determinar temporalmente π en 0.5 para efectos de resolver el tamaño muestral.

$$\begin{aligned} n &= \frac{Z^2\pi(1-\pi)}{(\text{error})^2} \\ &= \frac{(1.96)^2(0.5)(0.5)}{(.02)^2} \\ &= 2{,}401 \text{ ciudadanos} \end{aligned}$$

Interpretación

Con los datos suministrados por las 2,401 personas usted puede proceder con su estimación de la proporción de todos los residentes quienes están a favor de la ley. El consejo puede tomar su determinación respecto a la política que se aplicará en toda la ciudad sobre el hecho de fumar.

Ejercicios de la sección

26. Days Inn desea desarrollar un intervalo de confianza del 99% para estimar el número promedio de habitaciones ocupadas cada noche en sus localidades de toda la nación. ¿Cuántas noches deben incluirse en la muestra si se puede tolerar un error de 50 habitaciones y una muestra piloto revela que $s = 165$ habitaciones?

27. ¿Qué pasaría a su respuesta si $s = 265$? ¿Por qué?

28. ¿Qué tan grande se requiere que sea una muestra para que proporcione una estimación del 90% del número promedio de graduados de las universidades de la nación con un error de 2,000 estudiantes si una muestra piloto reporta que $s = 8{,}659$?

29. Un estudio que usted está realizando requiere un intervalo del 95% para la tasa de rendimiento promedio que su empresa gana sobre los proyectos para presupuestar capital. ¿Cuántos proyectos debe tener su muestra si su supervisor especifica un error máximo de sólo el 5% y $s = 2.3\%$?

30. Como empleado recién contratado en la división de mercadeo para un importante asunto sobre ventas minoristas, a usted se le ha asignado la tarea de estimar la proporción de consumidores que prefieren su producto al de la competencia. ¿Cuántos consumidores se deben tomar en la muestra si usted desea restringir el error al 10%, pero sin embargo desea proporcionar un nivel de confianza del 99%?

31. ¿Qué tan grande debe ser la muestra del problema anterior si el error se restringe al 5%? Explique la diferencia.

32. La división de créditos de un banco comercial grande desea estimar con un nivel de confianza del 99% la proporción de sus créditos que están en mora. Si el ancho del intervalo es del 7%, ¿cuántos créditos deben revisarse? ¿Cuál es el error tolerable?

7.7 Propiedades de un buen estimador

Debe hacerse una distinción entre un estimador y una estimación. Un **estimador** es la regla o procedimiento, generalmente expresado como una fórmula, que se utiliza para derivar la **estimación**. Por ejemplo,

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$$

es el estimador para la media poblacional. Si el valor del estimador $\overline{X}$ es digamos 10, entonces 10 es la estimación de la media poblacional.

> **Estimadores y estimaciones** Un estimador es el proceso mediante el cual se obtiene la estimación. Una estimación es el resultado numérico del estimador.

Para desempeñarse de manera confiable, los estimadores deben ser (1) insesgados, (2) eficientes, (3) consistentes, y (4) suficientes. Cada propiedad se discute a su tiempo en esta sección.

A. Estimador insesgado

Como se observó en el capítulo 6, es posible construir una distribución muestral seleccionado todas las muestras posibles de un tamaño dado de una población. Un estimador es insesgado si la media del estadístico calculado en todas estas muestras es igual al parámetro correspondiente.

Sea θ (la letra griega teta) el parámetro que se intenta estimar mediante $\hat{\theta}$ (que se lee "teta sombrero"). Entonces $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado si su media, o valor esperado, E ($\hat{\theta}$), es igual a θ. Es decir,

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

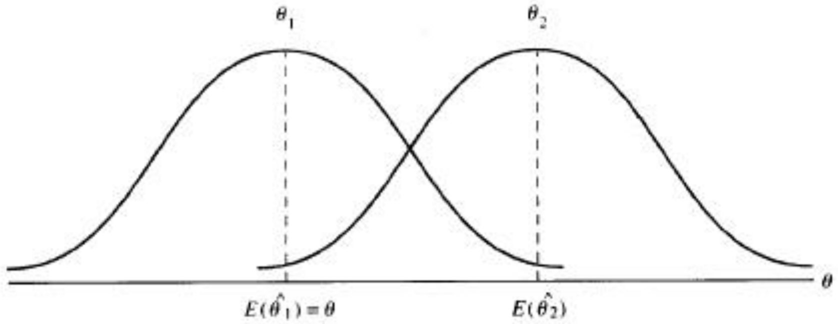
Para citar un ejemplo específico, $\overline{X}$ es un estimador insesgado de μ porque la media de la distribución muestral de las medias muestrales, $\overline{\overline{X}}$ es igual a μ. Por tanto,

$$E(\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = \mu$$

> **Estimador insesgado** Un estimador es insesgado si la media de su distribución muestral es igual al parámetro correspondiente.

La figura 7.6 ilustra cómo la media de una distribución muestral debe ser igual al parámetro correspondiente para garantizar un estimador insesgado.

Figura 7.6
Distribuciones para estimadores sesgados e insesgados



Aquí $\hat{\theta}_1$ es un estimador insesgado de θ debido a que su distribución está centrada en θ. Por tanto, E($\hat{\theta}_1$) = θ. Si se tomaran muchas muestras diferentes, produciendo muchos valores diferentes para $\hat{\theta}_1$, su media sería igual a θ. Y viceversa, si se toman muchas muestras y se calculara $\hat{\theta}_2$ cada vez, su media excedería θ. Por tanto, $\hat{\theta}_2$ es un estimador sesgado (hacia arriba) de θ. La medida de sesgo es la diferencia entre la media de $\hat{\theta}_2$ y θ. Vale la pena notar que

$$E(\hat{\theta}_1) - \theta = 0$$

mientras que

$$E(\hat{\theta}_2) - \theta \neq 0$$

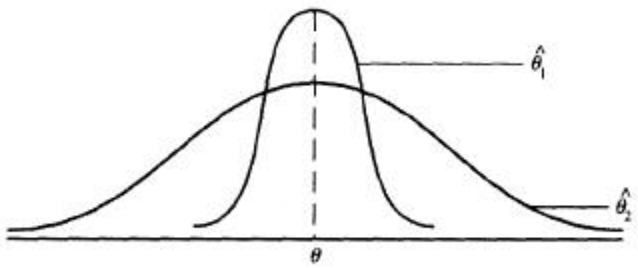
B. Estimador eficiente

La eficiencia de un estimador depende de su varianza. Sea $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ. Entonces $\hat{\theta}_1$ es un estimador más eficiente si, en muestreos repetidos con un tamaño muestral dado, su varianza es menor que el de $\hat{\theta}_2$. Es lógico que un estimador con una varianza más pequeña estimará de forma más próxima el parámetro. Considerando la figura 7.7, la cual muestra las distribuciones muestrales con un tamaño muestral dado de dos estadísticos $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$. Tanto $\hat{\theta}_1$ como $\hat{\theta}_2$ son estimadores insesgados de θ debido a que sus distribuciones muestrales están centradas en θ, y

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$$

Sin embargo, la varianza de la distribución muestral de $\hat{\theta}_1$ es menor que la de $\hat{\theta}_2$. Los valores posibles para $\hat{\theta}_2$ están más dispersos. Cualquier estimado de θ utilizando $\hat{\theta}_2$ es probable que produzca un error de muestreo más grande que un estimado de θ que utiliza $\hat{\theta}_1$.

Figura 7.7
La varianza de los estimadores



> **Un estimador eficiente** Dado todo estimador insesgado, el estimador más eficiente es aquel que tenga la varianza más pequeña.

C. Estimador consistente

Un estimador es consistente cuando, a medida que n se incrementa, el estimador se aproxima al valor del parámetro.

> **Estimador consistente** Un estimador es consistente si, a medida que n aumenta, el valor del estadístico se aproxima al parámetro.

Para que un estimado sea consistente, debe ser insesgado y su varianza debe aproximarse a cero a medida que n aumenta. La varianza de la distribución muestral de las medias muestrales es $\sigma^2_{\bar{x}}$, es σ^2/n. A medida que n aumenta, $\sigma^2_{\bar{x}}$ se aproximará a cero. Por tanto, se puede decir que $\bar{X}$ es un estimador consistente de μ.

Si un estadístico no es un estimador consistente, tomar una muestra más grande para mejorar su estimado será infructuosa.

D. Estimador suficiente

Un estimador es suficiente si utiliza toda la información relevante sobre el parámetro contenida en la muestra. Si un estimador es suficiente, nada puede ganarse utilizando cualquier otro estimador.

> **Estimador suficiente** Un estimador es suficiente si ningún otro estimador puede proporcionar más información sobre el parámetro.

Esta discusión de las propiedades de un estimador, por ningún motivo es una cuenta completa. Sin embargo, proporciona una base suficiente para una evaluación sobre la estimación de parámetros mediante la construcción de intervalos de confianza.

Problemas resueltos

Artesian Spring Water proporciona agua embotellada, en contenedores de 15 galones, a las casas de un sector de tres condados. El gerente desea estimar el número promedio de contenedores que una casa típica utiliza cada mes. Se toma una muestra de 75 casas y se registra el número de contenedores. La media es $\bar{X} = 3.2$, con $s = 0.78$.

a. ¿Qué revelaría un intervalo de confianza del 92%?

Solución

El valor de Z para un intervalo de confianza del 92% se halla dividiendo primero 0.92 por 2: así 0.92/2 = 0.46. El área de 0.46 requiere un valor de Z de 1.75. entonces,

$$\begin{aligned}\text{I.C. para estimar } \mu &= \bar{X} \pm (Z)s_{\bar{x}} \\ &= 3.2 \pm (1.75)\frac{0.78}{\sqrt{75}} \\ 3.04 \leq \mu &\leq 3.36\end{aligned}$$

El gerente puede estar 92% seguro de que el número de contenedores promedio por mes está entre 3.04 y 3.36.

b. Sin embargo, el gerente siente que este intervalo es demasiado amplio. ¿Cuántas casas deben tomar como muestra para estar 99% seguro de que el intervalo no está errado en más de 0.10 contenedores?

Solución

$$n = \frac{Z^2 s^2}{(\text{error})^2} = \frac{(2.58)^2(0.78)^2}{(0.1)^2} = 405$$

Una muestra de 405 daría un intervalo de confianza del 99%, con un error no superior a 0.10 contenedores.

c. Se selecciona una muestra más pequeña de 10 casas para estimar el número promedio de miembros de la familia por casa. Los resultados son 1, 3, 4, 7, 2, 2, 3, 5, 6 y 6 personas en cada casa. ¿Cuáles son los resultados de un intervalo de 99% para el número promedio de miembros de la familia?

Solución

La desviación estándar de la muestra es $s = 2.02$ con una media de 3.9. Dada la muestra pequeña, debe utilizarse un valor t de $t_{0.01,9} = 3.250$. Por tanto,

$$\text{I.C. para estimar } \mu = \bar{X} \pm ts_{\bar{x}}$$
$$= 3.9 \pm (3.250)\frac{2.02}{\sqrt{10}}$$
$$1.82 \leq \mu \leq 5.98$$

d. De las 75 casas de la muestra, 22 tienen ablandadores de agua en casa. ¿Cuál es el estimado del intervalo del 95% de la proporción de todas las casas en el sector de tres condados que tiene ablandadores?

Solución

Debido a que la proporción muestral es $p = 22/75 = 0.29$, el error estándar es

$$s_p \doteq \sqrt{\frac{(p)(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.29)(0.71)}{75}} = 0.052$$

Entonces,

$$\text{I.C. para estimar } \pi = p \pm Zs_p$$
$$= 0.29 \pm (1.96)(0.052)$$
$$0.188 \leq \pi \leq 0.392$$

e. Si un intervalo oscila entre el 18.8% y el 39.2% de todas las casas que tienen ablandadores y carece de precisión, ¿qué tan grande debe tomarse una muestra para producir un intervalo de sólo el 10%?

Solución

Si el intervalo de confianza ha de ser del 10%, el error puede ser sólo del 5%. Entonces,

$$n = \frac{Z^2(0.5)(0.5)}{(\text{error})^2} = \frac{(1.96)^2(0.5)(0.5)}{(0.05)^2} = 385 \text{ casas}$$

Lista de fórmulas

[7.1]	$\text{I.C. para estimar } \mu = \bar{X} \pm Z\sigma_{\bar{x}}$	Intervalo de confianza para estimar μ cuando σ es conocida
[7.2]	$\text{I.C. para estimar } \mu = \bar{X} \pm Zs_{\bar{x}}$	Intervalo de confianza para estimar μ cuando σ es desconocida
[7.3]	$\sigma^2 = \frac{n-1}{n-3}$	Varianza para la distribución t
[7.5]	$\text{I.C. para estimar } \mu = \bar{X} \pm ts_{\bar{x}}$	Intervalo de confianza para muestras pequeñas
[7.7]	$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	Estimado del error estándar de la distribución de las proporciones muestrales
[7.8]	$\text{I.C. para estimar } \pi = p \pm Zs_p$	Intervalo de confianza para la proporción poblacional

[7.9] $$n = \frac{Z^2\sigma^2}{(\bar{X} - \mu)^2}$$ Tamaño muestral para estimar μ

[7.10] $$n = \frac{Z^2(\pi)(1 - \pi)}{(p - \pi)^2}$$ Tamaño muestral para estimar π

Ejercicios del capítulo

33. Se construye un intervalo del 95% de confianza, que da un límite inferior de confianza de 62 y un límite superior de confianza de 69. ¿Usted puede concluir de esto que existe un 95% de probabilidad que el parámetro esté entre 62 y 69? Explique.

34. En una encuesta de 500 gerentes, Posner Products encontró que 200 gerentes carecían de suficiente capacitación estadística.

a. ¿Cuál es el estimado puntual de la proporción de todos los gerentes de Posner que requieren trabajo adicional en análisis estadístico?

b. ¿Cuál es el estimado del error estándar de la proporción?

c. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90% para la proporción poblacional? Interprete su respuesta.

35. José tiene un negocio próspero en Acapulco que vende restos incas de plástico a los turistas norteamericanos. Él selecciona $n = 60$ días para estimar su utilidad diaria. Sin embargo, José no sabe si la población de utilidades diarias está distribuida normalmente, y no está seguro sobre cómo proceder. ¿Que debe hacer?

36. Como experto en control de calidad usted desea estimar el grosor promedio de los lentes ópticos producidos por su empresa. Una muestra de 120 lentes revela una media de 0.52 milímetros (mm). La desviación estándar poblacional es de 0.17 mm. Usted considera que puede arriesgarse a una probabilidad de error de sólo el 1%. Construya el intervalo de confianza apropiado.

37. ¿Cómo cambiaría el problema anterior si σ fuera desconocida y la desviación estándar de la muestra fuera de 0.17 mm? Calcule el intervalo.

38. Georgia Pacific (GP), una empresa papelera de Estados Unidos, decide sembrar un bosque maderero si puede obtener un promedio de por lo menos 700 pies cuadrados de tabla (b.f). Una muestra de 1,000 árboles da una media de 695 b.f, con una desviación estándar de 22.1 b.f.

a. Calcule el intervalo de confianza del 90%.

b. Interprete su respuesta.

c. ¿Debería GP sembrar el bosque?

39. En una encuesta a 6,000 personas realizada por U.S. *News & World Report* se encontró que, en su tiempo de vida, el norteamericano promedio gasta seis meses sentado en los semáforos. Tomando esto como la media muestral, y asumiendo que la desviación estándar es de 2.2 meses, ¿cuál es el intervalo de confianza del 90% para la media poblacional? Interprete su respuesta.

40. *The Journal Retail Management* reportó que una muestra de 600 compradores pasaban un promedio de 1.79 horas en un centro comercial de visita. La desviación estándar era de 0.83 hora. ¿Cuál es la estimación por intervalo del número promedio de horas que todos los compradores pasan en el centro comercial? Sea $\alpha = 0.10$.

41. Su producto requiere que un cierto componente utilizado en su fabricación promedie 15.2 gramos. Si usted compra 100 componentes y encuentra que $\bar{X} = 14.8$ gramos, con $s = 3.2$ gramos, ¿qué le diría un intervalo de confianza sobre lo aconsejable de comprarle más a este proveedor? Su producto es muy delicado y usted siente que puede tolerar sólo el 1% de probabilidad de error.

42. Si dadas las condiciones del problema anterior, la muestra hubiera dado una media de 14.1 gramos, ¿qué concluiría?

43. Wally desea comprarle a su esposa para su cumpleaños un nuevo tanque séptico. Siendo un comprador cuidadoso, él examina 40 modelos diferentes y encuentra un precio promedio de US$712, con una desviación estándar de US$215. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 95% para estimar el precio promedio de todos los tanques sépticos?

44. Un fabricante de esquís de nieve desea estimar el número promedio de viajes para esquiar que realizan los esquiadores ávidos. Una muestra de 1,100 esquiadores da $\overline{X} = 15.3$ viajes por temporada, con $s = 5.1$ viajes. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 99% para estimar la media poblacional?

45 Considere los datos del ejercicio anterior:

a. Sin resolver el problema, explique qué pasaría al intervalo si el nivel de confianza se redujera al 90%.

b. Solucione el problema con $\alpha = 0.10$ y demuestre cómo la respuesta sustenta su respuesta a la parte *a*.

46. Un investigador descubrió que una muestra de 100, con $\overline{X} = 50.3$ y $s = 10.1$, generó un intervalo de confianza de 48,3204 a 52.2796. ¿Qué nivel de confianza puede atribuirse a este intervalo?

47. Los pesos de 25 paquetes enviados a través de United Parcel Service (UPS) tuvieron una media de 3.7 libras y una desviación estándar de 1.2 libras. Halle el intervalo de confianza del 95% para estimar el peso promedio de todos los paquetes. Los pesos de los paquetes están distribuidos normalmente.

48. Se registró una muestra de 12 donaciones por parte de comités de acción política (PAC's) para los fondos de las campañas del congreso, en miles de dólares, de 12.1, 8.3, 15.7, 9.35, 14.3, 12.9, 13.2, 9.73, 16.9, 15.5, 14.3 y 12.8. Calcule el intervalo de confianza del 90% para estimar la donación promedio realizada por PAC's. Se asume que las donaciones son normales.

49. Las ganancias por acción para 10 acciones industriales cotizadas en el Dow Jones fueron US$1.90, US$2.15, US$2.01, US$0.89, US$1.53, US$1.89, US$2.12, US$2.05, US$1.75 y US$2.22. Calcule un intervalo de confianza del 99% de los EPS de todas las acciones industriales cotizadas en el Indice Dow Jones. ¿Qué suposición debe hacer usted?

50. El Dr. Bottoms, el proctólogo local, descubrió que la edad promedio de 75 de sus pacientes era de 47.3 con una desviación estándar de 10.9 años. Calcule el intervalo de confianza del 99% para la edad promedio de todos sus pacientes bajo la suposición de que las edades no están distribuidas normalmente.

51. Durante el último Superbowl Sunday (Domingo de Fútbol) Sammy Salami y sus compañeros ordenaron 27 pizzas de Pizzas On Wheels. El tiempo promedio de entrega era de 23.7 minutos, con una desviación estándar de 10.7 minutos. Al considerar que ésta era una demora muy grande en su propósito culinario, Sammy y sus amigos decidieron comprar la pizza número 28 en otra parte, si el tiempo de entrega de POW (Pizzas On Wheels) era superior a 30 minutos. Sea α 1%. ¿Ordenarán en otra parte?

52. Una gran empresa de contabilidad contrató un psicólogo industrial para medir la satisfacción laboral de sus socios más antiguos. A 17 socios se les practicó una prueba para medir la satisfacción; los puntajes de las pruebas son normales y la varianza para todos sus socios es de 120. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90% para el puntaje promedio?

53. Para estimar cuántos de los 350,000 residentes de Peoria desean un nuevo centro cívico, el alcalde descubre que 1,570 de los 2,100 residentes a quienes se tomó como muestra expresaron su apoyo. Ayude al alcalde a construir e interpretar un intervalo de confianza del 90%.

54. De 209 clientes, 183 expresaron su satisfacción con los servicios bancarios ofrecidos por First of America en Peoria, Illinois. ¿Cómo se compara esto con los resultados de un estudio anterior por parte de River Valley Savings, el cual estimó al 99% del nivel de confianza que entre el 74.1 y el 83.7% de sus clientes estaban satisfechos?

55. Una empresa textil descubrió que soporta un factor de desperdicio total del 19%. Un nuevo proceso se implementó y una muestra de 1.376 unidades reveló un factor promedio de desperdicio de 11.1%, con una desviación estándar del 1.12%. ¿Qué conclusión puede sacarse con un intervalo de confianza del 95% acerca del beneficio del nuevo proceso?

56. A los golfistas profesionales se les pidió calificar un nuevo palo de grafito en una escala de 0 a 10. Veinticinco pros generaron un rango promedio de 7,3, con $s = 1.01$. Construya e interprete el intervalo de confianza del 90%.

57. El Premio Nacional de Calidad Baldrige, llamado así en honor a Malcolm Baldrige, quien sirvió como secretario de comercio a finales de los años 80's, es un reconocimiento ampliamente codiciado del compromiso de una corporación con un sistema de gerencia de calidad total (TQM). Se especifican siete criterios mediante los cuales se juzgan las empresas. Uno de tales criterios, el liderazgo, permite a las organizaciones sumar hasta 100 puntos para lograr este honor. Chrysler Corporation tomó muestras en 19 plantas y descubrió un promedio de 73.2 puntos, con $s = 10.1$. Construya e interprete el intervalo de confianza del 99% para todas las plantas de Chrysler.

58. Pizza Pub está considerando incrementar el precio de su pizza grande de encurtidos si el precio promedio de su competencia excede el precio de Pizza Pub de US$12.95. Otras 37 pizzerías reportan un precio promedio de US$12.50, con una desviación estándar de US$1.01. Pizza Pub desea estar un 90% segura de sus hallazgos.

59. En una encuesta de 673 tiendas minoristas, 521 reportaron un problema de robos por parte de los empleados. Puede usted concluir con un 99% de confianza, que estos datos sugieren que el 78% de todas las tiendas tiene una dificultad similar, como presentó un informe recientemente CNN?

60. Work and Roll, un restaurante de comida china para llevar, deseaba determinar qué porcentaje de sus clientes seleccionan la sopa de nido de aves como parte de su cena placentera.

a. En una muestra de 320 clientes, 220 se llevaron a casa esta delicia. Calcule e interprete un intervalo del 99%.

b. Utilizando los datos anteriores, construya el intervalo del 90%.

c. ¿Por qué obtuvo un intervalo más pequeño? ¿Sería siempre deseable reducir el ancho de intervalo de esta manera?

61. The Jesse James First National Bank lo contrató como consultor estadístico para analizar las operaciones de sus cajeros automáticos. Una muestra de 15 mostró las transacciones promedio de US$4,810, con una desviación estándar de US$1,202 por día. Su supervisor insiste en que usted debe tener un 99% de confianza en su estimado del volumen diario promedio. ¿Qué puede decirle?

62. El propietario de un negocio pequeño desea estimar el tiempo promedio requerido para finalizar cierto trabajo. Él debe asegurar que tiene un 90% de confianza en que el error sea menor que 0.5 minutos. La desviación estándar es de 3.2 minutos. ¿Cuántas observaciones de tiempos de finalización debe hacer?

63. El decano de una universidad privada desea estimar el número de estudiantes registrados que vienen de otro estado. Debe estar un 95% seguro de que el error es menos del 3%. ¿Qué tan grande debe tomar la muestra? Si la muestra revela una proporción del 31% de estudiantes de otro estado, y hay 12,414 estudiantes, ¿cuántos estudiantes estima usted que provienen de otros estados?

64. Al director de una sucursal de banco se le pide estimar el tiempo promedio que un cliente gasta en las instalaciones del auto-banco. Debe estar un 99% seguro de que el estimado no tenga un error superior a 15 segundos. ¿Cuántas observaciones debe hacer si la desviación estándar conocida es de 2.7 minutos?

65. En un esfuerzo por reducir el comercio de iniciado, la Comisión de Bolsas y Valores (*Securities and Exchange Commission*- SEC) solicitó información respecto a la proporción de bancos de empresas cuyos funcionarios poseen más del 50% del capital en circulación de sus bancos. De las 200 compañías seleccionadas aleatoriamente, 79 reportaron que sus funcionarios tenían una mayoría de sus acciones. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90% para la proporción de todos los bancos de empresas cuyos funcionarios tienen por lo menos un 50% de las acciones?

66. Un investigador de la Administración Federal de Aviación (*Federal Aviation Administration*, FAA) fue mencionado en una emisión de febrero de *The Washington Post*, en la que dijo que de los 112 accidentes de aerolíneas, "73 involucraban algún tipo de problema estructural con la aeronave". Si tales cifras son representativas, ¿cuál es el intervalo de confianza para la proporción de accidentes que involucran tal defecto estructural? Sea $\alpha = 0.01$.

67. United Airlines hizo encuestas a 93 pasajeros en un vuelo de Cincinnati a Atlanta. Sesenta y cuatro dijeron que les hubiera gustado ir en un vuelo posterior si hubiese habido espacio disponible. United había decidido que si más del 50% de los pasajeros expresaba su interés en salidas en horas siguientes durante el día, consideraría la posibilidad de poner tales vuelos a disposición. Dados los resultados de la encuesta, ¿un intervalo de confianza del 90% sugiere que deben hacerlo?

68. *The Wall Street Journal* informó los esfuerzos realizados por Nestlé, la compañía de alimentos más grande del mundo, para introducir un nuevo producto. La gerencia decidió utilizar el sector de Chicago como mercado de prueba. Si más del 30% de las personas expresaban un deseo por el producto, ellos considerarían el comercializarlo en un sector más amplio. De las 820 personas a quienes se les practicó la prueba, 215 expresaron una reacción positiva. ¿Un intervalo de confianza del 90% para la proporción de todos los clientes quienes prefieren el producto hace que la gerencia continúe con sus planes de comercialización?

69. *Business Week* presentó uña historia sobre los esfuerzos realizados por los 12 países miembros del Mercado Común para abreviar la creciente ola de fusiones que se pensaba era "indeseable económicamente para los intereses internacionales". Se va a seleccionar una muestra para estimar el tamaño promedio de las empresas (tal y como se mide en valor neto corporativo) involucradas en las fusiones. Si el intervalo debe ser de US$5.2 millones y tener un nivel de confianza del 95%, ¿qué tan grande debería ser la muestra si la desviación estándar del valor neto corporativo se considera que es US$21.7 millones?

70. El director de su división le pide, como analista de mercadeo recientemente contratado, que estime las ventas semanales promedio. Le advierte que debe mantener el error dentro de US$100 y mantener un nivel de confianza del 90%. ¿Cuántas semanas de datos debe recolectar si la desviación estándar es US$750?

71. Una encuesta sobre la violencia en los colegios está diseñada para estimar el porcentaje de estudiantes de sexo masculino que fueron amenazados con violencia en los campos del colegio durante el año pasado. El error tolerable se fija en 1%, y el nivel de confianza es del 99%. ¿Cuál es el tamaño apropiado de la muestra?

72. La Asociación de Finanzas Estudiantiles en Faber College está planeando una "Feria Primaveral" en la cual intentan vender camisetas impresas con su logo. El tesorero desea un estimado de la proporción de estudiantes que comprarán una camiseta. El estimado debe proporcionar un nivel de confianza del 90% y el error no debe exceder del 3%. ¿Qué tan grande debe tomarse la muestra?

73. Si un fabricante desea desarrollar un intervalo del 99% para la proporción de defectos con un error de menos del 1%, ¿qué tan grande se necesita la muestra?

Ejercicios por computador

Telmark Technologies planteó recientemente nuevas metas para que la compañía incrementara el tamaño promedio de ventas por cliente y mejorara el servicio ofrecido a los mismos. En el último trimestre las ventas presentaron un promedio de US$373.10 por pedido del cliente y tomó un promedio de 4.5 días para hacer el envío a los clientes. Además, los ejecutivos de alto nivel en Telmark desean reducir el peso promedio de los envíos por debajo de la media de 55.8 libras para reducir los costos de envío. Hal Ketchum, vicepresidente para Relaciones del Producto, ha sido encargado de la responsabilidad de lograr tales objetivos. Él dirige su *staff* de estadísticos a recolectar todos los datos necesarios y a preparar un informe detallando las condiciones actuales.

Ingrese al archivo TELMARK de su disco de datos. Contiene los datos de los pedidos de ventas de 75 clientes. El tamaño de las ventas en cientos de dólares está registrado como Size (tamaño). El número de días que tomó cada pedido en ser enviado al cliente se registra como Days (días) y la variable Weight (peso) proporciona datos de los pesos de los envíos en libras. Finalmente, la variable SAT indica si el cliente quedó satisfecho con el servicio de Telmark. Está codificado como "1" si el cliente quedó satisfecho y "0" si no quedó satisfecho.

Utilizando los datos del archivo TELMARK, proporcione los estimados de intervalo para Size, Days y Weight de los envíos. ¿A qué conclusión llega? Calcule el estimado del intervalo de la proporción de clientes satisfechos. Presente su informe estadístico terminado tal y como se describe en el apéndice. Incluya todos los hallazgos relevantes, las conclusiones y las recomendaciones.

PUESTA EN ESCENA

Durante muchos años el FBI (Federal Bureau of Investigation) ha servido como modelo para las agencias que hacen cumplir la ley. Los esfuerzos revolucionarios por parte del FBI por integrar de manera más completa el uso del análisis estadístico en los esfuerzos por combatir el crimen se mencionaron en la sección Escenario a comienzos de este capítulo.

El método para combatir el crimen basado en la estadística incluye datos sobre una gran variedad de crímenes, así como las características y los hábitos personales de los infractores. Aunque la vocera de Larry King Live no ofreció detalles específicos, estableció que se guardaban los datos sobre el número de crímenes que cada transgresor de la ley comete, el número de días que transcurren entre crímenes, y el número de personas que son asesinadas por el organismo ejecutor de la ley en el intento de arresto.

Se asume que se recolectan datos para una muestra de 1,000 personas que han cometido un delito grave. Los datos revelan que, en promedio, los criminales comenten 12.4 actos ilegales con una desviación estándar de 4.7 antes de que sean arrestados o asesinados. Además, los datos reportan que un promedio de 19.6 días transcurren entre actos criminales, con una desviación estándar de 11.5 días. Además, 212 de los 1,000 criminales que aparecen en la base perdieron sus vidas intentando eludir a la policía.

Se asume además que se toma una muestra pequeña de un tipo específico de criminales. Quince observaciones de robo a mano armada reportan las siguientes cantidades, en miles de dólares, que se tomaron en los robos: 45.6, 23.8, 45.3, 27.9, 54.3, 27.5, 63.4, 12.6, 75.9, 64.6, 54.7, 17.5, 21.4, 56.4, y 34.9.

Con base en estos datos y las herramientas aprendidas en este capítulo, proporcione un perfil de la actividad criminal a lo largo de la nación, tal como la que usted considera que un estadístico del FBI puede preparar. Seleccione y justifique sus propios niveles de confianza y calcule e interprete todos los intervalos de confianza. Haga comentarios sobre los tamaños muestrales. ¿Son suficientes para lograr su objetivo? Especifique claramente qué tamaños muestrales son necesarios para lograr el nivel de confianza y el error tolerable que usted requiere. Presente el informe final en forma de un reporte de negocios tal y como se describe en el apéndice I.

Del escenario a la vida real

El sitio web del FBI (*www.fbi.gov*) proporciona estadísticas sobre crímenes seleccionados, similares a las utilizadas en el análisis de la sección *Puesta en Escena*. De la página de presentación (home page) del FBI, haga clic en "Publications". Bajo el encabezado de Estadísticas de Crímenes Uniformes, haga clic en "Final 19xx Crime Statistics" (datos completos de los años más recientes). Haga una lista de las categorías de estadísticas sobre crímenes que estén disponibles en este sitio.

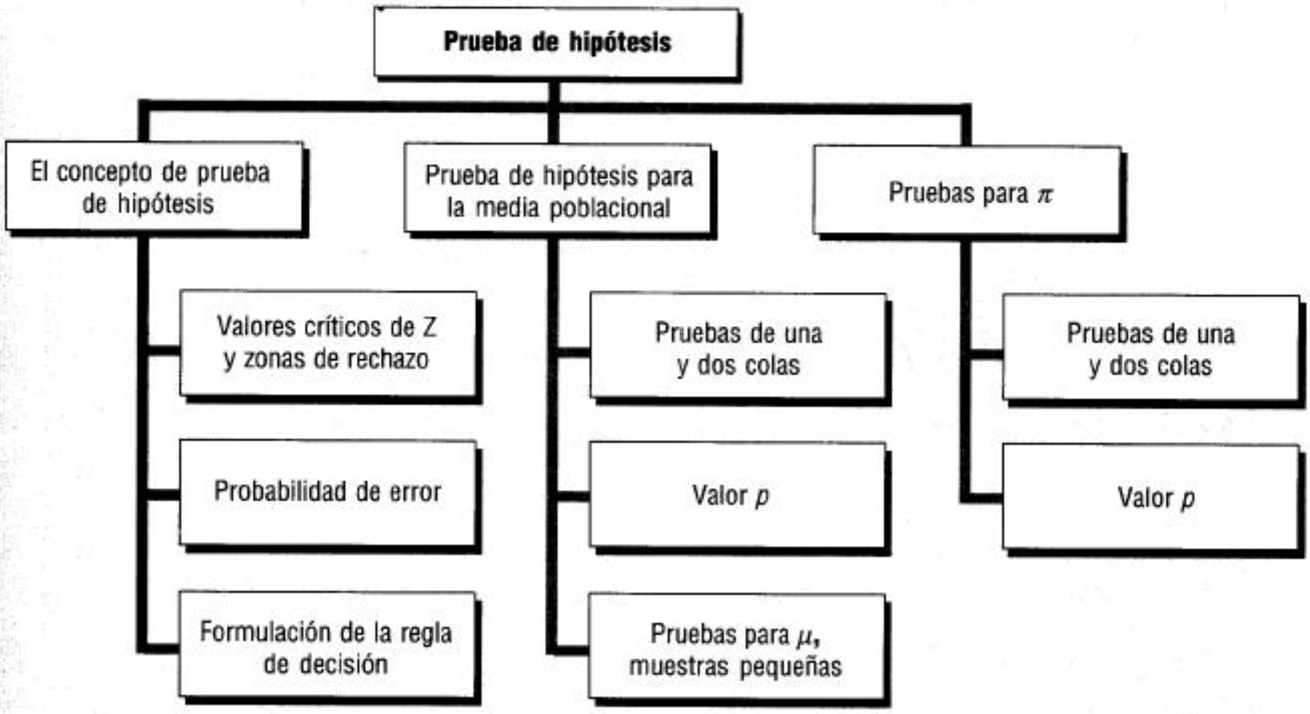
Mire la información sobre robo con allanamiento de morada y sobre asaltos agravados. Note tanto el conteo de crímenes como la tasa por cada 100,000 para estas dos categorías. ¿Qué información se da sobre el incremento o reducción en el tipo de crimen sobre los datos del año anterior? ¿Estos datos son una muestra o un censo? ¿Los datos disponibles proporcionan suficientes detalles para evaluar si el cambio proveniente del año anterior es estadísticamente significativo? Si no, ¿qué otra información adicional necesita para construir dicha prueba?

8

Prueba de hipótesis

Plan del capítulo

Una hipótesis es una suposición o inferencia sobre el valor desconocido de un parámetro. Este capítulo analiza cómo se pueden probar las hipótesis y, por tanto, sacar algunas conclusiones sobre la población.



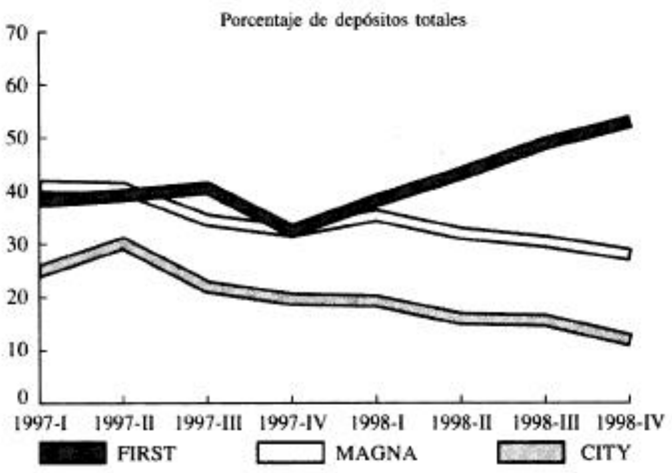
ESCENARIO

Durante los últimos años, el sistema bancario norteamericano ha pasado por una liberalización considerable. Gran parte de dicha liberalización ha venido sucediendo en forma de relajación de las leyes que rigen el desempeño y las operaciones de los bancos comerciales y de otras instituciones financieras. First Bank of America acaba de fusionarse con Great Lakes National, un competidor más pequeño del centro de los Estados Unidos, y la gerencia está planeando varios cambios en las políticas que podrían afectar dramáticamente las operaciones bancarias (*Chicago Tribune*, junio 5 de 1997).

Lawrence Hopkins, gerente de la división de relaciones con los clientes, ha sido encargado de la responsabilidad de proporcionar estimaciones de muchos de los indicadores importantes de las actitudes de los clientes, respecto a estos cambios anticipados. Produce especial preocupación la intención que tiene el banco de hacer que las tarifas y otros costos se basen en el saldo promedio diario de la cuenta corriente del cliente. Debido a la fusión, el banco considera que su posición en el mercado es lo suficientemente fuerte como para imponer un incremento en las tarifas sin provocar reacciones violentas de sus clientes. Los registros demuestran que los depósitos promedio han ido incrementando y que First Bank ha ganado una participación mayor en el mercado durante los últimos dos años, respecto a sus dos competidores más grandes, Magna Bank y City National. Como lo indica la gráfica, la participación de First Bank en los depósitos bancarios totales en el cuarto trimestre de 1998 (1998-IV) se estima en un 55%.

Este capítulo analiza las herramientas que pueden utilizarse para preparar un informe que pueda ser benéfico en muchas decisiones de las que First Bank debe tomar, en su esfuerzo por continuar con el éxito y la prosperidad que ha gozado durante los últimos años.

Participación en el mercado



8.1 Introducción

El propósito del análisis estadístico es reducir el nivel de incertidumbre en el proceso de toma de decisiones. Los gerentes pueden tomar mejores decisiones sólo si tienen suficiente información a su disposición. La prueba de hipótesis es una herramienta analítica muy efectiva para obtener esta valiosa información, bajo una gran variedad de circunstancias. Existen muchos ejemplos comunes en los negocios:

- Un embotellador de bebidas suaves debe determinar si el peso promedio del contenido de sus botellas es 16 onzas ($\mu = 16$ onzas).

- Un productor de software de computador desea certificar que la proporción de sus productos que son defectuosos es menor del 3% ($\pi < 0.03$).

- Un fabricante de equipos deportivos desea saber si existe evidencia de que un proceso de producción ha reducido los costos promedios de producción por debajo de su nivel actual de US$5 por unidad ($\mu < 5$).

Las ilustraciones de esta naturaleza son virtualmente ilimitadas en un escenario de negocios. Si se pueden obtener respuestas a estas preguntas y a muchas otras con algún grado de garantía, la toma de decisiones se vuelve más segura y es menos probable que conduzca a un error costoso.

8.2 El concepto de prueba de hipótesis

Para realizar una prueba de hipótesis, se hacen algunas inferencias o supuestos con sentido acerca de la población. El embotellador de bebidas suaves citado anteriormente puede asumir, o plantear la hipótesis que el contenido promedio es de 16 onzas ($\mu = 16$). Esta **hipótesis nula** (H_0:) se prueba contra la **hipótesis alternativa** (H_A :) que establece lo contrario. En este caso, el contenido promedio *no* es de 16 onzas ($\mu \neq 16$). Por tanto, se tendría que

$$H_0: \mu = 16 \qquad H_A: \mu \neq 16$$

El término *nula* implica nada o nulo. El término surge de sus primeras aplicaciones por parte de los investigadores agrícolas quienes probaron la efectividad de un nuevo fertilizante para determinar su impacto en la producción de la cosecha. Asumieron que el fertilizante no hacía ninguna diferencia en el rendimiento hasta que éste produjo algún efecto. Por tanto, la hipótesis nula, tradicionalmente contiene alguna referencia de un signo con igual como "=", "≥", "≤". Se analiza esta idea de forma más completa en una discusión posterior de las pruebas de hipótesis de una cola.

Con base en los datos muestrales, esta hipótesis nula es rechazada o no rechazada. Nunca se puede "aceptar" la hipótesis nula como verdadera. El no rechazo de la hipótesis nula solamente significa que la evidencia muestral no es lo suficientemente fuerte como para llevar a su rechazo. Incluso si $\overline{X} = 16$, no prueba que $\mu = 16$. Podría ser que μ sea 15.8 (o cualquier otro número), y debido al error de muestreo la media muestral acaba de igualar al valor de 16 que se plantea como hipótesis. Una analogía es que probar una hipótesis es como poner una persona en juicio. El acusado se halla o culpable o no culpable. Un veredicto de "inocente" nunca se considera. Un veredicto no culpable simplemente significa que la evidencia no es lo suficientemente fuerte como para encontrar culpable al acusado. No significa que él o ella sea inocente.

Cuando se realiza una prueba de hipótesis, la hipótesis nula se supone que es "inocente" (verdadero) hasta que una preponderancia de la evidencia indique que es "culpable" (falso). Al igual que en un escenario legal, la evidencia de culpable debe establecerse más allá de toda duda razonable. Antes que se rechace la hipótesis nula, la media muestral debe diferir significativamente de la media poblacional planteada como hipótesis. Es decir, que la evidencia debe ser muy convincente y concluyente. Una conclusión con base en un rechazo de la hipótesis nula es más significativa que una que termine en una decisión de no rechazo.

Se asume que se toma una muestra de *n* botellas y se halla una media de $\overline{X} = 16.15$ onzas. ¿Se puede concluir que la media poblacional no es 16? Después de todo, ¡16.15 no es 16! Probablemente no. Esta pequeña diferencia podría ser *estadísticamente insignificante* puesto que podría explicarse fácilmente como un simple error de muestreo. Es decir, que debido al error de muestreo es posible tener una población con una media de 16 y salir con una media muestral de $\overline{X} = 16.15$. Debido al azar, algunas botellas de la muestra pueden estar algo más llenas, produciendo una media muestral que sobrestime levemente la media poblacional. La evidencia muestral que $\overline{X} =$ 16.15 no es lo suficientemente fuerte como para desencadenar un rechazo de la hipótesis nula de que $\mu = 16$.

Diferencia estadísticamente insignificante En la diferencia entre el valor de la media poblacional bajo la hipótesis y el valor de la media muestral que es lo suficientemente pequeña como para atribuirla a un error de muestreo.

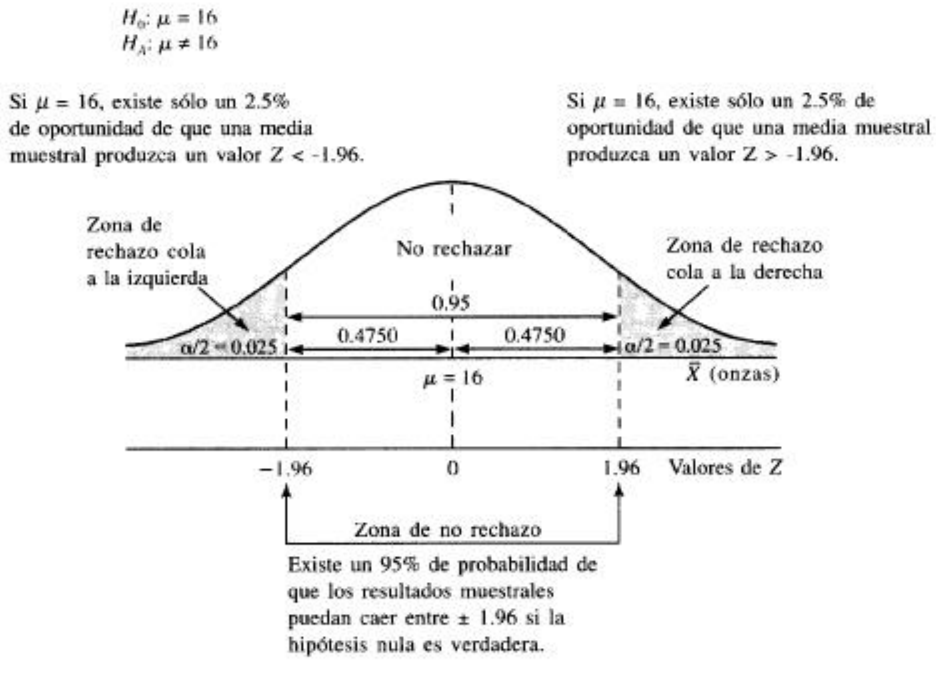
Si la diferencia entre el valor de la media de 16 bajo la hipótesis y el hallado en la muestra de 16.15 es insuficiente para rechazar la hipõtesis nula, el asunto entonces se vuelve simplemente qué tan grande debe ser la diferencia para que sea estadísticamente significativa y conduzca un rechazo de la hipótesis nula. Vale la pena recordar de nuestra discusión sobre distribuciones de muestreo lo cual indica que se puede transformar toda unidad de medida, como las onzas del embotellador, hasta los valores correspondientes de Z con la fórmula Z:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si σ es desconocida, se utiliza la desviación estándar muestral s.

La distribución normal resultante de los valores de Z tiene una media de cero y una desviación estándar de uno. La regla empírica dice que el 95% de las $\bar{X}$'s en la distribución de muestreo están a 1.96 errores estándar de la media poblacional desconocida, tal y como se muestra en la figura 8.1.

Figura 8.1
Valores críticos de Z y zonas de rechazo



A. Valores críticos de *Z* y zonas de rechazo

Estos valores de Z de ± 1.96 son **valores críticos** que determinan las zonas de rechazo. Para hallarlos, divida por 2 el 95%. En la tabla Z, el área de 0.95/2 = 0.4750 indica un valor Z de 1.96. El 5% restante está distribuido entre las dos colas, con 2.5% en cada zona de rechazo. Este 5% es el **nivel de significancia**, o el valor alfa de la prueba.

En la figura 8.1 vale la pena destacar que si la hipótesis del embotellador es correcta y $\mu = 16$ onzas, es poco probable (sólo un 5% de oportunidad) que una muestra cualquiera produzca un valor Z que caiga en cualquiera de las zonas de rechazo. Por tanto, si un valor de Z *mayor que* 1.96 o *menor* que −1.96 ocurre, no es probable que la distribución esté centrada en $\mu = 16$, y la hipótesis nula sería rechazada.

Estos valores críticos de Z de $\pm$ 1.96 permiten establecer una **regla de decisión** que diga si se rechaza la hipótesis nula o no. La regla de decisión es:

> **Regla de decisión:** "No se rechaza la hipótesis nula si los valores Z están entre $\pm$ 1.96. Se rechaza si el valor Z es menor que −1.96 o mayor que +1.96"

La lógica implícita en esta regla de decisión, la cual se basa simplemente en las probabilidades, debería ser clara. Si la hipótesis nula es verdadera, no es probable que pueda resultar un valor de Z mayor que 1.96 o menor que −1.96. Sólo 5% de todas las muestras en la distribución muestral podrían producir un valor de Z mayor que 1.96 o menor que −1.96. Por tanto, si dicho valor Z ocurre, no es probable que $\mu = 16$, y debería rechazarse la hipótesis nula.

B. El nivel de significancia y la probabilidad de error

Al probar una hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores. Un **error tipo I** es rechazar una hipótesis nula que es verdadera. En la figura 8.1, si la hipótesis del embotellador es verdadera y $\mu = 16$, todavía hay un 5% de oportunidad de que una media muestral pueda caer en cualquier zona de rechazo, haciendo que se rechace de manera incorrecta la hipótesis nula. De todas las medias muestrales en la distribución muestral, 2.5% produce un valor de 1.96 en la zona de rechazo cola a la derecha y 2.5% produce un valor de $Z < -1.96$ en la zona de rechazo cola a la izquierda. Este 5% es el *nivel de significancia*, o valor alfa (valor α) y representa la probabilidad de un error tipo I.

> **Error tipo I** Rechazar una hipótesis verdadera. La probabilidad de cometer un error tipo I es igual al nivel de significancia, o valor α en el que se prueba la hipótesis.

Un **error tipo II** es no rechazar una hipótesis nula que es falsa. Si la hipótesis nula $H_0 : \mu = 16$ no es correcta, pero la prueba falla en detectarlo, se comete un error tipo II. Mientras que la probabilidad de un error tipo I es igual al valor α seleccionado, la probabilidad de un error tipo II, representado con la letra β, no se determina fácilmente. No se puede asumir que $\alpha + \beta = 1$.

Los niveles de significancia, o valores α, comúnmente seleccionados para pruebas de hipótesis son del 10%, 5% y 1%. Sin embargo, al igual que con los intervalos de confianza no hay nada especial o mágico sobre estos valores α. Se podría probar una hipótesis con un nivel de significancia del 4% si así se decide. La selección de un valor α depende del tipo de error, tipo I o tipo II, que más se desea evitar. Vale la pena recordar que el valor α de la prueba es la probabilidad de error tipo I. Si se rechaza una hipótesis verdadera (error tipo I) es más serio que si no se rechaza una hipótesis falsa (error tipo II), se desearía seleccionar un valor α bajo, como 1% o 5%, para minimizar la probabilidad de cometer un error tipo I. Por otra parte, si no rechazar una hipótesis falsa (error tipo II) es más serio, en este caso es preferible un valor α más alto como 10%.

Se asume que el embotellador para bebidas suaves rechaza la hipótesis nula $H_0 : \mu = 16$ y cierra el proceso de embotellado para ajustar el nivel del contenido. Sin embargo, si la media todavía es 16 onzas, el embotellador ha cometido un error tipo I. Si esto es más costoso que un error tipo II, al permitir que continúe el proceso cuando $\mu \neq 16$, el embotellador desearía seleccionar para la prueba un valor α bajo, tal como 1%.

8.3 Prueba de dos colas para μ

Ahora, está preparado para realizar una prueba de hipótesis. Hay cuatro pasos involucrados en una prueba:

Paso 1: Plantear las hipótesis.

Paso 2: Con base en los resultados de la muestra, calcular el valor del estadístico de prueba Z.

Paso 3: Determinar la regla de decisión con base en los valores críticos de Z.

Paso 4: Interpretación y conclusiones.

Se supone que el embotellador desea probar la hipótesis de que la media poblacional es 16 onzas y selecciona un nivel de significancia del 5%. Debido a que se plantea la hipótesis que $\mu = 16$, la hipótesis nula y la alternativa son

$$H_0: \mu = 16$$
$$H_A: \mu \neq 16$$

Para probar la hipótesis, se calcula el estadístico de prueba Z, y se compara con los valores críticos de Z.

El valor Z utilizado para probar la hipótesis cuando σ es conocido	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_H}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	[8.1]

en donde $\bar{X}$ es la media muestral

μ_H es el valor de la media poblacional bajo la hipótesis nula

$\sigma\sqrt{n}$ es el error estándar de la distribución muestral.

Cuando σ es desconocida, se utiliza la desviación estándar muestral y Z se vuelve

El valor Z utilizado para probar la hipótesis cuando σ es desconocida	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_H}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	[8.2]

en donde s es la desviación estándar muestral.

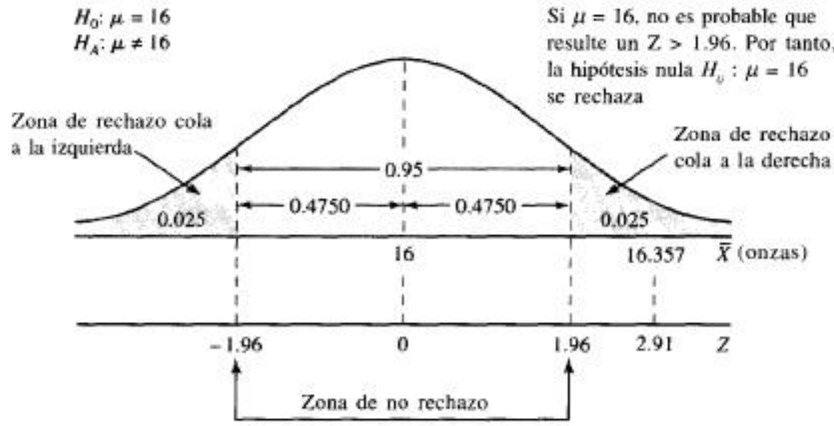
Si el embotellador selecciona una muestra de $n = 50$ botellas con una media de $\bar{X} = 16.357$ onzas y una desviación estándar de $s = 0.866$ onzas, Z es

$$Z = \frac{16.357 - 16}{\dfrac{0.866}{\sqrt{50}}}$$
$$= 2.91$$

En la figura 8.2, el nivel de significancia del 5% se divide en dos colas. El 95% restante se divide por 2 para hallar el área de 0.4750. En la tabla Z esta área de 0.4750 da los valores críticos de Z de $\pm$ 1.96.

La **regla de decisión** es: "No se rechaza la hipótesis nula si $-1.96 \leq Z \leq 1.96$. Se rechaza si $Z < -1.96$ o $Z > 1.96$".

Figura 8.2
Prueba de hipótesis para estimar el nivel promedio de contenido



Vale la pena destacar que las zonas de rechazo están en ambas colas. Si Z > 1.96 o Z < -1.96, se rechaza la hipótesis nula. Por este motivo se le denomina prueba de dos colas.

El paso final en la prueba de hipótesis es donde cae el valor del estadístico para la muestra y determinar si la hipótesis nula debería rechazarse o no. El valor del estadístico para la muestra de 16.357 onzas produce una Z = 2.91 > 1.96 y cae en la zona de rechazo, cola a la derecha. Se pueden interpretar estos resultados como "la hipótesis nula es rechazada a un nivel de significancia del 5%". Simplemente no es probable que una población con una media de 16 pueda dar una muestra que produzca una Z > 1.96. Hay *sólo* un 2.5% de probabilidad que Z pueda exceder de 1.96 (y sólo un 2.5% de probabilidad que Z < -1.96) si μ en realidad es 16. Por tanto, la hipótesis nula H_0: μ = 16 debería rechazarse a un nivel de significancia del 5%.

¿Esto significa que μ *no* es 16? No del todo. Si μ = 16, 2.5% de todas las muestras de tamaño n = 50 todavía generaría un Z > 1.96. La media poblacional podría ser 16, en cuyo caso se habrá cometido un error tipo I rechazando H_0. Pero esto *no* es probable debido a que $P(Z > 1.96 \mid \mu = 16)$ es sólo 2.5%.

La impresión en Minitab de la pantalla 8.1 proporciona los resultados de esta prueba. Asumiendo que se ingresan 50 observaciones en la columna 1, simplemente haga clic en **STAT > Basic Statistics > 1-Sample Z**, e ingrese 16 para **Test Mean** y la desviación estándar para los datos muestrales de 0.866. Vale la pena notar que la media muestral, la desviación estándar y el valor Z de 2.91 están dados. Se discutirá más tarde la importancia del valor p.

Pantalla 8.1

Z-Test (Prueba Z)

Test of mu = 16.000 vs mu not = 16.000 (Prueba de mu = 16.000 contra no mu = 16.000)
The assumed sigma (sigma asumido) = 0.866

Variable	N	Mean (Media)	StDev (Desviación estándar)	SE Mean (Media SE)	**Z**	P-Value (Valor P)
Ounces (onzas)	50	16.357	0.866	0.122	**2.91**	0.0037

Ejemplo 8.1

Como se explicó en la sección "*Escenario*", a comienzos de este capítulo, la gerencia de First Bank of America está planeando basar los cargos para las cuentas corrientes en el saldo diario promedio. El gerente de cuentas preferenciales desea probar la hipótesis de que las cuentas tienen un promedio de US$312. Se selecciona una muestra de 200 cuentas, dando una media de US$298.10 con s = US$97.30. Para minimizar la probabilidad de un error tipo I, se selecciona un valor α de 1%. (Tenga en cuenta los cuatro pasos al realizar la prueba).

Solución

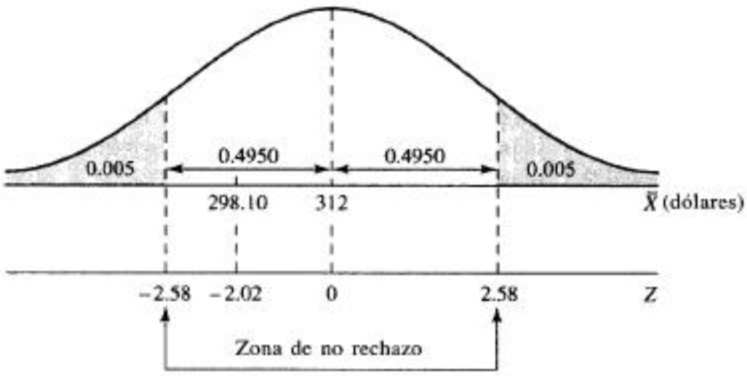
Las hipótesis nula y la alternativa son

$$H_0: \mu = 312$$
$$H_A: \mu \neq 312$$

Z es

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{298.10 - 312}{\frac{97.30}{\sqrt{200}}} = -2.02$$

Como lo muestra la figura, un $\alpha = 0.01$ requiere valores críticos de Z de $\pm$ 2.58. El 0.01 está dividido de manera homogénea en dos zonas de rechazo, dejando un área de 0.4950 que corresponde a los valores críticos de Z de $\pm$ 2.58



Regla de decisión: No rechazar H_o si $-2.58 \leq Z \leq +2.58$. Rechazar H_o si $Z < -2.58$ o $Z > 2.58$.

Si la hipótesis nula es verdadera, existe sólo un 1% de probabilidad que una muestra pueda resultar en un valor Z menor que -2.58 o mayor que 2.58. Por tanto, si Z cae en cualquiera de las colas, no es probable que $\mu = 312$, y la hipótesis nula debería rechazarse. El valor Z = -2.02 está en la zona de no rechazo.

Interpretación

La diferencia entre el valor de la media poblacional bajo la hipótesis nula de US$312 y el valor de la media muestral de US$298.10 es estadísticamente insignificante. Podría resultar simplemente del error de muestreo. De hecho si μ = US$312; el 99% de todas las muestras de tamaño n = 200 producirían valores Z entre $\pm$ 2.58. Por tanto, no se espera un valor de -2.02.

Ejercicios de la sección

1. ¿Cuáles son los cuatro pasos de una prueba de hipótesis?

2. Explique con sus propias palabras por qué la regla de decisión tiene que utilizarse para determinar si la hipótesis nula debería rechazarse. ¿Cuál es el papel de la probabilidad en esta decisión?

3. ¿Qué se entiende por una "diferencia insignificante" entre la media poblacional de la hipótesis y la media muestral?

4. ¿Por qué nunca se "acepta" la hipótesis nula como cierta?

5. ¿Qué papel desempeñan los valores críticos de Z en el proceso de prueba? ¿Cómo se determinan? Haga una gráfica en su respuesta.

6. ¿Cuál es el "nivel de significancia" en una prueba? ¿Cómo influye en los valores críticos de Z? Haga una gráfica en su respuesta.

7. Diferencie entre el error tipo I y el error tipo II. Dé un ejemplo.

8. Utilizando una gráfica, ilustre de manera clara cómo la probabilidad de un error tipo I es igual al nivel de significancia (valor α) de una prueba.

9. Si un error tipo II es considerado más serio en cierta situación, ¿seleccionaría usted un valor a alto o bajo? Explique.

10. Como gerente de compras para una gran empresa de seguros usted debe decidir si actualizar o no los computadores de la oficina. A usted se le ha dicho que el costo promedio de los computadores es de US$2,100. Una muestra de 64 minoristas revela un precio promedio de US$2,251, con una desviación estándar de US$812. ¿A un nivel de significancia del 5% parece que su información es correcta?

11. Seducido por los comerciales, usted ha sido persuadido para comprar un nuevo automóvil. Usted piensa que tendrá que pagar US$25,000 por el auto que usted desea. Como comprador cuidadoso, averigua el precio de 40 posibles vehículos y encuentra un costo promedio de US$27,312, con una desviación estándar de US$8,012. Deseando evitar un error tipo II, usted prueba la hipótesis de que el precio promedio es US$25,000 con un nivel de significancia del 10%. ¿Cuál es su conclusión?

12. Debido al tiempo excesivo que se gasta hacia el sitio de trabajo, la oficina en donde usted trabaja en el centro de Chicago está considerando espaciar las horas de trabajo para sus empleados. El gerente considera que los empleados gastan un promedio de 50 minutos para llegar al trabajo. Setenta empleados se toman en promedio 47.2 minutos con una desviación estándar de 18.9 minutos. Fije a en 1% y pruebe la hipótesis.

13. En 1997 la empresa de inversiones de Goldman Sachs informó que los norteamericanos invierten un promedio de US$18.600.000 cada mes en el mercado de títulos. ¿Esta afirmación está apoyada a un nivel de significancia del 5% si una muestra de 36 meses tiene una media de US$17.100.000 y una desviación estándar de US$2.400.000?

14. Cuando venían de regreso de las minas a la casa los siete enanos le dicen a Blancanieves que excavaron un promedio semanal de 12 toneladas de oro. Pero sin estar dispuesta a creer esta afirmación sin prueba alguna, la señorita Nieves recolecta datos durante 49 semanas y descubre una media de 11.5 toneladas y una desviación estándar de 1.1 toneladas. ¿A un nivel del 10% parece que los enanos están en lo cierto?

15. Antes de publicar un nuevo libro de cocina, Bantam Books desea probar la hipótesis, con un nivel de significancia del 2% de que el precio promedio de tales libros es de US$35.00. ¿Esta afirmación se sustenta si una muestra de 50 libros de cocina tiene una media de US$32.97 y una desviación estándar de US$12.87?

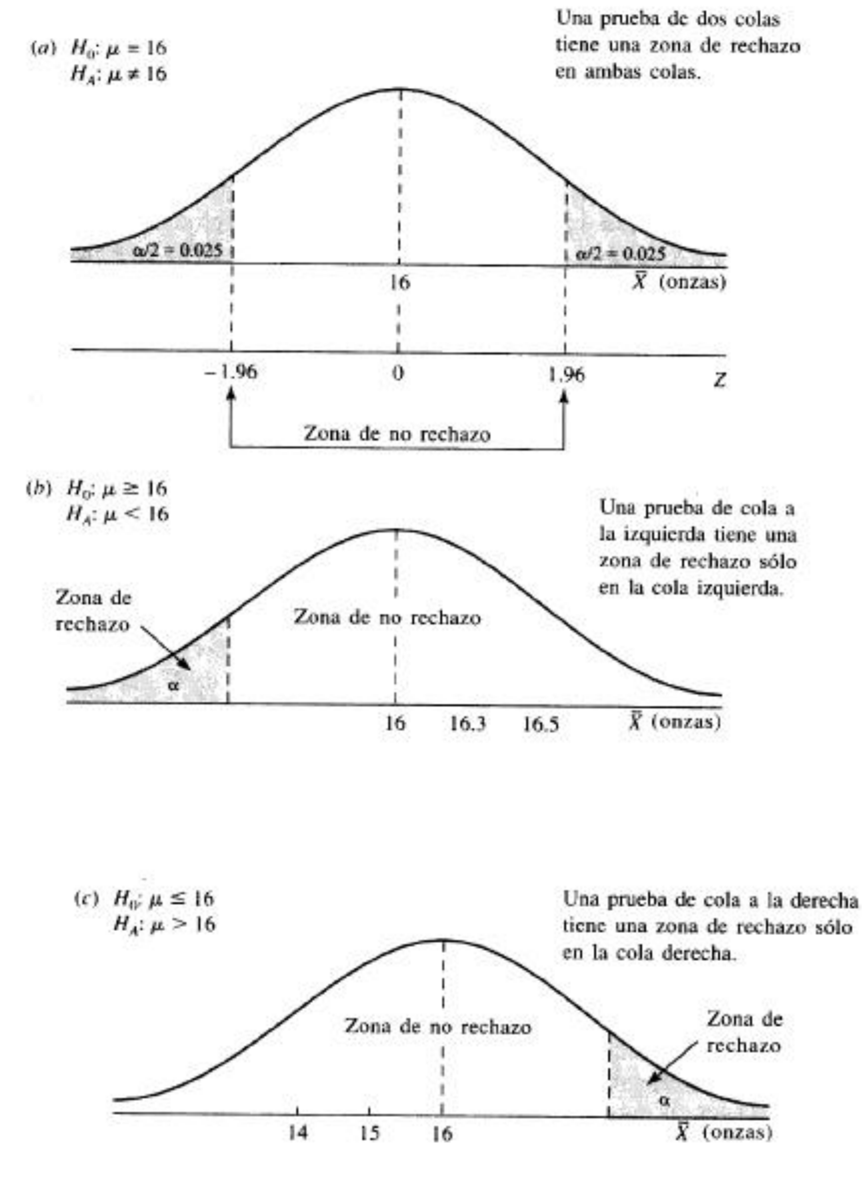
16. El supermercado local gastó remodelando miles de dólares durante muchas semanas. Aunque la interrupción espantó a los clientes temporalmente, el gerente espera que los clientes vuelvan a disfrutar de las nuevas comodidades. Antes de remodelar, los recibos de la tienda promediaban US$32,533 por semana. Ahora que se ha terminado la remodelación, el gerente toma una muestra de 36 semanas para ver si la construcción afectó de alguna manera el negocio. Se reportó una media de US$34,166 y una desviación estándar de US$12,955. ¿Qué puede decidir el gerente a un nivel de significancia del 1%?

8.4 Pruebas de una cola para μ

Las pruebas realizadas anteriormente eran pruebas *de dos colas* debido a que había zonas de rechazo en *ambas* colas. Como lo muestra la figura 8.3 a), la prueba de hipótesis de la embotelladora de que $\mu = 16$ se rechazaría si el valor del estadístico para la muestra es o demasiado alto o demasiado bajo. De cualquier forma, parece que μ no es 16 y la hipótesis nula se rechaza.

Sin embargo, hay ocasiones en las que se está interesado sólo en un extremo u otro. Un restaurante de comida fresca de mar en Kansas City no se interesa en qué tan rápido llegan las langostas provenientes de la costa este. Se preocupa sólo en si el envío se toma mucho tiempo en llegar. Una tienda minorista se alarmará sólo si los ingresos caen a niveles demasiado bajos. En particular, las ventas altas no son problema. En cada uno de estos casos la preocupación se concentra en un extremo u otro y se realiza una prueba de una cola.

Figura 8.3
Comparación de las pruebas de dos colas y de una cola



En lugar de plantear la hipótesis de que el nivel de contenido promedio sea exactamente 16 onzas, se supone que el embotellador considera que el nivel de contenido promedio está "por lo menos en 16 onzas". La hipótesis nula se convierte $H_0: \mu \geq 16$; es decir, 16 o más. La hipótesis alternativa se plantea al contrario, y todo el conjunto de hipótesis es

$$H_0: \mu \geq 16 \qquad H_A: \mu < 16$$

La figura 8.3 b) muestra que la hipótesis $H_0: \mu \geq 16$ no se rechaza si el valor del estadístico para la muestra está por encima de 16. La hipótesis $H_0: \mu \geq 16$ permite valores por encima de 16. Las medias muestrales tales como 16.3 o 16.5 o incluso 17 y 18 sustentan, no refutan, la afirmación que $\mu \geq 16$. Sólo los valores que están significativamente por *debajo* de 16 pueden causar un rechazo de la hipótesis nula. Por tanto, una zona de rechazo aparece solamente en la cola izquierda y el monto total del valor α se coloca en esta zona única de rechazo.

Se asume que el embotellador dice que el nivel de contenido promedio "es a lo más 16". La hipótesis nula ahora se escribe como $H_0: \mu \leq 16$. Las hipótesis son

$$H_0: \mu \leq 16 \qquad H_A: \mu > 16$$

La figura 8.3 c) muestra que ahora los valores bajos para el valor del estadístico de la muestra *no* terminan en un rechazo. La hipótesis nula $H_0: \mu \leq 16$ permite valores por debajo de 16. Las medias muestrales tales como 15, o incluso 14, sustentan la afirmación de que $\mu \leq 16$. Sólo los valores que están significativamente por encima de 16 causarán un rechazo. Por tanto, hay una zona de rechazo sólo en la cola derecha y el valor total para α se coloca en esta única zona de rechazo.

Vale la pena destacar que tanto en la prueba de cola a la izquierda como en la prueba de cola a la derecha, el signo igual se coloca en la hipótesis nula. Esto es porque la hipótesis nula se está probando a un valor α *específico* (como 5%) y el signo igual da a la hipótesis nula un valor *específico* (como 16) para probarla. El ejemplo 8.2 ilustra una prueba de una cola.

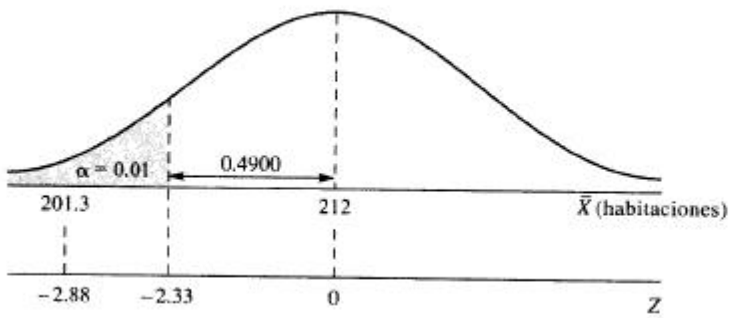
Ejemplo 8.2

En una reunión informativa para una oficina corporativa, el gerente del hotel Embassy Suites en Atlanta, reportó que el número promedio de habitaciones alquiladas por noche es de por lo menos 212. Es decir, $\mu \geq 212$. Uno de los funcionarios corporativos considera que esta cifra puede estar algo sobrestimada. Una muestra de 150 noches produce una media de 201.3 habitaciones y una desviación estándar de 45.5 habitaciones. Si estos resultados sugieren que el gerente ha "inflado" su reporte, será amonestado severamente. A un nivel de 1%, ¿cuál es el destino del gerente?

Solución

La afirmación del gerente que $\mu \geq 212$ contiene el signo igual y por tanto sirve como la hipótesis nula:

$$H_0: \mu \geq 212 \qquad H_A: \mu < 212$$



Los valores por encima de 212 no provocarán un rechazo de la hipótesis nula, la cual permite ver claramente los valores superiores a 212. Sólo los valores que están significativamente por debajo de 212 conducirán a un rechazo de $\mu \geq 212$. Por tanto, esta es una prueba de cola a la izquierda. Z es

$$Z = \frac{201.3 - 212}{\frac{45.5}{\sqrt{150}}} = -2.88$$

Como lo muestra la figura, un nivel de significancia del 1% deja un área de 0.4900 que, de la tabla Z, requiere un valor crítico Z de -2.33.

La **regla de decisión** es: "No rechazar H_0 si $Z \geq -2.33$. Rechazar H_0 si $Z < -2.33$".

El valor Z de -2.88 está claramente en la zona de rechazo. La hipótesis nula H_0: $\mu \geq 212$ no se confirma.

Interpretación

Parece que el gerente se ha excedido al estimar su tasa de ocupación y aparentemente recibirá una reprimenda de la oficina principal.

Se considera la siguiente prueba de cola a la derecha.

Ejemplo 8.3

Una encuesta realizada por la Asociación Nacional de Estudiantes Colegiados (*National Collegiate Students' Association*) mostró que los estudiantes de las universidades de la nación gastan en promedio más de US$75 mensuales en entretenimiento. Si usted puede hallar evidencias para confirmar esta afirmación, podría utilizarla para solicitar a su casa ayuda monetaria adicional. De los 100 estudiantes que tomó de muestra, usted halla una media de US$80.23 con una desviación estándar de US$45.67. ¿A un nivel de significancia del 2%, se encuentra justificación para la solicitud?

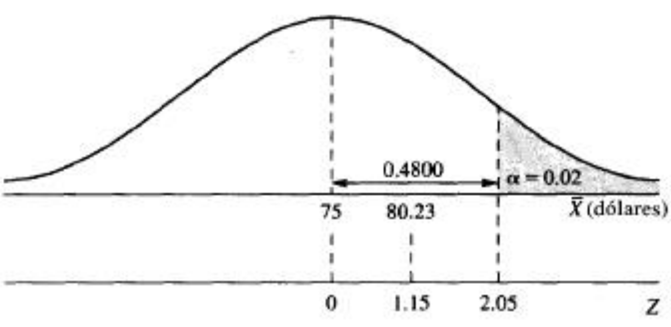
Solución

La afirmación de que la media es más de US$75.00 sirve como hipótesis alternativa debido a que $\mu > 75$ no contiene el signo igual. Las hipótesis son entonces

$$H_0: \mu \leq 75 \qquad H_A: \mu > 75$$

y se requiere una prueba de cola a la derecha debido a que los valores más bajos no terminarían en un rechazo de la hipótesis nula. Entonces,

$$Z = \frac{80.23 - 75}{\frac{45.67}{\sqrt{100}}} = 1.15$$



El área que se muestra en la figura de 0.4800 indica un valor crítico de Z de 2.05.

La **regla de decisión** es: "No rechazar H_o si $Z \leq 2.05$. Rechazar H_o si $Z > 2.05$".

Debido a que $Z = 1.15 < 2.05$, no se rechaza la hipótesis nula H_0: $\mu \leq 75$. Parece que el costo promedio de entretenimiento no es superior a US$75.

Interpretación

A pesar de su estilo de vida decadente, el estudiante típico no gasta más de US$75. Tendrá que encontrar otra forma para obtener más dinero de casa.

Ejercicios de la sección

17. Explique con sus propias palabras la diferencia entre pruebas de hipótesis de una cola y de dos colas. Dé ejemplos de ambas.

18. ¿Por qué el signo igual siempre va a la hipótesis nula?

19. Explique claramente ¿por qué una hipótesis nula de H_0: *m £* 10 requiere una prueba de cola a la derecha, mientras que una hipótesis nula de H_0: $\mu \geq 10$ requiere una prueba de cola a la izquierda?

20. Durante los últimos meses Raynor & Sons ha publicitado ampliamente su negocio de suministros eléctricos. El Sr. Raynor espera que el resultado haya sido incrementar las ventas promedio semanales por encima de US$7,880 que la compañía experimentó en el pasado. Una muestra de 36 semanas da una media de US$8,023 con una desviación estándar de US$1,733. A un nivel de significancia del 1%, ¿parece que la publicidad ha producido efecto?

21. En otoño de 1997, Hardee's, el gigante en comidas rápidas, fue adquirido por una compañía de California que planea eliminar del menú la línea de pollo frito. La afirmación era que los ingresos recientes habían descendido por debajo de la media de US$4,500 que habían presentado en el pasado. ¿Parece esta una sabia decisión si 144 observaciones revelan una media de US$4,477 y una desviación estándar de US$1,228? La gerencia está dispuesta a aceptar una probabilidad del 2% si comete un error tipo I.

22. Según *The Wall Street Journal* (mayo 12 de 1997) muchas compañías de ropa deportiva están tratando de comercializar sus productos entre los más jóvenes. El artículo sugirió que la edad promedio de los consumidores había caído por debajo del grupo de edad de 34.4 años que caracterizó los comienzos de la década. Si una muestra de 1,000 clientes reporta una media de 33.2 años y una desviación estándar de 9.4, ¿qué se concluye a un nivel de significancia del 4%?

23. La emisión de julio de 1997 de la revista *Forbes* informó sobre los "escondites" exclusivos en la parte norte de New York State y sus alrededores utilizados por los ejecutivos ricos para escapar del tedio de sus estresantes vidas diarias. El costo es muy razonable, informó el artículo. Usted puede contratar alojamientos de fin de semana por menos de US$3,500. ¿Se confirma esta cifra "razonable" a un nivel de significancia del 5% si una muestra de 60 centros turísticos tienen un costo promedio de US$3,200 y s = US$950?

24. A comienzos de los años 90, Hyundai, el fabricante coreano de automóviles, sufrió una severa caída en las ventas, por debajo de su pico mensual de 25,000 unidades de mayo de 1988. *Hyundai Motor America* (verano de 1997) reportó que las ventas habían bajado a menos de 10,000 unidades. Durante un período de 48 meses que comenzó en enero de 1990, las ventas promedio fueron de 9,204 unidades. Se asume una desviación estándar de 944 unidades. ¿A un nivel del 1% de significancia, parece que el número promedio de unidades ha caído por debajo de la marca de 10,000?

25. Baskin-Robbins, la franquicia de helados, afirma que el número de tiendas que se abre ha incrementado por encima del promedio semanal de 10.4 experimentado en tiempos de escasez (*The Wall Street Journal,* febrero de 1997). ¿Existe alguna evidencia para sustentar esta afirmación si 50 semanas muestran una media de 12.5 y una desviación estándar de 0.66 tiendas? La gerencia está dispuesta a aceptar una probabilidad del 4% de rechazo de la hipótesis nula si ésta es cierta.

26. Una publicidad reciente afirma que el monto del seguro de bienes y del seguro marítimo estipulado por Atlantic Mutual es de por lo menos US$325,500 por mes. Cuarenta meses reportan una media de US$330,000 y s = US$112,300. ¿A un nivel de significancia del 5%, la afirmación de Atlantic Mutual parece ser válida?

8.5 Valores p: Uso e interpretación

Como se ha visto, para probar una hipótesis se calcula un valor Z y se compara con un valor crítico Z con base en el nivel de significancia seleccionado. Mientras que el valor p de una prueba puede servir como método alternativo para probar hipótesis, en realidad es mucho más que eso.

En esta sección se desarrolla una definición estricta del valor p y el papel que puede jugar en la prueba de hipótesis. Se debería entender completamente *por qué* el valor p, puede definirse de la forma como que está definida. También se explica cómo calcular el valor p, tanto para pruebas de dos colas como para pruebas de una cola.

El valor p para una prueba es la probabilidad de obtener resultados muestrales al menos tan extremos como los que se obtuvieron dado que la hipótesis nula es verdadera. Se encuentra de la misma manera que el área de la cola que va *más allá* del valor del estadístico para la muestra. Comenzando con una prueba de una cola, se tiene que Chuck Cash es el jefe de personal. A partir de un breve análisis de los registros de los empleados, Chuck considera que los empleados tienen un promedio de más de US$31,000 en sus cuentas de pensiones ($\mu > 31{,}000$). Al tomar como muestra 100 empleados, Chuck encuentra una media de $31,366, con s = US$1,894.

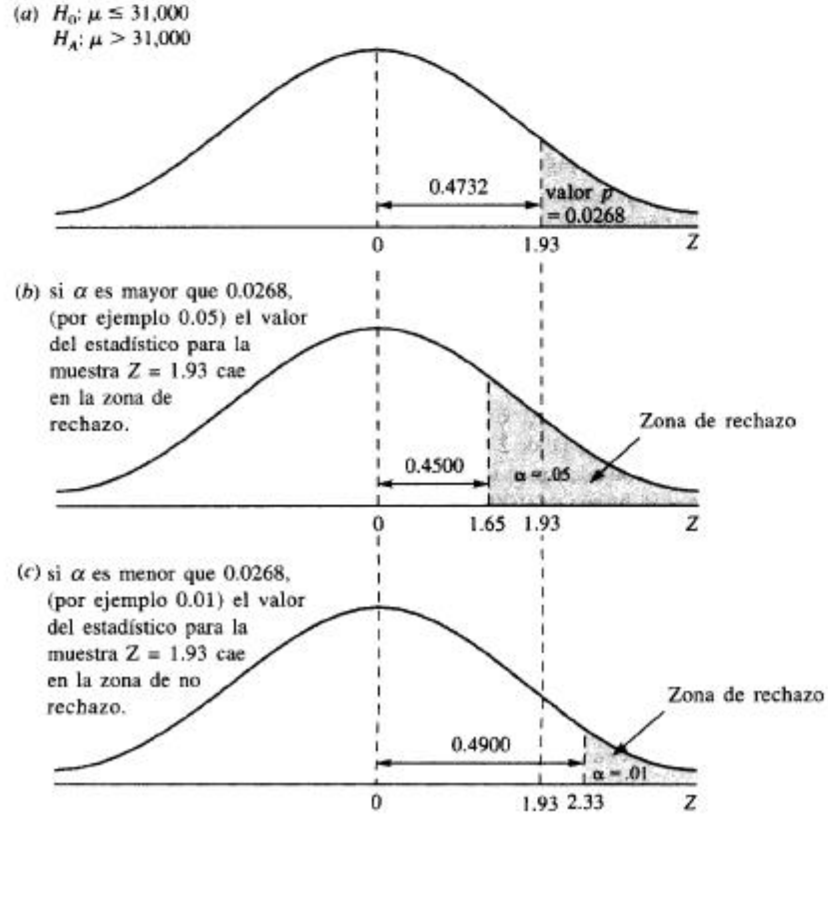
Se supone que Chuck desea calcular el valor p relacionado con esta prueba de cola a la derecha. Las hipótesis son:

$$H_0\text{: } \mu \leq 31{,}000 \qquad H_A\text{: } \mu > 31{,}000$$

Z es

$$Z = \frac{31366 - 31000}{\dfrac{1894}{\sqrt{100}}} = 1.93$$

Figura 8.4
Prueba de hipótesis de una cola, para el caso de Chuck



El valor p es el área de la cola que está más allá del valor del estadístico para la muestra de $Z = 1.93$. Como lo ilustra la figura 8.4 *A*), un valor $Z = 1.93$ da un área de 0.4732. El valor p, el área que está en la cola que va más allá del valor del estadístico para la muestra de 1.93, es $0.5000 - 0.4732 = 0.0268$, o 2.68%

> **Valor p** Es el nivel más bajo de significancia (valor α) al cual se puede rechazar la hipótesis nula. Es el área en la cola que está más allá del valor del estadístico para la muestra.

¿Exactamente qué le dice este valor p del 2.68% a Chuck? El **valor p** se define como el nivel de significancia más bajo (valor alfa mínimo) que puede determinarse y sin embargo rechazar la hipótesis nula. Por ejemplo, la figura 8.4 B) muestra que si se fija α en un valor mayor que 0.0268, como 0.05, el área de 0.4500 requiere un valor crítico Z de 1.65. Por tanto, el valor del estadístico para la muestra de $Z = 1.93$ cae en la zona de rechazo. Por otra parte, como lo revela la figura 8.4 C), si se selecciona un valor α menor que 0.0268, como 0.01, el área resultante de 0.4900 especifica un valor crítico de Z de 2.33 y el valor del estadístico para la muestra de $Z = 1.93$ cae en la zona de no rechazo. Por tanto, Chuck puede bajar el valor α para la prueba hasta 0.0268 sin colocar el valor del estadístico para la muestra en la zona de no rechazo. Es decir, un valor α de 0.0268 es el valor a más bajo que Chuck puede fijar y sin embargo rechazar la hipótesis nula.

El valor p dice a Chuck a qué decisión llegará en cualquier valor α seleccionado. Sencillamente, si el valor p es menor que el valor α, se rechazará la hipótesis nula.

La pantalla 8.2 en Minitab proporciona la impresión para la prueba de una cola que hace Chuck. El valor Z y el valor p que Chuck calculó pueden obtenerse fácilmente haciendo clic en **Stat > Basic Statistics > 1-Sample Z**. Se fija el nivel de confianza y se ingresa el valor que se planteó en la hipótesis nula para estimar la media. Se selecciona **greater than** (mayor que) para la hipótesis alternativa. Finalmente, se ingresa 1894 para sigma.

Pantalla 8.2

Z-Test (Prueba Z)

```
Test of mu = 31000 vs mu > 31000 (Prueba de mu = 31000 contra mu > 31000)
The assumed sigma (sigma asumido) = 1894
```

Variable	N	Mean (Media)	StDev (Desviación estándar)	SE Mean (Media SE)	Z	P-Value (Valor P)
Amount (Cantidad)	100	31366	1894	189	1.93	0.0268

Cuidado! Muchos programas de computador reportan sólo valores p para pruebas de dos colas. Si se está realizando una prueba de una cola, divida por 2 el valor p reportado para obtener el valor de una cola. Sin embargo, si se siguen las instrucciones anteriores, Minitab proporcionará el valor de una cola.

A. Valor p para una prueba de dos colas

Calcular el valor p de una prueba de dos colas es muy similar, con un leve giro al final. Se asume que Chuck también sospecha que los empleados invierten un promedio de US$100 mensuales en el plan de opción de compra de acciones de la compañía ($\mu = 100$). Al tomar como muestra 100 empleados, Chuck descubre una media de US$106.81 con una desviación estándar de US$36.60. Ahora desea determinar el valor p relacionado con la prueba de hipótesis

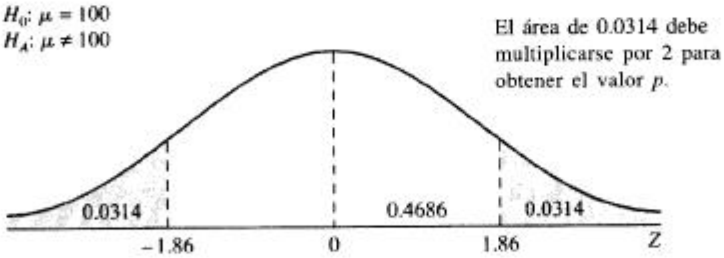
$$H_0: \mu = 100 \qquad H_A: \mu \neq 100$$

Z es

$$Z = \frac{106.81 - 100}{\frac{36.60}{\sqrt{100}}} = 1.86$$

Para calcular el valor p, Chuck determina el área en la cola que va más allá del valor del estadístico para la muestra de Z = 1.86. En la figura 8.5 esta área es 0.0314. A diferencia de una prueba de una cola, esta área debe multiplicarse por 2 para obtener el valor p. Esto es necesario porque en una prueba de dos colas el valor α se divide en las dos zonas de rechazo. El valor p es 0.0314 X 2 = 0.0628. Vale la pena recordar que el valor p es el valor α más bajo al cual se rechaza la hipótesis nula. Si se fija el valor α en menos que el valor p, la hipótesis nula no es rechazada.

Figura 8.5
Prueba de la hipótesis de dos colas para el caso de Chuck



La pantalla 8.3 en Minitab muestra los resultados de la prueba de dos colas que realizó Chuck. Vale la pena destacar que el valor p de 0.063 es para una hipótesis de dos colas y no es necesario multiplicar por dos.

Pantalla 8.3

Z-Test (Prueba Z)

Test of mu = 100.00 vs mu not = 100.00 (Prueba de mu = 100.00 contra no mu = 100.00)

The assumed sigma (sigma asumido) = 36.6

Variable	N	Mean (Media)	StDev (Desviación estándar)	SE Mean (Media SE)	Z	**P-Value** (Valor P)
Dollars (Dólares)	100	106.81	36.60	3.66	1.86	**0.063**

Ejemplo 8.4

En mayo de 1997, el Congreso aprobó un presupuesto federal que contenía varias partidas para recortes tributarios. Los analistas afirmaron que ahorraría al contribuyente, en promedio US$800 por año. Calcule e interprete el valor p si una muestra de 500 contribuyentes presenta un ahorro promedio de US$785.10 con una desviación estándar de US$187.33.

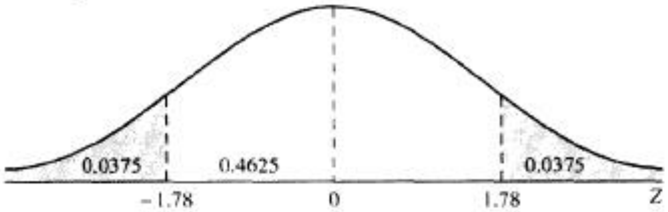
Solución

$$H_0: \mu = 800 \qquad H_A: \mu \neq 800$$

Z es

$$Z = \frac{785.10 - 800}{\frac{187.33}{\sqrt{500}}} = -1.78$$

El valor p se determina hallando el área que está más allá del valor del estadístico para la muestra de -1.78, como lo muestra la figura, $0.5000 - 0.4625 = 0.0375$. Entonces, $0.0375 \text{ X } 2 = 0.0750$ = valor p.



Interpretación

El valor p muestra que el valor α más bajo que pueda fijarse y sin embargo rechazar la hipótesis nula es de 7.5%. Es por esto que no se rechaza a un valor α del 5 %.

Ejercicios de la sección

27. Defina el valor p relacionado con una prueba de hipótesis. Utilice una gráfica para explicar claramente ¿por qué el valor p se define de esta manera y cómo puede utilizarse para probar una hipótesis? Hágalo tanto para una prueba de una cola como para una prueba de dos colas.

28. En el verano de 1997, el Congreso aprobó un presupuesto federal que contenía varias partidas para reducciones de impuestos. Los analistas afirmaron que ahorraría al contribuyente promedio US$800. Una muestra de 500 contribuyentes demostró una reducción promedio en los impuestos de US$785.10 con una desviación estándar de US$277.70. Pruebe la hipótesis a un nivel de significancia del 5%. Calcule e interprete el valor p.

29. Utilizando los datos del problema anterior, compare el valor α con el valor p que usted calculó, y explique por qué rechazó o no rechazó la hipótesis nula. Utilice una gráfica en su respuesta.

30. A comienzos de los años 90 Sony Corporation introdujo su PlayStation de 32 bits en el mercado de los juegos de video. La gerencia esperaba que el nuevo producto incrementara las ventas mensuales en Estados Unidos por encima de los US$283.000.000 que Sony había experimentado en la década anterior. Una muestra de 40 meses reportó una media de US$297.000.000. Se asume una desviación estándar de US$97.000.000. Pruebe la hipótesis a un nivel de significancia del 1%. Calcule e interprete el valor p.

31. En otoño de 1996 Joe Galli, presidente de Black and Decker (B&D) potencia mundial en electrodomésticos, asistió a una convención en la Arena Kemper en Kansas City y anunció a quienes estaban presentes que las ventas de B&D habían alcanzado un nuevo pico de US$7.700.000 por semana durante la década actual (*Forbes,* septiembre de 1996). ¿La afirmación de Galli es confirmada a un nivel de significancia del 1% si dos años de datos dan una media de US$8.200.000 y s = US$1.800.000? ¿Cuál es el nivel más bajo de significancia que Galli puede fijar y sin embargo rechazar la hipótesis nula?

32. *Forbes* (septiembre de 1996) reportó que Freddie McMann, representante de la cantante de pop Madonna, estimó que las ventas diarias de su nuevo álbum excedería las de su éxito más grande de 1994, *Like a Virgin* (Como una Virgen), el cual tuvo un promedio de ventas de 27,400 copias. ¿Freddie está en lo cierto a un nivel de significancia del 10% si 50 observaciones (días) poseen una media de 28,788 copias con una desviación estándar de 3,776? Calcule e interprete el valor p.

8.6 Pruebas para μ, muestras pequeñas

Al igual que con los intervalos de confianza, si la muestra es pequeña, σ es desconocida, y la población es normal o casi normal en cuanto a su distribución, puede utilizarse la distribución t. Los estudiantes en una clase de estadística en State University cuestionan la afirmación de que McDonald's coloca 0.25 libras de carne en sus "hamburguesas de cuarto de libra". Algunos estudiantes argumentan que en realidad se utiliza más, mientras que otros insisten que es menos. Para probar la afirmación publicitaria que el peso promedio es de 0.25 libras, cada estudiante compra una hamburguesa de cuarto y la lleva a clase, en donde la pesan en una balanza suministrada por el instructor. Los resultados de la muestra son $\bar{X} = 0.22$ libras y $s = 0.09$. Si hay 25 estudiantes en clase, ¿a qué conclusiones llegarían a un nivel de significancia del 5%? Las hipótesis son

$$H_0: \mu = 0.25 \qquad H_A: \mu \neq 0.25$$

Debido a que $n < 30$, t se calcula como

Prueba para la media (muestras pequeñas)	$t = \dfrac{\bar{X} - \mu_H}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	[8.3]

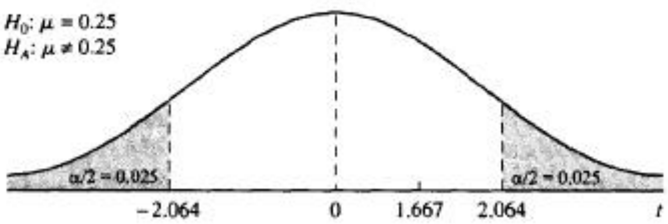
Dados los datos actuales, se halla

$$t = \frac{0.22 - 0.25}{\dfrac{0.09}{\sqrt{25}}} = 1.667$$

El valor t de 1.667 se compara con un valor crítico de t con $n - 1 = 24$ grados de libertad y un valor α del 5%. De la tabla *t para prueba de dos colas*, $t_{.05,24} = 2.064$. La regla de decisión como se refleja en la figura 8.6 es:

> **Regla de decisión:** "No rechazar H_0 si t está entre $\pm$ 2.064. Rechazar H_0 si t es menor que -2.064 o mayor que $+$ 2.064"

Figura 8.6
Prueba t de dos colas para la media poblacional



Debido a que $t = 1.667$ está entre $\pm$ 2.064, no se rechaza la hipótesis nula. La evidencia de prueba confirma la afirmación de McDonald's de que las hamburguesas de cuarto de libra contienen efectivamente 0.25 libras de carne.

Como se puede esperar, una prueba de una cola es similar, pero con una leve alteración. Cuando se utiliza la tabla t, se deben utilizar valores para pruebas de una cola. The American Kennel Club (*AKC*) reportó en su publicación Estadounidenses Propietarios de Perros (*American Dog Owners*) (abril de 1997) que los perros cocker spaniels de un año de edad deberían pesar "un poco más de 40 libras ($\mu > 40$) si han recibido una nutrición apropiada". Para probar la hipótesis

$$H_0: \mu \leq 40 \qquad H_A: \mu > 40$$

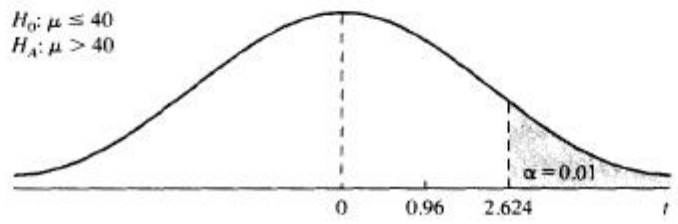
Hill's, productor de alimentos para la dieta de los perros, pesa 15 perros cokers de un año de edad y descubre una media de 41.17 libras, con $s = 4.71$ libras. Seleccionando una probabilidad del 1% de cometer un error tipo I se tiene que

$$t = \frac{41.17 - 40}{\frac{4.71}{\sqrt{15}}} = 0.96$$

De la tabla t para pruebas de *una* cola, $t_{0.01,14} = 2.624$. La regla de decisión como se muestra en la figura 8.7 es:

Regla de decisión: "No rechazar si $t \leq 2.624$. Rechazarla si $t > 2.624$".

Figura 8.7
Prueba t de una cola para la media poblacional



El valor t de 0.96 cae claramente en la zona de no rechazo. La hipótesis nula H_0: $\mu \leq 40$ no se rechaza. La evidencia de la muestra sugiere que no se confirma la afirmación de *AKC*.

La pantalla 8.4 en Minitab muestra los resultados de la prueba para la hipótesis sobre los perros cocker spaniel. El valor t es 0.96 junto con el valor p de $0.18 > 0.01$. Calcular el valor p de una tabla t requiere de más conjeturas que utilizar una tabla Z, porque la tabla t está menos detallada. No intente hacer cálculos manuales de los valores p para muestras pequeñas, confíe estrictamente en el computador para hallar esta información.

Pantalla 8.4

T-Test of the Mean (Prueba T de la media)

Test of mu = 40.00 vs mu > 40.00 (Prueba de mu = 40.00 contra mu > 40.00)

Variable	N	Mean (Media)	StDev (Desviación estándar)	SE Mean (Media SE)	**T**	**P-Value** (Valor P)
Weight (Peso)	15	41.17	4.71	1.22	**0.96**	**0.18**

Ejercicios de la sección

33. Un distribuidor de bebidas plantea la hipótesis de que las ventas por mes promedian US$12,000. Diez meses seleccionados como muestra reportan una media de US$11,277 y una desviación estándar de US$3,772. Si se utiliza un valor α del 5%, ¿qué puede concluir acerca de la impresión que tiene el distribuidor sobre las condiciones del negocio?

34. Los registros llevados por una gran tienda por departamentos indican que en el pasado las ventas semanales tenían un promedio de US$5,775. Para incrementar las ventas, la tienda comenzó recientemente una campaña agresiva de publicidad. Después de 15 semanas, las ventas promediaron US$6,012 con s = US$977. ¿La tienda debería seguir con el programa publicitario? Fije α en 1%.

35. Stan and Ollie venden helado en un carrito móvil en el Central Park de Nueva York. Stan le dice a Ollie que venden un promedio de por lo menos 15 libras de helado de vainilla cuando la temperatura supera los 80 grados. Ollie no está de acuerdo. Si 20 días de 80 grados o más revelan un promedio de 13.9 libras y $s = 2.3$ libras, ¿quién está en lo correcto, Ollie o Stan? Fije α al 5%.

36. Un nuevo bombillo producido por Sun Systems está diseñado para incrementar la vida útil de los bombillos a más de 5,000 horas que es el promedio de los que actualmente existen. ¿El nuevo producto de Sun Systems proporciona una mejora si 25 bombillos se funden en promedio a las 5,117 horas con $s = 1{,}886$ horas? Fije α en 5%.

37. Una empresa de servicio postal garantiza a su empresa que puede reducir el tiempo promedio necesario para recibir un paquete a menos de 2.5 días que es lo que usted experimenta actualmente. Después de utilizar la nueva compañía en 17 ocasiones, el tiempo de entrega promedio fue de 2.2 días y la desviación estándar fue de 0.9 días. ¿Debería cambiar su firma a la nueva empresa de mensajería? Sea α igual a 1%.

38. Como supervisor de producción, es su responsabilidad garantizar que las bolsas de semilla de pasto que vende su firma pesen en promedio 25 libras. Urgido por la preocupación de que esta especificación del peso no se cumpla, usted selecciona 25 bolsas y encuentra una media de 23.8 libras con una desviación estándar de 6.6 libras. ¿Debería ordenar que la línea de ensamble se cierre y se hagan los ajustes en el proceso de llenado? Para minimizar un error tipo I, escoja un valor α de 1%.

39. Usted acaba de ser contratado como asistente de gerencia para un fabricante de partes de computador. En su primera asignación laboral, usted necesita vigilar el tiempo que requieren los trabajadores para completar un trabajo determinado que se supone que toma un promedio de 15 minutos. Su supervisor inmediato se preocupa porque una escasez en la mano de obra que requirió del uso de trabajadores no entrenados, ha incrementado el tiempo de elaboración de un trabajo por encima de los 15 minutos ordenados. Usted toma de muestra a 20 trabajadores y halla una media de 17.3 minutos y $s = 1.9$ minutos. ¿A un valor α del 1%, qué le podría informar a su supervisor?

40. Un contratista eléctrico ha concluido que los hogares promedio utilizan 500 yardas de cableado eléctrico. Usted encuentra que una muestra de 15 casas utilizó 545.3 yardas con $s = 166.4$ yardas. ¿A un valor α del 5%, está usted de acuerdo con el contratista?

8.7 Pruebas para π

Muchas decisiones en los negocios dependen de la proporción o porcentaje de la población que se ajusta a alguna característica. Un especialista en mercadeo puede querer saber la proporción de residentes de una ciudad grande que se ajusta al mercado objetivo. Los gerentes con frecuencia se interesan en el porcentaje de empleados que consideran que las normas de la compañía son demasiado opresivas. Los analistas financieros y económicos pueden necesitar estimar la porción de los proyectos de capital que sufren de sobrecostos. Podrían mencionarse muchos otros ejemplos.

El proceso de prueba de hipótesis para la proporción poblacional π es muy similar al de μ. Un valor Z calculado a partir de la muestra se compara con un valor crítico de Z con base en el valor α seleccionado. Z se calcula como

Prueba de hipótesis para la proporción poblacional

$$Z = \frac{p - \pi_H}{\sigma_p} \qquad [8.4]$$

en donde p es la proporción muestral de las observaciones que se consideran "éxitos"

π_H es el valor planteado como hipótesis para la proporción poblacional

σ_p es el error estándar de la proporción muestral.

Un error, σ_p mide la tendencia de las proporciones muestrales a desviarse de la proporción poblacional desconocida. Se calcula así:

Error estándar de la distribución muestral de las proporciones muestrales	$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_H(1-\pi_H)}{n}}$	[8.5]

Como director de las operaciones de mercadeo para una gran cadena minorista, usted considera que el 60% de los clientes de la firma se han graduado de la universidad. Usted intenta establecer una importante política respecto a la estructura de precios sobre esta proporción. Una muestra de 800 clientes revela que 492 clientes tienen grados universitarios, produciendo una proporción muestral de $p = 492/800 = 0.615$. A un nivel del 5%, ¿qué puede concluir sobre la proporción de todos los clientes que se han graduado de la universidad? Sus hipótesis son:

$$H_0: \pi = 0.60 \qquad H_A: \pi \neq 0.60$$

El error estándar es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0.60\,(1-0.60)}{800}} = 0.017$$

Entonces,

$$Z = \frac{0.615 - 0.60}{0.017} = 0.88$$

En la figura 8.8, el valor α del 5% está dividido en dos zonas de rechazo, colocando 2.5% en cada cola. El 95% restante dividido en 2, da un área de 0.4750; lo cual requiere de los valores críticos de Z de ± 1.96 utilizando la tabla Z. La regla de decisión por tanto es:

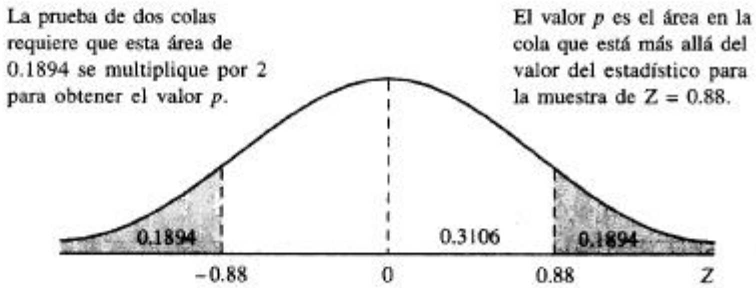
Regla de decisión: "No rechazar H_0 si Z está entre ± 1.96. Rechazar H_0 si Z es mayor que + 1.96 o menor que −1.96".

Figura 8.8
Prueba de hipótesis para la proporción de clientes con título universitario

El Z de 0.88 está en la zona de no rechazo. La evidencia de la muestra confirma la hipótesis de que $\pi = 0.60$. Ahora es posible desarrollar su política de precios con base en esta conclusión.

Regresando a la tabla Z, es posible calcular el valor p relacionado con esta prueba. Vale la pena recordar que el valor p es el valor α más bajo al cual puede rechazarse la hipótesis nula. Se halla como el área de la cola que está más allá del valor del estadístico para la muestra. La figura 8.9 muestra que esta área es

Figura 8.9
Valor p para la proporción de clientes con título universitario



0.5000 – 0.3106 = 0.1894. Sin embargo, debido a que es una prueba de dos colas, el valor p es 0.1894 X 2 = 0.3788. Debido a que el valor α del 5% es menor que 37.88%, la hipótesis nula no se rechaza.

Al igual que con las pruebas para las medias, las pruebas de hipótesis de una sola cola para las proporciones pueden tener cola a la derecha o a la izquierda. Considerando esta prueba con cola a la izquierda. El CEO de una gran firma manufacturera debe garantizar que por lo menos 75% de sus empleados ha concluido un curso avanzado de capacitación. De los 1,200 empleados seleccionados aleatoriamente, 875 lo han hecho. El CEO registra su asistencia para probar esta hipótesis y calcular el valor p. A un nivel de significancia del 5%, ¿qué conclusiones incluye usted en su reporte?

Debido a que por lo menos el 75% se escribe como $\pi \geq 0.75$, las hipótesis son:

$$H_0: \pi \geq 0.75 \qquad H_A: \pi < 0.75$$

y requiere una prueba de cola a la izquierda. Dado que

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(0.75)(1 - 0.75)}{1200}} = 0.0125$$

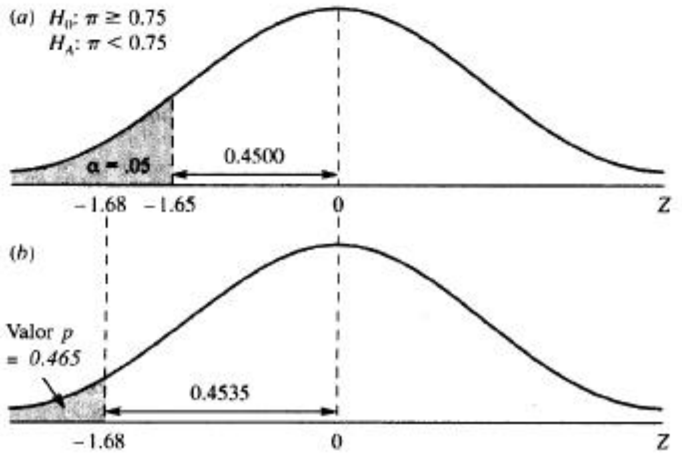
y $p = 875/1200 = 0.729$, Z es:

$$Z = \frac{0.729 - 0.75}{0.0125} = -1.68$$

En la figura 8.10 (A), colocando toda la cantidad del valor α de 0.05 en la región única de rechazo, el área de 0.4500 requiere un valor crítico Z de – 1.65. La regla de decisión es:

Regla de decisión: "No rechazar H_o si Z es ≥ -1.65. Rechazar H_o si Z < -1.65".

Figura 8.10
Prueba de hipótesis para la proporción de empleados con capacitación avanzada



Debido a que $Z = -1.68 < -1.65$. Se rechaza la hipótesis nula. El CEO debe tomar medidas para incrementar la proporción de empleados a quienes se ha dado capacitación para mejorar las habilidades en el trabajo.

El valor *p* es el área en la cola que está más allá del valor del estadístico para la muestra de $Z = -1.68$. En la figura 8.10 (B), un valor Z de -1.68 da un área de 0.4535. Por tanto, el valor *p* es de $0.5000 - 0.4535 = 0.0465$.

Ejercicios de la sección

41. Una encuesta realizada en 1982 reveló que el 78% de quienes respondieron consideraron que estaban mejor financieramente que sus padres. Una encuesta más reciente (*The Wall Street Journal*, abril de 1997) encontró que 370 de las 500 personas quienes respondieron pensaron que sus fortunas financieras eran mejores que las de sus padres. ¿Esto sugiere un descenso en la proporción de personas que consideran que están financieramente más estables de lo que estaban sus padres? Prueba la hipótesis a un nivel de significancia del 1% y calcule el valor *p*.

42. Tradicionalmente el 35% de todos los créditos otorgados por Jesse James National Bank han sido para miembros de grupos minoritarios. Durante el año pasado, el banco ha hecho esfuerzos por incrementar esta proporción. De 150 créditos actualmente en curso, 56 están identificados claramente por haber sido otorgados a las minorías. ¿El banco ha tenido éxito en sus esfuerzos por atraer más clientes de las minorías? Pruebe la hipótesis con un nivel de significancia del 5%. Calcule el valor *p*.

43. Midwest Productions planea comercializar un nuevo producto sólo si por lo menos al 40% del público le gusta. El departamento de investigación selecciona 500 personas y encuentra que 225 lo prefieren al de la competencia más cercana. ¿A un nivel de significancia del 2%, Midwest debería comercializar el producto?

44. Radio Shack, el minorista de electrodomésticos, anunció que vende el 21% de todos los computadores caseros. ¿Esta afirmación se confirma si 120 de los 700 propietarios de computadores se los compraron a Radio Shack? Tome α de 5% y calcule e interprete el valor *p*.

45. El director Steven Spielberg, el segundo animador mejor pago en el año de 1997 (US\$30.000.000), apareció en el programa de Oprah Winfrey. Winfrey es la animadora mejor paga (US\$97.000.000). Spielberg afirmó que aproximadamente "75% del público en general" había visto su película *Jurassic Park*. Oprah tomó una encuesta de 200 personas en la audiencia ese día y encontró que 157 habían visto la película. ¿La afirmación de Spielberg está confirmada a un nivel de significancia del 1%?

46. *The Wall Street Journal* (marzo de 1997) informó que la insatisfacción laboral estaba alcanzando proporciones de epidemia. Un estimado del 70% de los trabajadores de Estados Unidos cambiarían su trabajo si pudieran. Si esto es cierto en los trabajadores de su empresa, usted planea instituir un programa para mejorar la moral de los empleados. Usted descubre que 1,020 trabajadores de una muestra de 1,500 expresaron insatisfacción con su trabajo. ¿A un nivel de significancia del 2%, debería usted implementar el programa?

47. Midlakes Commuter Service cesó voluntariamente las operaciones de vuelo de sus oficinas de Chicago (*Chicago Tribune*, junio 10 de 1997). Se estimó que más del 18% de los vuelos de Midlakes involucraban aviones con fallas mecánicas. ¿Este estimado se confirma a un nivel de significancia del 5% si 24 aviones utilizados para los 120 vuelos presentaron problemas mecánicos?

Problema resuelto

En 1997, la legislatura de Illinois debatió varias propuestas para reformar la financiación de las escuelas estatales (*Peoria Journal Star*, mayo de 1997). Se aducía que el monto promedio que invertía Illinois por alumno era menor que el promedio de Estados Unidos de US$5,541. Un estudio realizado por Quality Counts, el "guardián" del estado en cuanto a la educación basada en los ciudadanos, reportó una media de US$5,015 por alumno.

El Presidente de la Cámara de Representantes de Estados Unidos, Michael Madigan (D-Chicago), reportó que más del 40% del pueblo apoyaba el plan del gobernador Jim Edgar de incrementar el impuesto a la renta estatal en más del 25% para financiar la educación. Sin embargo, el Presidente del Senado James Philip (R-Wood Dale) afirmó que el apoyo no era así de penetrante. El líder republicano Lee Daniels (R-Elmhurst) reportó que se gastaba un promedio de US2.500.000 por colegio en Illinois.

Mark Boozell, el asesor del gobernador para asuntos de educación, realizó una encuesta de opinión pública. Descubrió que se gastaba un promedio de US$5,112 con base en una muestra de 1,200 estudiantes, para igualarse con otros en el estudio. Se asume una desviación estándar de US$1,254. Boozell también encontró que las 25 escuelas encuestadas reportaron una media de US$2.200.000. Se asume una desviación estándar de US$900.000. Boozell además aprendió que de los 1,000 contribuyentes a quienes se encuestó, 355 apoyaron el plan del gobernador de incrementar los impuestos para pagar la reforma educativa.

a. Pruebe el argumento de que el gasto promedio en Illinois es menor que el promedio de Estados Unidos de US$5,541 a un nivel de significancia del 5%, y calcule el valor *p*.

Solución

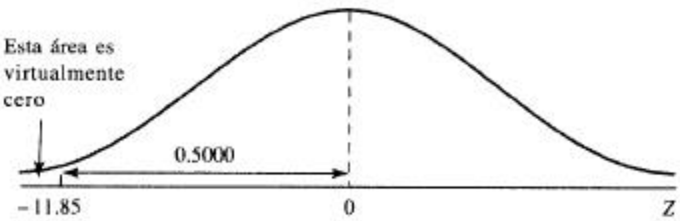
$$H_0: \mu \geq 5541 \qquad H_A: \mu < 5541$$

$$Z = \frac{5112 - 5541}{\frac{1254}{\sqrt{1200}}} = -11.85$$

Regla de decisión: "No rechazar H_o si $Z \geq -1.65$. De lo contrario rechazar".

Debido a que $Z = -11.85 < -1.65$, la hipótesis nula $H_0: \mu \geq 5541$ se rechaza. Los datos sustentan la afirmación de que la financiación de Illinois está por debajo del promedio nacional.

Como lo muestra la siguiente figura, el valor *p*, el área de la cola que va más allá del valor del estadístico para la muestra de −11.85, es virtualmente cero.

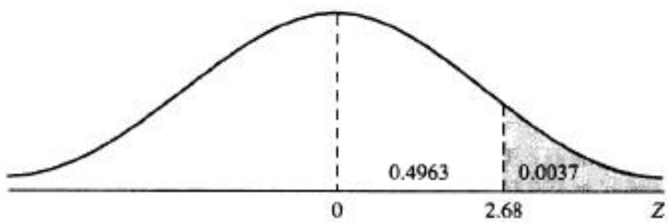


b. Pruebe la hipótesis de Quality Counts con un nivel de significancia del 1%. Calcule el valor *p*.

Solución

$$H_0: \mu = 5015 \qquad H_A: \mu \neq 5015$$

$$Z = \frac{5112 - 5015}{\frac{1254}{\sqrt{1200}}} = 2.68$$



Regla de decisión "No rechazar H_0 si $-2.58 \leq Z \leq 2.58$. De lo contrario rechazar".

Debido a que $Z = 2.68 > 2.58$, rechace la hipótesis nula H_0: $\mu = 5015$. Quality Counts parece haber subestimado los gastos. Como lo muestra la figura, el valor p es $0.0037 \text{ X } 2 = 0.0074$.

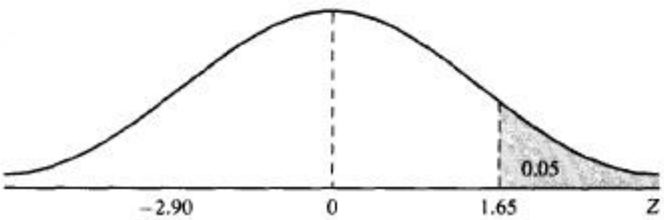
c. Pruebe la afirmación de Madigan a un nivel de significancia del 5%.

Solución

$$H_0: \pi \leq 0.40 \qquad H_A: \pi > 0.40$$

$$Z = \frac{0.355 - 0.40}{\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{1000}}} = -2.90$$

Regla de decisión: "No rechazar si $Z \leq 1.65$. De lo contrario rechazar".



Como lo muestra la figura, $Z = -2.90 < 1.65$, la hipótesis nula H_0: $\pi \leq 0.40$ no se rechaza. La afirmación de Madigan de que más del 40% de las personas están a favor de la propuesta no se confirma.

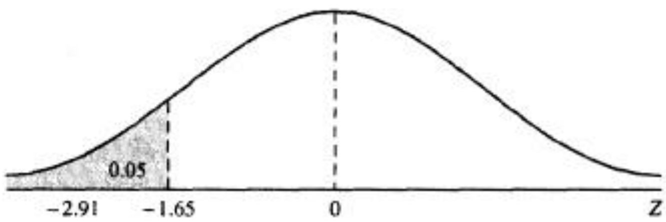
d. Compare los resultados de la afirmación de Madigan con los de Philip. Mantenga un α de 5%.

Solución

$$H_0: \pi \geq 0.40 \qquad H_A: \pi < 0.40$$

Regla de decisión: "No rechazar si $Z \geq -1.65$. De lo contrario rechazar".

Como se vio en la figura, debido a que $Z = -2.91 < -1.65$, la hipótesis nula H_0: $\pi \geq 0.40$ se rechaza. La afirmación de Philip de que menos del 40% de las personas están a favor de la propuesta del gobernador queda confirmada.



e. Pruebe la hipótesis de Daniel a un nivel de significancia del 5%.

Solución

$$H_0: \mu = 2.5 \qquad H_A: \mu \neq 2.5$$

$$t = \frac{2.2 - 2.5}{\frac{0.9}{\sqrt{25}}} = -1.667$$

Regla de decisión: "No rechazar si $-2.064 \leq t \leq 2.064$. De lo contrario rechazar".

Ya que $t = -1.667$, no rechace H_0: $\mu = 2.5$. La afirmación de Daniel se confirma.

Lista de fórmulas

[8.1]	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_H}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	Z para μ cuando σ es conocida.
[8.2]	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	Z para μ cuando σ es desconocida.
[8.3]	$t = \frac{\bar{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	t para μ con una muestra pequeña
[8.4]	$Z = \frac{p - \pi_H}{\sigma_p}$	Z para π
[8.5]	$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_H(1 - \pi_H)}{n}}$	Error estándar de las proporciones muestrales.

Ejercicios del capítulo

48. Ralph Root trabaja en el vivero en el Kmart local. En su esfuerzo por estimar la tasa de crecimiento promedio de los pensamientos que venden, Ralph no sabe qué hacer para explicar el papel del valor crítico en una prueba de hipótesis. Ayude al pobre Ralph a solucionar el problema.

49. Ralph (de la pregunta anterior) debe determinar si un proveedor está cumpliendo con las especificaciones de producción requeridas. Si no lo está haciendo y Ralph continúa comprándole, tendrá graves consecuencias. Si lo está cumpliendo pero Ralph decide comprarle a alguien más, poco se pierde. Plantee las hipótesis que Raph debe utilizar. ¿Debería utilizar un nivel de significancia grande o pequeño? ¿Por qué?

50. Describa el efecto de un incremento en el tamaño de la muestra en:

a. La probabilidad de un error tipo I

b. Los valores críticos

Ilustre su respuesta con una gráfica apropiada.

51. ¿Qué es un error tipo II y cuál es su relación con el error tipo I? $P(\text{tipo I}) + P(\text{tipo II}) = 1$?

52. ¿Por qué un valor p extremadamente bajo significa que la hipótesis nula es probable que sea rechazada? Utilice una gráfica en su respuesta.

53. Un contrato de manejo laboral exige una producción diaria promedio de 50 unidades. Una muestra de 150 días revela una media de 47.3, con una desviación estándar de 5.7 unidades. Fije $\alpha = 5\%$ y determine si se cumple con la disposición del contrato. Calcule el valor p.

54. The Colonial Canning Company de Claremont, California, utiliza una máquina para llenar sus latas de quinoto (naranja china) de 18 onzas. Si la máquina funciona de forma inadecuada, debe reajustarse. Una muestra de 50 latas tiene una media de 18.9 onzas con una desviación estándar de 4.7 onzas. ¿Debería reajustarse la máquina? Si $\alpha = 5\%$. Calcule el valor p.

55. Del problema anterior, se tomó una muestra de 500 latas, dando la misma media y desviación estándar que la muestra más pequeña, ¿debería reajustarse la máquina?

56. Un artículo de la revista *Fortune* que discute la creciente tendencia que tienen los empleados a demandar a sus compañías por incumplimiento en las promesas respecto a los beneficios en salud propuestos, concluyó que el promedio de las demandas era por US$115,000. Cuarenta y dos demandas promediaron US$114,412. Se asume una desviación estándar de US$14,000. ¿La hipótesis se confirma al nivel de significancia del 7%? Calcule el valor p.

57. Los miembros de Strain and Sweat Health Club están molestos por una decisión del propietario de limitar las reservaciones de la cancha de racketball a una restricción de tiempo inaceptable. Ellos afirman que el tiempo de juego promedio dura dos horas. De los 27 últimos juegos se obtiene una media de 1.82 horas con una desviación estándar de 0.32 horas. El gerente acepta quitar el límite de tiempo si los miembros tienen razón en su afirmación. Sea $\alpha = 2\%$. ¿Qué debe hacer el gerente?

58. *Sports Illustrated* discutió los problemas que tenían las redes de televisión al transmitir los juegos de fútbol profesional, debido a las variaciones en la cantidad de tiempo que se toma el partido. Los juegos que tomaron un tiempo adicional, debido a los altos marcadores o a los numerosos recesos, abarcaron la franja de tiempo del siguiente programa, mientras que los juegos que requerían de menos tiempo dejaron a las cadenas con franjas de tiempo por llenar. NBC decidió probar la hipótesis de que debería asignar exactamente 3.1 horas por juego. Para probar esta hipótesis, se seleccionaron los tiempos de 12 juegos. Los resultados en horas son los siguientes. Si $\alpha = 1\%$, ¿qué debe hacer la NBC?

Tiempos (en horas) para 12 partidos de fútbol profesional en 1997		
2.91	3.19	3.05
3.21	3.09	3.19
3.12	2.98	3.17
2.93	2.95	3.14

59. El departamento de policía de Santa Clara, California, ha descubierto que los agentes de tránsito deberían hacer un promedio de 27 comparendos por mes. Si un agente hace más de esa cantidad, es probable que sea demasiado entusiasta en el ejercicio de sus funciones. Si hace menos comparendos, el agente puede no estar haciendo su trabajo minuciosamente. Para evaluar a sus agentes, el jefe anotó el número de comparendos realizados por los 15 agentes. Los resultados aparecen en la siguiente tabla. Con un nivel de significancia del 5%, ¿parece que los agentes están desempeñándose satisfactoriamente?

28	34	30
31	29	33
22	32	38
26	25	31
25	24	31

60. Una política de la compañía en State Farm Insurance es restringir la proporción de reclamaciones otorgadas a los asegurados al 25%. De las últimas 1,122 pólizas, 242 compensaron en su totalidad al asegurado. Si $\alpha = 0.10$, ¿se está considerando o no la política? Calcule el valor *p*.

61. Debido a la inflación en las notas, en la cual los profesores han venido dando notas muy altas, el decano insiste que cada profesor repruebe al 30% de sus estudiantes. En una muestra reciente de 315 estudiantes, el Profesor Nodoze reprobó a 112 estudiantes. ¿El profesor está cumpliendo con los requisitos que exige el decano? Sea $\alpha = 0.05$. Calcule el valor *p*.

62. Dada la estipulación del decano en el problema anterior, la facultad argumenta que restringe de forma indebida su autoridad para calificar. El decano relaja su requerimiento afirmando que la facultad debe reprobar un promedio del 30% de los estudiantes. La tasa de pérdida para 8 miembros de la facultad son:

$$0.27, 0.31, 0.32, 0.25, 0.33, 0.25, 0.26, 0.31$$

¿El decano va a ponerse feliz con estos datos? Sea $\alpha = 0.01$.

63. Un plan de reducción de peso estipula que 75% de las personas que participan en el plan deberían perder entre el 5% y 12% de su peso corporal en las primeras 6 semanas. Si más del 75% pierden la cantidad estipulada, la dieta es demasiado severa. Si menos del 75% de los participantes pierden la cantidad de peso estipulado, la dieta es demasiado suave. De las 450 personas encuestadas, 347 perdieron la cantidad de peso dentro del rango tolerable. A un nivel de significancia del 5%, qué nos dicen estas cifras sobre la dieta?

64. El gerente del mercado Whatchaneed considera que el 50% de sus clientes gasta menos de US$10 en cada visita a la tienda. Muchas de sus decisiones en la fijación de los precios se basan en esta suposición. Él decide probar esta suposición tomando como una muestra de 50 clientes cuyos gastos totales aparecen a continuación. ¿Qué revelan estos datos sobre las decisiones en la fijación de precios que toma el gerente? Sea $\alpha = 5\%$

Gastos de los clientes				
US$18.17	US$21.12	US$4.12	US$8.73	US$8.42
7.17	17.18	27.18	2.17	7.12
2.08	6.12	2.17	6.42	9.17
4.17	2.12	8.15	12.18	2.63
18.02	9.99	3.02	8.84	21.22
8.73	10.00	0.65	17.17	18.42
4.12	5.12	11.12	11.17	4.82
8.15	5.12	3.32	17.89	5.55
5.15	12.12	4.83	11.12	11.11
17.15	18.17	10.12	8.92	17.83

65. Brach's Candies combina su caramelo de goma de manera tal que el 20% de las bolsas contengan por lo menos 5 colores de gomas. Control de calidad revisa 400 bolsas y encuentra que 87 bolsas contienen más de 5 colores. A un nivel de significancia del 1%, ¿se cumple con esta característica de calidad? Calcule el valor *p*.

66. Biggie Burguer afirma que su especial de lujo tiene por lo menos 0.25 libras de carne. Una muestra de 100 hamburguesas tiene una media de 0.237 libras, con una desviación estándar de 0.04 libras. ¿Biggie Burguer es culpable de falsa publicidad a un nivel de significancia del 5%?

67. Minit-Mart, una cadena de almacenes en toda la nación, afirmó en *The Wall Street Journal* que no abrirá una tienda en ninguna localidad a menos que el ingreso mediano en el vecindario sea de por lo menos de $12,000. Una encuesta a 200 familias de un barrio determinado, produce un ingreso promedio de US$11,852 con una desviación estándar de US$1,517. ¿Debería Mini-Mart abrir la tienda si se cumple con todos los otros criterios de un sitio deseable? Sea $\alpha = 1\%$.

68. Un fabricante de neumáticos ha venido produciendo llantas de invierno en Akron, Ohio, durante más de 40 años. Su mejor neumático ha tenido un promedio de 52,500 millas de duración, con una desviación estándar de 7,075 millas. Se pensó que un nuevo diseño en la banda de rodamiento agregaba resistencia adicional a las llantas. Se prueban sesenta llantas con el nuevo diseño, revelando una media de 54,112 millas, con una desviación estándar de 7,912 millas. ¿A un nivel de significancia del 5%, podría decirse que la nueva banda de rodamiento mejora el desgaste de la llanta? (Nota: Además de la desviación estándar muestral de 7,912, la desviación estándar poblacional de 7,075 también es conocida. ¿Cuál debería utilizarse en los cálculos? ¿Por qué?

69. El espionaje industrial es un problema cada vez mayor. *Business Week* reportó que los primeros empleados de Du Pont exigieron que la empresa química pagara un rescate de US$10.000.000, o la competencia recibiría el secreto de la compañía para fabricar la Lycra, la popular fibra utilizada en la ropa interior, en los trajes de baño y en otras prendas. Se ha estimado que la extorsión corporativa cuesta a las compañías un promedio de más de US$3.500.000. Si 75 casos de esta naturaleza se analizan y se encuentra un promedio de US$3.710.000 con una desviación estándar de US$1.210.000, ¿ese estimado se confirma a un nivel de significancia del 10%? Calcule el valor p.

70. Rex Cutshall, director nacional de Multimedia Entertainment, desea garantizar que los episodios de La Guerra de las Galaxias: La Siguiente Generación (*Star Trek: The Next Generation*) tengan un promedio no superior a 57 minutos de duración. Ochenta episodios dan una media de 63.2 minutos con una desviación estándar de 23.7 minutos:

a. A un nivel de significancia del 1%, ¿debería Rex alterar la longitud de los programas?

b. ¿Cuál es el nivel de significancia más bajo al cual Rex puede rechazar la hipótesis?

71. Vince Showers, director ejecutivo de Sleaz Entertainment, afirma que la edad promedio de los clientes de Sleaz es de por lo menos de 23 años. Si este no es el caso, Showers enfrentará cargos de violación de las ordenanzas locales respecto a la decencia pública. Cien clientes promediaron 19.7 años de edad con $s = 10.2$ Sea α 1%.

a. Plantee y pruebe las hipótesis. ¿Debe Showers comparecer ante la corte?

b. Calcule e interprete el valor p.

72. Su empresa ha determinado en el pasado que exactamente el 53% de las personas que están en su área de mercadeo prefieren su producto. Se invierten varios miles de dólares en un programa publicitario para incrementar su participación en el mercado. Luego, una muestra de 622 personas revela que 348 prefieren su producto. A un nivel de significancia del 4%, ¿el dinero fue bien invertido?

73. Usted ha estado trabajando para una empresa de publicidad en Chicago durante cinco años. Ahora usted está planeando iniciar su propia compañía, pero teme perder muchos de sus clientes. Usted decide irse, sólo si por lo menos el 30% de las cuentas que usted maneja se irán con usted y le seguirán a su nuevo negocio. Como prueba, usted descubre que 14 de las 54 cuentas que tomó como muestra expresan su deseo de irse con usted si usted deja la compañía. A un nivel de significancia del 7%, ¿debería usted comenzar su propia empresa?

74. Como analista de mercadeo recientemente contratado para Griffin Industries, usted tiene la responsabilidad de garantizar que más del 10% de la población conozca su nueva línea de productos. De las 300 personas, 36 expresan que sí la conocen. Sea α 4%.

a. Plantee y pruebe las hipótesis apropiadas. ¿Ha hecho su trabajo?

b. ¿Cuál es el valor α más bajo al cual usted puede rechazar la hipótesis nula?

75. Su posición como representante de mercadeo para Wakco Wheels, un fabricante de carros y camiones de juguete para niños menores de 5 años, requiere que usted pruebe la durabilidad del producto. Su compañía afirma que el Richard Petty Rapid Roller soporta por lo menos 200 libras de presión por pulgada cuadrada como mínimo sin dañarse. Usted prueba 100 de estos modelos y halla un punto de equilibrio promedio de 195 libras, con una desviación estándar de 22.2 libras:

a. ¿Se confirma lo que dice su compañía a un nivel de significancia del 5%?

b. Si la afirmación es verdadera, ¿cuál es la probabilidad de obtener un valor Z igual de bajo o más bajo que el obtenido por la muestra?

76. Un proveedor de Ralph's Tanning Parlor and Quickie Car Wash Emporium insiste en que no más del 33% de los clientes de Ralph gastan menos de US$20 en promedio por visita. De los 80 clientes tomados aleatoriamente, 29 gastaron menos de US$20.

a. ¿El proveedor está en lo cierto a un nivel de significancia del 1%?

b. ¿Cuál es el valor α más bajo al cual se consideraría que el proveedor está errado?

77. Weight Watchers afirma que las personas que utilizan su programa pierden un promedio de 42 libras. Una muestra de 400 personas determinó que quienes hacían la dieta perdían un promedio de 43.17 libras, con una desviación estándar de 8.7 libras:

a. ¿La afirmación se confirma al nivel del 5%?

b. ¿Cuál es el valor α más bajo al cual puede rechazarse la afirmación?

78. Hilda Radner posee una empresa publicitaria en Palo Alto, California. El negocio ha mejorado recientemente e Hilda piensa que los ingresos diarios son superiores a US$500 comparado con el año anterior. Una muestra de 256 días revela una media de US$520 y una desviación estándar de US$80.70.

a. A un nivel de significancia del 1%, ¿Hilda está en lo cierto?

b. Si los ingresos promedio en realidad son de US$507, ¿cuál es la probabilidad de cometer un error tipo II? Dibuje las curvas normales adecuadas para ilustrar.

PUESTA EN ESCENA

Como se vio en la sección Planteamiento del Escenario a comienzos de este capítulo, First Bank of America está planeando un análisis estadístico extensivo de sus operaciones. El Sr. Hopkins debe hacer pruebas sobre diferentes aspectos de las operaciones del First Bank. Los resultados de estas pruebas ayudarán en la formulación de muchas políticas operativas. El Sr. Hopkins toma de muestra 1,200 clientes y halla que 850 se oponen a que se cobre en el extracto mensual US$2 cada mes por los cheques anulados del depositante. Estos 1,200 clientes tienen un depósito promedio en sus cuentas de ahorro de US$4,533, con una desviación estándar de US$1,776. El Sr. Hopkins también encontró que 27 negocios locales tenían saldos promedio de US$344,500 con una desviación estándar de US$104,600.

Con base en estos datos, el Sr. Hopkins determina que si más del 65% de los depositantes se niega al recargo de US$2, la política no se implantará. Además, si las cuentas de ahorros de los depositantes individuales son de US$4,500 en promedio, planea ofrecer un programa de tasa de interés graduada con tasas más elevadas para las cuentas más grandes. Finalmente, si las cuentas comerciales tienen por lo menos US$340,000, el Sr. Hopkins establecerá una división administrativa para manejar las cuentas comerciales.

Ayude al Sr. Hopkins en su esfuerzo. Suministre todas las conclusiones y hallazgos relevantes incluyendo los valores *p* cuando sea apropiado. Presente sus conclusiones como se especifica que el apéndice I.

Del escenario a la vida real

Los datos sobre participación de mercado en los depósitos bancarios se obtiene de la relación del total de depósitos de un solo banco con los depósitos agregados en todos los bancos comerciales nacionales. Si usted fuera Lawrence Hopkins de First Bank of America, ¿en dónde obtendría datos para el análisis sobre participación de mercado que aparece en la sección inicial de este capítulo "Planteamiento del Escenario"? ¿Espera tener dificultades al aprender sobre los depósitos totales en su propio banco? ¿En dónde buscaría las cifras agregadas de la industria?

Sorprendentemente, las cifras agregadas que necesitará ya se encuentran disponibles en Internet provenientes de Board of Governors del Sistema Federal de Reservas (*www.bog.frb.fed.us*). En la página de presentación de Board of Governors, desplácese hasta el encabezado Domestic and International Research (Investigación Nacional e Internacional). Bajo este encabezado haga clic en "Estadísticas: Publicaciones y datos históricos". Allí usted puede escoger si desea ver una gran variedad de datos bancarios de Estados Unidos. Seleccione "Assets and Liabilites of Commercial Banks in the United States", "H. 8 Activos y pasivos de los Bancos Comerciales en Estados Unidos-datos históricos''. Allí encontrará aproximadamente 10 años de datos mensuales y semanales sobre depósitos, y datos actuales sobre el mes anterior a la fecha de su búsqueda. Compare lo fácil de obtener los datos de Board of Governors a través de American Banking Association (*www.aba.com*).