

APÉNDICE II.

Nota sobre probabilidad (1938)

La nota que sigue, «Un conjunto de axiomas independientes para la probabilidad», se publicó por vez primera en *Mind*, N. S., 1938, páginas 275 y sigs. Es breve, pero, por desgracia, está bastante mal escrita: era mi primera publicación en idioma inglés, y, además, no pude corregir las pruebas (me encontraba por entonces en Nueva Zelanda).

El texto introductorio de la nota —que es lo único que se reproduce aquí— enuncia claramente (y creo que era la primera vez que se hacía) que habría de construirse la teoría matemática de la probabilidad como un sistema «formal»: es decir, un sistema susceptible de recibir múltiples interpretaciones, y entre ellas, por ejemplo, 1) la interpretación clásica, 2) la frecuencial, y 3) la lógica (que ahora se llama, a veces, interpretación «semántica»).

Una de las razones por las que quería desarrollar una teoría formal que fuese independiente de la interpretación concreta que se eligiese, era que esperaba hacer patente posteriormente que lo que había llamado en mi libro «grado de corroboración)! (o de «confirmación», o de «aceptabilidad») no era una «probabilidad», esto es, que sus propiedades eran incompatibles con el cálculo de probabilidades forma] (cf. el apéndice *IX, y, de mi *Postscript*, los apartados *27 a *32).

Otro de los motivos que tenía para escribir esta nota consistía en mi intención de mostrar que lo que en el libro había llamado «probabilidad lógica» era la interpretación lógica de cierta «probabilidad absoluta»: o sea, de una probabilidad $p(x, y)$ en la que y fuese tautológica. Puesto que —con los símbolos que empleo en la nota— cabe escribir una tautología así, no—(x y no- r), o bien $x\bar{x}$, podemos definir la probabilidad absoluta de x (que se puede escribir « $p(x)$ » o « $pa(x)$ ») a base de la relativa del modo siguiente:

$$p(x) = p(x, x\bar{x}), \text{ o } pa(x) = p(x, x\bar{x}) = p(x, y\bar{y})$$

En la nota se da una definición parecida.

Cuando la escribí no conocía el libro de Kolmogorov *Foundations of Probability*, aun cuando se había publicado primeramente en alemán en 1933. Kolmogorov se encaminaba a metas semejantes, pero su sistema es menos «formal» que el mío, y de ahí que pueda recibir menos interpretaciones. La diferencia principal es la siguiente: él interpreta los argumentos del funtor probabilístico como *conjuntos*, y supone —por

tanto— que tienen miembros (o «elementos»); pero en mi sistema no se asume nada análogo: *en mi teoría no se hace suposición alguna acerca de tales argumentos (a los que llamo «elementos»), excepto la de que sus probabilidades se comportan del modo exigido por los axiomas.* Sin embargo, el sistema de Kolmogorov puede considerarse como una de las interpretaciones posibles del mío (véanse mis observaciones sobre el particular en el apéndice *IV).

El sistema de axiomas que presenté al final de la nota era algo torpe, y poco después de su publicación lo reemplacé por otro más sencillo y más elegante. Tanto uno como otro estaban formulados a partir del *producto* (o conyunción) y el *complemento* (o negación), como ha ocurrido con los demás sistemas que he desarrollado posteriormente^[*1]; en aquella época no había logrado deducir la ley distributiva de otras más sencillas (tales como la asociativa), y, por ello, tenía que enunciarla como axioma; ahora bien, la ley distributiva resulta sumamente torpe cuando se la escribe a base del *producto* y el *complemento*. Por esta razón he omitido el final de la nota, y con él mi antiguo sistema de axiomas; en su lugar enunciaré ahora de nuevo mi otro sistema, más sencillo (cf. *Brit. Journal Phil. Sc., loc. cit.*), que —como el sistema antiguo— está basado sobre la probabilidad absoluta (desde luego, puede deducirse del que doy en el apéndice *IV, que se basa en la probabilidad relativa): lo hago en un orden correspondiente al que tenía el de la antigua nota:

| | | |
|----|--|------------------|
| A1 | $p(xy) \geq p(yx)$ | (Conmutación) |
| A2 | $p((xy)z) \geq p(x(yz))$ | (Asociación) |
| A3 | $p(xx) \geq p(x)$ | (Tautología) |
| A4 | Existen al menos un x y un y tales que $p(x) \neq p(y)$ | (Existencia) |
| B1 | $p(x) \geq p(xy)$ | (Monotonía) |
| B2 | $p(x) = p(xy) + p(xy)$ | (Complemento) |
| B3 | Para todo x existe un y tal que $p(y) \geq p(x)$, y $p(xy) = p(x)p(y)$ | (Multiplicación) |

Doy a continuación mi antigua *nota* de 1938, con ligeras correcciones de estilo.

Un conjunto de axiomas independientes para la probabilidad

Desde el punto de vista formal de la «axiomática» cabe describir la probabilidad como un funtor diádico^[1] (esto es, una función numérica de dos argumentos que no es necesario que tengan, a su vez, valores numéricos) cuyos argumentos son nombres variables o constantes (que pueden interpretarse, por ejemplo, como *nombres* de predicados o de enunciados^[1], según sea la interpretación que se elija). Si queremos

admitir para ambos argumentos las mismas reglas de sustitución y la misma interpretación, entonces se puede denotar el funtor mencionado con

$$\langle\langle p(x_1, x_2) \rangle\rangle$$

lo cual puede leerse, «la probabilidad x_1 con respecto a x_2 ».

Es conveniente construir un sistema de axiomas, s_1 , en el que « $p(x_1, x_2)$ » aparezca como variable primitiva (no definida), y que esté constituido de tal suerte que admita indiferentemente cualquiera de las interpretaciones que se han propuesto. Las tres que se han debatido más ampliamente son: 1) la definición clásica^[2] de probabilidad como razón de los casos favorables a los igualmente posibles; la teoría frecuencia^[3], que define la probabilidad como frecuencia relativa de cierta clase de acontecimientos dentro de otra clase determinada, y 3) la teoría lógica^[4], que la define como el grado de relación lógica entre enunciados (que se hace igual a 1 si x_1 es consecuencia lógica de x_2 , e igual a 0 si la negación de x_1 es consecuencia lógica de x_2).

Cuando se construye semejante sistema s_1 , capaz de ser interpretado de una cualquiera de las formas mencionadas (y de algunas otras también), es aconsejable introducir —valiéndose de un grupo especial de axiomas (véase más abajo el grupo A)— ciertas funciones no definidas de los argumentos: por ejemplo, la conyunción (« x_1 y x_2 », que simbolizamos aquí con « x_1x_2 ») y la negación («no- x_1 », que simbolizo por « \bar{x}_1 »). De este modo se puede expresar simbólicamente una idea tal como « x_1 y no x_1 » mediante « $x_1 \bar{x}_1$ », y su negación por « $\overline{x_1 \bar{x}_1}$ » —si se adopta 3), esto es, la tercera interpretación, ha de considerarse « $x_1 \bar{x}_1$ » como el nombre de un enunciado que es la conyunción del enunciado cuyo nombre es « x_1 » y de su negación.

Suponiendo que se hayan formulado del modo apropiado las reglas de sustitución, puede demostrarse que para cualesquiera x_1, x_2 y x_3 ,

$$p(x_1, \overline{x_2 \bar{x}_2}) = p(x_1, \overline{x_3 \bar{x}_3}).$$

Así pues, el valor de $p(x_1, \overline{x_2 \bar{x}_2})$ depende exclusivamente de la única variable verdadera, x_1 ; esto justifica^[5] la siguiente definición explícita de un nuevo funtor, monódico, « $pa(x_1)$ », que puedo llamar «probabilidad absoluta»;

$$pa(x_1) = p(x_1, \overline{x_2 \bar{x}_2}) \quad \text{Df}_1$$

(Se tiene un ejemplo de interpretación de « $pa(x_1)$ » en el sentido de 3) —o sea, de la interpretación lógica— con el concepto de «probabilidad lógica» que he empleado en anteriores publicaciones^[6].)

Ahora bien, es posible realizar paso a paso toda la construcción empezando por el otro extremo: en lugar de introducir « $p(x_1, x_2)$ » como concepto primitivo (funtor

primitivo) de un sistema axiomático s_1 , y definir explícitamente « $pa(x_1)$ », podemos construir otro sistema de axiomas s_2 en el que aparezca « $pa(x_1)$ » como variable primitiva (no definida), y en el que pasemos después a definir explícitamente « $p(x_1, x_2)$ » a partir de « $pa(x_1)$ », del modo siguiente:

$$p(x_1, x_2) = \frac{pa(x_1 x_2)}{pa(x_2)} \quad (\text{Df}_2)$$

Los fórmulas que en s_1 se adoptan como axiomas (y también Df_1) se convierten ahora en teoremas de s_2 : es decir, pueden deducirse mediante el nuevo sistema de axiomas s_2 .

Cabe mostrar que los dos métodos descritos —la elección de s_1 y Df_1 , por un lado, y la de s_2 y Df_2 , por el otro— no son igualmente convenientes desde el punto de vista de la axiomática formal: el segundo es superior al primero en ciertos aspectos, de los cuales el más importante es el de que es posible formular en s_2 un axioma de unicidad más exigente que el correspondiente de s_1 (si no se restringe la generalidad de este último sistema); lo cual se debe a que si $pa(x_2) = 0$, el valor de $p(x_1, x_1)$ se hace indeterminado^[*1].

Incluyo un sistema de axiomas independientes, s_2 , del tipo descrito más arriba (es fácil construir valiéndose de él un sistema s_1); el cual, combinado con la definición Df_2 , basta para deducir la teoría matemática de la probabilidad. Los axiomas pueden dividirse en dos grupos: el A está formado por las propiedades yuncionales —conyunción y negación— del argumento, y es prácticamente una adaptación del sistema de postulados para la llamada «álgebra de la lógica^[7]»; y el B presenta los axiomas propios de la medida de la probabilidad. Unos y otros son:

(Aquí se encontraba —con diversas errata— el complicado sistema de axiomas que he reemplazado luego por el más sencillo que doy arriba^[*2]).

Christchurch, N. Z., 20 de *noviembre* de 1937.

APÉNDICE III.

Sobre el empleo heurístico de la definición clásica de probabilidad, especialmente para la deducción del teorema general de multiplicación

La definición clásica de la probabilidad como número de casos favorables dividido por el de casos igualmente posibles tiene considerable valor heurístico. Su inconveniente principal reside en que, si bien es aplicable a dados homogéneos o simétricos, por ejemplo, no lo es a dados cargados: dicho de otro modo, en que no admite que los casos posibles tengan distintos pesos. Pero en algunas situaciones especiales hay modos y maneras de superar tal dificultad; y en ellas precisamente tiene su valor heurístico la antigua definición: toda definición satisfactoria ha de estar de acuerdo con la antigua siempre que pueda dominarse la dificultad de la asignación de pesos —y, por tanto, *a fortiori*, cuando la definición antigua sea aplicable.

1) La definición clásica será aplicable en todos los casos en que conjeturemos estar frente a pesos iguales —o posibilidades iguales—, y, por ello, frente a iguales probabilidades.

2) Será aplicable en todos los casos en que podamos transformar el problema de modo que se obtengan iguales pesos, posibilidades o probabilidades.

3) También lo será, con leves modificaciones, siempre que podamos asignar una función de ponderación a las diversas posibilidades.

4) Será aplicable, o tendrá valor heurístico, en la mayoría de los casos en que una simplificación excesiva que opere con posibilidades iguales lleve a una solución próxima a las probabilidades cero o uno.

5) Tendrá gran valor heurístico en casos en que puedan introducirse pesos en forma de probabilidades. Tomemos, por ejemplo, el sencillo problema siguiente: hemos de calcular la probabilidad de sacar un número par con un dado cuando *no se cuentan* las tiradas en que sale el número seis, *sino que se considera que «no ha habido tirada»*. La definición clásica conduce, desde luego, a $2/5$. Supongamos ahora que el dado esté cargado, y que se nos den las probabilidades (desiguales) de los diversos lados, $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(6)$; aún es posible calcular la probabilidad pedida, que será igual a

$$\frac{p(2) + p(4)}{p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)} = \frac{p(2) + p(4)}{1 - p(6)}$$

Es decir, podemos modificar la definición clásica de suerte que nos dé la sencilla regla siguiente:

Dadas las probabilidades de todos los casos posibles (y mutuamente excluyentes), la probabilidad pedida es igual a la suma de las probabilidades de todos los casos favorables (mutuamente excluyentes) dividida por la de aquellas probabilidades.

Es evidente que podemos expresar también esta regla como sigue, para casos mutuamente excluyentes o no:

La probabilidad pedida es siempre igual a la probabilidad de la disyunción de todos los casos favorables (mutuamente excluyentes o no), dividida por la probabilidad de la disyunción de todos los casos posibles (mutuamente excluyentes o no).

6) Cabe emplear las reglas dadas para una deducción heurística de la definición de probabilidad relativa y del teorema general de multiplicación.

Pues, simbolicemos «par» por « α » y «distinto de seis» por « b »; entonces, el problema que habíamos planteado de determinar la probabilidad de que salga par si no tenemos en cuenta las tiradas en que sale seis, es, sin duda, el mismo que el de determinar $p(a, b)$: es decir, la probabilidad de α supuesto b , o sea, la probabilidad de encontrar un α entre los b .

El cálculo puede llevarse a cabo del modo siguiente: En lugar de escribir « $p(2) + p(4)$ » podemos escribir, con mayor generalidad, « $p(ab)$ »: o sea, la probabilidad de que salga un número par distinto de seis; y en vez de escribir « $p(1) + p(2) + \dots + p(5)$ » —o, lo que es lo mismo, « $1 - p(6)$ »— podemos poner « $p(b)$ »: esto es, la probabilidad de que salga un número distinto de seis. No cabe duda de que estos cálculos son enteramente generales; y suponiendo $p(b) \neq 0$, llegamos a la fórmula

$$(1) \quad p(a, b) = p(ab) / p(b)$$

o a esta otra (más general, ya que sigue teniendo sentido aunque sea $p(b) = 0$),

$$(2) \quad p(ab) = p(a, b) p(b)$$

Éste es el teorema general de multiplicación para la probabilidad absoluta de un producto ab .

Sustituyendo « b » por « bc », obtenemos a partir de (2)^[1]:

$$p(abc) = p(a, bc) p(bc)$$

y, por tanto —al aplicar (2) a $p(bc)$ —:

$$p(abc) = p(a, bc) p(b, c) p(c)$$

o bien, suponiendo $p(c) \neq 0$,

$$p(abc) / p(c) = p(a, bc) p(b, c).$$

Pero, teniendo en cuenta (1), esta última igualdad equivale a

$$(3) \quad p(ab, c) = p(a, bc) p(b, c).$$

Que es el teorema general de multiplicación para la probabilidad *relativa* de un producto ab .

7) Es posible formalizar con facilidad la deducción que hemos esbozado, pero la demostración formalizada tendrá que partir de un sistema de axiomas en lugar de hacerlo de una definición. Pues el empleo heurístico que hemos hecho de la definición clásica ha consistido en introducir posibilidades ponderadas —que es prácticamente lo mismo que probabilidades— en el *definiens* clásico; mas el resultado de tal modificación ya no puede considerarse como una definición auténtica, puesto que tiene que fijar unas relaciones entre probabilidades distintas, y equivale, por eso, a la construcción de un sistema axiomático. Si queremos formalizar nuestra deducción —que utiliza implícitamente las leyes de la asociación y de la adición de probabilidades— hemos de introducir reglas para estas operaciones en nuestro sistema de axiomas: tenemos un ejemplo en el sistema para probabilidades absolutas que he presentado en el apéndice *II.

Si formalizamos del modo dicho nuestra deducción de (3), solamente podremos llegar a este teorema imponiendo la condición «supuesto que sea $p(bc) \neq 0$ », como es obvio teniendo en cuenta la deducción heurística.

Pero (3) puede tener sentido aun sin este requisito si es que podemos construir un sistema axiomático en el que $p(a, b)$ tenga sentido en general, incluso si $p(b) = 0$. Es evidente que no podríamos deducir (3) del modo bosquejado en una teoría de este tipo, pero podríamos adoptar (3) como axioma y considerar la deducción mencionada —véase también la fórmula (1) del antiguo apéndice II— como una justificación heurística de su adopción: así hemos hecho en el sistema que se describe en el apéndice siguiente (*IV).

APÉNDICE *IV.

Teoría formal de la probabilidad

Teniendo en cuenta que un enunciado probabilístico tal como « $p(a, b) = r$ » puede ser interpretado de muchas maneras distintas, me ha parecido conveniente construir un sistema puramente «formal», «abstracto» o «autónomo», en el sentido de que sus «elementos» (re- presentados por « a », « b », ...) puedan interpretarse de muchos modos diferentes, de modo que no estemos atados a ninguna de estas interpretaciones. La primera vez que propuse un sistema formal de este tipo lo hice en una nota publicada en *Mind* en 1938 (incluida aquí en el apéndice *II); desde aquella fecha he construido varios sistemas simplificados^[1].

Hay tres características que distinguen una teoría de este tipo de las demás: I) es una teoría formal, es decir, no supone una interpretación en particular, aunque permite —por lo menos— todas las interpretaciones conocidas; II) es autónoma, o sea, se adhiere al principio de que sólo es posible deducir conclusiones probabilísticas de premisas probabilísticas: dicho de otro modo, al principio de que el cálculo de probabilidades es un método de transformar unas probabilidades en otras, y III) es simétrica: esto es, se halla construida de tal modo que siempre que exista una probabilidad $p(a, b)$ —es decir, una probabilidad de a supuesto b — existe también una probabilidad $p(b, c)$, y ello incluso en el caso de que la probabilidad absoluta de b — $p(b)$ — sea igual a cero, o sea, incluso cuando $p(b, \bar{a}\bar{a}) = 0$.

Por extraño que parezca, no parece haber existido hasta el momento teoría alguna de esta índole, si dejamos a un lado mis propios intentos anteriores en este campo. Otros autores han pretendido construir teorías «abstractas» o «formales» —así Kolmogorov—, pero siempre han asumido una *interpretación* más o menos específica: por ejemplo, han supuesto que en una ecuación como

$$p(a, b) = r$$

los «elementos» a y b son *enunciados*, o sistemas de enunciados; o bien que a y b son conjuntos, o sistemas de conjuntos; o tal vez propiedades, o clases finitas (agregados) de cosas.

Kolmogorov escribe^[2]: «La teoría de la probabilidad puede y debe desarrollarse como una disciplina matemática, a partir de axiomas, exactamente del mismo modo que la geometría y el álgebra»; y alude a «la introducción de conceptos geométricos básicos en los *Fundamentos de la geometría*, de Hilbert» y a otros sistemas abstractos parecidos.

Y, sin embargo, supone que en « $p(a, b)$ » —utilizo mi propia simbología, no la suya— a y b son *conjuntos*: con lo cual excluye, entre otras, la interpretación lógica según la cual a y b serían enunciados (o «proposiciones», si se prefiere). Dice, con mucha razón, que «carece de importancia qué es lo que representan los miembros del conjunto»; pero esta advertencia no basta para determinar el carácter formal de la teoría que busca, ya que en ciertas interpretaciones a y b no tienen miembros, ni nada que pudiera corresponderse con éstos.

Todo lo cual tiene graves consecuencias en lo que se refiere a la construcción real del sistema axiomático mismo.

Los que interpretan los elementos a y b como enunciados o proposiciones suponen, como es muy natural, que el cálculo de composición de enunciados (el cálculo proposicional) se cumple para ellos. Y, análogamente, Kolmogorov supone que las operaciones de adición, multiplicación y complementación de *conjuntos* son válidas para dichos elementos, puesto que los interpreta como conjuntos.

Más concretamente: se presupone siempre (a menudo sólo de un modo tácito) que ciertas leyes algebraicas, tales como la de la asociación

$$(a) \qquad (ab) c = a (bc)$$

la ley de conmutación

$$(b) \qquad ab = ba$$

o la ley de idempotencia

$$(c) \qquad a = aa$$

se cumplen para los elementos del sistema: es decir, para los argumentos de la función $p(\dots, \dots)$.

Una vez hecha esta suposición —ya tácita, ya explícitamente— se establecen otros axiomas o postulados para la probabilidad relativa,

$$p(a, b)$$

o sea, para la probabilidad de a dada la información b ; o bien para la probabilidad absoluta

$$p(a)$$

esto es, para la probabilidad de a (sin que esté dada información alguna, o solamente tautológica).

Pero este procedimiento es muy capaz de hacer que permanezca oculto el hecho —tan sorprendente y de tanta importancia— de que basten algunos de los axiomas o postulados que se adoptan para la probabilidad relativa $p(a, b)$, para *garantizar que los elementos cumplan todas las leyes del álgebra booleana*. Por ejemplo, las dos

fórmulas siguientes (cf. el apéndice precedente, *II):

$$(d) \quad p(ab) = p(a, b)p(b)$$

$$(e) \quad p(ab, c) = p(a, bc)p(b, c)$$

entrañan cierta forma de ley de la asociación; de ellas, la primera, (d), da origen también a una especie de definición de la probabilidad relativa a base de la absoluta:

$$(d') \quad \text{Si } p(b) \neq 0, \text{ entonces } p(a, b) = p(ab) / p(b),$$

mientras que la segunda, que es la correspondiente a las probabilidades relativas, es la «ley general de multiplicación», perfectamente conocida.

Como hemos dicho, las dos fórmulas (d) y (e) entrañan —sin necesidad de ningún otro supuesto (excepto la posibilidad de sustituir *probabilidades iguales*)— la forma siguiente de la ley de la asociación:

$$(f) \quad p((ab) c) = p(a (bc)).$$

Pero este hecho^[3], tan interesante, pasa inadvertido si se introduce (f) al *asumir* la identidad algebraica (a) —o sea, la ley de la asociación— incluso previamente a todo comienzo de desarrollo del cálculo de probabilidades: pues a partir de

$$(a) \quad (ab) c = a (bc)$$

podemos obtener (f) sin más que sustituir en la identidad

$$p(x) = p(x).$$

Con lo cual no se para mientes en que (f) es deductible de (d) y (e); o, dicho de otra forma, no se advierte que la asunción de (a) es completamente innecesaria si trabajamos con un sistema axiomático que contenga —o implique— (d) y (e); ni tampoco que cuando asumimos (a) además de (d) y (e) nos impedimos averiguar *qué tipo de relaciones están implicadas por nuestros axiomas o postulados*; ahora bien, una de las claves del método axiomático es justamente averiguar tal cosa.

En consecuencia, tampoco se cae en la cuenta de que (d) y (e), aunque implican (f) —esto es, una ecuación a base de la probabilidad *absoluta*— no implican por sí solas ni (g) ni (h), que son las fórmulas correspondientes a base de la probabilidad *relativa*:

$$(d) \quad p((ab) c, d) = p(a (bc), d)$$

$$(h) \quad p(a, (bc) d) = p(a, b (cd)).$$

Para deducir estas fórmulas —véase el apéndice *v, (41) a (62)— se requieren muchas más cosas además de (d) y (e): hecho que tiene un interés notable desde un

punto de vista axiomático.

He puesto este ejemplo para que se viera que Kolmogorov no llega a llevar a cabo su programa; y lo mismo ocurre con todos los demás sistemas que han llegado a mi conocimiento. En mis propios sistemas de postulados para la probabilidad pueden deducirse todos los teoremas del álgebra de Boole; y ésta, a su vez, puede interpretarse de muchas maneras: como un álgebra de conjuntos, de predicados, de enunciados (o proposiciones), etc.

Otro punto de considerable importancia es el problema de un sistema «simétrico». Tal como hemos dicho más arriba, es posible definir la probabilidad relativa a base de la absoluta, del modo siguiente:

(d') Si $p(b) \neq 0$, entonces $p(a, b) = p(ab) / p(b)$.

Ahora bien, el antecedente «Si $p(b) \neq 0$ » es ineludible, ya que la división por cero *no es una operación definida*; por ello, la mayoría de las fórmulas de la probabilidad relativa pueden expresarse —en los sistemas al uso— sólo en forma condicional, es decir, análogamente a (d'). Por ejemplo, en casi todos los sistemas (g) no es válida, y ha de ser reemplazada por otra fórmula condicional mucho más débil:

(g') Si $p(d) \neq 0$, entonces $p((ab) c, d) = p(a (bc), d)$.

y es menester también anteponer a (h) una condición análoga.

Algunos autores no se han dado cuenta de esta cuestión (por ejemplo, Jeffreys, y también Von Wright: este último utiliza condiciones que equivalen a $b \neq 0$, pero esto no asegura que $p(b) \neq 0$, especialmente puesto que su sistema contiene un «axioma de continuidad»); por tanto, sus sistemas no son coherentes en su estado actual, aunque a veces puedan arreglarse. Otros se han percatado de lo que ocurre, pero debido a ello sus sistemas son muy débiles (al menos comparados con el mío): puede ocurrir en tales sistemas que

$$p(a, b) = r$$

sea una fórmula con sentido, pero que —simultáneamente y con idénticos elementos— no lo sea

$$p(b, a) = r$$

esto es, no esté definida convenientemente —o incluso no sea definible— debido a ser $p(a) = 0$.

Pero un sistema de este tipo no sólo es débil, sino que para muchos fines interesantes es *inadecuado*: por ejemplo, no se puede aplicar del modo apropiado a los enunciados cuya probabilidad absoluta es cero, aunque esta aplicación es sumamente importante: las leyes universales tienen, por ejemplo, según podemos asumir aquí (cf. los apéndices *vii y *viii), probabilidad cero. Si tomamos dos teorías universales, s y t , tales que s sea deductible de t , deberíamos poder afirmar que

$$(s, t) = 1$$

Pero si $p(t) = 0$ no podemos hacerlo en los sistemas probabilísticos acostumbrados. Por parecidas razones, puede ocurrir que la expresión

$$p(d, t)$$

(en donde d son los datos que abogan en favor de la teoría t) no esté definida; ahora bien, esta expresión es importantísima (es la «verosimilitud» de t sobre la base de los datos d , según Fisher; véase también el apéndice *IX).

Así pues, se necesita un cálculo de probabilidades en el que podamos operar con argumentos segundos que tengan probabilidad absoluta igual a cero: por ejemplo, es indispensable para toda discusión seria de la teoría de la corroboración o confirmación.

Ésta es la razón por la que he tratado durante varios años de construir un cálculo de probabilidades relativas en el que, siempre que

$$p(a, b) = r$$

sea una fórmula bien formada, esto es, verdadera o falsa,

$$p(b, a) = r$$

lo sea asimismo, incluso si $p(a) = 0$: sistema al que podemos aplicar el calificativo de «simétrico». El primer sistema de este tipo que he publicado^[4] procede de 1955, y resultó ser mucho más sencillo de lo que había esperado. Pero por entonces estaba todavía preocupado con las peculiaridades que debería poseer todo sistema de la índole mencionada. Quiero decir lo siguiente: en todo sistema simétrico satisfactorio son válidas reglas como las que siguen,

$$p(a, \bar{b}\bar{b}) = 1$$

$$\text{Si } p(\bar{b}, b) \neq 0, \text{ entonces } p(a, b) = 1$$

$$\text{Si } p(a, \bar{a}b) \neq 0, \text{ entonces } p(a, b) = 1$$

En los sistemas al uso estas fórmulas o bien no son válidas o se satisfacen (la segunda y la tercera) de *un modo vacío*, ya que en ellas aparecen segundos argumentos de probabilidad absoluta nula. En aquella época creía, por tanto, que algunas de ellas habían de proponerse como axiomas; pero posteriormente me he dado cuenta de que cabía simplificar mi sistema axiomático, y al hacerlo ha resultado que estas fórmulas desusadas pueden deducirse de otras que tienen un aspecto completamente «normal». En mi trabajo «Philosophy of Science: A Personal Report^[5]» he presentado por primera vez el sistema simplificado resultante: es el mismo sistema de seis axiomas que expongo más a fondo en el presente apéndice.

Es un sistema sorprendentemente sencillo e intuitivo, y su alcance —que excede con mucho al de cualquiera de los sistemas corrientes— se debe meramente al hecho de que omito en todas las fórmulas, excepto una (el axioma C), toda condición del tipo, «si $p(b) \neq 0$, entonces...» (en los sistemas habituales o aparecen tales condiciones o deberían aparecer, para evitar incoherencias).

En este apéndice me propongo exponer primero el sistema axiomático, con sus demostraciones de compatibilidad y de independencia, y luego unas pocas definiciones basadas en él, entre ellas las de un campo boreliano de probabilidades.

Primero el sistema axiomático.

En nuestros postulados aparecen *cuatro conceptos sin definir*: I) S , el universo del discurso o sistema de elementos admisibles (los cuales se denotarán con minúsculas en cursiva, « a », « b », « c », ..., etc.); II) una función numérica binaria de estos elementos, que denotaremos por medio de « $p(a, b)$ », etc.: esto es, la probabilidad de a supuesto b ; III) una operación binaria de los elementos, denotada con « ab » y llamada *producto* (o encuentro, o conyunción) de a y b , y IV) el complemento del elemento a , que será denotado por « \bar{a} ».

A estos cuatro conceptos no definidos podemos añadir un quinto, al que cabe considerar, a nuestra elección, como definido o como no definido: es la «probabilidad absoluta de a », que denotamos con « $p(a)$ ».

Cada concepto no definido se introduce por un postulado. Y para entender éstos conviene tener presente que $p(a, a) = 1 = p(b, b)$ para todos los elementos de S , como puede demostrarse, naturalmente, por medio de los postulados.

Postulado 1. El número de elementos de S es, como máximo, infinito, pero numerable.

Postulado 2. Si a y b pertenecen a S , entonces $p(a, b)$ es un número real, y se cumplen los siguientes axiomas:

- | | | |
|----|---|--------------------|
| A1 | Hay elementos c y d en S , tales que $p(a, b) \neq p(c, d)$ | (Existencia). |
| A2 | Si $p(a, c) = p(b, c)$ para todo c de S , entonces $p(d, a) =$ $= p(d, b)$ para todo d de S | (Sustituibilidad). |
| A3 | $p(a, a) = p(b, b)$ | (Reflexividad). |

Postulado 3. Si a y b pertenecen a S , entonces ab pertenece a S ; y si, además, c también pertenece a S (y, por tanto, asimismo, bc), se cumplen los axiomas siguientes:

B1 $p(ab, c) \leq p(a, c)$ (Monotonía)

B2 $p(ab, c) = p(a, bc) p(b, c)$ (Multiplicación)

Postulado 4. Si a pertenece a S , entonces \bar{a} también pertenece a S ; y si, además, b pertenece a S , se cumple el siguiente axioma:

$$p(a, b) + p(\bar{a}, b) = \bar{a}(b, b),$$

C a menos que $p(b, b) = p(c, b)$ (Complementación)
para todo c de S .

Con esto se termina el sistema «elemental» («elementalidad» referente a su ampliación para campos borelianos). Como hemos indicado, podemos añadir ahora la *definición de probabilidad absoluta* como quinto postulado —que llamaríamos «postulado PA»— o bien podemos considerar esta definición como explícita (en vez de como un postulado).

Postulado PA. Si a y b pertenecen a S , (Definición
y si $p(a, a) = p(b, c)$ de
para todo c de S , probabilidad
entonces $p(a) = p(a, b)$ absoluta).

Demostraremos más adelante que el sistema de postulados y axiomas que hemos dado es *compatible e independiente*^[6].

Vamos a hacer ahora algunos comentarios sobre el sistema de postulados.

Los seis axiomas —A1, A2, A3, B1, B2 y C— se emplean explícitamente en las operaciones de deducción de los teoremas. El resto (existencial) de los postulados puede darse por supuesto, como se hacía en el trabajo en que presenté por vez primera este sistema^[7].

Cabe remplazar estos seis axiomas por un sistema que sólo contenga cuatro, pero a costa de introducir una cuarta variable, « d », en los postulados 3 y 4: se tienen los axiomas A1, A2 y los dos siguientes,

B+ Si $p(a, bc) p(b, c) = p(d, c)$ supuesto que $p(a, c) \geq p(d, c)$, entonces $p(ab, c) \neq p(d, c)$

C+ Si $p(a, b) + p(\bar{a}, b) \neq p(c, c)$ entonces $p(c, c) = p(d, b)$

En este sistema, B+ equivale a la conyunción de B1 y B2, y análogamente, C+ a la de A3 y C^[8]. Se trata de un sistema muy breve que comparte muchas ventajas de otros más extensos: el producto y el complemento aparecen separadamente, de modo

que todos los axiomas, excepto los que llevan la letra B, están libres del producto, y el complemento aparece una sola vez; pero personalmente yo prefiero el de seis axiomas, con ser más largo^[9].

Podemos comentar ahora los diversos postulados y axiomas de nuestro sistema.

Cabe omitir el postulado 1 (que pertenece solamente a la teoría *elemental*), como se observa teniendo en cuenta que, para demostrar su independencia, podemos construir un sistema S que no sea numerable —se satisfacen todos los demás postulados si interpretamos S como el conjunto de todas las sumas finitas de subintervalos semi-abiertos, $[x, y)$, del intervalo unidad, $[0, 1)$, siendo x e y números reales; podemos interpretar entonces $p(a)$ como la longitud de dichos intervalos, y $p(a, b)$ como igual a $p(ab)/p(b)$ supuesto que $p(b) \neq 0$, e igual a 1 supuesto que $b = 0$: en otro caso, sería $\lim p(ab)/p(b)$, supuesto que existiera este límite—. La finalidad del postulado 1 es únicamente la de caracterizar los sistemas *elementales*: en la exposición axiomática del álgebra booleana o de la lógica de enunciados o de proposiciones se asume a menudo un postulado de esta índole, y queremos poder poner de manifiesto que en la teoría *elemental*, S es un álgebra booleana (numerable). (Véanse los puntos 8 a 10 del apéndice *VI, que señalan otro ejemplo.)

En el postulado 2 se necesita A1 para estatuir que no todas las probabilidades son iguales (digamos, iguales a 0 o a 1). La función que desempeña A2 es la de permitimos demostrar « $p(x, a) = p(x, b)$ » para todos los elementos a y b cuyas probabilidades sean iguales supuesta cualquier condición: cabe lograr lo mismo sin A2, pero sólo en el supuesto de que $p(a) \neq 0 \neq p(b)$. Así pues, A2 nos hace capaces de ampliar la equivalencia probabilística de a y b al segundo argumento, incluso en los casos en que a y b tengan *probabilidad absoluta nula*.

Puede remplazarse A2 por la fórmula algo más exigente

A2+ Si $p(a, a) = p(b, c) = p(c, b)$, entonces $p(a, b) = p(a, c)$, para todo c de S ;

o por

B3 Si $p(ab, c) = p(ba, c)$, entonces $p(c, ab) = p(c, ba)$.

Es evidente que también podría remplazársela por esta otra (que es más sencilla, pero mucho más exigente):

B3+ $p(a, bc) = p(a, cb)$.

Pero como B3+ pide más de lo necesario —en realidad, bastaría con $p(a, (bc)(cb)) = p(a, (cb)(bc))$, pese a ser más débil— es algo engañosa: al adoptarla quedaría oculto el hecho de que puede demostrarse la ley de conmutación para el primer argumento con sólo los demás axiomas. A2+ es preferible a las otras fórmulas que hemos mencionado ahora, ya que evita emplear el producto de a y b

fórmulas que hemos mencionado ahora, ya que evita emplear el producto de a y b (cosa que también hace A2, con ser mucho más débil).

Sin embargo, podemos sacar partido de las circunstancias que acabamos de indicar para reducir al número de axiomas a tres, a saber, A1, C+ y el axioma B que enunciamos a continuación y que combina B3+ y B+:

B Si $p(ab, c) \neq p(a, d) p(b, c)$ supuesto que $p(a, c) \geq p(a, d) p(b, c)$ y $p(a, d) = p(a, bc)$, entonces $p(a, cb) \neq p(a, d)$.

Aparte de exigir tal vez más de lo que podría parecer conveniente, esté sistema de tres axiomas tiene todas las ventajas del anteriormente mencionado con cuatro (con A1, A2, B+ y C+).

Como ya se ha señalado, A3 se necesita para demostrar que $p(a, a) = 1$ para todo elemento a de S ; pero puede omitírsele si se refuerza C: es claro, teniendo en cuenta C+, que A3 es superfluo si reemplazamos en C las dos apariciones de « $p(b, b)$ » por « $p(d, d)$ » (o sólo la segunda aparición).

El postulado 3 pide la existencia de un producto (o encuentro, o intersección) de cualesquiera elementos a y b de S : caracteriza de un modo exhaustivo las propiedades de dicho producto (tales como indempotencia, conmutación y asociación) por medio de dos axiomas sencillos, de los que el primero es evidente intuitivamente y el segundo ha sido discutido en el apéndice *III.

En mi opinión, de todos nuestros axiomas, el B1 es el más evidente desde un punto de vista intuitivo. Es preferible tanto a A4' como a B1' (cf. la nota anterior 6), que reunidos le pueden reemplazar: pues cabe tomar equivocadamente a A4' por una convención, frente a B1; y B1' no caracteriza —como hace B1— un aspecto métrico intuitivo de la *probabilidad*, sino el producto o conyunción ab .

Como hace ver la fórmula B anterior, puede combinarse el axioma B2 con B1 y con A2+. Hay otras combinaciones posibles, entre ellas algunas en las que el producto aparece sólo una vez: son muy complicadas, pero tienen la ventaja de que se las puede dar una forma análoga a la de una definición. Por ejemplo, si en el axioma siguiente BD (que, como B, puede reemplazar a A2, B1 y B2) introducimos el símbolo « (a) » dos veces —una vez al comienzo y otra antes de « (Eb) »— y reemplazamos la primera flecha (condicional) por una doble flecha (bicondicional), obtenemos una de las formas definicionales mentadas (téngase en cuenta que empleo aquí las abreviaciones explicadas al comienzo del apéndice *V).

BD $p(xy, a) = p(z, a) \rightarrow (Eb) (c) (d) (Ee) (Ef) (Eg) (p(x, a) \geq p(z, a) = = p(x, b) p(y, a) \& p(a, c) \geq p(b, c) \leq p(y, c) \& (p(a, e) \geq p(c, e) \leq p(y, e) \rightarrow p(c, d) \leq p(b, d)) \& (p(a, f) = p(y, f) \rightarrow p(x, a) = p(x, b) = = p(x, y) \& (p(x, g) \geq p(c, g) \leq p(y, g) \rightarrow p(c, a) \leq p(z, a))$.

caracteriza dicho complemento por (una forma condicional debilitada de) algo que parece ser una fórmula evidente si se tiene en cuenta que $1 = p(a, a)$, a saber: « $p(a, c) + p(\bar{a}, c) = 1$ ». Se necesita la condición que precede a esta fórmula porque en caso de que c sea, digamos, $a\bar{a}$ (el «elemento vacío»), obtenemos $p(a, c) = 1 = p(\bar{a}, c)$: de modo que en este caso límite la fórmula aparentemente «evidente» falla.

Este postulado —o el axioma C— tiene el carácter de una definición de $p(\bar{a}, b)$ a partir de $p(a, b)$ y $p(a, a)$, como puede verse fácilmente si lo escribimos del modo siguiente:

(I) $p(\bar{a}, b) = p(a, a) - p(a, b)$, supuesto que haya un c tal que $p(c, b) \neq p(a, a)$

(II) $p(\bar{a}, b) = p(a, a)$, supuesto que no exista tal c .

La fórmula que vamos a dar ahora, CD, es análoga a BD y puede transformarse en un bicondicional, exactamente lo mismo que ocurría con esta última.

CD $p(\bar{x}, a) = p(y, a) \rightarrow (b)(c)(p(x, a) + p(y, a) \neq p(b, b) \rightarrow p(c, a) = p(b, b))$

A mi juicio, el sistema formado por A, BD y CD es un poco preferible al de A1, B y C+, no obstante la complejidad de BD.

Por fin, el postulado PA puede sustituirse por la sencilla definición

(.) $p(a) = p(a, \overline{a\bar{a}})$

la cual, sin embargo, utiliza la complementación y el producto, y, por ello, presupone los dos postulados 3 y 4 (deduciremos esta fórmula más adelante, en el apéndice *v, llamándola fórmula 75).

Puede demostrarse que nuestro sistema es *compatible*: podemos construir sistemas S de elementos (con un número infinito de elementos distintos, pues si S es finito la demostración es trivial) y una función $p(a, b)$ tal que se demuestre que se satisfacen todos los axiomas. También es posible demostrar que nuestro sistema axiomático es *independiente*. Debido a lo poco exigentes que son los axiomas, las demostraciones son muy fáciles.

Llegamos a una demostración trivial de la compatibilidad de un S finito asumiendo que $S = \{1, 0\}$: esto es, que S consta de dos elementos, 1 y 0. Se admite que el producto —o encuentro— y el complemento son, respectivamente, iguales al producto y el complemento (con respecto al) aritméticos; definimos $p(0, 1) = 0$, y en todos los demás casos hacemos $p(a, b) = 1$; entonces quedan satisfechos todos los axiomas.

Daremos dos interpretaciones finitas más de S antes de entrar en una que sea infinita numerable; las cuales no sólo satisfacen nuestro sistema axiomático, sino —por ejemplo— la siguiente aserción existencial:

(E) Hay elementos a, b y c de S , tales que

$$p(a, b) = 1 \text{ y } p(a, bc) = 0$$

Otra aserción análoga sería:

(E') Hay un elemento a de S , tal que

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = p(\bar{a}, a) = 0 \neq p(a, a) = 1.$$

Nuestro primer ejemplo no satisface la aserción (E), como tampoco puede ocurrir tal cosa en ninguno de los sistemas probabilitarios que conozco (excepto, naturalmente, en algunos de mis propios sistemas).

El *primer ejemplo* que satisface nuestro sistema y (E) consta de cuatro elementos: $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Se define ab como el más pequeño de los dos números a y b , con la excepción siguiente: $1.2 = 2.1 = 0$. Definimos también: $\bar{a} = 3 - a$; $p(a) = p(a, 3) = 0$, siempre que sea $a = 0$ ó 1 , y $p(a) = p(a, 3) = 1$, siempre que $a = 2$ ó 3 ; $p(a, 0) = 1$; $p(a, 1) = 0$, a menos que sea $a = 1$ ó $a = 3$ (y, en este caso, $p(a, 1) = 1$). En los demás casos, $p(a, b) = p(ab)/p(b)$. Cabe identificar intuitivamente el elemento 1 con una ley universal (de probabilidad absoluta nula), y el 2 con su negación existencial. Con objeto de satisfacer (E) hemos de tomar $a = 2, b = 3$ y $c = 1$.

Se pueden representar los ejemplos que acabamos de describir mediante las dos «matrices» siguientes (método que, según creo, fue introducido por Huntington en 1904):

| ab | 0 | 1 | 2 | 3 | \bar{a} |
|------|---|---|---|---|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |

| $p(a, b)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |

El *segundo ejemplo* es una generalización del primero, con la que se hace patente que puede ampliarse la aplicación de la idea que subyace a éste, hasta abarcar un número de elementos superior a un número cualquiera dado —con tal de que dichos elementos formen un álgebra booleana (lo cual quiere decir que su número ha de ser igual a 2^n)—. n puede considerarse que es el número de las zonas o clases mutuamente excluyentes mínimas en que está dividido cierto universo del discurso; podemos perfectamente hacer corresponder a cada una de estas clases una fracción positiva, $0 \leq r \leq 1$, que será su probabilidad absoluta, pero teniendo cuidado de que la suma de todas éstas sea igual a 1; hacemos corresponder también a una cualquiera de las sumas booleanas la suma aritmética de las probabilidades correspondientes, y a

suma de todas éstas sea igual a 1; hacemos corresponder también a una cualquiera de las sumas booleanas la suma aritmética de las probabilidades correspondientes, y a uno de los complementos booleanos el complemento aritmético con respecto a 1. Obsérvese que podemos asignar a una o varias de las zonas o clases mutuamente excluyentes y mínimas —pero no nulas— la probabilidad cero: si b es una de estas clases —o zonas—, hacemos $p(a, b) = 0$ en caso de que sea $ab = 0$, y $p(a, b) = 1$ en los demás casos; y, además, hacemos $p(a, 0) = 1$; mientras que en todos los casos restantes ponemos $p(a, b) = p(ab)/p(b)$.

Para mostrar que nuestro sistema es compatible incluso en el supuesto de que S sea infinito numerable, podemos elegir la siguiente interpretación (que tiene interés por estar relacionada con la interpretación frecuencial). Sea S la clase de las fracciones racionales en representación diádica, de modo que si a es un elemento de S , podamos escribir en forma de sucesión, $a = a_1 a_2, \dots$, en la que a_i sea 0 ó 1. Interpretamos ab como la sucesión $ab = a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$, de modo que $(ab)_i = a_i b_i$; y \bar{a} como esta otra, $\bar{a} = 1 - a_1, 1 - a_2, \dots$, con lo que $\bar{a}_i = 1 - a_i$. Para definir $p(a, b)$ introducimos una expresión auxiliar, A_n , definida del modo siguiente:

$$A_n = \sum_i a_i$$

de suerte que tenemos

$$(AB)_n = \sum_n a_i b_i;$$

definimos, además, una función auxiliar, q :

$$q(a_n, b_n) = 1 \text{ siempre que } B_n = 0$$

$$q(a_n, b_n) = (AB)_n/B_n, \text{ siempre que } B_n \neq 0.$$

Podemos definir ahora, por fin,

$$p(a, b) = \lim q(a_n, b_n).$$

Este límite existe para todos los elementos a y b de S , y es sumamente fácil hacer patente que satisface todos nuestros axiomas. (Véanse los puntos 8 a 10 del apéndice *VI, en que se da otro ejemplo).

Con lo cual hemos terminado con la *compatibilidad* de nuestros sistemas axiomáticos.

Para hacer ver la independencia de A1 podemos hacer $p(a, b) = 1$ para todo a y todo b de S : entonces se satisfacen todos los axiomas, excepto A1.

ha de ser no conmutativo; cabe definirlo, pues, como sigue: $1.2 = 2$, y, en todos los demás casos (incluyendo el de 2.1), ab es igual a $\min(a, b)$ —esto es, al menor de los dos componentes a y b . Definimos también: $\bar{a} = 1$ si y sólo si $a = 0$, y, en los demás casos $\bar{a} = 0$; y, asimismo, $p(0, 2) = 0$, mas en todos los casos restantes $p(a, b) = 1$. Ahora puede hacerse ver con facilidad que $p(l, b) = p(2, b)$ para todo b , mientras que $p(0, 1) = 1$ y $p(0, 2) = 0$: de suerte que no se satisface A2, pero sí los demás axiomas.

Podemos hacer intuitiva esta interpretación escribiendo la matriz no conmutativa del modo siguiente:

| ab | 0 | 1 | 2 | \bar{a} |
|----|---|---|---|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

$p(0, 2) = 0$;
en todos los demás casos,
 $p(a, b) = 1$

Vamos a poner en claro que A3 es independiente: como en la primera demostración de compatibilidad, tomamos $S = \{0, 1\}$, y los productos y complementos lógicos iguales a los aritméticos. Definimos $p(1, 1) = 1$, y, en todos los demás casos, $p(a, b) = 0$: A3 falla porque $p(1, 1) \neq p(0, 0)$ (mientras que se satisfacen los demás

axiomas).

Para patentizar la independencia de B1, podemos adoptar $S = \{-1, 0, +1\}$; admitimos, además, que ab es el producto aritmético de a y b , así como $\bar{a} = -a$ y $p(a, b) = a \cdot (1 - |b|)$. Entonces se satisfacen todos los axiomas, salvo B1, que no se cumple para $a = -1, b \neq +1$ y $c = 0$. Las matrices pueden escribirse así:

| ab | -1 | 0 | +1 | a |
|----|----|---|----|----|
| -1 | -1 | 0 | -1 | +1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +1 | -1 | 0 | +1 | -1 |

| $p(a, b)$ | -1 | 0 | +1 |
|-----------|----|----|----|
| -1 | 0 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| +1 | 0 | +1 | 0 |

Este mismo ejemplo demuestra la independencia de A4' (cf. la nota 6 anterior). Un segundo ejemplo, con el que se hace ver que B1 es independiente (y también que B1' lo es), se basa en la siguiente matriz no conmutativa;

| ab | 0 | 1 | 2 | \bar{a} |
|----|---|---|---|-----------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |

$p(0, 2) = 0$;
en todos los demás casos,

$$p(a, b) = 1$$

B1 deja de cumplirse para $a = 0, b = 1$ y $c = 2$.

Para demostrar la independencia de B2 tomamos el mismo S que utilizamos con respecto a A3, y definimos: $p(0, 1) = 0$, y en los casos restantes $p(a, b) = 2$. B2 no se cumple, ya que $2 = p(1.1, 1) \neq p(1, 1.1) p(1, 1) = 4$, pero los demás axiomas sí.

(Podemos tener otro ejemplo que haga visible la independencia de B2 si consideramos que este último axioma se necesita para demostrar « $p(ba, c) \leq p(a, e)$ », es decir, el dual de B1; esto nos sugiere que es posible adoptar el segundo ejemplo de B1, sin más que pasar el valor de 1.0 de 0 a 1, y el de 0.1 da 1 a 0; entonces B2 no se cumple para $a = 1, b = 0$ y $c = 2$. (Véase también la nota *2 de la página 299, ejemplo correspondiente a A1; y puede asimismo utilizarse el ejemplo para A2.)

Finalmente, con objeto de poner de manifiesto que C es independiente, tomamos de nuevo el último C adoptado, pero suponemos que $\bar{a} = a$. Si hacemos ahora $p(0, 1) = 0$, y en los casos restantes $p(a, b) = 1$, entonces falla C, ya que $p(\bar{0}, 1) \neq p(1, 1)$, a la vez que se cumplen los demás axiomas.

De este modo se terminan las demostraciones de la independencia de los *axiomas* operativos.

En cuanto a la parte no operativa de los *postulados*, hemos dado ya una demostración de la independencia del postulado 1 (al comentarlo).

En su parte no operativa, el postulado 2 exige que siempre que a y b pertenezcan a S, $p(a, b)$ sea un número real. Para hacer ver la independencia de esta condición — a la que podemos referirnos sucintamente llamándola «postulado 2»— consideramos, en primer lugar, una *interpretación booleana no numérica* de S. Con este fin, interpretamos S como un álgebra booleana no numérica y —como máximo— numerable (tal como un conjunto de enunciados, en el que « a », « b », etc., sean *nombres de enunciados variables*); estipulamos que « \bar{x} » denote, si x es un número, lo mismo que « $-x$ », y si x es un elemento booleano (digamos, un enunciado), el complemento booleano (negación) de x ; y determinamos que « xy », « $x + y$ », « $x = y$ », « $x \neq y$ » y « $x \leq y$ » tengan su sentido aritmético acostumbrado cuando x e y sean

mismo que « $\neg x$ », y si x es un elemento booleano (digamos, un enunciado), el complemento booleano (negación) de x ; y determinamos que « xy », « $x + y$ », « $x = y$ », « $x \neq y$ » y « $x \leq y$ » tengan su sentido aritmético acostumbrado cuando x e y sean números, y su sentido booleano perfectamente conocido siempre que x e y sean elementos booleanos (si son enunciados, habría que interpretar « $x \leq y$ » como « x entraña y »). Para demostrar la independencia del postulado 2 basta añadir meramente un requisito más: interpretamos « $p(a, b)$ » como nuevo nombre del elemento booleano $a + \bar{b}$. Entonces se viene abajo el postulado 2, mientras que A1, A2, A3 y todos los demás axiomas y postulados se convierten en teoremas muy conocidos del álgebra booleana^[11].

Las demostraciones de la independencia de las partes existenciales de los postulados 3 y 4 son casi triviales. Introducimos primeramente un sistema auxiliar, $S' = \{0, 1, 2, 3\}$, y definimos el producto, el complemento y la probabilidad absoluta por medio de la matriz:

| ab | 0 | 1 | 2 | 3 | \bar{a} | $p(a)$ |
|------|---|---|---|---|-----------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1/2 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1/2 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 |

Se define la probabilidad relativa por

$$p(a, b) = 1 \text{ siempre que } p(b) = 0$$

$$p(a, b) = p(ab)/p(b) \text{ siempre que } p(b) \neq 0.$$

Este sistema S' satisface todos nuestros axiomas y postulados. Para hacer patente la independencia de la parte existencial del postulado 3 adoptamos ahora un S que esté confinado a los elementos 1 y 2 de S' , y no alteramos en nada lo demás: es evidente que no se cumple el postulado 3, ya que el producto de los elementos 1 y 2 no pertenece a S . Podemos demostrar de un modo semejante la independencia del postulado 4, sin más que reducir S a los elementos 0 y 1 de S' (podríamos elegir, asimismo, 2 y 3, o cualquier combinación formada con tres elementos de los cuatro de S' , exceptuada la consistente en 1, 2 y 3).

La demostración de la independencia del postulado PA es todavía más trivial: sólo necesitamos interpretar S y $p(a, b)$ en el sentido de nuestra primera demostración de

Así pues, hemos demostrado que cada una de las aserciones que hemos hecho en nuestro sistema axiomático es independiente. (No ha llegado a mi conocimiento que se hayan publicado antes demostraciones de independencia para sistemas axiomáticos de la probabilidad: supongo que la razón es que los sistemas conocidos no son independientes, y eso en el supuesto de que sean satisfactorios por lo demás.)

La redundancia de los sistemas usuales se debe al hecho de que todos ellos postulan, implícita o explícitamente, la validez de algunas o de todas las reglas del álgebra booleana para los elementos de S ; pero —como demostraremos al final del apéndice *v— todas estas reglas son deductibles de nuestro sistema si definimos la equivalencia booleana, « $a = b$ », por la fórmula

$$(*) \quad a = b \text{ si y sólo si } p(a, c) = p(b, c) \text{ para todo } c \text{ perteneciente a } S.$$

Puede preguntarse si resultaría superfluo alguno de nuestros axiomas si postulásemos que ab fuera un producto booleano y a un complemento booleano, que ambos obedecieran a todas las leyes del álgebra booleana y que (*) fuese válida. A ello hay que responder que ninguno se convertiría en superfluo, excepto B1'; solamente en el caso de que, además, postulásemos que en el segundo argumento de la función p pudieran substituirse mutuamente dos elementos cualesquiera para los que cupiese demostrar la equivalencia booleana, se haría superfluo A2, cuya finalidad es precisamente la misma que la de semejante postulado suplementario. Puede verse que nuestros axiomas continuarían sin ser superfluos advirtiendo que es posible demostrar su independencia (excepto la de A2, desde luego), por medio de ejemplos que satisfagan al álgebra booleana: así he hecho para todos ellos, con la excepción de B1 y C, para los que he presentado ejemplos más sencillos; y doy a continuación un álgebra booleana que manifiesta la independencia de B1 —y de A4'—: este ejemplo es esencialmente el mismo que el último presentado:

| ab | -1 | 0 | 1 | 2 | \bar{a} |
|------|----|---|----|---|-----------|
| -1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | -1 |

$$p(a) = a;$$

$$p(a, 0) = 1;$$

en todos los demás casos,

$$p(a, b) = p(ab)/p(b) = ab/b$$

B1 queda violado, ya que $2 = p(1.2, 1) > p(1, 1) = 1$.

Para demostrar la independencia de C tomamos el mismo ejemplo, pero en el que

sea $p(a, b) = 0$ siempre que $ab = 0 \neq b$ (y sea $p(a, b) = 1$ en los demás casos); o podemos también adoptar el ejemplo de la página anterior, en el que se tenga $p(1) = p(2) = 0$, o bien $p(1) = p(2) = 1$.

Cabe expresar el hecho de que nuestro sistema permanezca independiente incluso si postulamos el álgebra booleana y (*), diciendo que es «autónomamente independiente» (como es natural, si sustituimos nuestro axioma B1 por A4' y B1' — véase la nota 6 anterior— deja de poseer esta característica). Me parece que la independencia autónoma es una propiedad interesante (y deseable) de los sistemas axiomáticos para el cálculo de probabilidades^[12].

Como conclusión, quiero definir un «sistema admisible» S y un «campo boreliano de probabilidades» S, a base de las nociones «autónomas» —esto es, probabilísticas— de nuestra teoría. El segundo sentido de S lo he expresado con un término de Kolmogorov, al cual doy, sin embargo, un significado algo más amplio que el suyo: estudiaré con cierto detalle la diferencia existente entre el modo de tratar el asunto de Kolmogorov y el mío, pues me parece que es reveladora.

Defino primeramente en términos probabilísticos qué es lo que quiero mentar cuando digo que a es un superelemento de b (y más amplio, o bien igual a 6), o que b es un subelemento de o (y lógicamente más fuerte o igual que a). La definición es como sigue (véase también el apéndice *v, D3, pág. 331):

a es un superelemento de b, o b es un subelemento de a —con símbolos, $a \geq b$ — si y sólo si $p(a, x) \geq p(b, x)$ para todo elemento x de S.

Ahora voy a definir lo que quiero decir con el elemento producto, o, de una sucesión infinita, $A = a_1, a_2, \dots$, tal que todos sus miembros, a_n , sean elementos de S.

Ordenemos algunos de los elementos de S —o quizá todos— en una *sucesión infinita* $A = a_1, a_2, \dots$, en la que se permita a todo elemento de S aparecer más de una vez. Por ejemplo, si S consta sólo de los dos elementos 0 y 1, tanto $A = 0, 1, 0, 1, \dots$, como $B = 0, 0, 0, \dots$, serán sucesiones infinitas de elementos de S en el sentido a que ahora nos referimos; pero el caso más importante, naturalmente, es el de una sucesión infinita A tal que todos sus miembros (o casi todos) sean elementos *diferentes* de S; que, por tanto, contendrá un número infinito de elementos.

Un caso que tiene especial interés es el de una *sucesión infinita* decreciente (o, mejor dicho, no creciente), o sea, una sucesión $A = a_1, a_2, \dots$, en la que $a_n \geq a_{n+1}$ para toda pareja de miembros consecutivos de ella.

Podemos definir ya el *elemento producto* (booleano, en vez de correspondiente a la teoría de conjuntos), a, de la sucesión infinita $A = a_1, a_2, \dots$, como el más amplio de todos los elementos de S que sean subelementos de todo elemento a_n perteneciente a la sucesión A, O, en símbolos:

$a = \pi a_n$ si y sólo si a satisface las dos condiciones siguientes:

1) $p(a_n, x) \geq p(a, x)$ para todos los elementos a_n de A y para todo elemento a de S.

$a = \pi a_n$ si y sólo si a satisface las dos condiciones siguientes:

I) $p(a_n, x) \geq p(a, x)$ para todos los elementos a_n de A y para todo elemento a de S .

II) $p(a, x) \geq p(b, x)$ para todos los elementos x de S y para todo elemento b de S que satisfaga la condición $p(a_n, y) \geq p(b, y)$ para todos los elementos a_n y para todo elemento a de S .

Con objeto de poner de manifiesto la diferencia existente entre nuestro elemento producto (booleano), a , de A , y el producto —o encuentro— (interno) de teoría de conjuntos (también de A), vamos a limitar ahora nuestra discusión a ejemplos S que satisfagan nuestros postulados 2 a 5 y cuyos elementos x, y, z, \dots , sean conjuntos, de suerte que xy sea su producto de teoría de conjuntos.

Nuestro ejemplo principal, al cual me referiré como «el ejemplo del semi-intervalo omitido», es el siguiente:

S_1 es un sistema de ciertos subintervalos semiabiertos del intervalo universal $u = (0, 1]$, y contiene precisamente, a) la sucesión decreciente A tal que $a_n = (0, \frac{1}{2} + 2^{-n}]$, y, además, b) los productos de teoría de conjuntos de dos cualesquiera de sus elementos y los complementos de teoría de conjuntos de cualesquiera elementos suyos.

Así pues, S_1 no contiene el «semi-intervalo» $s = (0, \frac{1}{2}]$, ni tampoco ningún subintervalo no vacío de s .

Puesto que el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$ es el producto de teoría de conjuntos de la sucesión A , es evidente que no contiene semejante producto. Pero contiene, en cambio, el «elemento producto» (booleano) de A , tal como lo hemos definido: pues el intervalo vacío satisface de un modo trivial la condición I), y por ser el intervalo más amplio que la satisface, también satisface II).

Es, asimismo, obvio que si añadimos a S_1 , digamos, uno cualquiera de los intervalos $b_1 = (0, 1/8]$, $b_2 = (0, 3/16]$, etc., el mayor de ellos será el elemento producto de A , en el sentido (booleano) de nuestra definición, aun cuando ninguno será el producto de teoría de conjuntos de A .

Podría pensarse por un momento que, debido a la presencia de un elemento vacío en todo S , cada S habría de contener —del mismo modo que S_1 — un elemento producto (en el sentido de nuestra definición) de cualquier A de S : pues, en caso de que no contenga un elemento más amplio que satisfaga I), el elemento vacío podría cumplir siempre ese papel. Pero puede verse que no ocurre así por medio de un ejemplo, S_2 , que contenga, además de los elementos de S_1 , los de la sucesión $B = b_1, b_2, \dots$, en donde $b_n = (0, (2^n - 1)/2^{n+2}]$ (y, aún más: los productos de teoría de conjuntos de dos elementos cualesquiera, y el complemento de teoría de conjuntos de cualquier elemento): se observa fácilmente que, aunque todo b_n satisface la condición I) para el elemento producto de A , ninguno de ellos cumple la II), de suerte

elemento producto en el sentido (booleano) que empleamos nosotros. Pero tanto S_1 como todos los sistemas que se obtienen añadiendo a S_1 un número finito de intervalos nuevos (más los productos y complementos), contendrán un elemento producto de A en nuestro sentido, si bien no en el de teoría de conjuntos —a menos, ciertamente, que añadamos a el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$.

Es posible definir ahora como sigue un «sistema admisible S » y un «campo boreliano de probabilidades S ».

I) Se dice que un sistema S que satisface los postulados 2 a 4 es un *sistema admisible*, si y sólo si S cumple —además de nuestro conjunto de postulados— la siguiente *condición definitoria*:

Sea $bA = a_1b, a_2b, \dots$, una sucesión decreciente cualquiera de elementos de S (decimos, en este caso, que $A = a_1, a_2, \dots$ «decrece con respecto a b »); entonces, si el elemento producto ab de esta sucesión pertenece a S ^[13].,

$$\lim p(a_n, b) = p(a, b).$$

II) Se dice que un sistema admisible S es un *campo boreliano de probabilidades* si y sólo si en S se encuentra un elemento producto de cualquier sucesión decreciente (absoluta o relativamente) de elementos de S .

De estas dos definiciones, la I) corresponde exactamente al llamado «axioma de continuidad» de Kolmogorov, mientras que la II) desempeña en nuestro sistema un papel análogo a la definición kolmogoroviana de campos borelianos de probabilidad.

Puede ponerse ahora de manifiesto que *siempre que S sea un campo boreliano de probabilidades en el sentido de Kolmogorov, también lo será en el sentido que aquí hemos definido, y la probabilidad será una función de medida computablemente aditiva de los conjuntos que constituyen los elementos de S .*

Las definiciones de sistema admisible y de campo boreliano de probabilidades están estructuradas de tal modo que todos los sistemas S que satisfacen nuestros postulados y que contienen no más de un número finito de elementos diferentes son sistemas admisibles y campos borelianos; y, por tanto, nuestras definiciones tienen interés solamente en lo que se refiere a sistemas S que *contengan un número infinito de elementos diferentes*: estos sistemas infinitos pueden satisfacer o no una condición definitoria, o la otra, o ambas; o, dicho de otro modo, las condiciones mencionadas no son redundantes —o sea, son independientes— para sistemas infinitos.

Valiéndose del ejemplo, S_1 del semi-intervalo omitido —que hemos dado más arriba— puede demostrarse ésta no redundancia con la máxima facilidad, en lo que se refiere a I) —dada en la forma indicada en la nota 13 a pie de página—. Todo lo que hay que hacer es definir la probabilidad, $p(x)$, haciéndola igual a $l(x)$, es decir, a la longitud del intervalo x : entonces queda transgredida nuestra primera definición I), ya que $\lim p(a^n) = \frac{1}{2}$, mientras que el elemento producto de A (en S) es $p(a) = 0$. Y el ejemplo S_2 viola la definición II), aun cuando satisface (de un modo vacío) la

primera.

Si bien el primero de estos ejemplos asienta la independencia —o, con mayor precisión, la no superfluencia— de nuestra primera definición (al transgredirla), en la forma que le hemos dado no hace lo mismo con la independencia del «axioma de continuidad» de Kolmogorov, al cual es evidente que satisface: pues el semi-intervalo omitido, $s = (0, \frac{1}{2}]$, esté en S o no, es el único producto de teoría de conjuntos de A , de modo que para la teoría de conjuntos $a = s$ es verdadera (pertenzca o no a a S); y a una con $a = s$ tenemos $\lim p(a_n) = p(a)$. Así pues, se satisface el axioma de Kolmogorov (incluso si omitimos la condición $p(\bar{a}) \neq 0$: cf. la nota 13).

En este orden de cosas conviene mencionar que, aunque Kolmogorov pretende que su «axioma de continuidad» es independiente, en su libro no logra presentar ninguna demostración de tal cosa. Pero cabe reestructurar nuestra prueba de independencia de suerte que se haga aplicable al axioma de Kolmogorov y a su planteamiento dentro de la teoría de conjuntos: lo cual puede hacerse eligiendo —en vez de nuestro S_1 — un sistema S_3 de intervalos exactamente como el S_1 , pero que esté basado en una sucesión $C = c_1, c_2, \dots$, definida por medio de $c_n = (0, 2^{-n}]$, en lugar de estarlo en la sucesión $A = a_1, a_2, \dots$ que tiene $a_n = (0, \frac{1}{2} + 2^{-n}]$. Podemos mostrar ahora la independencia del axioma de Kolmogorov definiendo las probabilidades de los elementos de la sucesión C del modo que sigue:

$$p(c_n) = l(c_n) + \frac{1}{2} = p(a_n)$$

en donde $l(c_n)$ es la longitud del intervalo c_n . Esta definición es notablemente anti-intuitiva, ya que —por ejemplo— asigna la probabilidad uno a cada uno de los dos intervalos $(0, \frac{1}{2}]$ y $(0, 1]$, y, por tanto, la probabilidad cero al intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$; y el hecho de que viole el axioma de Kolmogorov (con lo cual establece su independencia) está estrechamente relacionado con aquel carácter anti-intuitivo: pues lo viola por ser $\lim p(c_n) = 1/2$ aun cuando $p(c) = 0$. Debido al carácter mencionado, la *compatibilidad* de este ejemplo dista mucho de ser evidente, de modo que surge la necesidad de demostrarla si se quiere asentar la validez de la prueba de la independencia del axioma de Kolmogorov.

Mas no ofrece dificultad demostrar tal compatibilidad si tenemos en cuenta nuestra demostración anterior de independencia —esto es, la de nuestra propia definición valiéndonos del ejemplo S_1 . Pues las probabilidades $p(a_n)$ y $p(c_n)$ de los dos ejemplos S_1 y S_3 coinciden; y como al hacerse corresponder las dos sucesiones A y C podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de S_1 y S_3 , la compatibilidad del primer sistema demuestra la del último.

No cabe duda de que *cualquier* ejemplo que demuestre la independencia del axioma de Kolmogorov ha de ser igualmente anti-intuitivo, de modo que su compatibilidad necesitará siempre ser demostrada por un método parecido al nuestro. Dicho de otra forma: la demostración de la independencia del axioma de Kolmogorov

axioma de Kolmogorov ha de ser igualmente anti-intuitivo, de modo que su compatibilidad necesitará siempre ser demostrada por un método parecido al nuestro. Dicho de otra forma: la demostración de la independencia del axioma de Kolmogorov tendrá que emplear un ejemplo que se encuentre basado, en lo esencial, en una definición (booleana) de producto como la nuestra, en lugar de estarlo en una definición de teoría de conjuntos.

Aun cuando todo campo boreliano de probabilidades en el sentido de Kolmogorov lo es también en el nuestro, no ocurre a la inversa. Pues podemos construir un sistema, S_4 , que sea exactamente como S_1 , en el que también esté omitido $s = (a, 1/2]$ y que contenga, en su lugar, el intervalo abierto $g = (a, 1/2)$, con $p(g) = 1/2$; algo arbitrariamente, definimos ahora $\bar{g} = u - g = (1/2, 1]$ y $u - (g + \bar{g}) = u\bar{u}$ (en vez del punto $1/2$). Se ve fácilmente que S_4 es un campo boreliano en nuestro sentido, con g como elemento producto de A ; pero no en el sentido de Kolmogorov, ya que no contiene el producto de teoría de conjuntos de A : luego nuestra definición permite una *interpretación por un sistema de conjuntos* que no sea un sistema boreliano, y en el que el producto y el complemento no sean exactamente el producto y el complemento de teoría de conjuntos. Así pues, nuestra definición es más amplia que la de Kolmogorov.

Nuestras demostraciones de independencia de I) y II) arrojan alguna luz, según me parece, sobre la función que desempeñan estas definiciones. I) sirve para excluir sistemas tales como el S_1 con objeto de asegurar que el producto (o límite) de una sucesión decreciente es adecuado desde el punto de vista de la teoría de la medida: el límite de las medidas ha de ser igual a la medida del límite. Y el papel de II) es el de excluir sistemas tales como el S_2 , que poseen sucesiones crecientes sin límites: asegura que toda sucesión decreciente tiene en S un producto, y toda sucesión creciente una suma.

APÉNDICE *V.

Deducciones dentro de la teoría formal de la probabilidad

Me propongo dar en este apéndice las deducciones más importantes del sistema de postulados que se ha expuesto en el apéndice *iv. Voy a mostrar cómo se obtienen las leyes de los extremos superior e inferior, las de idempotencia, conmutación, asociación y distribución, así como una definición más sencilla de la probabilidad absoluta; e indicaré también de qué forma es deductible dentro de este sistema el álgebra booleana. En otro lugar se estudiará todo ello más a fondo.

Emplearé una flecha, «... →...», como abreviación de «si ..., entonces ...», una doble flecha, «... ↔...» para «... si y sólo si ...», «&» en substitución de «y», «(Ea) ...» en lugar de «existe en S un a tal que ...», y «(a) ...» remplazando a «para todo a de S, ...».

Primeramente, enuncio de nuevo el postulado 2 y los seis axiomas operativos que citaremos en las demostraciones (los demás postulados se utilizarán sólo implícitamente: incluso el postulado 2 se empleará nada más que una vez, en la demostración de 5). Al leer los axiomas A3 y C debe tenerse en cuenta una relación que demostraré pronto (véase la fórmula 23): $p(a, a) = 1$.

Postulado 2. Si a y b pertenecen a S , entonces $p(a, b)$ es un número real.

| | |
|----|---|
| A1 | $(\text{Ec})(\text{Ed}) p(a, b) \neq p(c, d).$ |
| A2 | $((c) (p(a, c) = p(b, c)) \rightarrow p(d, a) = p(d, b).$ |
| A3 | $p(a, a) = p(b, b).$ |
| B1 | $p(ab, c) \leq p(a, c).$ |
| B2 | $p(ab, c) = p(a, bc) p(b, c).$ |
| C | $p(a, a) \neq p(b, a) \rightarrow p(a, a) = p(c, a) + p(\bar{c}, a).$ |

Procedo ahora a realizar las deducciones.

| | | |
|------|---|--------------------------|
| (1) | $p(a, a) = p(b, b) = k$ | Abreviación basada en A3 |
| (2) | $p((aa) a, a) \leq p(aa, a) \leq p(a, a) = k$ | B1, 1 |
| (3) | $p((aa) a, a) = p(aa, aa) p(a, a) = k^2$ | B2, 1 |
| (4) | $k^2 \leq k$ | 2, 3 |
| (5) | $0 \leq k \leq 1$ | 4 (y postulado 2) |
| (6) | $k \neq p(a, b) \rightarrow k = k + p(\bar{b}, b)$ | C, 1 |
| (7) | $k \neq p(a, b) \rightarrow p(\bar{b}, b) = 0$ | 6 |
| (8) | $p(a(\bar{b}, b)) = p(a, \bar{b}b) p(\bar{b}, b)$ | B2 |
| (9) | $k \neq p(a, b) \rightarrow 0 = p(a\bar{b}, b) < p(a, b)$ | 7, 8, B1 |
| (10) | $k \neq p(a, b) \rightarrow 0 < p(a, b)$ | 9 |
| (11) | $k = p(a, b) \rightarrow 0 \leq p(a, b)$ | 5 |
| (12) | $0 \leq p(a, b)$ | 11 |

| | |
|--|---------------|
| (13) $0 \leq p(\bar{a}, b)$ | 12 |
| (14) $k \neq p(a, b) \rightarrow k \geq p(a, b)$ | C, 1, 13 |
| (15) $p(a, b) \leq k \leq 1$ | 14, 5 |
| (16) $0 \leq p(a, b) \leq k \leq 1$ | 12, 15 |
| (17) $k = p(aa, aa) = p(a, aa) \leq k$ | 1, B1, 15 |
| (18) $k = p(a(aa), a(aa)) \leq p(a, a(aa)) \leq k$ | 1, B1, 15 |
| (19) $k = p(aa, aa) = p(a, a(aa)) p(a, aa) = k^2$ | 1, B2, 17, 18 |
| (20) $k = k^2$ | 19 |
| (21) $(Ea) (Eb) p(a, b) \neq 0 \rightarrow k = 1$ | 16, 20 |
| (22) $(Ea) (Eb) p(a, b) \neq 0$ | A1 |
| (23) $p(a, a) = k = 1$ | 1, 21, 22 |
| (24) $(Eb) (Ea) p(b, a) \neq k$ | A1, 1 |
| (25) $(Ea) p(\bar{a}, a) = 0$ | 7, 24 |

Con esto hemos estatuido todas las leyes de los extremos superior e inferior: las fórmulas (12) y (15), resumidas en (16), hacen ver que las probabilidades tienen por extremos 0 y 1; y las (23) y (25) ponen de manifiesto que ambos extremos son accesibles.

| | |
|-------------------------------|--------|
| (26) $0 \leq p(a, bc) \leq 1$ | 16 |
| (27) $p(ab, c) \leq p(b, c)$ | B2, 26 |

Ésta es la segunda ley de monotonía, análoga a la B1.

| | |
|--|------------|
| (28) $1 = p(ba, ba) \leq p(a, ba) = 1$ | 23, 27, 15 |
| (29) $p(ab, a) = p(b, a)$ | B2, 28 |

Ésta Esta es una forma de la «ley de redundancia» (Cf. 29+, en la página 328). Volvamos ahora a la deducción de las leyes «algebraicas» (contrapuestas a las «métricas»), o sea, a las que ordinariamente se toman del álgebra booleana.

| | |
|--|------------|
| (30) $1 = p(ab, ab) \leq p(a, ab) = 1$ | 23, B1, 15 |
| (31) $p(aa, b) = p(a, ab) p(a, b)$ | B2 |
| (32) $p(aa, b) = p(a, b)$ | 30, 31 |

Ésta es, pues, la ley de idempotencia, llamada algunas veces «ley de tautología». Deduzcamos ahora la ley de conmutación.

| | |
|--------------------------------|-------------|
| (33) $p(a(bc), a(bc)) = 1$ | 23 |
| (34) $p(bc, a(bc)) = 1$ | 33, 27, 15 |
| (35) $p(b, a(bc)) = 1$ | 34, B1, 15 |
| (36) $p(ba, bc) = p(ab, c)$ | 35, B2 |
| (37) $p((ba) b, c) = p(ab, c)$ | 36, B2 |
| (38) $p(ba, c) \geq p(ab, c)$ | 37, B1 |
| (39) $p(ab, c) \geq p(ba, c)$ | 38 (subst.) |
| (40) $p(ab, c) = p(ba, c)$ | 38, 39 |

Con lo cual tenemos ya la ley de conmutación para el primer argumento (para extenderla al segundo tendríamos que emplear A2), que hemos deducido a partir de (23) sin más que emplear las dos leyes de monotonía

(B1 y 27) y B2. Dedicuémonos ahora a la deducción de la ley de asociación.

| | |
|--|----------------|
| (41) $p(ab, d((ab) c)) = 1$ | 35 (subst.) |
| (42) $p(a, d((ab) c)) = 1 = p(b, d((ab) c))$ | 41, B1, 15, 27 |
| (43) $p(a, (bc)((ab) c)) = 1$ | 42 (subst.) |
| (44) $p(a(bc), (ab) c) = p(bc, (ab) c)$ | 43, B2 |
| (45) $p(bc, (ab) c) = p(b, c((ab) c))p(c, (ab) c)$ | B2 |
| (46) $p(b, c((ab) c)) = 1$ | 42 (subst.) |
| (47) $p(c, (ab) c) = 1$ | 23, 27, 15 |
| (48) $p(a(bc), (ab) c) = 1$ | 44 a 47 |

Ésta es una forma preliminar de la ley que buscamos; de ella se sigue (62) en virtud de A2+ (y de B2), pero siempre que es posible evito emplear A2 y A2+.

| | |
|---|------------|
| (49) $p(a(b(cd)), d) = p(cd, b(ad))p(b, ad)p(a, d)$ | 40, B2 |
| (50) $p(a(bc), d) = p(c, b(ad))p(b, ad)p(a, d)$ | 40, B2 |
| (51) $p(a(bc), d) > p(a(b(cd)), d)$ | 49, 50, B1 |

Tenemos así una especie de generalización débil de la primera ley de monotonía, B1.

| | |
|---|-------------|
| (52) $p(a(b(cd)), (ab)(cd)) = 1$ | 48 (subst.) |
| (53) $p((a(b(cd))(ab), cd) = p(ab, cd)$ | 52, B2 |
| (54) $p(a(b(cd)), cd) \geq p(ab, cd)$ | 53, B1 |
| (55) $p((a(b(cd)))c, d) \geq p((ab)c, d)$ | 54, B2 |
| (56) $p(a(b(cd)), d) \geq p((ab)c, d)$ | 55, B1 |
| (57) $p(a(bc), d) \geq p((ab)c, d)$ | 51, 56 |

He aquí media ley de asociación.

| | |
|---------------------------------------|-----------------|
| (58) $p((bc) a, d) \geq p((ab) c, d)$ | 57, 40 |
| (59) $p((ab) c, d) \geq p(b(ca), d)$ | 58 (subst.), 40 |
| (60) $p((bc) a, d) \geq p(b(ca), d)$ | 58, 59 |
| (61) $p((ab) c, d) \geq p(a(bc), d)$ | 60 (subst.) |

Y ésta es la segunda mitad de dicha ley.

| | |
|-----------------------------------|--------|
| (62) $p((ab) c, d) = p(a(bc), d)$ | 57, 61 |
|-----------------------------------|--------|

Tenemos, con esto, la forma completa de la ley de asociación para el primer argumento (véase, asimismo, la fórmula (g), al comienzo del apéndice *iv). La ley correspondiente al segundo argumento puede obtenerse aplicando A2 (si se aplica B2 dos veces a cada miembro de (62) se llega únicamente a una forma condicional cuyo antecedente es « $p(bc, d) \neq 0 \rightarrow$ »).

Voy a ocuparme ahora de generalizar el axioma de complementación, C (y seré un poco más conciso en mis deducciones de ahora en adelante).

| | |
|---|-----------|
| (63) $p(\bar{b}, b) \neq 0 \leftrightarrow p(c, b) = 1$ | 7, 23 |
| (64) $p(a, b) + p(\bar{a}, b) = 1 + p(\bar{b}, b)$ | C, 23, 63 |

Hemos obtenido una forma no condicional del principio de complementación, C, que voy ahora a generalizar.

Teniendo en cuenta que (64) está incondicionado, y que «a» no aparece

en su segundo miembro, podemos colocar «c» en lugar de «a» y afirmar:

$$(65) p(a, b) + p(\bar{a}, b) = p(c, b) + p(\bar{c}, b) \quad 64$$

$$(66) p(a, bd) + p(\bar{a}, bd) = p(c, bd) + p(\bar{c}, bd) \quad 65$$

Multiplicando por p(b, d), obtenemos

$$(67) p(ab, d) + p(\bar{a}b, d) = p(cb, d) + p(\bar{c}b, d). \quad B2, 66$$

que es una generalización de (65). Por substitución llegamos a

$$(68) p(ab, c) + p(\bar{a}b, c) = p(cb, c) + p(\bar{c}b, c) \quad 67$$

Teniendo en cuenta

$$(69) p(\bar{c}b, c) = p(\bar{c}, c), \quad 7, B1, 23, 63$$

podemos escribir (68) más sucintamente, por analogía con (64):

$$(70) p(ab, c) + p(\bar{a}b, c) = p(b, c) + p(\bar{c}, c). \quad 68, 69, 29$$

Que es una generalización de la forma incondicionada de C, o sea, de la fórmula (64)^[1].

$$(71) p(aa, b) + p(\bar{a}a, b) = p(a, b) + p(\bar{b}, b) \quad 70$$

$$(72) p(\bar{a}a, b) = p(a\bar{a}, b) = p(\bar{b}, b) \quad 40, 71, 32$$

$$(73) p(\bar{a}a, b) + p(a\bar{a}, b) = p(a\bar{a}, b) + p(\bar{a}a, b) = 1 + p(\bar{b}, b) \quad 64$$

$$(74) p(\bar{a}a, b) = 1 = p(a\bar{a}, b) \quad 72, 73$$

De este modo se establece que podemos satisfacer la condición del postulado PA si hacemos $b = \bar{a}\bar{a}$; y obtenemos, de acuerdo con ello,

$$(75) p(a) = p(a, \bar{a}\bar{a}) = p(a, \bar{a}\bar{a}) = p(a, \bar{b}\bar{b}) = p(a, \bar{b}\bar{b}); \quad 23, 74, PA$$

esto es, una definición de probabilidad absoluta en una forma más manejable.

Deducimos luego la ley general de adición:

$$(76) p(a\bar{b}, c) = p(\bar{a}, c) - p(\bar{a}b, c) + p(\bar{c}, c) \quad 70, 40$$

$$(77) p(a\bar{b}, c) = p(\bar{a}, c) - p(\bar{a}b, c) + p(\bar{c}, c) \quad 76$$

$$(78) p(\bar{a}\bar{b}, c) = 1 - p(a, c) - p(b, c) + p(ab, c) + p(\bar{c}, c) \quad 77, 76, 64, 40$$

$$(79) p(\bar{a}\bar{b}, c) = p(a, c) + p(b, c) - p(ab, c) \quad 78, 64$$

Puede verse fácilmente que se trata de una forma de dicha ley si se recuerda que en nuestro sistema « $\bar{a}\bar{b}$ » significa lo mismo que «a + b» en el sentido booleano. Merece la pena mencionar que (79) tiene la forma usual: es incondicionada y carece de la parte «+ p(\bar{c} , c)», tan desusada; procedamos a generalizarla aún más.

$$(80) p(\bar{b}\bar{c}, ad) = p(b, ad) + p(c, ad) - p(bc, ad) \quad 79$$

$$(81) p(a\bar{b}\bar{c}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p(a(bc), d) \quad 80, B2, 40$$

Hemos llegado, efectivamente, a una generalización de (79).

Vamos a deducir ahora la ley de distribución: puede obtenerse a partir de (79), (81) y un lema muy sencillo, (84), al cual propongo llamar «lema de distribución», que es una generalización de (32) y (62):

- (82) $p(a(bc), d) = p(a, (bc)d)p(bc, d) = p((aa)(bc), d)$ B2, 32
 (83) $p(((aa)b)c, d) = p(a(ab), cd)p(c, d) = p(((ab)a)c, d)$ B2, 62, 40
 (84) $p(a(bc), d) = p((ab)(ac), d)$ 82, 83, 62

Éste es el «lema de distribución».

(85) $p(\overline{\overline{ab\overline{ac}}}, d) = p(ab, d) + p(ac, d) - p((ab)(ac), d)$ 79 (subst.)

Podemos aplicar el «lema de distribución» a esta última fórmula y a (81), con lo que tenemos:

(86) $p(a\overline{\overline{bc}}, d) = p(\overline{\overline{ab\overline{ac}}}, d)$ 81, 85, 84

Henos, pues, con una forma de la primera ley de distribución, que puede aplicarse al primer miembro de la fórmula siguiente,

(87) $p(\overline{\overline{b\overline{ba}}}, c) = p(\overline{\overline{b\overline{b}}}, ac)p(a, c) = p(a, c)$ B2 74

Llegamos así a

(88) $p(\overline{\overline{ab\overline{ab}}}, c) = p(a, c)$ 86, 87, 40

Puede advertirse que

(89) $p(\overline{\overline{ab}}, c) = p(ab, c)$ 68 (subst.)

(90) $p(a, c) = p(b, c) \rightarrow p(\overline{a}, c) = p(\overline{b}, c)$ 64

Y, en consecuencia,

(91) $p(\overline{\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}}, d) = p(\overline{\overline{\overline{ab}\overline{c}}}, d)$ 62, 89, 40

(92) $p(\overline{\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}}, d) = p(\overline{\overline{\overline{ab}\overline{c}}}, d)$ 90, 91

Ésta es la ley de asociación para la suma booleana. Sustituyendo en (40) los complementos de a y b , hallamos

(93) $p(\overline{\overline{\overline{a}\overline{b}}}, c) = p(\overline{\overline{\overline{b}\overline{a}}}, c)$ 40, 90

que es la ley de conmutación para la suma booleana. Del mismo modo obtenemos

(94) $p(\overline{\overline{\overline{a}\overline{a}}}, b) = p(a, b)$ 30, 89, 90

que es la ley de idempotencia de la suma booleana. A partir de (87) obtenemos:

(95) $p(a, b) = p(a, b\overline{\overline{c\overline{c}}})$ 87, 40, A2

(96) $p(a, b)p(b) = p(ab)$ 95, B2, 75

La última puede escribirse también:

(97) $p(b) \neq 0 \rightarrow p(a, b) = p(ab)/p(b)$ 96

Esta última fórmula hace patente que nuestro concepto generalizado de probabilidad relativa coincide —para $p(b) \neq 0$ — con el usual, y que nuestro cálculo es una generalización del cálculo acostumbrado. Y es posible cerciorarse de que ésta es legítima, mediante los ejemplos que hemos dado en el apéndice anterior, *IV, que muestran la compatibilidad de nuestro

sistema con la fórmula siguiente,

$$(E) \quad (Ea)(Eb)(Ec) \ p(a, b) = 1 \text{ y } p(a, bc) = 0$$

(que no tiene validez en muchas interpretaciones finitas de nuestro S , pero es válida en sus interpretaciones infinitas normales).

Para demostrar que S ha de ser un álgebra booleana en toda interpretación compatible (o coherente), paremos mientes en que

$$(98) \quad ((x)p(a, x) = p(b, x)) \rightarrow p(ay, z) = p(by, z) \quad \text{B2}$$

$$(99) \quad ((x)p(a, x) = p(b, x)) \rightarrow p(y, az) = p(y, bz) \quad \text{98, A2}$$

Es digno de notarse que (99) necesita A2: no se sigue de 98, 40 y B2, ya que es posible que $p(a, z) = p(b, z) = 0$ (tal sería el caso, por ejemplo, si fuese $\bar{a} = z \neq x \bar{x}$).

$$(100) \quad ((x)(p(a, x) = p(b, x) \ \& \ p(c, x) = p(d, x))) \rightarrow p(ac, y) = p(bd, y) \quad \text{99, B2}$$

Valiéndose de (90), (100) y A2, puede ponerse ahora de manifiesto con toda facilidad que siempre que se satisface la condición

$$(*) \quad p(a, x) = p(b, x) \text{ para todo } x \text{ perteneciente a } S,$$

es posible sustituir algunas o todas las apariciones de los nombres del elemento b en cualquier fórmula bien formada del cálculo por un nombre cualquiera del elemento a , y que en tal sustitución no cambia el valor veritativo de aquélla; o, dicho de otro modo, que la condición (*) garantiza la equivalencia en la sustitución de a y b .

A la vista de este resultado, podemos definir la equivalencia booleana de dos elementos, a y b , del modo siguiente:

$$(D1) \quad a = b \leftrightarrow (x) p(a, x) = p(b, x)$$

Y de esta definición llegamos inmediatamente a las fórmulas

$$(A) \quad a = a$$

$$(B) \quad a = b \rightarrow b = a$$

$$(C) \quad (a = \& b = c) \rightarrow a = c$$

$$(D) \quad a = b \rightarrow a \text{ puede remplazar a } b \text{ en algunos o en todos los lugares de una fórmula cualquiera sin que tal cosa afecte a su valor veritativo.} \quad \text{A2, 90, 100.}$$

Podemos introducir también una segunda definición:

$$(D2) \quad a = b + c \leftrightarrow a = \overline{\overline{b} \overline{c}}$$

Obtenemos, entonces,

$$(D3) \quad a = bc \leftrightarrow a = \overline{\overline{b} + \overline{c}}$$

$$(I) \quad \text{Si } a \text{ y } b \text{ pertenecen a } S, \text{ entonces } a + b \text{ pertenece a } S \quad \text{(postulado 3, D2, D1, 90, 100).}$$

$$(II) \quad \text{Si } a \text{ pertenece a } S, \text{ entonces } \bar{a} \text{ pertenece a } S \quad \text{(postulado 4)}$$

$$(III) \quad a + b = b + a \quad \text{93, D2}$$

$$(IV) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{92, D2}$$

$$(V) \quad a + a = a \quad \text{94, D2}$$

- (VI) $ab + a\bar{b} = a$
 (VII) $(Ea)(Eb) a \neq b$

88, D2
 25, 74, 90, D1.

Ahora bien, el sistema formado por (A) a (D2) y (I) a (VI) es un sistema axiomático del álgebra booleana perfectamente conocido, que se debe a Huntington^[2]; y es sabido que de él son deductibles todas las fórmulas válidas de dicho álgebra.

Por tanto, S es un álgebra booleana; y dado que cabe interpretar éste como una lógica deductiva, podemos afirmar que *el cálculo de probabilidades, en su interpretación lógica, es una generalización legítima de la lógica deductiva.*

Más en especial, podemos admitir que « $a \geq b$ », definible por

$$(D4) \quad a \geq b \leftrightarrow ab = b,$$

signifique, en interpretación lógica, «a se sigue de b» (o «b entraña a»); y puede demostrarse fácilmente que

$$(+) \quad a \geq b \rightarrow p(a, b) = 1$$

Ésta es una fórmula importante^[3], propuesta por muchos autores, pero que no tiene validez, no obstante tal cosa, en la mayoría de los sistemas —supuesto que sean compatibles—. Para que sea válida es preciso admitir^[4]

$$p(a, a\bar{a}) + p(\bar{a}, a\bar{a}) = 2,$$

aun cuando también tenemos

$$p(a + \bar{a}, a\bar{a}) = 1$$

Es decir, no han de aseverarse incondicionalmente en un sistema fórmulas tales como $p(a + \bar{a}, b) = p(a, b) + p(\bar{a}, b)$ (cf. nuestro axioma C).

La fórmula inversa de (+), o sea, « $p(a, b) = 1 \rightarrow a \geq b$ » no debe ser demostrable, desde luego, como hacen ver nuestros ejemplos segundo y tercero de la demostración de compatibilidad —cf., asimismo, la fórmula (E) en las págs. 314 y 330—, por tanto, « $p(a, b) = 1$ » debe interpretarse como «al menos casi seguro»; o, en interpretación lógica, como *aa por lo menos casi se sigue de b*».

Pero en nuestro sistema existen otras equivalencias válidas, tales como

$$\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a \geq b &\leftrightarrow p(a, \bar{a}b) \neq 0 \\ a \geq b &\leftrightarrow p(a, \bar{a}b) \neq 1 \end{aligned}$$

Ninguna de ellas puede cumplirse en los sistemas al uso, en los que $p(a, b)$ no está definido más que cuando $p(b) \neq 0$. Parece estar bastante claro, pues, que los sistemas acostumbrados de la teoría de la probabilidad se caracterizan de un modo erróneo cuando se los llama generalizaciones de la lógica: son formalmente

inadecuados para este fin, ya que ni siquiera entrañan el álgebra booleana.

⊢ El carácter formal de nuestro sistema hace posible interpretarlo, por ejemplo, como una lógica proposicional polivalente (con cuantos valores nos plazca elegir, ya sean discretos, densos o continuos), o como un sistema de lógica modal; y, en realidad, podemos hacerlo de muchas maneras: por ejemplo, cabe definir «a implica necesariamente b» por medio de « $p(b, a) \neq 0$ » —como se acaba de indicar— o bien definir «a es lógicamente necesario» por « $p(a, \bar{a}) = 1$ ». Incluso el problema de si un enunciado necesario es necesariamente necesario tiene su lugar natural en la teoría probabilitaria, ya que se encuentra unido estrechamente a la relación entre los enunciados probabilitarios primarios y secundarios, que desempeña un papel muy importante en la teoría de la probabilidad (como se muestra en el apéndice *IX, punto *13 de la «tercera nota»); esquemáticamente: si escribimos « $\vdash x$ » en lugar de «x es necesario (en el sentido de demostrable)», y «h» en vez de « $p(a, \bar{a}) = 1$ », podemos escribir algo parecido a

$$\vdash a \rightarrow \vdash \langle p(h, \bar{h}) = 1 \rangle,$$

lo cual cabe considerar que significa: $\vdash a$ entraña que a es necesariamente necesario; mas puesto que esto último quiere decir algo así como

$$\overline{p(a, \bar{a}) = 1} \vdash a \rightarrow \vdash \langle \langle p(a, \bar{a}) = 1 \rangle, \langle \overline{p(a, \bar{a}) = 1} \rangle = 1 \rangle$$

hemos conseguido tener enunciados probabilitarios (secundarios) acerca de enunciados probabilitarios (primarios).

Pero, como es natural, hay otros modos —y mejores— de interpretar la relación existente entre un enunciado de probabilidad primario y uno secundario. (Ciertas interpretaciones nos impedirán que los tratemos como si perteneciesen al mismo nivel lingüístico, o incluso al mismo lenguaje.)

Sobre desorden objetivo o aleatoriedad

Para una teoría objetiva de la probabilidad, y para su aplicación a conceptos tales como el de entropía (o desorden molecular), es esencial dar una caracterización objetiva de *desorden o aleatoriedad como un tipo de orden*.

Pretendo indicar brevemente en este apéndice algunos de los problemas generales que dicha caracterización puede ayudar a resolver, y el modo en que cabe abordarla.

1) Se supone que la distribución de velocidades entre las moléculas de un gas en equilibrio es (muy aproximadamente) *aleatoria*. Análogamente, la distribución de las nebulosas en el universo parece ser aleatoria, de suerte que la densidad media de ellas es constante. También es *aleatoria* la caída de lluvia los domingos: en plazos muy dilatados, cada día de la semana recibe iguales cantidades de lluvia, y el hecho de que haya llovido un miércoles puede no servirnos para predecir si lloverá o no el domingo.

2) Tenemos ciertas *contrastaciones estadísticas* de aleatoriedad.

3) Podríamos describir la aleatoriedad diciendo que es la «ausencia de regularidad». Pero, como veremos más adelante, esto nos sirve de poco: pues no cabe someter a contraste la presencia o ausencia de regularidad en general, sino solamente las de una *regularidad concreta* que se haya dado o propuesto. Así pues, nuestras contrastaciones de aleatoriedad nunca excluyen la presencia de toda regularidad: podemos contrastar si existe o no una correlación significativa entre la lluvia y los domingos, o si cierta fórmula dada para predecir la lluvia en domingo —tal como, «por lo menos una vez cada tres semanas»— da buen resultado; pero, aunque es posible rechazar esta fórmula teniendo en cuenta las contrastaciones a que se la han sometido, éstas no pueden determinar si existe o no otra fórmula mejor.

4) En estas circunstancias, resulta tentador decir que la aleatoriedad o desorden no es un tipo de orden que pueda describirse objetivamente, y que es menester interpretarlo como *nuestra falta de conocimiento* del orden vigente —si es que lo hay—. A mi juicio, hemos de resistir a esta tentación, y, además, podemos elaborar una teoría que nos permite realmente la construcción de tipos ideales de desorden (y, naturalmente, asimismo, la de tipos ideales de orden, y de todos los grados intermedios entre estos extremos).

5) El problema más sencillo de este campo —y el que, según creo, he resuelto— es el de la construcción de *un tipo ideal unidimensional de desorden*, o sea, una sucesión idealmente desordenada.

El problema de construir una sucesión de esta índole surge inmediatamente en una teoría frecuencial de la probabilidad que trabaje con sucesiones infinitas, como puede verse por lo que sigue.

6) Según Von Mises, una sucesión de ceros y de unos con equi-distribución es aleatoria cuando no admite *ningún sistema de jugar*, es decir, ningún sistema que nos permitiera seleccionar por adelantado una subsucesión en que la distribución fuese desigual. Desde luego, Von Mises admite que cualquier sistema de jugar puede dar buen resultado durante algún tiempo, «accidentalmente»: lo único que postula es que fallará *a largo plazo* (o, con más precisión, en un número infinito de ensayos).

Por tanto, un colectivo de Von Mises puede ser enormemente regular *en su segmento inicial*: con tal de que al final se hagan irregulares, la regla de este autor es incapaz de excluir colectivos que empiecen con gran regularidad, digamos del modo siguiente:

00 11 00 11 00 11...

y así sucesivamente durante los primeros quinientos millones de cifras.

7) Es obvio que no podemos someter a contraste este tipo de aleatoriedad demorada; y también lo es que siempre que contrastamos la aleatoriedad de una sucesión estamos pensando en otro tipo de dicha característica: nos referimos a sucesiones que *desde el principio* se comporten de una forma «razonablemente aleatorizada».

Pero la expresión «desde el principio» da origen a un problema propio. ¿Está aleatorizada la sucesión 010110? Es evidente que es *demasiado corta* para que digamos sí o no; ahora bien, si se pretende que necesitamos una *sucesión larga* para decidir una cuestión de este tipo, parece entonces que nos desdecimos de lo que habíamos afirmado antes, o sea, que nos retractamos de la expresión «desde el principio».

8) La solución de esta dificultad reside en construir una sucesión *idealmente aleatoria*, o sea, una en la que cualquier segmento inicial —ya sea corto o largo— sea todo lo aleatorio que su longitud permita; dicho de otra forma: una sucesión cuyo grado n de aleatoriedad (es decir, su libertad- n de secuelas) aumente con su longitud todo lo rápidamente que sea posible desde el punto de vista matemático.

En el apéndice IV de este libro hemos mostrado cómo se construye una sucesión de este tipo (véase, especialmente, la nota *1 del apéndice IV, que hace referencia a un trabajo aún no publicado del doctor L. R. B. Elton y de mí mismo).

9) El conjunto infinito de todas las sucesiones que se conforman con tal descripción puede ser llamado *el tipo ideal de alternativas aleatorias* con equidistribución.

10) Aunque lo único que se postula acerca de estas sucesiones es que sean «fuertemente aleatorias» —en el sentido de que los segmentos iniciales finitos pasen todas las contrastaciones de aleatoriedad— es *fácil poner de manifiesto que tienen*

límites frecuenciales, en el sentido que suelen pedir las teorías de la frecuencia. De esta forma se resuelve de un modo sencillo uno de los problemas centrales del capítulo sobre la probabilidad, la eliminación del problema del límite: y ello gracias a reducir el comportamiento que es propio de una sucesión limitada al que es propio de sus segmentos finitos aleatorizados.

11) Es sumamente fácil extender esta construcción en las dos direcciones opuestas del caso unidimensional, sin más que coordinar los elementos que dentro de la serie de los puestos impares ocupan el primero, segundo, ..., lugar con los lugares primero, segundo, ..., de la dirección positiva, y los que en la serie de los puestos pares ocupan el primero, segundo, ..., lugar con los puestos primero, segundo, ..., de la dirección negativa. Y por otros métodos tan sabidos como éste, es posible extender nuestra forma de construcción a las celdillas de un espacio n -dimensional.

12) Aunque otros teóricos de la frecuencia —especialmente Von Mises, Copeland, Wald y Church— estaban interesados, principalmente, en definir sucesiones aleatorias del modo más exigente, para lo cual excluían «todos» los sistemas de jugar en el sentido más amplio posible de la palabra «todos» (o sea, en el sentido más amplio compatible con una demostración de que existan semejantes sucesiones aleatorias), mi meta ha sido enteramente diversa. Desde un principio he querido responder a la objeción de que la aleatoriedad es compatible *con cualquier segmento inicial finito*: he querido describir sucesiones que surjan a partir de *sucesiones aleatorizadas finitas* por un paso al infinito. Por este método he creído que podía lograr dos cosas: aferrarme al tipo de sucesión que pasaría las contrastaciones estadísticas de aleatoriedad y *demostrar* el teorema del límite. He conseguido ambos objetivos valiéndome de la construcción dada en mi antiguo apéndice IV, como acabo de indicar en el párrafo 8); pero, mientras tanto, he encontrado que para abordar la probabilidad es preferible el «punto de vista de la teoría de la medida» a la interpretación frecuencial (véase mi *PostScript*, capítulo *III), tanto por razones matemáticas como filosóficas (el punto decisivo está relacionado con la interpretación de propensiones de la probabilidad, que debato a fondo en el *PostScript*), por lo cual ya no pienso que tenga gran importancia eliminar el axioma del límite de la teoría frecuencial. Pero puede seguirse haciendo: podemos estructurar esta teoría desde sus comienzos sirviéndonos del tipo ideal de sucesiones aleatorias que hemos construido en el apéndice IV, y cabe que llamemos aleatoria a una sucesión empírica en la medida en que las contrastaciones hagan ver su semejanza estadística con una sucesión ideal.

Las sucesiones admitidas por Von Mises, Copeland, Wald y Church no son necesariamente de este tipo (como ya hemos hecho observar más arriba); y, por otro lado, es innegable que cualquier sucesión que se haya rechazado —en virtud de contrastaciones estadísticas— como no aleatoria, puede convertirse posteriormente en una sucesión aleatoria admisible en el sentido de estos autores.

13) Actualmente, al cabo de varios años de haber resuelto los antiguos problemas

de una forma que me hubiera satisfecho en 1934, ya no creo del todo en la importancia de construir una teoría frecuencial que se encuentre libre de todas aquellas dificultades. Pero continúo creyendo en la importancia de que la aleatoriedad o desorden pueda considerarse como un tipo de orden, y de que quepa construir modelos objetivos de ella.

Probabilidad nula y estructura fina de la probabilidad y del contenido

Hemos distinguido netamente en el libro entre la idea de probabilidad de una hipótesis y su *grado de corroboración*. Hemos afirmado que si decimos de una hipótesis que está bien corroborada, con ello no afirmamos sino que ha sido sometida a contrastaciones muy exigentes (tiene que tratarse, por ello, de una hipótesis con un grado de contrastabilidad elevado) y que hasta el momento ha salido sin daño de ellas. Hemos aseverado, asimismo, que *el grado de corroboración no puede ser una probabilidad*, ya que no puede satisfacer las leyes del cálculo de probabilidades: pues éstas piden que de dos hipótesis dadas, la que sea lógicamente de más peso, o más informativa, o más contrastable —y, por tanto, la que pueda *corroborarse mejor*— sea siempre la *menos probable* (teniendo en cuenta los datos de que se disponga). (Véanse, en particular, los apartados 82 y 83.)

Así pues, en general, un grado más elevado de corroboración estará acompañado por uno inferior de probabilidad; lo cual no sólo nos hace ver que hemos de distinguir de un modo tajante entre probabilidad (en el sentido del cálculo de probabilidades) y grado de corroboración o confirmación, sino también que *la teoría probabilística de la inducción —o idea de una probabilidad inductiva— es insostenible*.

En el texto se pone de manifiesto la imposibilidad citada (apartados 80, 81 y 83) en la discusión que se lleva a cabo de ciertas ideas de Reichenbach, Keynes y Kaila. Uno de los resultados de este estudio es que *la probabilidad de una ley universal cualquiera (no tautológica) es cero en un universo infinito* (ya lo sea por el número de los objetos discernibles, ya por el de las regiones espacio-temporales).

(Otro resultado a que hemos llegado ha sido el de que no hemos de asumir de modo no crítico que los científicos procuren nunca que sus teorías tengan un grado de probabilidad muy elevado: tienen que elegir entre gran probabilidad y gran contenido informativo, pues *por razones lógicas no pueden tener ambas cosas*; y enfrentados con la elección, hasta ahora han preferido siempre lo último —con tal de que la teoría haya salido indemne de las contrastaciones.)

Con la palabra «probabilidad» me refiero ahora, bien a la probabilidad lógica *absoluta* de la ley universal, bien a su probabilidad *relativa a unos datos determinados*: esto es, a un enunciado singular o a una conjunción finita de éstos. Así pues, si *a* es la ley de que hablamos y *b* cualesquiera datos o pruebas empíricos, afirmo que

$$(1) \quad p(a) = 0$$

y también que

$$(2) \quad p(a, b) = 0$$

Vamos a discutir estas fórmulas en el presente apéndice.

(1) y (2) son equivalentes. Pues, como Jeffreys y Keynes han observado, si la probabilidad «previa» (la probabilidad lógica absoluta) de un enunciado a es cero, lo mismo ha de serlo su probabilidad relativa a cualesquiera datos b finitos, ya que podemos asumir que cuando b tiene este significado se cumple $p(b) \neq 0$, pues $p(a) = 0$ entraña $p(ab) = 0$, y como $p(a, b) = p(ab)/p(b)$, obtenemos (2) a partir de (1). Por otra parte, de (2) podemos llegar a (1): pues si aquella fórmula es válida para unos datos b cualesquiera, por leves o «tautológicos» que sean, cabe suponer que se cumple también para los datos nulos, es decir, para la tautología $t = \overline{bb}$ y podemos definir $p(a)$ como igual a $p(a, t)$.

Existen muchos argumentos en favor de (1) y (2). En primer lugar, se puede considerar la definición clásica de probabilidad como el número de posibilidades favorables dividido por el de todas las posibilidades (iguales). Podemos deducir (2), por ejemplo, si identificamos las posibilidades favorables con los datos favorables: es evidente que, en este caso $p(a, b) = 0$, ya que los datos favorables sólo cabe que sean finitos, mientras que las posibilidades existentes en un universo infinito han de ser, sin duda alguna, infinitas. (En este razonamiento no nos apoyamos sobre la «infinitud», ya que cualquier universo suficientemente grande nos dará el mismo resultado, con el grado de aproximación que queramos; y sabemos que nuestro universo es enormemente grande comparado con la cantidad de datos que están a nuestro alcance.)

Esta sencilla consideración es quizá algo vaga, pero cabe fortalecerla considerablemente si lo que tratamos de deducir de la definición clásica no es (2), sino (1). Podemos, con tal objeto, interpretar el enunciado universal a como si entrañase un producto infinito de enunciados singulares, cada uno de ellos dotado de una probabilidad que, desde luego, tiene que ser menor que la unidad. En el caso más sencillo se puede interpretar el mismo a como semejante producto infinito: es decir, podemos hacer $a =$ «cualquier cosa que tenga la propiedad A », o —en símbolos— « $(x)Ax$ » (que puede leerse: «para cualquier valor de x que escojamos, x tiene la propiedad A »^[1]): y en este caso, pues, es posible interpretar a como el producto infinito $a = a_1 a_2 a_3 \dots$, en donde $a_i = A_{k_i}$ (siendo k_i el nombre del i -ésimo individuo de nuestro infinito universo del discurso).

Podemos introducir ahora el nombre « a^n » para el producto de los n primeros enunciados singulares, $a_1 a_2 \dots a_n$, de suerte que quepa escribir a así:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$$

y (véase la pág. 322)

$$(3) \quad p(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(a^n)$$

Evidentemente, podemos interpretar a^n como la aserción de que en la sucesión finita de elementos k_1, k_2, \dots, k_n , todos ellos tienen la propiedad A. De este modo, es fácil aplicar la definición clásica a la evaluación de $p(a^n)$: existe solamente una posibilidad favorable a la aserción a^n : la de que todos los n individuos k_i , sin excepción, posean la propiedad A en lugar de la propiedad no A; pero el número total de posibilidades es 2^n , ya que hemos de suponer que todo individuo k_i pueda tener una cualquiera de las dos propiedades, A o no A. En consecuencia, la teoría clásica nos da

$$(4^c) \quad p(a^n) = 1/2^n$$

Pero, a partir de (3) y (4^c), obtenemos inmediatamente (1).

El razonamiento «clásico» que lleva a (4^c) no es adecuado del todo, aun cuando creo que en lo esencial es correcto.

Su inadecuación reside únicamente en asumir que A y no A sean igualmente probables: pues cabe objetar —correctamente, según me parece— que, puesto que se supone que a describe una ley de la Naturaleza, los distintos a_i son enunciados ejemplificadores, y, por ello, más probables que sus negaciones, que son posibles falsadores (cf. la nota *1 del apartado 28). Sin embargo, esta objeción se refiere a un aspecto del argumento que es secundario: pues cualquiera que sea la probabilidad que atribuyamos a A —salvo la unidad—, el producto infinito a tendrá la probabilidad cero (si suponemos que hay independencia, de lo cual nos ocuparemos más adelante). En realidad, nos hemos topado con un caso especialmente trivial de la *ley de la probabilidad uno o cero* (que, aludiendo a la neurofisiología, podemos llamar también «el principio de todo o nada»), que —en este caso— puede formularse así: si a es el producto infinito de a_1, a_2, \dots , (en donde $p(a_i) = p(a_j)$ y, además, cada a_i sea independiente de los demás), se cumple lo siguiente:

$$(4) \quad p(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(a^n) = 0, \text{ a menos que } p(a) = p(a^n) = 1$$

Pero es evidente que $p(a) = 1$ es inaceptable (no sólo desde mi punto de vista, sino, asimismo, desde el de mis contradictores inductivistas, que es obvio no pueden aceptar la consecuencia de que la probabilidad de una ley universal no sea capaz de aumentar debido a la experiencia): pues «todos los cisnes son negros» tendría la probabilidad 1, exactamente igual que «todos los cisnes son blancos» (y

análogamente para todos los colores), de forma que «existe un cisne negro», «existe un cisne blanco», etc., tendrían todos probabilidad nula, pese a su debilidad lógica intuitiva. Dicho de otro modo, $p(a) = 1$ equivaldría a afirmar por razones puramente lógicas que el universo está vacío con probabilidad 1.

Así pues, en virtud de (4) queda estatuida (1).

Aunque creo que este argumento (incluyendo la suposición de independencia, que discutiremos más abajo) es incontestable, existen otros más débiles, que no asumen la independencia y llevan, sin embargo, a (1). Podemos razonar, por ejemplo, del modo siguiente.

En nuestra deducción habíamos supuesto que para todo k_i es lógicamente posible que tenga la propiedad A, y, asimismo, que tenga la no A; y, de este modo, se llega fundamentalmente a (4). Pero podría quizá asumirse que no hemos de considerar como posibilidades fundamentales las propiedades posibles de todo individuo del campo de n individuos, sino las posibles proporciones en que las propiedades A y no A pueden aparecer en una muestra de individuos; si ésta consta de n individuos, las proporciones posibles con que puede darse A son, $0, 1/n, \dots, n/n$; y si consideramos como posibilidades fundamentales las apariciones de cualesquiera de estas proporciones, y las tratamos, pues, como igualmente probables («distribución de Laplace^[2]»), hemos de remplazar (4) por

$$(5) \quad p(a^n) = 1/n; \text{ de modo que } \lim p(a^n) = 0.$$

Aun cuando, desde el punto de vista de la deducción de (1), la fórmula (5) es mucho más débil que (4), con todo nos permite deducir (1): y ello sin que hayamos de identificar los casos observados con los favorables o de suponer un número finito de los primeros.

Otra argumentación muy parecida que conduce, asimismo, a (1) sería la siguiente. Podemos parar mientes en el hecho de que toda ley universal, a , entraña una hipótesis estadística h . de la forma $p(x, y) = 1$ (y, por tanto, es, como máximo, tan probable como ésta), y en que la probabilidad absoluta de h puede calcularse valiéndose de la distribución de Laplace, lo cual da el resultado $p(h) = 0$ (cf. el apéndice *IX, «Tercera nota», especialmente *13). Pero como a entraña h , se sigue que $p(a) = 0$, es decir, se obtiene (1).

A mi entender, ésta es la demostración que parece más sencilla y convincente: permite mantener (4) y (5), sin más que suponer que se aplica a a y (5) a h .

Hasta el momento, nuestras consideraciones se han basado en la definición clásica de la probabilidad. Pero llegamos al mismo resultado si en lugar de ello adoptamos como fundamento la interpretación lógica del cálculo de probabilidades formal: entonces, el problema se convierte en uno de dependencia o independencia de enunciados.

Si miramos a , de nuevo, como el producto lógico de los enunciados singulares $a_1,$

a_2, \dots , la única suposición razonable parece ser la de que —en ausencia de toda información (que no sea tautológica)— hemos de considerar que todos estos enunciados son mutuamente *independientes*, de suerte que a_i pueda estar seguido por a_j o por su negación, \bar{a}_j , con las probabilidades

$$p(a_j a_i) = p(a_j)$$

$$p(\bar{a}_j a_i) = p(\bar{a}_j) = 1 - p(a_j).$$

Cualquier otra suposición equivaldría a postular *ad hoc* que se produjese algún tipo de secuelas, o sea, a postular que hubiera algo así como una conexión causal entre a_j y a_i ; pero es palmario que se trataría de una suposición no lógica, sino sintética, que habría de formularse como hipótesis: y que, por tanto, no puede formar parte de una teoría puramente lógica de la probabilidad.

Podemos expresar lo mismo de un modo algo diferente como sigue: cuando hay una hipótesis, digamos h , podemos tener, desde luego,

$$(6) \quad p(a_j a_i | h) > p(a_j, h)$$

ya que h puede informarnos de la existencia de cierto tipo de secuela; y, por consiguiente, tendríamos también

$$(7) \quad p(a_j a_i, h) > p(a_j, h) p(a_i, h),$$

ya que (7) es equivalente a (6). Pero, ya sea que h no exista o que sea tautológica, o —dicho de otra forma— que nos ocupemos de probabilidades lógicas absolutas, habremos de remplazar (7) por

$$(8) \quad p(a_i a_j) = p(a_i) p(a_j)$$

cuyo significado es que a_i y a_j son *independientes*, y equivale a

$$(9) \quad p(a_j, a_i) = p(a_j).$$

Pero la suposición de independencia mutua —juntamente con $p(a_i) < 1$ — lleva a $p(a) = 0$, como antes; es decir, a (1).

Así pues, (8) —esto es, la asunción de que los enunciados sin guiones a_i sean independientes entre sí— conduce a (1); y ésta es, principalmente, la razón por la que algunos autores han rechazado aquella fórmula, directa o indirectamente. Invariablemente, el argumento ha consistido en decir que (8) tiene que ser falsa, pues si fuese verdadera *no podríamos sacar enseñanzas de la experiencia*, o sea, que el conocimiento empírico sería imposible. Pero esto es inexacto; la experiencia nos puede enseñar, aun cuando $p(a) = p(a, b) = 0$: por ejemplo, a pesar de ello, $C(a, b)$

—es decir, el grado de corroboración de a por las contrastaciones b — puede aumentar en virtud de nuevas contrastaciones. Por tanto, este argumento «trascendental» no hiere en el blanco; o, en todo caso, no en mi teoría^[3].

Pero consideremos ahora la tesis de que (8) sea falsa, o —expresado de otro modo— que

$$p(a_i a_j) > p(a_i) p(a_j)$$

sea válida, y que, por consiguiente, lo sea

$$p(a_i, a_j) > p(a_j),$$

y esta otra

$$(+) \quad p(a_n, a_1 a_2 \dots a_{n-1}) > p(a_n)$$

Esta tesis afirma que, una vez que hemos encontrado que cierto k_i tiene la propiedad A , aumenta la probabilidad de que otro k_j tenga la misma propiedad; y aún más, si hemos encontrado la propiedad mentada en varios casos. Dicho con la terminología de Hume, (+) asevera «que los casos» (por ejemplo, k_n) «de que no tenemos experiencia, es probable que se parezcan a aquéllos de los que la tenemos».

Esta cita —excepto las palabras «es probable que» [y el modo del verbo «parecer», en castellano ($T.$)]— está tomada de la crítica de la inducción hecha por Hume^[4]; la cual se aplica enteramente a (+) y a su formulación lingüística, que hemos transcrito en cursiva: pues, según arguye Hume, «*incluso después de observar que se da frecuentemente una conjunción constante de objetos, carecemos de razones para extraer inferencia alguna acerca de ningún objeto que trascienda aquellos de los que hemos tenido experiencia*^[5]». Si alguien sugiriese que nuestra experiencia nos autoriza a sacar inferencias por las que pasemos de objetos observados a no observados, dice Hume, «reiteraría mi pregunta de *por qué a partir de dicha experiencia formamos conclusión alguna que vaya más allá de los casos de que hemos tenido anteriormente experiencia*». Dicho de otro modo: Hume señala que quedamos cogidos en una regresión infinita si apelamos a la experiencia a fin de justificar una conclusión *cualquiera acerca de casos no observados, ni siquiera las conclusiones más probables*, añade en su *Abstract*; pues leemos aquí: «Es evidente que Adán, con toda su ciencia, nunca hubiera sido capaz de demostrar que el curso de la Naturaleza continuaría uniformemente el mismo... Digo más, y sobre esto añado que no podía ni tan siquiera probar, valido de ningún argumento *probable*, que el futuro se conformaría al pasado. Todos los argumentos probables constrúyense en la suposición de que hay conformidad entre un futuro y un pasado, y de ahí que jamás puedan probarlo^[6]». Así pues, (+) no puede justificarse por la experiencia; mas para ser lógicamente válida habría de tener el carácter de tautología, que sería válida en todo universo lógicamente posible. Ahora bien; es obvio que éste no es el caso.

Por tanto, si (+) fuese verdadera, tendría el carácter lógico de un *principio a priori* de inducción, y no el de una aserción analítica o lógica. Pero tampoco basta tal cosa como principio de inducción: pues (+) podría ser verdadera, pero $p(a) = 0$ seguiría siendo válida. Tenemos un ejemplo de una teoría que acepta (+) como válida *a priori* (aunque ésta, como hemos visto, tiene que ser sintética) y admite, al mismo tiempo, $p(a) = 0$, en la de Carnap^[7].

Un principio de inducción probabilístico eficaz tendría que ser más exigente incluso que (+): habría de permitirnos —por lo menos— concluir que, para unos datos singulares apropiados, b , podamos obtener $p(a, b) > 1/2$; o, expresado lingüísticamente: que por medio de los datos que acumulemos en su favor, se pueda llegar a hacerse más probable que su negación. Ahora bien, sólo es posible tal cosa si (1) es falsa, es decir, si tenemos $p(a) > 0$.

Mediante un argumento que da Jeffreys en su *Theory of Probability*, § 1.6^[8], puede llegarse a una demostración de (2) y una contrademostración de (+) aún más directas. Este autor discute en el lugar citado una fórmula —que designa con (3)— cuyo significado equivale a lo que podemos expresar con nuestro simbolismo del modo siguiente: que, supuesto que $p(b_i, a) = 1$ para todo $i \leq n$ (de modo que $p(ab^n) = p(a)$) ha de cumplirse la fórmula y esta otra

$$(10) \quad p(a, b^n) = p(a)/p(b^n) = p(a)/p(b^1) p(b^2, b^1) \dots p(b^n, b^{n-1})$$

En la discusión de ésta, Jeffreys dice (sigo empleando mis símbolos en lugar de los suyos): «Así pues, si se dispone de un número suficiente de verificaciones, ha de ocurrir una de estas tres cosas: 1) la probabilidad de a teniendo en cuenta la información disponible excede de 1; 2) dicha probabilidad es siempre 0; 3) $p(b_n, b^{n-1})$ tenderá a 1». A esto añade que el caso 1) es imposible (lo cual es una verdad trivial), de suerte que sólo quedan 2) y 3). Pues bien, mantengo que la suposición de que se cumpla universalmente el caso 3) —por algunas obscuras razones lógicas (y sería menester que se cumpliera universalmente, y aún más, *a priori*, para que pudiera ser utilizado en la inducción)— puede refutarse fácilmente: pues la única condición que se precisa para deducir (10) —aparte de $0 < p(b_i) < 1$ — es la de que exista algún enunciado a tal que $p(b^n, a) = 1$. Mas para toda sucesión de enunciados b_i , esta condición puede satisfacerse *siempre*. Pues supongamos que los b (son informes acerca de tiradas de una perra chica; entonces siempre será posible construir una ley universal, a , que entrañe los informes de todas las $n-1$ tiradas observadas y que nos permita predecir todas las tiradas siguientes (aunque, probablemente, de un modo inexacto)^[9]; así pues, existe siempre la a pedida, y existe, asimismo, otra ley, a' , que nos da los mismos $n-1$ primeros resultados, pero predice lo contrario que la a para la tirada n -ésima. Sería paradójico, por tanto, aceptar el caso (3) de Jeffreys, ya que cuando n sea suficientemente grande obtendremos siempre una $p(b_n, b^{n-1})$ muy

próxima a 1, y, al mismo tiempo, también una $p(\bar{b}, b^{n-1})$ muy cercana a 1 (en virtud de la otra ley, a'). Por consiguiente, el argumento de Jeffreys, que matemáticamente es irrefutable, puede emplearse para demostrar su caso 2), que resulta coincidir con mi propia fórmula (2), tal y como la enuncié al comienzo de este apéndice^[10].

Podemos resumir nuestra crítica de (+) del modo que sigue. Algunos creen que la probabilidad de que la próxima cosa que nos encontremos sea roja aumentará, en general, con el número de cosas rojas que hayamos visto anteriormente, y ello por razones puramente lógicas. Pero se trata de una creencia en algo mágico, a saber, en la magia del lenguaje humano: pues «rojo» no es más que un predicado, y han de existir siempre predicados A y B que se apliquen simultáneamente a todas las cosas observadas hasta el momento y lleven, sin embargo, a predicciones probabilísticas con respecto a la próxima cosa que sean incompatibles entre sí; es posible que estos predicados no se encuentren en los lenguajes naturales, pero pueden siempre construirse (por extraño que parezca, la creencia mágica de que aquí hablamos se encuentra entre los que construyen modelos artificiales de lenguaje, en vez de entre los analistas de los lenguajes ordinarios). Así, pues, cuando critico (+) estoy defendiendo, desde luego, el principio de la *independencia* (lógica absoluta) de cada a_n respecto de cualquier combinación de a_i, a_j, \dots ; es decir, mi crítica equivale a defender (4) y (1).

Existen también otras demostraciones de (1). Una de ellas se debe, fundamentalmente, a una idea de Jeffreys y Wrinch^[11] que discutiré más a fondo en el apéndice *viii, pero cuyo núcleo principal es (con leves reajustes) el siguiente.

Sea e un *explicandum*, o —con más precisión— un conjunto de hechos singulares o datos que tratamos de explicar valiéndonos de una ley universal. En general, existirá un número infinito de explicaciones posibles (mutuamente *excluyentes*, supuestos los datos e), y tales que la suma de sus probabilidades (supuesto e) no puede exceder de la unidad. Pero esto quiere decir que la probabilidad de casi todas ellas tiene que ser cero; a menos, ciertamente, que podamos ordenar todas las posibles leyes en una sucesión infinita y podamos atribuir a cada una una probabilidad positiva de forma que su suma converja y no sea mayor que la unidad; y quiere decir, además, que (en general) habrá de atribuirse una probabilidad mayor a las leyes que aparezcan primero en la sucesión mencionada que a las posteriores. Tenemos que asegurarnos, pues, que se cumple la importante *condición de compatibilidad* que sigue.

El método que adoptemos para ordenar las leyes no debe colocar jamás una ley determinada delante de otra asimismo determinada si es posible demostrar que la segunda tiene una probabilidad mayor que la primera.

Jeffreys y Wrinch tienen ciertas razones intuitivas para creer que puede encontrarse un método de ordenar dichas leyes que satisfaga la condición de compatibilidad: en efecto, han propuesto ordenar las teorías explicativas de acuerdo con un grado decreciente de sencillez («postulado de sencillez») o un grado creciente

de complejidad (en que ésta se mida por el número de parámetros ajustables de la ley). Pero puede hacerse ver —y así haremos en el apéndice *VIII— que este método de ordenación, y cualquier otro posible, viola la condición de compatibilidad.

Así pues, obtenemos $p(a, e) = 0$ para todas las hipótesis explicativas, cualesquiera que sean los datos e : es decir, obtenemos (2), y, por tanto, indirectamente, (1).

(Un aspecto interesante de la última demostración es el de ser válida incluso en un universo finito, con tal de que nuestras hipótesis explicativas estén formuladas en un lenguaje matemático que permita una infinidad de hipótesis (mutuamente excluyentes). Podemos construir, por ejemplo, el universo siguiente^[12]: se colocan pequeños discos o piezas del juego de damas en un tablero de ajedrez muy prolongado en ambas direcciones, haciéndolo de acuerdo con la regla siguiente: existe una función —o curva— definida matemáticamente, conocida por el que coloca las piezas, pero no por nosotros, y los discos pueden depositarse solamente en escaques que se encuentren sobre la curva; pero, por lo demás, se colocarán al azar. Tenemos que observar la colocación de los discos y encontrar una «teoría explicativa», es decir, la curva matemática desconocida, si es posible, o una que sea muy próxima a ella. Es evidente que habrá una infinidad de posibles soluciones matemáticamente incompatibles, aun cuando algunas serán indiscernibles con respecto a los discos colocados en el tablero; y cualquiera de ellas —como es natural— puede quedar «refutada» por los discos que se coloquen después de haberse propuesto. Aunque puede hacerse que el «universo» —el de las posiciones posibles— sea finito, habrá, sin embargo, una infinidad de teorías matemáticas explicativas incompatibles. Sé perfectamente, desde luego, que los instrumentalistas u operacionistas podrán decir que las diferencias entre dos teorías que determinan las mismas casillas «carecen de sentido»; pero —aparte de que este ejemplo no forma parte de mi argumentación, de suerte que no necesito realmente contestar a esta objeción— debe advertirse lo siguiente: en muchos casos será posible dar «sentido» a estas diferencias «sin sentido» haciendo suficientemente apretada la red, esto es, subdividiendo los escaques.)

En el apéndice *VIII se encontrará una discusión detallada del hecho de que no es posible satisfacer la condición de compatibilidad que he planteado. Y voy a dejar ya el problema de la validez de las fórmulas (1) y (2) con objeto de pasar al estudio de los problemas formales que surgen del hecho de que estas fórmulas son válidas, por lo cual todas las teorías universales, cualquiera que sea su contenido, tienen probabilidad nula.

No puede dudarse de que los contenidos o pesos lógicos de dos teorías universales pueden ser sumamente distintos. Consideremos las dos leyes, $a_1 =$ «todos los planetas se mueven en circunferencias» y $a_2 =$ «todos los planetas se mueven en elipses». Debido al hecho de que todas las circunferencias son elipses (de

excentricidad cero), entraña a_2 , pero no viceversa: el contenido de a_1 es bastante mayor que el de a_2 (por supuesto, existen otras teorías, y lógicamente más exigentes —o de mayor peso— que a_1 : por ejemplo, «todos los planetas se mueven en circunferencias concéntricas alrededor del sol»).

El que a_1 exceda desde el punto de vista del contenido a a_2 tiene la máxima importancia para todos nuestros problemas. Por ejemplo, ciertas *contrastaciones* de a_1 —es decir, intentos de refutar a_1 , descubriendo alguna desviación de la circularidad— no lo serían de a_2 ; pero no pueden existir contrastaciones auténticas de a_2 que no constituyan simultáneamente un intento de refutar a_1 . Así pues, esta última puede someterse a contrastaciones más exigentes que la primera, o sea que tiene un grado de contrastabilidad mayor; y si sale indemne de tales contrastaciones alcanzará un grado de corroboración más elevado que el que puede conseguir a_2 .

También entre dos teorías, a_1 y a_2 , tales que a_1 no entrañe lógicamente a_2 , pueden encontrarse relaciones parecidas, si es que a_1 entraña una teoría de la cual a_2 es una buena aproximación. (Así, a_1 puede ser la dinámica newtoniana y a_2 las leyes de Kepler, que no se siguen de la teoría de Newton, sino que meramente «se siguen con una buena aproximación»; véase también el apartado *15 de mi *PostScript*. También en este caso la teoría de Newton es más contrastable, pues tiene mayor contenido)^[13].

Ahora bien; nuestra demostración de (1) hace ver que no es posible expresar de un modo directo estas diferencias de contenido y de contrastabilidad a base de la probabilidad lógica absoluta de las teorías a_1 y a_2 , ya que $p(a_1) = p(a_2) = 0$. Y si definimos una medida del contenido, $C(a)$, por $C(a) = 1 - p(a)$, según se ha indicado en el texto, obtenemos de nuevo $C(a_1) = C(a_2)$, de modo que las diferencias de contenido que nos interesan siguen sin ponerse de manifiesto por medio de semejante medida (y, de parecida manera, no puede expresarse la diferencia entre un enunciado contradictorio, $a\bar{a}$, y una teoría universal, a , ya que $p(a\bar{a}) = p(a) = 0$, y $C(a\bar{a}) = C(a) = 1$ ^[14]).

Todo esto no quiere decir que nos sea imposible expresar la diferencia de contenido entre a_1 y a_2 , en términos probabilísticos, al menos en algunos casos. Por ejemplo, el que a_1 entrañe a_2 , pero no viceversa, da origen a

$$p(a_1, a_2) = 0; p(a_2, a_1) = 1$$

aun cuando tengamos al mismo tiempo que

$$p(a_1) = p(a_2) = 0.$$

Así, pues, se cumpliría

$$p(a_1, a_2) < p(a_2, a_1)$$

lo cual indicaría que a_1 tiene mayor contenido.

Cabe expresar el hecho de que existan estas diferencias de contenido y de probabilidad lógica absoluta —que no pueden traducirse de un modo inmediato en las medidas correspondientes— diciendo que hay una «estructura fina» del contenido, y de la probabilidad lógica, que nos puede permitir la discriminación entre contenidos —y probabilidades absolutas— mayores y menores incluso en casos en que las medidas $C(a)$ y $p(a)$ sean demasiado toscas, y, por ello, insensibles a tales diferencias. Podemos representar la estructura fina por medio de los símbolos « \succ » («es mayor») y « \prec » («es menor») en lugar de los símbolos acostumbrados « $>$ » y « $<$ » (y podemos emplear también « \succeq » —o sea, «es mayor o igual»— y « \preceq »), y regular su utilización por medio de las reglas siguientes:

(1) « $C(a) \succ C(b)$ » —y, con ello, su equivalente « $p(a) \prec p(b)$ »— puede emplearse para enunciar que el contenido de a es mayor que el de b —por lo menos en el sentido de la estructura fina del contenido—. Hemos de suponer, pues, que $C(a) \succ C(b)$ entraña $C(a) \succeq C(b)$, y que esta fórmula entraña, a su vez, $C(a) \geq C(b)$, esto es, la falsedad de $C(a) < C(b)$; pero no se cumplen las relaciones de entrañamiento opuestas.

(2) $C(a) \succeq C(b)$ juntamente con $C(a) \preceq C(b)$ entrañan $C(a) = C(b)$, pero $C(a) = C(b)$ es compatible con $C(a) \succ C(b)$ y con $C(a) \prec C(b)$ (y, naturalmente, también con $C(a) \succeq C(b)$ y con $C(a) \preceq C(b)$).

(3) $C(a) > C(b)$ entraña siempre $C(a) \succ C(b)$.

(4) Para $p(a) \succ p(b)$, etc., se cumplen las reglas correspondientes.

Surge ahora el problema de determinar en qué casos podemos decir que $C(a) \succ C(b)$ aunque se tenga $C(a) = C(b)$. Hay una serie de ellos que son bastante claros: por ejemplo, aquéllos en que hay entrañamiento unilateral de b por a ; pero, de un modo más general, propongo la regla siguiente.

Si para todos los universos *finitos* suficientemente grandes (esto es, para todos los universos que tienen más de N miembros, siendo N suficientemente grande) tenemos $C(a) > C(b)$ —y, por tanto, y de acuerdo con la regla (3), tenemos $C(a) \succ C(b)$ —, entonces mantenemos que $C(a) \succ C(b)$ en un universo infinito (incluso si se cumple $C(a) = C(b)$ para un universo infinito).

Parece que esta regla abarca la mayoría de los casos que ofrecen interés, si bien quizá no todos^[15].

Nuestra regla es aplicable al problema de $a_1 =$ «todos los planetas se mueven en circunferencias» y $a_2 =$ «todos los planetas se mueven en elipses», y lo mismo ocurre cuando se comparan a_1 y a_2 con $a_3 =$ «todos los planetas se mueven en elipses de excentricidad no nula»: pues $p(a_3) > p(a_1)$ se cumplirá en todos los universos finitos suficientemente grandes (digamos, de posibles observaciones), en el sencillo sentido de que hay más posibilidades compatibles con a_3 que con a_1 .

La estructura fina del contenido y de la probabilidad que hemos discutido no afecta solamente a los límites, 0 y 1, del intervalo probabilístico, sino —en principio— a todas las probabilidades comprendidas entre estos valores. Pues, sean a_1 , y a_2 leyes universales tales que $p(a_2) = 0$ y $p(a_1) \sim p(a_2)$, como antes; supongamos que b no está entrañado por a_1 , por a_2 , ni por las negaciones de éstas, y que $0 < p(b) = r < 1$; tenemos entonces,

$$p(a_1 \vee b) = p(a_2 \vee b) = r$$

y, al mismo tiempo,

$$p(a_1 \vee b) \prec p(a_2 \vee b).$$

Tenemos, análogamente,

$$p(\bar{a}_1 b) = p(\bar{a}_2 b) = r$$

y, a la vez,

$$p(a_1 j) \succ p(\bar{a}_2 b),$$

ya que $p(\bar{a}_1) \succ p(\bar{a}_2)$, aun cuando —desde luego— $p(\bar{a}_1) = p(\bar{a}_2) = 1$. Por tanto, para todo b tal que $p(b) = r$ podemos tener un c_1 tal que $p(c_1) = p(b)$ y $p(c_1) \sim p(b)$, y, asimismo, un c_2 tal que $p(c_2) = p(b)$ y $p(c_2) \succ p(b)$.

La situación que acabamos de debatir tiene mucha importancia para el modo en que se haya de tratar la sencillez o la dimensión de una teoría: problema del que nos ocuparemos ulteriormente en el próximo apéndice.

Contenido, sencillez y dimensión

Como he indicado en el libro^[1], no tengo fe en la imposición de cortapisas al lenguaje científico, o sea, en que se logre nada impidiendo que el científico emplee con entera libertad, siempre que lo estime conveniente, ideas o predicados nuevos, conceptos «ocultos» o cualquier otra cosa. Por esta razón, no puedo soportar los diversos intentos recientes de introducir en la filosofía de la ciencia el método de los cálculos artificiales o «sistemas lingüísticos» —que se supone son modelos de un «lenguaje de la ciencia» simplificado—. No sólo creo que tales tentativas han sido inútiles hasta el momento, sino que han contribuido incluso a engendrar la obscuridad y la confusión que hoy prevalecen en la filosofía de la ciencia.

Hemos explicado sucintamente en el apartado 38 y en el apéndice I que, en caso de que tuviésemos a nuestra disposición enunciados (absolutamente) *atómicos* —o, lo cual equivale a lo anterior, predicados (absolutamente) *atómicos*—, podríamos introducir el recíproco del número mínimo de *enunciados atómicos* que se necesitan para refutar una teoría como medida del *contenido* de la misma. Pues, dado que el grado de contenido de una teoría es el mismo que su grado de contrastabilidad o refutabilidad, la teoría que sea refutable por medio de menor número de enunciados atómicos será la más fácilmente refutable o contrastable, y, por eso, la que tenga mayor contenido. (En resumen: cuanto menor sea el número de enunciados atómicos necesarios para componer un posible falsador, mayor será el contenido de la teoría.)

Pero no es mi deseo trabajar ni con unos enunciados atómicos ficticios ni con un sistema lingüístico artificial en el que dispongamos de tales enunciados, pues me parece obvio que en la ciencia no contamos con predicados atómicos «naturales». Para ciertos lógicos antiguos, los predicados «hombre» y «mortal» han ofrecido, al parecer, el aspecto de ejemplos de algo así como predicados atómicos; y Carnap emplea en los ejemplos «azul» o «caliente», tal vez porque «hombre» y «mortal» son ideas muy complejas que —así pueden pensar algunos— es posible definir valiéndose de otras más sencillas, del tipo de «azul» o «caliente». Pero es muy característico de los debates científicos que ni estos predicados ni ningunos otros se tratan como (absolutamente) atómicos: según el problema bajo consideración, pueden tratarse como sumamente complejos no sólo «hombre» y «mortal», sino también «azul» y «caliente»; así, «azul» puede entenderse como el color del cielo, que sería explicable a partir de la teoría atómica; e incluso el término fenoménico «azul» puede ser considerado (en determinados contextos) como definible —como un carácter de

imágenes visuales que está coordinado a ciertos estímulos fisiológicos—. Las discusiones científicas se caracterizan por producirse libremente; y el intento de privarlas de su libertad —atándolas al lecho de Procusto de un sistema lingüístico preestablecido— significaría, de lograrse, el fin de la ciencia.

Por estas razones, he rechazado anticipadamente la idea de emplear enunciados atómicos con el propósito de medir el grado de *contenido o sencillez* de una teoría, y he sugerido que podríamos utilizar, en lugar suyo, la idea de enunciados relativamente atómicos; y además, la de un campo de *enunciados relativamente atómicos* con respecto a una teoría o conjunto de teorías (para cuya contrastación son pertinentes): al cual cabría interpretar como *campo de aplicación* de la teoría o conjunto de teorías mentados.

Si tomamos, una vez más, el ejemplo que ya hemos recogido en el apéndice anterior, es decir, el de las dos teorías $a_1 =$ «todos los planetas se mueven en circunferencias» y $a_2 =$ «todos los planetas se mueven en elipses», podemos adoptar como campo el de todos los enunciados de la forma «en el instante x el planeta y estaba en la posición z », que serán nuestros enunciados relativamente atómicos. Y si suponemos que se sabe ya que la trayectoria del planeta es una curva plana, podemos suponer que un papel cuadriculado representa dicho campo y marcar en él las distintas posiciones, indicando en cada caso el instante y el nombre del planeta en cuestión, de suerte que cada punto represente uno de los enunciados relativamente atómicos. (Desde luego, podemos realizar una representación tridimensional marcando la posición con un alfiler cuya longitud represente el tiempo —medido a partir de cierto instante que suponemos inicial— y haciendo que el color de la cabeza del mismo indique el nombre del planeta de que se trate.)

Hemos explicado, principalmente en los apartados 40 a 46 y en mi antiguo apéndice I, que el número mínimo de enunciados relativamente atómicos que se precisan para refutar una teoría determinada puede emplearse como medida de la complejidad de la misma. Y se puso de manifiesto que la *sencillez formal* de una teoría podría medirse por la *parvedad de sus parámetros* —con tal de que tal escasez en parámetros fuese resultado de una reducción «formal» de su número, en vez de «material» (cf., especialmente, los apartados 40, 44 y sigs., y el apéndice I).

Ahora bien, es evidente que todas estas comparaciones de sencillez de teorías —o de sus contenidos— equivalen a comparaciones de la «estructura fina» de dichos contenidos (en el sentido expuesto en el apéndice precedente), puesto que sus probabilidades absolutas serán todas iguales (esto es, iguales a cero). Quiero ahora hacer ver, en primer término, que, en realidad, puede interpretarse el número de parámetros de una teoría (con respecto a un campo de aplicación) como medida de la estructura fina de su contenido.

Sólo preciso mostrar con este objeto que, *para un universo finito suficientemente grande, la teoría que tenga mayor número de parámetros será siempre más probable —en el sentido clásico— que la que lo tenga menor.*

Lo cual puede ponerse de manifiesto del modo siguiente. En el caso de un campo de aplicación geométrico y continuo, nuestro universo de eventos posibles —cada uno descrito por un enunciado relativamente atómico— es, desde luego, infinito, como hemos indicado en los apartados 38 y sigs. En esta situación, podemos comparar dos teorías con respecto a la *dimensión* de las posibilidades que permiten —esto es, de las que son favorables a cada una de ellas—, en lugar de hacerlo con respecto al *número* de tales posibilidades; y la dimensión de éstas resulta ser igual al número de parámetros. Reemplazamos ahora el universo infinito de enunciados relativamente atómicos por otro *finito* de los mismos (aunque muy grande), que corresponderá al ejemplo del tablero de ajedrez presentado en el apéndice anterior^[2]. Es decir, suponemos que cada enunciado relativamente atómico se refiere a un *cuadrado* —cuyo lado ε marca la posición del planeta— en lugar de a un punto del plano, y que las posiciones posibles no se solapan^[3]; y, variando algo el ejemplo del precedente apéndice, reemplazamos las diversas *curvas* que acostumbran representar geoméricamente a nuestras teorías por «casi curvas» (de ancho aproximadamente igual a ε), esto es, por conjuntos —o cadenas— de cuadrados. El resultado de todo esto es que el número de teorías posibles se convierte en finito.

Consideramos ahora la representación de una teoría con d parámetros, que en el caso de continuidad quedaba representado por un continuo d -dimensional, cada uno de cuyos puntos (acervos- d) representaba una curva. Vemos que es posible emplear un procedimiento de esta índole, salvo que aquel continuo d -dimensional estará reemplazado por una formación de «cubos» d -dimensionales (de arista ε); cada uno de éstos representa ahora una «casi curva», y, por ello, una de las posibilidades favorables a nuestra teoría; y la formación d -dimensional representará el conjunto de «casi curvas» compatible con la teoría —o, favorable a ella.

Mas ahora podemos decir que la curva con menos parámetros —es decir, el *conjunto* de casi curvas que está representado por una formación de menos dimensiones— no solamente tendrá menos de éstas, sino que contendrá menor número de «cubos», esto es, de posibilidades favorables.

Así pues, estamos justificados en la aplicación de los resultados del apartado anterior: si a_1 tiene menos parámetros que a_2 , podemos aseverar que —en un universo suficientemente grande, pero finito— tendremos:

$$p(a_1) < p(a_2)$$

y, portanto,

$$(*) \quad p(a_1) \prec p(a_2)$$

Pero como la fórmula (*) sigue siendo válida cuando suponemos que ε tiende a cero (lo cual, en el límite, equivale a reemplazar el universo finito por uno infinito), llegaremos al siguiente *teorema*.

1) Si el número de parámetros de a_1 es más pequeño que el de a_2 , entonces el supuesto de

$$p(a_1) < p(a_2)$$

contradice las leyes del cálculo de probabilidades.

Si escribimos « $d_c(a)$ », o —más sencillamente— « $d(a)$ », para designar la dimensión de la teoría a (con respecto al campo de aplicación C), podemos formular el teorema anterior como sigue:

(1) Si $d(a_1) > d(a_2)$ entonces, $p(a_1) \prec p(a_2)$;

y, en consecuencia, « $p(a_1) > p(a_2)$ » es incompatible con « $d(a_1) < d(a_2)$ ».

Conviene recordar este teorema (que está implicado por lo que se ha dicho en el texto del libro) juntamente con las consideraciones siguientes. Una teoría a requiere un mínimo de $d(a) + 1$ enunciados relativamente atómicos para su refutación: sus «falsadores más débiles», como podemos llamarlos, consisten en la conyunción de $d(a) + 1$ enunciados relativamente atómicos; lo cual quiere decir que si $n \leq d(a)$, ninguna conyunción de n enunciados de este tipo tendrá la suficiente fuerza lógica para que de ella se pueda deducir a , o sea, la negación de a . Según esto, puede medirse la fuerza o contenido de a por medio de $d(a) + 1$, ya que a será más fuerte que cualquier conyunción de $d(a)$ enunciados relativamente atómicos; pero, ciertamente, no más que algunas conyunciones de $d(a) + 1$ enunciados de esta índole. Pero, teniendo en cuenta la regla probabilitaria

$$p(\bar{a}) = 1 - p(a)$$

sabemos que la probabilidad de una teoría a disminuye al aumentar la probabilidad de su negación, \bar{a} , y viceversa, y que se cumplen las mismas relaciones entre los contenidos de a y \bar{a} . A partir de lo cual obtenemos, una vez más, que $d(a_1) < d(a_2)$ significa que el contenido de a_1 es mayor que el de a_2 , de modo que $d(a_1) < d(a_2)$ entraña $p(a_1) \prec p(a_2)$, y es incompatible, por tanto, con $p(a_1) > p(a_2)$; pero este resultado no es más que el teorema (1), que habíamos deducido más arriba.

Hemos deducido nuestro teorema tomando en consideración universos finitos, si bien es, en verdad, totalmente independiente del paso a universos infinitos. Por lo cual, es independiente de las fórmulas y (2) del apéndice anterior, o sea, del hecho de que en un universo infinito tengamos, para cualquier ley universal a y cualesquiera datos finitos d' ,

(2) $p(a) = p(a, d') = 0$.

Por tanto, es posible emplear legítimamente (1) para deducir de otro modo (2): cosa que podemos llevar a cabo realmente si sacamos partido de una idea debida a

Dorothy Wrinch y Harold Jeffreys.

Como hemos indicado sucintamente en el apéndice anterior^[4], Wrinch y Jeffreys han observado que si tenemos una infinitud de teorías mutuamente incompatibles o excluyentes, la suma de las probabilidades de todas ellas no puede exceder de la unidad, de modo que casi todas tienen que tener probabilidad nula —a menos que ordenemos las teorías en una sucesión y asignemos a cada una, como probabilidad, un valor tomado de una serie de fracciones convergente cuya suma no sea mayor que la unidad—. Podemos realizar la atribución aludida del modo siguiente: asignaríamos el valor $1/2$ a la primera teoría, $1/2^2$ a la segunda, y; en general, $1/2^n$ a la n -ésima; pero podríamos, asimismo, atribuir a cada una de las 25 primeras teorías el valor $1/50$, esto es, $1/(2.25)$, a cada una de las 10 siguientes, digamos, el valor $1/400$ —o sea, $1/(2^2.100)$ —, etc.

Cualquiera que sea el modo en que ordenemos las teorías, y la forma en que les atribuyamos probabilidades, habrá siempre cierto valor probabilístico *máximo*, al que podemos llamar P (así, en nuestros ejemplos, $1/2$ ó $1/50$), con el cual quedarán afectadas n teorías a lo más (en donde n es un número finito y $n \cdot P < 1$). Por otra parte, cada una de estas n teorías tendrá cierta dimensión, y supongamos que D es la mayor de todas éstas, y que a , es una de las teorías a las que se atribuye D , de modo que $d(a_1) = D$; es evidente, por lo que acabamos de decir, que ninguna teoría cuya dimensión sea superior a D se encontrará entre las n que tienen máxima probabilidad. Sea ahora a_2 una teoría cuya dimensión sea mayor que D , de suerte que $d(a_2) > D = d(a_1)$; la atribución mencionada conduce entonces a

$$(—) \quad d(a_1) < d(a_2); \text{ y } p(a_1) > p(a_2).$$

Resultado que pone de manifiesto una transgresión de nuestro teorema (1). Ahora bien, es inevitable realizar una atribución de este tipo —que conduce a tal resultado— si queremos evitar que haya que asignar la misma probabilidad —esto es, cero— a todas las teorías. En consecuencia, nuestro teorema (1) entraña la atribución de probabilidad cero a todas las teorías.

Por su parte, Wrinch y Jeffreys han llegado a un resultado muy distinto. Creen que la posibilidad del conocimiento empírico exige la posibilidad de aumentar la probabilidad de una ley acumulando datos en favor suyo; y de ello concluyen que (2) tiene que ser falsa, y, además, que ha de existir un método legítimo de atribuir probabilidades no nulas a una sucesión infinita de teorías explicativas. Así pues, estos autores han sacado conclusiones sumamente positivas del argumento «trascendental» (según lo he llamado en el apéndice anterior)^[5]: al creer, como lo hacen, que un aumento de la probabilidad significa un aumento del conocimiento (de modo que el obtener una probabilidad elevada se convierte en un objetivo de la ciencia), no han considerado la posibilidad de que *a partir de la experiencia podamos sacar cada vez más enseñanzas acerca de leyes universales, sin que su probabilidad aumente lo más*

mínimo: la de que podamos contrastar y corroborar algunas de ellas cada vez más, con lo cual aumentemos su grado de corroboración, sin alterar, por ello, su probabilidad, cuyo valor sigue siendo cero.

Jeffreys y Wrinch no han descrito nunca de un modo suficientemente claro la sucesión de teorías mencionadas, ni la atribución de valores probabilísticos. Su idea fundamental, a la que llaman el «postulado de sencillez»^[6] es que las teorías deberían ordenarse de modo que su complejidad —o el número de sus parámetros— fuese aumentando, a la vez que disminuiese la probabilidad que ellos asignan a cada una; lo cual, incidentalmente, significaría que *dos teorías cualesquiera* de tal sucesión violarían nuestro teorema (1). Pero semejante ordenación no es factible, como el mismo Jeffreys ha advertido, ya que pueden existir varias teorías con *el mismo número* de parámetros: este autor nos indica como ejemplos $y = ax$ e $y = ax^2$, y dice de ellas, «podemos admitir que las leyes que tienen igual número de parámetros poseerán la misma probabilidad previa»^[7]. Mas el número de leyes que tendrán igual probabilidad previa es infinito, ya que los propios ejemplos de Jeffreys pueden prolongarse infinitamente: $y = ax^3$, $y = ax^4$, ..., $y = ax^n$, etc., con $n \rightarrow \infty$; así, pues, para cada número de parámetros reaparecería el mismo problema que para la totalidad de la sucesión.

Aún más: el mismo Jeffreys reconoce —en el párrafo de antes, § 3.0^[8]— que es posible obtener una ley, digamos a_1 , a partir de otra ley a_2 con un parámetro suplementario, sin más que suponer que éste es igual a cero; y entonces $p(a_1) < p(a_2)$, ya que a , es un *caso especial* de a_2 , de suerte que a a_1 corresponden menos posibilidades^[9]. Por tanto, en este caso particular reconoce que una teoría que tenga menos parámetros será menos probable que otra que tenga más, lo cual está de acuerdo con nuestro teorema (1); pero admite este hecho solamente para esta situación especial, y no hace comentarios sobre la contradicción en que pueden muy bien estar su postulado de sencillez y tal caso. En conjunto, no trata en parte alguna de hacer ver que el postulado de sencillez sea compatible con su sistema axiomático; pero teniendo en cuenta el caso mencionado (que, desde luego, se sigue de tal sistema) es claro que hubiera sido absolutamente menester una demostración de compatibilidad.

Nuestras propias consideraciones ponen de manifiesto que no es posible dar dicha demostración, y que el «postulado de sencillez» ha de contradecir todo sistema axiomático probabilístico adecuado, ya que tiene que transgredir nuestro teorema (1).

Para terminar este apéndice quiero intentar algo así como una explicación de por qué Wrinch y Jeffreys pueden haber considerado inofensivo su «postulado de sencillez», es decir, incapaz de originar disgustos.

Es preciso recordar que ellos fueron los primeros en igualar la sencillez y la parvedad de parámetros (yo no las igualo simplemente, sino que distingo entre una reducción formal del número de parámetros y otra material —cf. los apartados 40, 44

y 45—, de forma que la sencillez en sentido intuitivo se convierte en algo parecido a la sencillez formal; pero, por lo demás, mi teoría de la sencillez está de acuerdo con la de Wrinch y Jeffreys en este punto). También vieron claramente que la sencillez es una de las cosas a que tienden los científicos, es decir, que prefieren una teoría sencilla a otra más complicada, y que, por tanto, prueban primero con las teorías más sencillas. En todas estas cuestiones Wrinch y Jeffreys tenían razón; y también la tenían al creer que el número de teorías sencillas es relativamente escaso, mientras que hay muchas complicadas, cuyo número aumenta con el de sus parámetros.

Este último hecho puede haberles conducido a creer que las teorías complejas son las menos probables (ya que la probabilidad de que se dispone en total tiene que dividirse de alguna forma entre todas las teorías). Y puesto que asumieron también que un grado elevado de probabilidad indica otro también elevado de conocimiento —y será, por tanto, uno de los objetivos del hombre de ciencia—, quizá han pensado que era intuitivamente evidente que la teoría más sencilla (y, por ello, más deseable) había de identificarse con la más probable (y, por consiguiente, más deseable): ya que de otro modo los objetivos a que tiende el científico serían incompatibles. Así pues, el postulado de sencillez parecía ser necesario por razones intuitivas, y, por tanto, compatible *a fortiori*.

Mas una vez que nos hemos dado cuenta de que el científico no tiene ni puede tener por objetivo un grado elevado de probabilidad, y de que la impresión opuesta se debe a haber confundido la idea intuitiva de probabilidad con otra también intuitiva (que aquí he titulado «grado de corroboración»)^[10], nos resultará claro que la sencillez —o la parvedad de parámetros— está ligada a la improbabilidad en lugar de a la probabilidad, y tiende a crecer con aquélla. Y llegaremos a ver también claramente que, sin embargo, está unido un alto grado de sencillez con otro también alto de corroboración: pues una contrastabilidad o corroborabilidad elevada es lo mismo que una improbabilidad previa —o sencillez— igualmente elevada.

En el apéndice siguiente seguiremos ocupándonos del problema de la corroboración.

APÉNDICE *IX.

Corroboración, peso de los datos y contrastes estadísticos

Las tres notas que reproduzco en el presente apéndice (págs. 368 y sigs.) se publicaron originalmente en *The British Journal for the Philosophy of Science*^[1].

Incluso antes de publicar mi libro he tenido la sensación de que el problema del grado de corroboración era uno de los que deberían ser investigados más de lo que se había hecho. Con el nombre de «el problema del grado de corroboración» quiero decir el que consiste en, I) poner de manifiesto que existe una medida (que hay que llamar grado de corroboración) de *la dureza de las contrastaciones* a las que se ha sometido una teoría, y de la manera en que ésta las ha sobrepasado o ha sido incapaz de hacerlo; y II) hacer ver que *esta medida no puede ser una probabilidad*: o, con mayor precisión, que no satisface las leyes formales del cálculo de probabilidades.

En el libro está incluido un esquema de la solución de ambas tareas, en especial de la segunda; pero me ha parecido que se necesitaba algo más, pues no era suficiente mostrar el fracaso de las teorías existentes de la probabilidad: la de Keynes y la de Jeffreys, por ejemplo, o las de Kaila y Reichenbach, ninguna de las cuales ha podido ni siquiera demostrar su doctrina central, la de que una ley universal, o una teoría, puedan llegar a una probabilidad $> 1/2$ (hasta el extremo de que no han logrado ni demostrar que una ley universal —o una teoría— pueda tener nunca una probabilidad diferente de cero). Lo que se necesitaba era tratar la cuestión de un modo enteramente general; y, por ello, he pretendido construir un cálculo de probabilidades formal que pudiera interpretarse en varios sentidos: he tenido a la vista, I) el sentido lógico, bosquejado en mi libro como probabilidad lógica (absoluta) de enunciados; II) el de la probabilidad lógica relativa de enunciados o de proposiciones, según lo ha considerado Keynes; III) el de un cálculo de frecuencias relativas dentro de sucesiones, y IV) el de un cálculo de una medida de ámbitos, de predicados, de clases o de conjuntos.

El objetivo último era, desde luego, hacer patente que *el grado de corroboración no es una probabilidad, es decir, que no es una de las interpretaciones posibles del cálculo de probabilidades*. Pero más tarde me percaté de que la tarea de construir un cálculo formal no solamente era necesaria para mis propósitos, sino que tenía interés por sí misma.

Esto condujo al trabajo que publiqué en *Mind* —reproducido aquí como apéndice *II—, y a otros estudios que han abarcado muchos años y se han encaminado a simplificar mi sistema axiomático y a conseguir un cálculo de probabilidades en el

que $p(a, b)$ —la probabilidad de a supuesto b — pudiera tener valores definidos (y no $0/0$) aun cuando $p(b)$ fuese igual a cero. Este último problema surge, desde luego, porque la definición

$$p(a, b) = p(ab)/p(b)$$

falla si $p(b) = 0$.

Era menester una solución de este problema, porque muy pronto me encontré con que para definir $C(x, y)$ —el grado de corroboración de la teoría x por los datos y — tenía que trabajar con cierta $p(y, x)$, una probabilidad inversa que Fisher ha llamado «verosimilitud de x » (a la luz de los datos y , o dado y ; y adviértase que tanto mi «corroboración» como la verosimilitud fisheriana pretenden medir la aceptabilidad de la hipótesis x : de suerte que lo importante es x , e y no representa sino los datos empíricos cambiantes, o —como yo prefiero decir— los informes de *los resultados de las contrastaciones*). Ahora bien, me había convencido de que si x es una teoría, $p(x) = 0$; y me di cuenta, por tanto, de que tenía que construir un nuevo cálculo de probabilidades en el que la verosimilitud, $p(y, x)$, pudiera ser un número definido —en vez de $0/0$ — incluso cuando x fuese una teoría universal, con $p(x) = 0$.

Voy a explicar brevemente cómo surge el problema de $p(y, x)$, es decir, el de la verosimilitud de x .

Si se nos pidiese dar un criterio para saber si los datos y apoyan —o, corroboran, o confirman— el enunciado x , la respuesta más obvia es: «que y aumente la probabilidad de x ». Lo cual puede escribirse simbólicamente con « $Co(x, y)$ », en lugar de decir, « x está apoyado, corroborado o confirmado por x »; pues entonces podemos formular nuestro criterio del modo siguiente:

$$(1) \quad Co(x, y) \text{ si y sólo si } p(x, y) > p(x)$$

Tenemos aquí un defecto, sin embargo. Pues si x es una teoría universal e y ciertos datos empíricos, tendremos entonces —como hemos visto en los dos apéndices anteriores—^[2]

$$(2) \quad p(x) = 0 = p(x, y).$$

Pero de ello se seguiría que, para una teoría x y unos datos y , $Co(x, y)$ sería siempre falsa; o, dicho de otro modo, que jamás podría estar apoyada, corroborada o confirmada una teoría universal por unos datos empíricos.

(Esto no solamente se cumple para un universo infinito, sino también para uno enormemente grande, como el que nosotros hemos admitido: pues, en este caso, tanto $p(x, y)$ como $p(x)$ serían increíblemente pequeños, y, por ello, prácticamente iguales.)

Podemos superar esta dificultad, con todo, como sigue: siempre que $p(x) \neq 0 \neq p(y)$, tenemos

$$(3) \quad p(x, y) > p(x) \text{ si y sólo si } p(y, x) > p(y),$$

de suerte que podemos transformar (1) en

$$(4) \quad Co(x, y) \text{ si y sólo si } p(x, y) > p(x) \text{ o } p(y, x) > p(y).$$

Sea ahora x una vez más una *ley universal*, y sea y el conjunto de datos empíricos que, digamos, se siguen de x ; en este caso —siempre que y se siga de x — diremos intuitivamente que $p(y, x) = 1$; y como y es empírico (de modo que, sin duda alguna, $p(y)$ será menor que 1) llegamos a que se puede aplicar (4), y a que la aserción $Co(x, y)$ será verdadera: esto equivale a decir que x puede quedar corroborada por y si es que y se sigue de x —con tal de que $p(y) < 1$. Así pues, (4) es perfectamente satisfactoria desde un punto de vista intuitivo, mas para que sea posible operar sin dificultades con ella hemos de tener un cálculo de probabilidades en el que $p(y, x)$ sea un número definido (en nuestro caso, 1) y no $0/0$, incluso si $p(x) = 0$. Y como hemos explicado más arriba, para lograr tal cosa ha de disponerse de una generalización del cálculo usual.

Si bien me había ya dado cuenta de ello cuando apareció mi nota de *Mind* (cf. el apéndice *II), apremiado por otros trabajos que consideraba más urgentes no completé mis investigaciones en este campo. Hasta 1954 no publiqué mis resultados acerca del grado de corroboración (en la primera de las notas que aquí reproduzco); y transcurrieron aún seis meses más antes de publicar un sistema axiomático de probabilidad relativa^[3] (equivalente al que se encuentra en el apéndice *IV, aunque menos sencillo que él) que satisficiera la condición de que $p(x, y)$ sea un número definido incluso si $p(y)$ es igual a cero. El estudio correspondiente proporcionaba todos los instrumentos técnicos que se requieren para definir satisfactoriamente la verosimilitud y el grado de corroboración o confirmación.

La primera nota, «Grado de confirmación», que se publicó en 1954 en el *B. J. P. S.*, contiene una refutación matemática de todas las teorías de la inducción que identifican el grado en que un enunciado está apoyado —o, confirmado, o corroborado— por contrastaciones empíricas con su grado de probabilidad (en el sentido del cálculo de probabilidades). La refutación consiste en mostrar que si identificamos grado de corroboración —o confirmación— con probabilidad, nos veremos forzados a adoptar cierto número de tesis paradójicas, entre ellas la siguiente aserción, sin duda alguna contradictoria:

(*) Hay casos en que x está fuertemente apoyado por z e y está fuertemente quebrantado por z , mientras que, a la vez, x está confirmado por z en menor grado que lo está y .

En el punto 6 de la primera nota se encontrará un ejemplo sencillo que hace ver cómo se sigue esta consecuencia devastadora si identificamos la corroboración —o confirmación— con la probabilidad^[4]. En vista de la brevedad de tal pasaje, pienso

que podría quizá explicar la cuestión aquí también.

Consideremos la próxima tirada con un dado homogéneo, y sean: x el enunciado «saldrá un seis», y su negación —esto es, $y = \bar{x}$ — y z la información «saldrá un número par».

Tenemos las probabilidades absolutas siguientes:

$$p(x) = 1/6; p(y) = 5/6; p(z) = 1/2.$$

Y además las siguientes, éstas relativas:

$$p(x, z) = 1/3; p(y, z) = 2/3.$$

Vemos que x se encuentra apoyado por la información z , ya que ésta eleva la probabilidad de aquél de $1/6$ a $2/6 = 1/3$; y también que y se ve quebrantado por z , ya que esta última rebaja la probabilidad de y en la misma cantidad: de $5/6$ a $4/6 = 2/3$; y, sin embargo, tenemos $p(x, z) < p(y, z)$. Este ejemplo demuestra el siguiente teorema:

(5) Existen enunciados, x , y y z , que satisfacen la fórmula.

$$p(x, z) > p(x) \ \& \ p(y, z) < p(y) \ \& \ p(x, z) < p(y, z).$$

Es evidente que podemos remplazar aquí « $p(y, z) < p(y)$ » por esta otra, más débil, « $p(y, z) \leq p(y)$ ».

Este teorema, desde luego, dista mucho de ser paradójico, y lo mismo ocurre con el corolario (6) que obtenemos sustituyendo las expresiones « $Co(x, z)$ » y « $\sim Co(y, z)$ » —es decir, «no $Co(y, z)$ »— en lugar de « $p(x, z) > p(x)$ » y « $p(y, z) \leq p(y)$ », respectivamente, de acuerdo con la fórmula anterior (1):

(6) Existen enunciados, x , y , z , que satisfacen la fórmula

$$Co(x, z) \ \& \ \sim Co(y, z) \ \& \ p(x, z) < p(y, z).$$

De igual modo que (5), el teorema (6) expresa un hecho que hemos asentado por medio de nuestro ejemplo: que x puede estar apoyado por z , e y quebrantado por z , mientras que, sin embargo, x supuesta z puede ser menos probable que y supuesta z .

Pero se origina inmediatamente una contradicción clara si identificamos ahora — en (6)— grado de confirmación y probabilidad. Dicho de otro modo, la fórmula

$$(**) \quad Co(x, z) \ \& \ \sim Co(y, z) \ \& \ C(x, z) < C(y, z)$$

es evidentemente contradictoria, y, por tanto, no puede satisfacerla ningún conjunto de enunciados.

Hemos demostrado, pues, que la identificación entre el grado de corroboración — o de confirmación— y la probabilidad (o la «verosimilitud») es absurda, tanto por razones formales como intuitivas, ya que conduce a una contradicción.

Se puede tomar en este contexto «grado de corroboración o de confirmación» en un sentido más amplio que aquél a que normalmente nos referimos: mientras que habitualmente lo tomo por un sinónimo de «grado de dureza de las contrastaciones

que ha sobrepasado una teoría», en este caso lo empleo únicamente como «grado en que un enunciado x está apoyado por el enunciado y ».

Si nos fijamos en la demostración, veremos que depende exclusivamente de dos suposiciones:

(a) la fórmula (1);

(b) la asunción de que todo aserto de la forma que sigue es *contradictorio*:

(***) x tiene la propiedad P (por ejemplo, la propiedad «caliente»), y no tiene la propiedad P , e y tiene la propiedad P en mayor grado que x (por ejemplo, y está más caliente que x).

Un lector atento de mi nota primera —y, en particular, del ejemplo que se presenta en el punto 6— verá que todo esto está implicado allí —excepto, tal vez, la formulación general (***) de las contradicciones (*) y (**)—. Reconozco que aquí lo expongo de forma mucho más explícita, pero el propósito de la nota no era tanto el de criticar cuanto el de dar una definición de grado de corroboración.

La crítica contenida en mi nota se dirigía contra *todos* los que identifican, explícita o implícitamente, el grado de corroboración —o de confirmación, o de aceptabilidad— con la probabilidad; y pensaba al hacerlo en los siguiente filósofos: Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hossiasson y —más recientemente— Camap.

En cuanto a este último, he escrito una nota crítica que, según creo, habla por sí misma. El motivo de su aparición ha sido que Camap, al enunciar los criterios de adecuación para el grado de confirmación, habla del consenso de «prácticamente todas las teorías modernas del grado de confirmación», sin mencionar mi disentimiento —pese al hecho de que él ha introducido el termine inglés «*degree of confirmation*» [*grado de confirmación*] traduciendo el mío «*Grad der Bewährung*» (cf. la nota a pie de página anterior al apartado 79)—. Además, quería señalar que su división de la probabilidad en probabilidad₁ (= su grado de confirmación) y probabilidad₂ (= frecuencia estadística) era insuficiente, es decir, que, aun restringiendo cuanto es posible, existen, al menos, dos interpretaciones del cálculo de probabilidades (la interpretación lógica y la estadística), y que, además, se tiene mi grado de corroboración, *que no es una probabilidad* (como acabo de hacer patente, y como hacía ver en mi nota).

Me parece que dicha nota a pie de página, con sus diez líneas, ha atraído más atención que el resto de la nota: ha dado origen a un estudio en el B. J. P. S.^[5], en el que Bar-Hillel ha afirmado que mi crítica de lo que él llama «la teoría vigente de la confirmación» (esto es, la teoría de Camap) era puramente verbal, y que todo lo que yo tenía que decir lo había dicho con anterioridad este filósofo; y también ha originado una recensión de mi trabajo en el *Journal of Symbolic Logic*^[6], en la que Kemeny ha resumido mi nota con las siguientes palabras: «La tesis principal de este artículo es que las medidas de grado de confirmación propuestas por Camap no son

apropiadas para tal fin, como tampoco lo es ninguna otra atribución de probabilidad lógica».

Desde luego, ésa no era mi tesis principal. La nota era una continuación de otros trabajos míos publicados quince años antes de que se escribiera el libro de Carnap; y en lo que respecta a la crítica, el punto que se debatía —la identificación de la corroboración, confirmación o aceptabilidad con la probabilidad—, aunque es, sin duda, la tesis principal del libro de Carnap, dista mucho de ser una tesis original de este autor: pues en ella sigue la tradición de Keynes, Jeffreys, Reichenbach, Kaila, Hosiasson y otros. Aún más: tanto Bar-Hillel como Kemeny sugieren que mi crítica —en lo que es aplicable a la teoría de Carnap— sería puramente verbal, y que no hay por qué abandonar tal teoría; y, por ello, me siento obligado a decir claramente que la teoría de Carnap es contradictoria, y que su contradicción no es algo de menor importancia, que pudiera repararse fácilmente, sino que se debe a errores en sus fundamentos lógicos.

En primer lugar, tanto la suposición (a) como la (b) —que, como hemos visto, bastan para demostrar que es preciso no identificar el grado de confirmación con la probabilidad— se afirman de un modo explícito en la teoría de Carnap: (a) —o sea, nuestra fórmula (1)— puede encontrarse en el libro de Carnap, en la página 464, con el nombre de fórmula (4)^[7]; y en el mismo libro, página 73, se halla (b) —esto es, (***)—, o sea, la asunción de que nuestra (**) es contradictoria—, pues allí escribe Carnap: «Si la propiedad, caliente, y la relación, más caliente, se designan respectivamente por... digamos, «P» y «Ry», entonces «Pa. ~ Pb.Rba» serán contradictorias; ahora bien, esto es nuestra (***)». Como es natural, en cierto sentido carece enteramente de importancia para mi argumentación que hace ver el absurdo de la identificación de C y p, el que (a) y (b) estén admitidas explícitamente en un libro; pero ocurre que en el de Carnap lo están.

Además, la contradicción que aquí expongo es crucial para Carnap: al aceptar (1) —o, con mayor precisión, al definir en las páginas 463 y siguiente «x está confirmado por y» mediante « $p(x, y) > p(x)$ » (expresándolo con nuestro simbolismo)— este autor hace ver que el sentido que da a «grado de confirmación» (su «*explicandum*») es, *aproximadamente*, el mismo que yo le doy: la idea intuitiva de grado de apoyo por los datos empíricos (Kemeny se equivoca —en *loc. cit.*— al indicar lo contrario: en realidad, «una lectura cuidadosa» de mi trabajo —y del libro de Carnap, añadiría yo — *no* «mostrará que Popper y Carnap se refieren a dos *explicanda* diferentes», sino que Carnap, sin darse cuenta, se refiere con su probabilidad, a dos «*explicanda*» diferentes e incompatibles, uno de ellos mi C y el otro mi p; y mostrará, asimismo, que he señalado repetidamente los peligros de esta confusión: por ejemplo, en el artículo cuya recensión hace Kemeny). Por tanto, todo cambio que se haga en la suposición (a) será *ad hoc*; no es mi crítica lo que es «puramente verbal», sino las tentativas de rescatar la «teoría vigente de la confirmación».

Para mayores detalles, he de remitir al estudio que apareció en el B. J. P. S. Tengo

que decir que me decepcionó algo dicho estudio, y lo mismo la recensión de Kemeny en el *Journal of Symbolic Logic*. Desde un punto de vista racional, la situación me parece bastante seria: en nuestra época postracionalista se escriben libros y más libros en lenguajes simbólicos, y se hace más y más difícil el ver por qué —qué es lo que se trata con todo ello, y por qué habría de ser necesario, o conveniente, permitir que le aburran a uno tomos y tomos de trivialidades simbólicas—. Parece como si el simbolismo se estuviese convirtiendo en un valor por sí mismo, que hubiera de reverenciar por su «exactitud» suprema: una nueva expresión de la antigua búsqueda de la certeza, un nuevo ritual simbólico, un nuevo sustituto de la religión. Y, con todo, el único valor de este tipo de cosas —la única excusa posible para su dudosa pretensión de exactitud— parece ser el siguiente: una vez que se ha acertado en una equivocación o una contradicción, no cabe evasión verbal; puede demostrarse, y ahí está (Frege no intentó maniobras evasivas cuando recibió la crítica de Russell). Así pues, si hay que soportar un montón de aburridos detalles técnicos y un formalismo de una complejidad innecesaria, al menos podría esperarse la compensación de que se aceptara en el acto una prueba palmaria de contradicción —esto es, una demostración que consiste en el más sencillo de los ejemplos en contra—. Decepciona verse respondido —por el contrario— con evasiones meramente verbales, combinadas con la aseveración de que la crítica hecha era «meramente verbal».

Pero no hay que ser impaciente. Desde el tiempo de Aristóteles, el enigma de la inducción ha llevado a muchos filósofos al irracionalismo (al escepticismo o al misticismo); y aunque la filosofía de la identidad de C y p parece haber capeado muchos temporales desde la época de Laplace, sigo pensando que terminará por ser abandonada. No puedo creer que los defensores de la fe vayan a estar satisfechos para siempre con el misticismo y el hegelismo, y a sostener que « $C = p$ » es un axioma evidente, o el objeto deslumbrador de una intuición inductiva (digo «deslumbrador» porque parece ser un objeto cuyos contempladores están atacados de ceguera cuando se precipitan de rondón en sus contradicciones lógicas).

Quizá sea oportuno decir aquí que considero la doctrina de que *el grado de corroboración —o de aceptabilidad— no puede ser una probabilidad*, como uno de los hallazgos más interesantes de la filosofía del conocimiento. Y cabe exponerlo con gran sencillez del siguiente modo: es posible resumir en una evaluación todo informe del resultado de someter a contraste una teoría, evaluación que puede adoptar la forma de asignar a ésta cierto grado de corroboración, pero nunca un grado de probabilidad; pues *la probabilidad de un enunciado (dados ciertos enunciados de contraste), simplemente no expresa una evaluación de la dureza de las contrastaciones que dicha teoría ha pasado, ni de la manera en que lo ha hecho*; y la razón principal de esto reside en que es el contenido de una teoría —que es lo mismo que su *improbabilidad*— lo que determina su *contrastabilidad* y su *corroborabilidad*.

Creo que estas dos últimas ideas —las de contenido y grado de corroboración— constituyen las dos herramientas lógicas más importantes que he desarrollado en el

libro^[8].

Basta con lo dicho como introducción. He conservado en las tres notas que siguen la palabra «confirmación», aun cuando ahora escribiría solamente «corroboración»; y también he dejado « $P(x)$ » en lugares en que actualmente acostumbro a poner « $p(x)$ ». Pero he corregido varias erratas^[9] y añadido unas pocas notas a pie de página (precedidas por un asterisco), así como dos puntos más, el *13 y el *14, al final de la «tercera nota».

Grado de confirmación

1. La finalidad de esta nota es proponer y discutir una definición —en términos probabilísticos— del *grado en que un enunciado x está confirmado por otro y* (es evidente que puede considerarse esta cuestión idéntica a la de el grado en que un enunciado y confirma a otro x). Denotaré este grado con el símbolo « $C(x, y)$ », que ha de leerse «el grado de confirmación de x por y ». En ciertos casos particulares, x puede ser una hipótesis h , e y ciertos datos empíricos, d , en favor o en contra de h —o bien neutrales con respecto a ella—; pero $C(x, y)$ será aplicable también a casos menos típicos.

La definición se ha de hacer en términos probabilísticos. Emplearé tanto $P(x, y)$ —es decir, la probabilidad (relativa) de x dado y — como $P(x)$, o sea, la probabilidad (absoluta) de x ^[1]; pero una cualquiera de ellas bastaría.

2. Se suele suponer que el grado de confirmación de x por y tiene que ser lo mismo que la probabilidad (relativa) de x dado y : o sea, que tendríamos $C(x, y) = P(x, y)$. Pues bien, mi primera tarea es mostrar que se trata de una suposición inadecuada.

3. Considérense dos enunciados contingentes, x e y . Desde el punto de vista de la confirmación del primero por el segundo, existirán dos casos extremos: que x esté totalmente apoyado por y —o que x quede estatuido por y — en caso de que aquél se siga de éste; y que x resulte enteramente quebrantado, refutado o desestatuido por y , en caso de que \bar{x} se siga de y . Hay un tercer caso que tiene una importancia especial: es el de la independencia —o intrascendencia— mutua, caracterizado por $P(x, y) = P(x)P(y)$; el valor correspondiente de $C(x, y)$ se encontrará por debajo del que sirve para estatuir y por encima del que llega a desestatuir.

Entre estos tres casos especiales —de estatuir, de ser independientes y de desestatuir— habrá otros intermedios. *Apoyo parcial* (cuando y entraña parte del contenido de x): por ejemplo, si nuestro enunciado contingente y se sigue de x , pero no viceversa, entonces forma parte del contenido de x , y, por ello, entraña una parte del contenido de este último enunciado, por lo cual le apoya; y *quebrantamiento parcial* de x por y (cuando y apoya parcialmente a \bar{x}): por ejemplo, si y se sigue de \bar{x} . Diremos, pues, que y apoya o quebranta a x cuando $P(x, y)$ o $P(\bar{x}, y)$, respectivamente, exceden de los valores que tienen en el caso de independencia. (Es

fácil ver que los tres casos de apoyo, quebrantamiento e independencia son exhaustivos y mutuamente excluyentes, debido a la definición dada.)

4. Consideremos ahora la conjetura de que haya tres enunciados, x_1 y x_2 e y , tales que: I) lo mismo x_1 que x_2 sean independientes de y (o estén quebrantados por éste), y, a la vez, II) y apoye su conyunción x_1x_2 . Es algo obvio que en esta situación habremos de decir que y confirma a x_1x_2 en mayor grado de lo que lo hace a x_1 y a x_2 ; o, simbólicamente,

$$(4.1) \quad C(x_1, y) < C(x_1x_2, y) > C(x_2, y)$$

Pero esto sería incompatible con la tesis de que $C(x, y)$ sea una probabilidad, es decir, con

$$(4.2) \quad C(x, y) = P(x, y)$$

ya que para las probabilidades tenemos la fórmula válida con toda generalidad

$$(4.3) \quad P(x_1, y) \geq P(x_1x_2, y) \leq P(x_2, y)$$

la cual, en presencia de (4.1), contradice a (4.2). Así pues, tendríamos que abandonar (4.2); pero (4.3) es una consecuencia inmediata del principio general de multiplicación para las probabilidades si se tiene en cuenta $0 \leq P(x, y) \leq 1$, de modo que habríamos de prescindir de dicho principio en lo que respecta al grado de confirmación. Y resulta, además, que sería preciso eliminar también el principio especial de adición: pues como $P(x, y) \geq 0$,

$$(4.4) \quad P(x_1x_2 \circ x_1\bar{x}_2, y) \geq P(x_1x_2, y)$$

será una consecuencia de este principio; mas, por otra parte, esto no puede ser válido para $C(x, y)$, si caemos en la cuenta de que la alternativa x_1x_2 o $x_1\bar{x}_2$ ha de ser equivalente a x_1 de modo que llegamos por sustitución en el primer miembro de (4.1) a

$$(4.5) \quad C(x_1x_2 \circ x_1\bar{x}_2, y) \leq C(x_1x_2, y)$$

Y nos encontramos con que, en presencia de (4.4), (4.5) contradice a C(4.2)^[2].

5. Estos resultados dependen de la conjetura de que existan unos enunciados x_1 , x_2 , y , tales que: I) tanto x_1 como x_2 sean independientes de y (o estén quebrantados por él), y, al mismo tiempo, II) y apoye a x_1x_2 ; conjetura que voy a probar con un ejemplo^[3].

Supónganse fichas de colores, a las que llamamos «a», «b», ..., dotadas cada una con una de estas propiedades excluyentes entre sí e igualmente probables: azul,

verde, rojo y amarillo. Sean, x_1 el enunciado «a es verde o roja», $x_2 =$ «a es azul o roja», e $y =$ «a es azul o amarilla»; entonces se satisfacen las condiciones impuestas (es palmario que y apoya a x_1x_2 : aquel enunciado se sigue de éste, y la presencia de y eleva la probabilidad de x_1x_2 al doble del valor que tiene en ausencia de y).

6. Pero podemos construir incluso un ejemplo más sorprendente que ponga de manifiesto que identificar $C(x, y)$ con $P(x, y)$ es enteramente inadecuado. Elegimos x_1 de modo que esté apoyado fuertemente por y , y un x_2 tal que esté fuertemente quebrantado por y ; en consecuencia, hemos de pedir que $C(x_1, y) > C(x_2, y)$. Pero cabe elegir x_1 y x_2 de suerte que $P(x_1, y) < P(x_2, y)$, como muestra el siguiente ejemplo: adoptemos $x_1 =$ «a es azul», $x_2 =$ «a no es roja», $y =$ «a no es amarilla»; entonces, $P(x_1) = 1/4$, $P(x_2) = 3/4$ y $1/3 = P(x_1, y) < P(x_2, y) = 2/3$; en cuanto a que y apoya a x_1 , y quebranta a x_2 , es algo perfectamente claro a la vista de estas cifras y del hecho que y se siga de x_1 y también de \bar{x}_2 [*1].

7. ¿Por qué se han confundido tan persistentemente $C(x, y)$ y $P(x, y)$? ¿Por qué no se ha visto que es absurdo decir que ciertos datos y «confirman» fuertemente a x aun cuando x sea completamente independiente de aquéllos, y que y puede «confirmar» enérgicamente a x a pesar de quebrantarlo (y ello incluso si y es la totalidad de los datos de que se dispone)? No sé cuál es la respuesta a estas preguntas, pero puedo hacer algunas sugerencias. En primer lugar, hay una fuerte tendencia a pensar que todo aquello a que pueda llamarse «probabilidad» o «verosimilitud» de una hipótesis ha de ser una probabilidad en el sentido del cálculo de probabilidades. Hace veinte años que, para desenredar las varias cuestiones incluidas en todo esto, hice la distinción entre los que llamé entonces «grado de confirmación» y las probabilidades lógicas y estadísticas; pero, desgraciadamente, otros autores empezaron prontamente a utilizar dicho término como un nuevo nombre aplicable a la probabilidad (lógica), y ello tal vez influidos por la errónea opinión de que la ciencia, incapaz de llegar a la certeza, debe apuntar a una especie de «*Ersatz*»; la máxima probabilidad alcanzable.

Otra sugerencia. Parece como si nunca se le hubiera dado la vuelta a la frase «el grado de confirmación de x por y », convirtiéndola en «el grado en que y confirma a x », o en «la capacidad de y para apoyar a x »; pero en estas formas hubiera sido evidente que, en caso de que y apoye a x , y quebrante a x_2 , $C(x_1, y) < C(x_2, y)$ es absurdo, aun cuando $P(x_1, y) < P(x_2, y)$ puede ser irreprochable (lo cual indicaría que teníamos, por lo pronto, $P(x_1) < P(x_2)$). Además, todo indica que existe una tendencia a confundir las medidas de aumento o disminución con las medidas que aumentan o disminuyen (como hace ver la historia de los conceptos de velocidad, aceleración y fuerza); mas la capacidad de y para apoyar a x es esencialmente — como veremos — una medida del aumento o disminución de la probabilidad de x , debidos a y . Véase también, más abajo, 9 (VII).

8. Podrá decirse tal vez, como respuesta, que siempre es legítimo designar $P(x, y)$

con un nombre cualquiera, por ejemplo, el de «grado de confirmación». Pero la cuestión con que nos enfrentamos no es una cuestión verbal.

Se cuenta con que el grado de confirmación de la hipótesis x por los datos empíricos y se utilizará para estimar el grado en que x está *respaldada por la experiencia*. Ahora bien: $P(x, y)$ no sirve con este fin, ya que $P(x_1, y)$ puede ser mayor que $P(x_2, y)$, aunque x_1 y x_2 estén respectivamente quebrantada y apoyada por y ; lo cual se debe al hecho de que $P(x, y)$ depende en grandísima medida de $P(x)$, es decir, de la probabilidad absoluta de x , que no tiene que ver lo más mínimo con los datos empíricos.

Aún más: se parte de que el grado de confirmación tiene cierta influencia sobre la cuestión de si deberíamos *aceptar* —o *elegir*— una hipótesis determinada, x , aunque sea sólo de un modo provisional: se supone que una hipótesis «buena» (o «aceptable») está caracterizada por un grado de confirmación elevado, mientras que otra que esté contraconfirmada sería «mala». Pero $P(x, y)$ no sirve para nada en esta esfera: *la ciencia no pretende alcanzar probabilidades elevadas, sino contenidos informativos elevados y bien respaldados por la experiencia; pero una hipótesis puede ser muy probable por el simple hecho de no decir nada, o muy poco*. Por lo tanto, un grado de probabilidad elevado no constituye una indicación de «bondad»: puede ser mero síntoma de un contenido informativo reducido. Por el contrario, es menester —y posible— definir $C(x, y)$ de suerte que solamente puedan llegar a tener un grado de confirmación elevado las hipótesis que posean un gran contenido informativo: la *confirmabilidad* de x (o sea, el grado máximo de confirmación que pueda alcanzar un enunciado x) habría de aumentar con $C_t(x)$, esto es, con la medida del contenido de x , que es igual a $P(\bar{x})$ —y, por ello, al *grado de contrastabilidad* de x —. Así pues, mientras que $P(\bar{x}\bar{x}, y) = 1$, $C(\bar{x}\bar{x}, y)$ tendría que ser nula.

9. Es posible dar una definición de $C(x, y)$ que satisfaga estos y otros *desiderata* señalados en mi *Logik der Forschung*, y aún otros más exigentes, basándola en $E(x, y)$, es decir, en una medida no aditiva de *la capacidad explicativa de x con respecto a y* , y que tenga como extremos inferior y superior —1 y 1, respectivamente; medida que se define del modo siguiente:

(9.1) sea x coherente^[4], y sea $P(y) \neq 0$; definimos entonces

$$E(x, y) = \frac{P(y, x) - P(y)}{P(y, x) + P(y)}$$

Puede interpretarse también $E(x, y)$ como una medida no aditiva de la dependencia de y con respecto a x , o del apoyo dado a y por x (y viceversa); esta magnitud satisface nuestros *desiderata* más importantes, pero no todos: por ejemplo, viola la condición (VIII, c) —que daremos más abajo—, y, en ciertos casos especiales, satisface (III) y (IV) sólo aproximadamente. Para remediar estos defectos, propongo que se defina $C(x, y)$ del modo que sigue^[*2].

(9.2) Sea x coherente, y téngase $P(y) \neq 0$; definimos entonces

$$C(x, y) = E(x, y)(1 + P(x)P(x, y))$$

Se trata de algo menos sencillo que, por ejemplo, $E(x, y)(1 + P(xy))$ —que satisface la mayoría de nuestros *desiderata*, pero viola (IV)—; mas para $C(x, y)$ se cumple el teorema que afirma que cumple todos los *desiderata* siguientes:

(I) $C(x, y) = 0$, respectivamente, si y sólo si y apoya a x , o es independiente de ella o la quebranta.^[*]

(II) $-1 = C(\bar{y}, y) \leq C(x, y) \leq C(x, x) \leq 1$

(III) $0 \leq C(x, x) = Ct(x) = P(\bar{x}) \leq 1$

Obsérvese que $Ct(x)$ —y, por tanto, también $C(x, x)$ — es una medida aditiva del contenido de x , que cabe definir por $P(\bar{x})$ esto es, por la probabilidad absoluta de que x sea falsa, o sea, la verosimilitud *a priori* de que x quede refutada; así pues, la *confirmabilidad* equivale a la *refutabilidad* o *contrastabilidad*^[5].

(IV) Si y entraña x , entonces $C(x, y) = C(x, x) = Ct(x)$

(V) Si y entraña x entonces $C(\bar{y}, y) = C(y, y) = -1$

(VI) Tenga x un contenido elevado —de modo que $C(x, y)$ se acercará a $E(x, y)$ — y ocurra que y apoya a x (podemos tomar para y , por ejemplo, la totalidad de los datos empíricos conocidos): entonces, para cualquier y dado, $C(x, y)$ aumenta con la capacidad de x para explicar y (es decir, para explicar más y más el contenido de y), y , por ello, con el interés científico de x .

(VII) Si $Ct(x) = Ct(y) \neq 1$, entonces $C(x, u) = C(y, w)$, siempre que $P(x, u) = P(y, w)$.

^[*3]

(VIII) Si x entraña y , entonces: (a) $C(x, y) > 0$, (b) para cualquier x dado, $C(x, y)$ y $Ct(y)$ aumentan a la vez, y (c) para cualquier y dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ también aumentan simultáneamente^[6].

(IX) Si \bar{x} es coherente y entraña y , entonces: (a) $C(x, y) < 0$, (b) para cualquier x dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ crecen al mismo tiempo, y (c) para cualquier y dado, $C(x, y)$ y $P(x)$ crecen, asimismo, simultáneamente.

10. Es posible relativizar todas nuestras consideraciones, sin excepción, con respecto a cierta información inicial z : basta añadir en los lugares oportunos frases como «en presencia de z y suponiendo que $P(z, \bar{z}) \neq 0$ ». La definición relativizada del grado de confirmación resulta así,

$$(10.1) \quad C(x, y, z) = E(x, y, z)(1 + P(x, z)P(x, yz))$$

en donde

$$(10.2) \quad C(x, y, z) = \frac{P(y, xz) - P(y, z)}{P(y, xz) + P(y, z)}$$

$E(x, y, z)$ es la capacidad explicativa de x con respecto a y , en presencia de z ^[7].

11. Existen, según creo, ciertos *desiderata* intuitivos que no pueden satisfacerse mediante ninguna definición formal: por ejemplo, una teoría está mejor confirmada cuanto más ingeniosas hayan sido nuestras tentativas infructuosas de refutarla. Mi definición incorpora parte de esta idea —si no todo lo que puede ser formalizado de ella—; pero no cabe formalizar totalmente la noción de un intento sincero e ingenioso^[8].

Considero que carece de importancia el modo concreto en que he definido aquí $C(x, y)$: pero sí pueden tenerla los *desiderata* y el hecho de que sea posible satisfacerlos todos.

Segunda nota sobre grado de confirmación

1. El profesor Kemeny ha sugerido^[1] (con referencia a mi definición de *contenido*), y —de un modo independiente— el doctor C. L. Hamblin lo mismo^[2], que convendría medir el *contenido* que se denota por « $Ct(x)$ » por medio de $-\log_2 P(x)$, en lugar de hacerlo por $1 - P(x)$, como yo había propuesto (empleo aquí mis propios símbolos). Si se acepta esta sugerencia, es preciso modificar ligeramente mis *desiderata*^[3] para el *grado de confirmación* de x por y (que he denotado con « $C(x, y)$ »): hemos de remplazar ± 1 por $\pm \infty$ en (II) y en (V), y (III) se convierte en

$$(III) \quad 0 \leq C(x, xy) = C(x, x) - Ct(x) = -\log_2 P(x) \leq + \infty.$$

Los *desiderata* restantes permanecen inalterados.

El doctor Hamblin propone^[4] que definamos el grado de confirmación por

$$(1) \quad C(x, y) = \log_2(P(xy)/P(x)P(y))$$

que para sistemas finitos (pero no necesariamente para infinitos) es lo mismo que

$$(2) \quad C(x, y) = \log_2(P(y, x)/P(y)),$$

fórmula que tiene la ventaja de seguir estando determinada incluso si $P(x) = 0$, como puede ocurrir en caso de que x sea una teoría universal. La fórmula relativizada correspondiente sería

$$(3) \quad C(x, y, z) = \log_2(P(y, xz)/(P(y, z))).$$

La definición (1), sin embargo, no satisface mi *desideratum* VIII (c), como hace

observar el doctor Hamblin, y lo mismo ocurre con (2) y (3). Tampoco se satisfacen los *desiderata* IX (6) y (c).

Ahora bien, en mi opinión, VIII (c) marca la diferencia entre una medida de capacidad explicativa y una de confirmación. En efecto: la primera puede ser simétrica en x e y , pero la última no, pues en caso de que y se siga de x (y apoye a éste) y de que «no esté confirmado por y , no parece que sea satisfactorio decir que ax está siempre tan bien confirmado por y como lo está x (pero no parece existir razón alguna por la que ax y x no hayan de tener la misma capacidad explicativa con respecto a y , ya que éste está enteramente explicado por ambas). Y, por ello, me inclino a no abandonar VIII (c).

Por tanto, prefiero considerar (2) y (3) como definiciones sumamente adecuadas de la *capacidad explicativa* —es decir, de $E(x, y)$ y $E(x, y, z)$ — en lugar de serlo del grado de confirmación. Este último puede definirse a partir de la capacidad explicativa de muchas

maneras diferentes que satisfagan VIII (c). Una de ellas es la siguiente (aunque creo que pueden encontrarse otras mejores):

$$(4) \quad C(x, y) = E(x, y) / (1 + nP(x)P(\bar{x}, y))$$

$$(5) \quad C(x, y, z) = E(x, y, z) / (1 + nP(x, z)P(\bar{x}, yz))$$

Podemos elegir aquí $n \geq 1$; y si queremos que VIII (c) tenga un efecto destacado haremos que n sea un número bastante grande.

En caso de que x sea una teoría universal con $P(x) = 0$, e y datos empíricos, la diferencia entre E y C desaparece, lo mismo que ocurre en mis definiciones originales y según pide el *desiderátum* (VI); y también desaparece si x se sigue de y . Así pues, se conservan, por lo menos, algunas de las ventajas de manejar una medida logarítmica: según explica Hamblin, el concepto definido por (1) queda en una estrecha relación con la idea fundamental de la teoría de la información; acerca de lo cual Good hace también algunos comentarios (véase la nota 4).

El paso de las definiciones antiguas a las nuevas conserva el orden (y lo mismo ocurre con la capacidad explicativa, como implican las observaciones de Hamblin); de modo que la diferencia es únicamente

2. Desde luego, las definiciones de capacidad explicativa y —aún en mayor medida— de grado de confirmación (o corroboración, aceptabilidad, atestiguación, o cualquier nombre que elijamos para ello) dan el mayor peso al «peso de datos» (o «peso de un argumento», como Keynes lo llama en el capítulo vi)^[*1]; y ello resulta obvio con la nueva definición —debida a la propuesta de Hamblin—, que parece tener ventajas considerables si por alguna razón nos interesan las cuestiones métricas.

3. Sin embargo, hemos de percatarnos de que la métrica de nuestro C dependerá enteramente de la de P ; *mas no puede haber una métrica satisfactoria de P : es decir,*

no puede haber una métrica de la probabilidad lógica que se base sobre consideraciones puramente lógicas. Para darnos cuenta de ello, consideremos la probabilidad lógica de una propiedad física medible cualquiera (que sea una variable aleatoria no discreta), tal como la longitud, por tomar el ejemplo más sencillo; asumimos —con lo que favorecemos a nuestros contradictores— que se nos dan ciertos límites superior e inferior de sus valores, s e i , respectivamente, los cuales son finitos y lógicamente necesarios; y suponemos también que se nos da una función de distribución de la probabilidad lógica de esta propiedad, por ejemplo, una función de equidistribución generalizada entre s e i . Podemos descubrir que un cambio en nuestras teorías que sea conveniente desde el punto de vista empírico lleve a una corrección no lineal de la *medida* de la propiedad física mentada (basada, digamos, en el metro de París); entonces, la «probabilidad lógica» ha de corregirse también, lo cual hace ver que su métrica depende de nuestros conocimientos empíricos, y que no puede definirse *a priori*, en términos puramente lógicos. Dicho de otro modo: la métrica de la «probabilidad lógica» de una propiedad mensurable dependerá de esta misma propiedad; y como ésta se encuentra sujeta a correcciones basadas en teorías empíricas, no puede haber una medida de la probabilidad que sea puramente «lógica».

Es posible superar en gran parte estas dificultades —pero no completamente— haciendo uso de nuestros «conocimientos previos», z ; mas aquéllas demuestran, según me parece, la importancia que tiene la manera topológica de abordar tanto el problema del grado de confirmación como el de la probabilidad lógica^[*2].

Pero aun en caso de que vayamos a dejar a un lado todas las consideraciones métricas, creo que hemos de seguir aceptando el concepto de probabilidad que está definido implícitamente por los sistemas axiomáticos corrientes para la probabilidad. Estos sistemas conservan toda su significación, exactamente del mismo modo que la conserva la geometría métrica pura aun cuando seamos incapaces de definir una regla graduada a base de tal geometría. Lo cual tiene una importancia especial teniendo en cuenta la necesidad de *identificar la independencia lógica con la probabilística* (teorema especial de multiplicación): si asumimos un lenguaje tal como el de Kemeny (que, sin embargo, falla para propiedades continuas) o uno que tenga enunciados *relativamente atómicos* (como el que he señalado en el apéndice I de mi *Lógica de la investigación científica*), habremos de postular la independencia de las cláusulas atómicas o relativamente atómicas (naturalmente, con tal de que no sean «lógicamente dependientes» en el sentido de Kemeny); y *si nos apoyamos en una teoría probabilística de la inducción*, resulta entonces que no podemos aprender en caso de que identifiquemos las independencias lógica y probabilística del modo que hemos indicado. Mas en el sentido de mis funciones C podemos aprender perfectamente: esto es, podemos corroborar nuestras teorías.

Mencionemos dos puntos más a este respecto.

4. El primero es éste. Basándonos en mis sistemas axiomáticos para la

probabilidad relativa^[5], podemos considerar definida $P(x, y)$ para cualesquiera valores de x y de y , incluidos aquéllos para los que $P(y) = 0$; más en particular: en la interpretación lógica del sistema de que se trate, siempre que x se siga de y , $P(x, y) = 1$, incluso cuando $P(y) = 0$. Así pues, no hay razón alguna para dudar de que nuestra definición es válida para lenguajes que contengan tanto enunciados singulares como leyes universales, aunque todas estas últimas tengan probabilidad nula; como ocurre, por ejemplo, si empleamos la función de medida m de Kemeny, postulando que $P(x) = m(x)$. (En el caso de nuestras definiciones de E y C no existe la menor necesidad de partir de una atribución de igual peso a los «modelos»: cf. KEMENY, *op. cit.*, pág. 307; por el contrario, habría que considerar semejante punto de partida como una desviación de la interpretación *lógica*, ya que violaría la igualdad de las independencias lógica y probabilística que hemos exigido más arriba, en 3.)

5. He aquí el segundo punto. Entre los *desiderata* derivados, el que se indica a continuación no se satisface por todas las definiciones de « x está confirmado por y » que se han propuesto por otros autores, y, por ello, puede mencionarse por separado como décimo *desideratum*^[6]:

(X) Si x está confirmado —o corroborado, o apoyado— por y , de suerte que $C(x, y) > 0$, entonces: a) \bar{x} queda siempre quebrantado por y (es decir, $C(\bar{x}, y) < 0$, y b) x queda siempre quebrantado por \bar{y} (o sea, $C(x, \bar{y}) < 0$).

Me parece claro que este *desideratum* constituye una condición de adecuación indispensable, y que toda definición que se proponga y no lo satisfaga será paradójica desde un punto de vista intuitivo.

Tercera nota sobre grado de corroboración o confirmación

En esta nota quiero hacer diversos comentarios sobre el problema del *peso de los datos* y sobre las contrastaciones estadísticas.

1. La teoría de la corroboración —o «confirmación»— propuesta en las dos notas anteriores sobre «grado de confirmación»^[1], es capaz de resolver fácilmente el llamado problema del peso de datos.

Quien primeramente suscitó este problema fue Peirce; Keynes lo ha discutido con algún detalle (este autor solía hablar de «peso de un argumento» o de «volumen de datos»), y hemos tomado el término «peso de datos» de J. M. Keynes e I. J. Good^[2]. Cuando se considera el «peso de datos» dentro de la teoría subjetiva de la probabilidad se ve uno conducido a determinadas paradojas, que, en mi opinión, no se pueden resolver dentro del marco de dicha teoría.

Cuando hablo de teoría subjetiva de la probabilidad —o de la interpretación subjetiva del cálculo de probabilidades— me refiero a una teoría que interpreta la probabilidad como una medida de nuestra ignorancia, de nuestro conocimiento parcial o —digamos— del grado de racionalidad de nuestras creencias a la vista de los datos de que disponemos.

(Quizá sea oportuno indicar, entre paréntesis, que el término más corriente de «grado de creencia racional» puede ser síntoma de una ligera confusión, ya que lo que se pretende decir es «grado de racionalidad de una creencia». La confusión surge del modo siguiente: en primer lugar, se explica la probabilidad como una medida de la fuerza o intensidad de una creencia o convicción —medible, por ejemplo, por lo dispuestos que estemos a arrostrar los riesgos inherentes a una apuesta—; luego se cae en la cuenta de que, en realidad, la intensidad de nuestra creencia depende a menudo más de nuestros deseos o nuestros temores que de argumentos racionales: y, de este modo, en virtud de una leve modificación, se interpreta luego la probabilidad como la intensidad —o el grado— de una creencia en la medida en que es justificable racionalmente; pero, una vez en esta etapa, es patente que la referencia a la intensidad de una creencia —o a su grado— es superflua, de modo que debería remplazarse «grado de creencia» por «grado de racionalidad de una creencia». No deben tomarse estas observaciones como si quisieran decir que estoy dispuesto a aceptar cualquier forma de la interpretación subjetiva: véase, más adelante, el punto 12, así como el capítulo *11 de mi *PostScript: After Twenty Years*.)

En aras de la concisión explicaré el problema del peso de los datos dando simplemente un ejemplo de las paradojas a que antes he aludido: ejemplo que puede llamarse la «paradoja de los datos ideales».

Sea z una moneda determinada, y sea a el enunciado «la tirada n -ésima (hasta el momento no observada) de z saldrá caras». En la teoría subjetiva puede suponerse que la probabilidad absoluta (o previa) del enunciado a es igual a $1/2$, es decir, que

$$(1) \quad P(a) = \frac{1}{2}$$

Sean ahora d unos datos estadísticos, esto es, un informe estadístico basado en la observación de miles —o quizá millones— de tiradas de z ; y admitamos que estos datos d sean idealmente favorables a la hipótesis de que z sea estrictamente simétrica —o sea, una «buena» moneda, con equidistribución—. (Adviértase que d no consiste en un informe completo y en detalle sobre los resultados de cada una de las tiradas —informe que podemos suponer que se ha perdido—, sino únicamente en un *resumen estadístico* de él: por ejemplo, d puede ser el siguiente enunciado, «entre un millón de tiradas de z observadas, han aparecido caras en 500.000 ± 20 casos». Teniendo en cuenta el punto 8, que se encuentra un poco más adelante, puede verse que unos datos d' con 500.000 ± 1.350 casos sería también ideal si se adoptan mis funciones C y E : y, en realidad, d es ideal precisamente porque entraña d' .) No tenemos ahora otra opción para $P(a, d)$ que suponer que

$$(2) \quad P(a, d) = \frac{1}{2}$$

Esto quiere decir que la probabilidad de sacar caras no se altera a la vista de los datos d : pues ahora tenemos:

(3) $P(a) = P(a, d)$.

Pero esta fórmula ha de interpretarse como la afirmación de que, en conjunto, d es una información (absolutamente) *intrascendente* con respecto a a .

Ahora bien; esto es un poco sorprendente: pues quiere decir —expresándolo de un modo más explícito— que el llamado «grado de creencia racional» en la hipótesis a no tendría que resultar afectado en modo alguno por el conocimiento proporcionado por los datos, d , que hemos acumulado: que la ausencia de todo dato estadístico referente a z justifica precisamente el mismo «grado de creencia racional» que el peso de los datos suministrados por millones de observaciones que, *prima facie*, apoyan o confirman nuestra creencia.

A mi entender, esta paradoja no puede resolverse dentro del marco de la teoría subjetiva, y ello por la siguiente razón.

El *postulado fundamental* de la teoría subjetiva es el de que los grados de racionalidad de una creencia a la vista de unos datos se encuentran incluidos en un orden lineal: que pueden medirse sobre una escala unidimensional, como ocurre con los grados de temperatura. Pero todos los intentos de resolver el problema del peso de los datos dentro del marco de la teoría subjetiva, desde Peirce a Good, han procedido a introducir, además de la probabilidad, *otra medida de la racionalidad de una creencia a la vista de unos datos*. Carece totalmente de importancia el que llamemos a la nueva medida «otra dimensión de la probabilidad» o «peso de datos»; lo único que sí tiene importancia es la admisión implícita de que no cabe atribuir un orden lineal a los grados de racionalidad de las creencias a la vista de los datos, de que puede haber *más de una manera en que los datos afecten a la racionalidad de una creencia*. Y dicha admisión basta para echar abajo el postulado fundamental en que se basa la teoría subjetiva.

Así pues, la creencia ingenua en que existen realmente tipos de entidades intrínsecamente diferentes —tales que a uno se le llamaría quizá «grado de racionalidad de una creencia» y a otro «grado de confianza» o de «apoyo por los datos»— es tan incapaz de rescatar la teoría subjetiva como lo es la creencia igualmente ingenua en que estas diversas medidas «*explicanda*» diferentes «*explicando*»; pues la pretensión de que exista en este caso un «*explicandum*» —así, el «grado de creencia racional»— susceptible de «*explicación*» en términos probabilísticos, ha de correr necesariamente la misma suerte que lo que he llamado «postulado fundamental».

5. Todas estas dificultades desaparecen en cuanto interpretamos *objetivamente* las probabilidades (en el contexto del presente trabajo es indiferente que la interpretación objetiva sea *puramente* estadística o una interpretación de propensiones^[3]). De acuerdo con esta interpretación hemos de introducir b , o sea, el enunciado de las condiciones del experimento (estas condiciones definen la sucesión de experimentos de la que sacamos nuestro ejemplo); por ejemplo, b podría ser la información: «la

tirada en cuestión será una tirada de z , que aleatorizaremos haciendo girar la moneda». Y, además, tenemos que introducir la hipótesis probabilística objetiva h , es decir, la hipótesis « $P(a, b) = 1/2$ »^[4].

Desde el punto de vista de la teoría objetiva, lo que más nos interesa es la hipótesis h , esto es, el enunciado

$$\langle P(a, b) = 1/2 \rangle.$$

6. Si atendemos ahora a los datos estadísticos idealmente favorables, d , que condujeron a la «paradoja de los datos ideales», es evidente que —desde el punto de vista de la teoría objetiva— ha de considerarse d como los datos que importan para h (en lugar de importar para a): son idealmente favorables para h , pero enteramente neutros para a . En el supuesto de que las diversas tiradas sean *independientes* —o *aleatorias*— la teoría objetiva nos lleva de un modo completamente natural a $P(a, bd) = P(a, b)$: así pues, es cierto que d es intrascendente para a (en presencia de b).

Puesto que d son datos favorables a h , nuestro problema se convierte, naturalmente, en la cuestión acerca de cómo los datos d corroboran (o «confirman») h : la respuesta es que si d son los datos idealmente favorables, tanto $E(h, d)$ como $C(h, d)$ —esto es, el grado de corroboración de h dado d — se acercarán a la unidad, con tal de que el tamaño de la muestra en que se basa d tienda a infinito^[5]. Vemos que los datos ideales dan lugar a un comportamiento ideal correspondiente en E y C ; en consecuencia, no surge paradoja alguna, y podemos medir de forma muy natural el peso de los datos d con respecto a la hipótesis h , bien por $E(h, d)$, bien por $C(h, d)$, o también —para mantenernos más ceñidos a la idea de Keynes— por los valores absolutos de una cualquiera de estas funciones.

7. Si —como ocurre en nuestro caso— h es una hipótesis estadística y d el informe de los resultados de las con traslaciones estadísticas de h , entonces $C(h, d)$ es una medida del grado en que tales contrastaciones corroboran h , exactamente lo mismo que cuando, se trata de una hipótesis no estadística.

Es conveniente mencionar, sin embargo, que, frente a lo que ocurre con una hipótesis del último tipo mencionado, en ocasiones puede ser sumamente fácil estimar los valores numéricos de $E(h, d)$ —e incluso de $C(h, d)$ — si h es una hipótesis estadística^[6] (indicaré brevemente en 8 cómo pueden llevarse a cabo los cálculos numéricos correspondientes, incluyendo, desde luego, el caso de h — « $p(a, b) = 1$ »).

La expresión

$$(4) \quad P(d, h) - P(d)$$

es crucial para las funciones $E(h, d)$ y $C(h, d)$: en realidad, estas funciones no son sino dos maneras diferentes de «normalizar» aquella expresión, y crecen o decrecen juntamente con (4). Esto quiere decir que para encontrar un buen enunciado

de contraste (uno que en caso de ser verdadero sea sumamente favorable a h), hemos de construir un informe estadístico d tal que: I) d haga grande —esto es, casi igual a 1— a $P(d, h)$ (que es la «verosimilitud» de Fisher de h dado, y II) d haga pequeña —muy próxima a 0— a $P(d)$. Una vez construido un enunciado de contraste, d , de este tipo, hemos de someter el mismo d a contrastaciones empíricas (es decir, hemos de *intentar* encontrar datos que nos refuten d).

Sea ahora h el enunciado

$$(5) \quad \ll P(a, b) = r \gg$$

y sea d este otro, «en una muestra que tiene el tamaño n y que satisface la condición b (o, que se ha extraído de un modo aleatorio de la población b) se cumple a en n ($r \pm \delta$) casos»^[*1]. Podemos hacer entonces, especialmente para valores pequeños de δ ,

$$(6) \quad P(d) \approx 2\delta^{[*2]}.$$

Cabe incluso que hagamos $P(d) = 2\delta$: pues tal cosa querría decir que asignamos probabilidades iguales —y, por tanto, las probabilidades $1/n$ — a cada una de las proporciones posibles ($1/n, 2/n, \dots, n/n$) con que puede aparecer una propiedad a en una muestra de tamaño n ; y de ello se sigue que habríamos de atribuir la probabilidad $P(d) = (2\delta + 1)/n$ a un informe estadístico d que nos comunicase que $m \pm d$ miembros de la población de tamaño n tienen la propiedad a : de modo que haciendo $\delta = (d + 1/2)/n$ obtenemos $P(d) = 2\delta$. (La equidistribución de que aquí nos ocupamos es la que Laplace asume al deducir su regla de sucesión. Es adecuada para evaluar la probabilidad *absoluta* $P(d)$ si d es un *informe estadístico acerca de una muestra*; pero no lo es para evaluar la probabilidad *relativa*, $P(d, h)$ de dicho informe, cuando está dada la hipótesis h según la cual la muestra es lo que se obtiene mediante un experimento que se repite n veces y cuyos posibles resultados ocurren cada uno de ellos con arreglo a cierta probabilidad: pues, en este caso, la *distribución* que es adecuado asumir es *combinatoria* —esto es, *bernoulliana*— y no *laplaciana*.) A partir de (6) se ve que si queremos que $P(d)$ sea pequeña hemos de hacer δ pequeña.

Por otra parte, $P(d, h)$ —la verosimilitud de h — estará próxima a 1, bien si δ es relativamente grande (aproximadamente, si $\delta \approx 1/2$), o si (en caso de que δ sea pequeña) n —el tamaño de la muestra— es un número bastante elevado. Nos encontramos, por tanto, con que $P(d, h) \approx P(d)$ (y, con ella, nuestras funciones E y C) solamente puede ser grande si δ es pequeña y n grande: o, dicho de otro modo, si d es un *informe estadístico que afirma la existencia de un buen ajuste en una muestra grande*.

Así pues, el enunciado de contraste d será tanto mejor cuanto mayor sea su precisión (que será la inversa de 2δ) —y, en consecuencia, su refutabilidad o contenido— y cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, n , es decir, el material

estadístico que se precisa para contrastar d . Y un enunciado de contraste construido de tal modo podrá ser confrontado con los resultados de observaciones reales.

Observamos que los datos estadísticos que se vayan acumulando aumentarán —si es que son favorables— E y C . En consecuencia, estas últimas funciones podrán adoptarse como medidas del peso de los datos favorables a h ; o bien, será posible considerar que sus valores absolutos miden el peso de datos con respecto a h .

8. Puesto que podemos determinar el valor numérico de $P(d, h)$ valiéndonos del teorema del binomio (o de la integral de Laplace), y, especialmente, puesto que cabe hacer —en virtud de (6)— $P(d)$ igual a 2δ (cuando δ es pequeña), es posible calcular numéricamente $P(d, h) - P(d)$, y, asimismo, E .

Todavía más: podemos calcular, para cualquier valor dado de n , el de $\delta = P(d)/2$ para el cual $P(d, h) - P(d)$ se hace máxima (así, para $n = 1.000.000$, obtenemos $\delta = 0,0018$). Análogamente, es factible calcular otro valor de $\delta = P(d)/2$ para el que E se hace máxima (para el mismo n que antes obtendríamos $\delta = 0,00135$ y $E(h, d) = 0,9946$).

Supongamos una ley universal tal como $h = \langle P(a, b) = 1 \rangle$, que haya pasado n contrastaciones rigurosas dando en todas ellas el resultado o : obtenemos, en primer lugar, $C(h, d) = E(h, d)$, debido a ser $P(h) = 0$; y luego, al evaluar $P(d)$ por medio de la distribución laplaciana y $d = 0$, llegamos a $C(h, d) = (n-1)/(n+1) = 1-2/(n+1)$. Debe recordarse, sin embargo, que las teorías científicas no estadísticas tienen, por regla general, una forma enteramente diferente de la que hemos dado aquí para h ; y, además, que si se las obliga a entrar en dicha forma, entonces cualquier ejemplo a (y, por tanto, «los datos» d) se convertirá en algo esencialmente no observable^[*3].

9. Teniendo en cuenta todo lo anterior, puede advertirse que el modo de contrastar una hipótesis estadística es deductivo (como ocurre con todas las demás hipótesis): se construye primeramente un enunciado de contraste de tal modo que se siga —o casi se siga— de la hipótesis, si bien tenga un contenido (o contrastabilidad) elevado; y luego se confronta dicho enunciado con la experiencia.

Es interesante darse cuenta de qué si d se elige de tal modo que esté constituido por un informe completo de nuestras observaciones —digamos, un informe completo acerca de una larga sucesión de tiradas: cara, cara, cruz, ..., etc., hasta un total de mil elementos—, entonces no será posible utilizarlo como datos acerca de la hipótesis estadística; pues *cualquier* sucesión real de longitud n tiene la misma probabilidad que *cualquier* otra (dada h), y, por consiguiente, llegamos al mismo valor para $P(d, h)$, y, por tanto, para E y para C (a saber, $E = C = 0$): lo mismo si d contiene —por ejemplo— solamente caras que si contiene exactamente la mitad de caras y la mitad de cruces. Lo cual pone de manifiesto que no podemos emplear como datos a favor o en contra de h la *totalidad* de nuestros conocimientos proporcionados por la observación, sino que hemos de extractar, a partir de ellos precisamente, los enunciados *estadísticos* susceptibles de comparación con los enunciados que, o bien se siguen de h , o bien tienen, al menos, una probabilidad elevada, dada h . Así, pues,

si d consiste en los resultados completos de una larga sucesión de tiradas, entonces es completamente inutilizable —en tal forma— como enunciado de contraste de una hipótesis estadística; mientras que sería posible emplear un enunciado (lógicamente más débil) acerca de la *frecuencia media* de las caras, extraído de aquel d . Pues una hipótesis probabilística puede explicar únicamente resultados interpretados *estadísticamente*, y, por ello, solamente cabe contrastarla y corroborarla por medio de resúmenes estadísticos; y no, por ejemplo, por «todos los datos de que se dispone», si éstos consisten en un informe completo de observaciones (ni siquiera en caso de que sus diversas interpretaciones estadísticas puedan emplearse como enunciados de contraste irreprochables y de gran peso)^[*4].

Por tanto, nuestro análisis hace ver que los métodos estadísticos son esencialmente hipotético-deductivos, y que proceden por eliminación de hipótesis inadecuadas; lo mismo que ocurre con todos los demás métodos de la ciencia.

10. Si δ es muy pequeña, y, por ello, también lo es $P(d)$ —lo cual sólo es posible en caso de muestras de gran tamaño—, tenemos, teniendo en cuenta (6),

$$(7) \quad P(d, h) \approx P(d, h) - P(d).$$

Por consiguiente, en este caso —y sólo en este caso— será posible aceptar la función de verosimilitud de Fisher como medida adecuada del grado de corroboración. Y, viceversa, podemos interpretar nuestra medida de este grado como *una generalización de la función de verosimilitud de Fisher*; generalización que abarca casos —como aquéllos en los que δ es relativamente grande— en que la función referida de Fisher es, sin duda alguna, inadecuada: pues la verosimilitud de h a la vista de los datos estadísticos d no llegaría a alcanzar un valor cercano al máximo, simplemente porque (o, en parte porque) los datos estadísticos de que dispondríamos, d , carecerían de precisión.

Es sumamente insatisfactorio —por no decir paradójico— que los datos estadísticos d basados en 1.000.000 de tiradas y en $\delta = 0,00135$, puedan dar numéricamente *la misma verosimilitud* —es decir, $P(d, h) = 0,9930$ — que proporcionarían los datos d' basados únicamente en 100 tiradas con $\delta = 0,135$ ^[*5] (pero es enteramente satisfactorio encontrar que $E(h, d) = 0,9946$, mientras que $E(h, d') = 0,7606$).

11. Convendría advertir que la probabilidad lógica absoluta de una ley universal h —esto es, $P(h)$ — será, en general, igual a cero en un universo infinito. Por esta razón, $P(d, h)$ —es decir, la verosimilitud de h — se convertirá en una cantidad indefinida en la mayoría de los sistemas probabilitarios, ya que en tales sistemas se define $P(d, h)$ como $P(dh)/P(h) = 0/0$. Necesitamos, por tanto, un cálculo de probabilidades formal que nos proporcione valores definidos para $P(d, h)$ incluso cuando $P(h) = 0$, y que nos dé siempre e inequívocamente $P(d, h) = 1$ en todos los casos en que d se siga (o «casi se siga») de h . He publicado hace algún tiempo un

sistema que satisface estos requisitos^[7].

12. Cabe interpretar de un modo adecuado nuestra $E(h, d)$ como medida de la capacidad explicativa de h con respecto a d , aun en el caso en que d no sea un informe acerca de unos intentos auténticos y sinceros de refutar h . Pero únicamente podemos interpretar adecuadamente nuestra $C(h, d)$ como el grado de corroboración de h —o la racionalidad de nuestra creencia en h , a la vista de las contestaciones— si d consiste en un informe de los resultados de nuestros intentos sinceros de refutar h , y no de nuestros intentos de verificarla.

Según he aludido en la frase inmediatamente anterior, en mi opinión, así como es un error creer que cabe interpretar la probabilidad como medida de la racionalidad de nuestras creencias (interpretación que queda excluida por la paradoja de los datos perfectos), es posible interpretar el grado de corroboración de tal modo^[8]. En cuanto al cálculo de probabilidades, tiene un gran número de interpretaciones diferentes^[9]. Aun cuando el «grado de creencia racional» no se encuentra entre éstas, existe una *interpretación lógica* que considera la probabilidad como una generalización de la deductibilidad; pero esta lógica probabilitaria tiene poco que ver con nuestras estimaciones hipotéticas de riesgos a favor o en contra: pues los enunciados probabilitarios en que expresamos tales estimaciones son siempre evaluaciones hipotéticas de las *posibilidades objetivas* inherentes a la situación del caso, es decir, a las condiciones objetivas de la situación (por ejemplo, al dispositivo experimental que hemos preparado). Dichas estimaciones hipotéticas (que *no son deductibles* de ninguna otra cosa, sino que son fruto de una libre conjetura, aun cuando pueden estar sugeridas por consideraciones de simetría, o por el material estadístico a la vista) pueden ser sometidas, en muchos casos importantes, a contrastaciones estadísticas; nunca son estimaciones de nuestra propia ignorancia, y la opinión contraria es consecuencia —como Poincaré vio tan claramente— de una visión determinista del mundo (posiblemente inconsciente)^[10].

Desde este punto de vista, un «jugador racional» trata siempre de estimar los *riesgos objetivos*; los riesgos que está dispuesto a aceptar no representan una medida de su «grado de creencia» (tal como se admite corrientemente), sino que son, más bien, el objeto de su creencia: cree que objetivamente existen tales riesgos, es decir, cree en la hipótesis probabilística h . Si queremos medir desde una posición conductista el grado de su creencia (en tales riesgos o en cualquier otra cosa), tendremos, tal vez, que encontrar qué proporción de su fortuna es capaz de aventurar en una apuesta a la par de que su creencia —su estimación de los riesgos o posibilidades— era exacta (supuesto que sea posible averiguar tal cosa).

En cuanto al grado de corroboración, no es sino una medida del grado en que ha sido contrastada una hipótesis h , y del grado en que ha salido indemne de las contrastaciones. Por tanto, no ha de interpretársela como grado de racionalidad de nuestra creencia en la *verdad* de h , puesto que, en realidad, sabemos que $C(h, d) = 0$ siempre que h sea lógicamente verdadera; sino más bien coma medida de la

racionalidad de *aceptar* provisionalmente una conjetura problemática, sabiendo que es una conjetura —si bien una que ha soportado que se la examine escudriñadoramente.

*13. Los doce puntos precedentes constituían la «Tercera nota», tal como se publicó en el *B. J. P. S.* Podemos añadir dos observaciones más, con objeto de hacer más explícitas algunas de las consideraciones más formales que se encuentran implícitas en esta nota.

El primer problema que me ocupa ahora es, de nuevo, el de la *métrica* de la probabilidad lógica (cf. la Segunda nota, punto 3) y el de sus relaciones con la distinción entre lo que voy a llamar enunciados probabilitarios primarios y secundarios. Mi tesis es que las distribuciones de Laplace y de Bernoulli nos proporcionan una *métrica* —en el nivel secundario.

Podemos operar con un sistema $S_1 = \{a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots\}$ de elementos (en el sentido de nuestro sistema de postulados del apéndice *IV). Estos elementos darán lugar a enunciados probabilitarios de la forma « $p(a, b) = r$ », a los que llamaremos «enunciados probabilitarios primarios»; y es posible considerar ahora éstos como elementos de un sistema secundario, $S_2 = \{e, f, g, h, \dots\}$, en donde « e », « f », etc., sean los nombres de los enunciados de la forma « $p(a, b) = r$ ».

Ahora bien, el teorema de Bernoulli nos dice, poco más o menos, lo siguiente: sea h igual a « $p(a, b) = r$ »; entonces, si h es verdadera, es sumamente probable que en una sucesión larguísima de repeticiones de las condiciones b , la frecuencia de la aparición de a sea igual a r , o esté muy cercana a este valor. Hagamos que « $\delta_r(a)_n$ » denote el enunciado de que a aparecerá con la frecuencia $r + \delta$ en una larga sucesión de repeticiones de un tipo determinado; entonces, el teorema de Bernoulli dice que, dada h (es decir, dado que sea $p(a, b) = r$), la probabilidad de $\delta_r(a)_n$ se acercará a 1 al crecer n (dice también que esta probabilidad se acercará a 0, dado que sea $p(a, b) = s$ y que s se encuentre fuera de $r \pm \delta$: lo cual tiene importancia para la refutación de hipótesis probabilísticas).

Pero esto significa que podemos escribir el teorema de Bernoulli bajo la forma de un enunciado (secundario) de probabilidad relativa acerca de elementos g y h de S_2 ; es decir, que cabe escribirlo del modo siguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(g, h) = 1$$

en donde $g = \delta_r(a)_n$ y h es la información de que $p(a, b) = r$: o sea, que h es un enunciado probabilitario primario y g es un enunciado probabilitario de *frecuencia relativa*.

Estas consideraciones hacen patente que en S_2 hemos de admitir *enunciados frecuenciales* tales como g —esto es, $\delta_r(a)_n$ — y suposiciones probabilísticas (o estimaciones probabilísticas hipotéticas) tales como h . Por esta razón, parece

pertinente identificar —con vistas a tener un S_2 homogéneo— todos los enunciados probabilitarios que forman los elementos de S_2 con *enunciados frecuenciales* (o, dicho de otro modo, asumir cierto *tipo de interpretación frecuencial de la probabilidad* para los enunciados probabilitarios *primarios* e, f, g, h, \dots , que constituyen los elementos de S_2). Podemos asumir, al mismo tiempo, la *interpretación lógica de la probabilidad* para los enunciados probabilitarios de la forma

$$P(g, h) = 1$$

es decir, para todos los enunciados probabilitarios secundarios, que hacen aseveraciones acerca del grado de probabilidad de los primarios, g y h .

Aun cuando podamos no tener una métrica lógica (o absoluta) de los enunciados probabilitarios primarios —o sea, aunque posiblemente no tengamos idea de los valores de $p(a)$ ni de $p(b)$ — cabe que tengamos una métrica lógica o absoluta de los secundarios: pues nos la proporciona la distribución laplaciana, según la cual, $P(g)$ —la probabilidad absoluta de g , es decir, de $\delta_{r,.(a)_n}$ — es igual a 2δ , ya sea g una hipótesis o esté observada empíricamente; con lo cual, la hipótesis probabilística típica h recibe el valor $P(h) = 0$, ya que h tiene la forma « $p(a, b) = r$ » con $\delta = 0$. Dado que los métodos de Bernoulli nos permiten calcular el valor de la probabilidad relativa $P(g, h)$ por medio de un puro análisis matemático, podemos considerar que las probabilidades relativas $P(g, h)$ están determinadas análogamente por razones puramente lógicas. Por consiguiente, parece enteramente oportuno adoptar para el nivel secundario la interpretación lógica del cálculo de probabilidades formal.

Resumiendo: Es posible considerar que los métodos de Bernoulli y de Laplace están encaminados a estatuir una métrica puramente lógica de las probabilidades en el nivel secundario, independientemente de que exista o no una métrica de dicha índole en el nivel primario. Los métodos bernoullianos determinan, por tanto, la métrica lógica de las probabilidades relativas (en términos generales, verosimilitud secundaria de hipótesis primarias), y los de Laplace la métrica lógica de las probabilidades absolutas (en general, de los informes estadísticos acerca de muestras).

Los esfuerzos de estos autores se dirigían, en gran medida, sin duda alguna, a establecer una teoría probabilística de la inducción: es cierto que tendían a identificar C con p . No necesito decir que creo que se equivocaban en ello: las teorías estadísticas, como cualesquiera otras, son hipotético-deductivas, y se las somete a contraste —como a todas las demás hipótesis— intentando falsarlas, es decir, intentando reducir su verosimilitud secundaria a cero (o casi a cero); su «grado de corroboración», C , tiene interés únicamente si constituye el resultado de tales contrastaciones: pues no hay nada más fácil que escoger datos estadísticos que sean *favorables* a una hipótesis estadística, si es que queremos hacer tal cosa.

*14. Podría preguntarse si, después de todo, no he cambiado mi credo

inadvertidamente. Pues quizá parezca que nada nos impide llamar a $C(h, d)$ «la probabilidad inductiva de h , dado d », o —si se considera engañosa esta expresión, teniendo en cuenta que C no obedece a las leyes del cálculo de probabilidades— «el grado de racionalidad de nuestra creencia en h , dado d ». Algún crítico inductivista benévolo podría, tal vez, congratularse conmigo por haber resuelto el inmemorial problema de la inducción *en un sentido positivo*, gracias a mi función C : por haber demostrado, finalmente, con esta función la validez del razonamiento inductivo.

Yo contestaría como sigue. No me opongo a que se designe $C(h, d)$ con un nombre cualquiera, adecuado o inadecuado: soy completamente indiferente a la terminología, con tal de que no nos extravíe; ni tampoco objeto nada —siempre que ello no nos extravíe— a que se amplíe el significado de «inducción» (ya sea inadvertidamente o de otra manera). Pero he de insistir en que sólo puede interpretarse $C(h, d)$ como grado de corroboración *si d es un informe acerca de contrastaciones exigentes que hayamos sido capaces de idear*; éste es el punto que marca la diferencia entre la actitud del inductivista —o del verificacionista— y la mía propia. El inductivista o verificacionista quiere una *afirmación* de hipótesis; espera hacerla más firme en virtud de los datos d , y busca la «firmeza» —o sea, la «confirmación»—. En el mejor de los casos, puede darse cuenta de que no hemos de ser parciales en la elección de d , de que no debemos hacer caso omiso de los casos desfavorables, y de que d ha de comprender informes acerca de *todos* los conocimientos procedentes de la observación de que disponemos, ya sean favorables o adversos. (Adviértase que el requisito inductivista de que d tiene que abarcar la *totalidad* de nuestros conocimientos de observación no puede ser representado por medio de ningún formalismo: es un requisito no formal, una condición de adecuación que ha de satisfacerse para que estemos dispuestos a interpretar $p(h, d)$ como *grado de nuestro imperfecto conocimiento de h* .)

Frente por frente a la actitud inductivista, yo afirmo que no debe interpretarse $C(h, d)$ como grado de corroboración de h por d a menos que d presente un informe de *nuestros esfuerzos sinceros para derrocar h* . No es posible formalizar el requisito de sinceridad, como tampoco el requisito inductivista de que d ha de representar la totalidad de nuestros conocimientos proporcionados por la observación; mas si d no es un informe acerca de los resultados de los esfuerzos sinceros que hemos mencionado, simplemente nos engañaremos a nosotros mismos si consideramos que podemos interpretar $C(h, d)$ como grado de corroboración, o como alguna otra cosa por el estilo.

Mi benévolo crítico podría replicar que sigue sin ver razón alguna por la que mi función C no pudiera ser considerada como una solución positiva del clásico problema de la inducción: diría que mi contestación sería perfectamente aceptable para el inductivista clásico, visto que no consiste sino en una exposición del llamado «método de inducción eliminadora», método perfectamente conocido por Bacon, Whewell y Mill, y que todavía no han olvidado ni siquiera algunos de los teóricos

probabilísticos de la inducción (aunque mi crítico bien podría admitir que estos últimos han sido incapaces de incorporarlo de un modo eficaz en sus teorías).

Mi reacción a esta réplica sería lamentar mi continuo fracaso en mis intentos de explicar el punto principal de mi teoría con claridad suficiente. Pues el único propósito de la eliminación defendida por todos aquellos inductivistas era el de *estatuir lo más firmemente posible la teoría superviviente*, la cual —según pensaban— tenía que ser la verdadera (o, tal vez, solamente una *sumamente probable*, ya que podríamos no haber logrado completo éxito en la eliminación de toda teoría a excepción de la verdadera).

Mas, contra esta opinión, no considero que podamos nunca reducir seriamente el número de teorías competidoras por eliminación, ya que dicho número es siempre infinito. Lo que sí hacemos —o deberíamos hacer— *es adherimos, por el momento, a la más improbable de las teorías supervivientes*, o sea —para expresarlo con mayor precisión— a la que pueda ser contrastada de un modo más exigente. «Aceptamos» provisionalmente esta teoría, pero sólo en el sentido de que la elegimos como digna de ser sometida a críticas ulteriores, y a las contrastaciones más duras que podamos idear.

Por el lado positivo quizá estemos autorizados a decir que la teoría sobreviviente es la mejor —y la mejor contrastada— de las que conocemos.

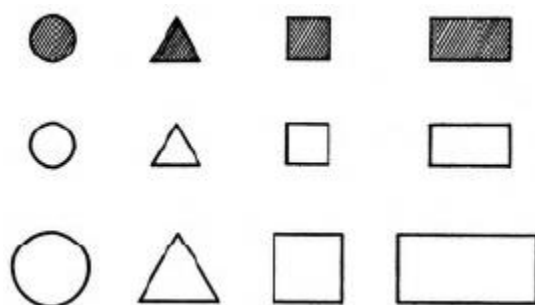
APÉNDICE *X.

Universales, disposiciones y necesidad natural o física

1) La doctrina fundamental que subyace a todas las teorías de la inducción es *la doctrina de la primacía de las repeticiones*, de la cual podemos distinguir dos variantes si recordamos la actitud de Hume. A la primera variante (criticada por Hume) podemos llamarla doctrina de la primacía lógica de las repeticiones: según ella, los ejemplos repetidos proporcionan una especie de *justificación* para que aceptemos una ley universal (la idea de repetición está unida, por regla general, a la de probabilidad). Podemos denominar a la segunda (mantenida por Hume), doctrina de la primacía temporal (y psicológica) de las repeticiones: de acuerdo con ella, éstas, aun cuando no consigan darnos ningún tipo de *justificación* de una ley universal ni de las expectativas y creencias que ésta entraña, inducen y suscitan de hecho en nosotros, sin embargo, tales expectativas y creencias —por muy poco «justificado» o «racional» que este hecho sea (o estas creencias).

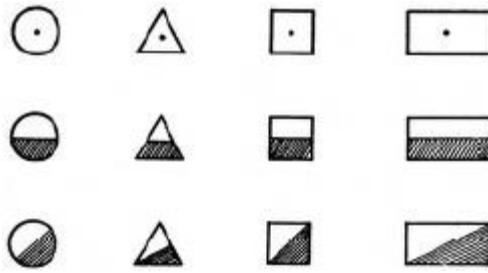
Ambas variantes de semejante doctrina —la más exigente de la primacía lógica de las repeticiones y la más débil de su primacía temporal (o causal, o psicológica)— son insostenibles, como podemos demostrar mediante dos argumentos enteramente diferentes.

He aquí mi primer argumento contra la primacía primero citada. Solamente tenemos experiencia de *repeticiones aproximadas*; y al decir que una repetición es aproximada me refiero a que la repetición B de un suceso A no es idéntica a A, ni indistinguible de ella, sino solamente *más o menos parecida* a A. Pero si la repetición está basada, por consiguiente, en un mero parecido, ha de participar de una de las principales características del parecido: su relatividad. Dos cosas parecidas lo son siempre en ciertos aspectos, como podemos hacer visible con un sencillo diagrama.



Mirando este diagrama nos encontramos con que algunas de las figuras son parecidas a otras en lo que respecta al sombreado (rayado) o a su ausencia; otras lo son con respecto a la forma, y otras respecto del tamaño. Podríamos ampliar la tabla

como sigue:



Puede verse fácilmente que no hay fin en cuanto a los tipos posibles de parecido.

Estos diagramas ponen de manifiesto que las cosas pueden ser parecidas en *diferentes respectos*, y que dos cosas cualesquiera que sean parecidas desde un punto de vista cabe que sean diferentes desde otro. De un modo general, el parecido —y con él la repetición— presupone siempre la adopción de *un punto de vista*: ciertos parecidos o ciertas repeticiones nos sorprenderán si estamos interesados por un problema, y otros si nos preocupa otro problema. Pero si el parecido y la repetición presuponen que se adopta un punto de vista —o un interés, o una expectación— es lógicamente necesario que los puntos de vista, los intereses o las expectativas sean previos lógicamente a la repetición: resultado que destruye tanto la doctrina de la primacía lógica de las repeticiones como la de la primacía temporal^[1].

Puede añadirse la observación de que, dado un grupo o conjunto finito de cosas —por variadas que las hayamos escogido— podemos siempre, con un poco de ingenio, encontrar puntos de vista tales que si las consideramos desde uno cualquiera de ellos, todas las cosas del conjunto serán parecidas (o parcialmente iguales): lo cual significa que puede decirse de cualquier cosa que es una «repetición» de cualquier otra cosa, con tal de que adoptemos el punto de vista apropiado. Lo cual hace ver hasta qué punto es ingenuo considerar la repetición como algo último o dado. La reflexión que acabamos de hacer se encuentra en estrecha relación con el hecho (mencionado en el apéndice *vii, nota 9; cf. la propiedad B) de que podemos encontrar, para una sucesión *cualquiera* finita de ceros y unos, una regla o «ley» matemática con la que construir una sucesión infinita que comience por la sucesión finita dada.

Paso ahora a mi segundo argumento contra la primacía de las repeticiones, que es el siguiente. Hay leyes y teorías de un carácter enteramente distinto del que tiene «todos los cisnes son blancos», aun cuando puedan formularse de un modo parecido a éste. Paremos mientes en la teoría atómica antigua: es innegable que puede expresarse (en una de sus formas más sencillas) por «todos los cuerpos materiales están compuestos por corpúsculos»; pero es evidente que la forma de «todos...» carece relativamente de importancia en el caso de esta ley. Quiero decir lo siguiente: el problema de mostrar que un solo cuerpo físico —digamos, un trozo de hierro— esté compuesto por átomos o «corpúsculos» es, por lo menos, tan difícil como el de mostrar que *todos* los cisnes son blancos: en ambos casos nuestras aserciones

trascienden toda experiencia de observación. Y lo mismo ocurre con casi todas las teorías científicas: no podemos hacer ver directamente, ni siquiera de *un* cuerpo físico, que en ausencia de fuerzas se mueva en línea recta; ni que atraiga y sea atraído (con respecto a otro cuerpo físico) de acuerdo con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia. Todas estas leyes describen lo que podríamos llamar *propiedades estructurales del mundo*, y todas trascienden toda posible experiencia; la dificultad inherente a ellas no reside tanto en asentar la universalidad de la ley a partir de casos repetidos, cuanto en asentar que se cumpla en un solo caso.

Muchos inductivistas se han percatado de esta dificultad. La mayoría de los que han caído en la cuenta de ella han intentado, como Berkeley hizo, trazar una distinción tajante entre las puras generalizaciones de observaciones y las teorías más «abstractas» u «ocultas», como la teoría corpuscular o la de Newton; y, por regla general, han tratado de resolver el problema —como trató Berkeley— diciendo que las teorías abstractas no son auténticas aserciones acerca del mundo, sino que no son *nada más que instrumentos*: instrumentos para la predicción de fenómenos observables. He llamado «*instrumentalismo*» a esta tesis, y la he sometido a crítica en otro lugar^[2]; aquí diré solamente que rechazo el instrumentalismo, y daré no más que una razón de esta repulsa: la de que no resuelve el problema de las propiedades «abstractas», «ocultas» o «estructurales». Pues dichas propiedades no sólo aparecen en las teorías «abstractas» en que piensan Berkeley y sus sucesores: se las menciona constantemente, por todo el mundo, y en el lenguaje cotidiano; casi todos los enunciados que hacemos trascienden la experiencia; no existe una frontera neta entre un «lenguaje empírico» y un «lenguaje teórico»: *teorizamos constantemente*, incluso cuando hacemos el enunciado singular más trivial que pueda haber. Y con esta observación hemos llegado al problema principal que pretendo examinar en este apéndice.

2) Es innegable que si decimos «todos los cisnes son blancos», entonces la blancura que predicamos es una propiedad observable; y en la misma medida podemos decir que un enunciado singular tal como «este cisne es blanco» está basado en la observación. Y, con todo, trasciende la experiencia: no debido a la palabra «blanco», sino a la de «cisne»; pues al llamar «cisne» a algo le atribuimos propiedades que van mucho más allá de la mera observación —casi tan lejos como si afirmáramos que está compuesto de «corpúsculos».

Así pues, no solamente las teorías explicativas más abstractas trascienden la experiencia, sino que también lo hacen los enunciados singulares más corrientes: pues incluso éstos son siempre *interpretaciones de «los hechos» o la luz de unas teorías* (y lo mismo ocurre hasta con «los hechos» del caso: contienen *universales*, y los universales entrañan siempre un comportamiento legal).

Al final del apartado 25 he explicado sucintamente de qué modo cuando se utilizan universales como «vaso» o «agua» en un enunciado tal como «aquí hay un vaso de agua», necesariamente se trasciende la experiencia. Se debe al hecho de que

las palabras como «vaso» o «agua» se usan para caracterizar el *comportamiento legal* de determinadas cosas, lo cual puede expresarse llamándoles «palabras de disposiciones». Ahora bien; puesto que toda ley trasciende la experiencia —lo cual es simplemente otra manera de decir que no es verificable—, todo predicado que expresa un comportamiento legal la trasciende también; y, por ello, el enunciado «este recipiente contiene agua» es una hipótesis contrastable pero no verificable, y trasciende la experiencia^[3]. Por esta razón, es imposible «constituir» ningún término verdaderamente universal (como Carnap ha tratado de hacer), es decir, definirlo en términos puramente experimentales o de observación (o «reducirlo» a términos puramente de experiencia o de observación): como *todos los universales corresponden a disposiciones* no es posible reducirlos a la experiencia; hemos de introducirlos como términos indefinidos, a excepción de los que podemos definir a partir de otros universales que no son de experiencia (como ocurre con «agua» si preferimos definirla por «una combinación de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno»).

3) Suele no prestarse atención a que *todos los universales corresponden a disposiciones*, debido al hecho de que pueden hacerlo en grados diversos. Así, «soluble» y «rompible» corresponden, sin duda alguna, a disposiciones en mayor grado que «disuelto» y «roto»; pero, a veces, no nos damos cuenta de que también lo hacen estos últimos términos: un químico no diría que el azúcar o la sal se han *disuelto* en agua si no esperase poder recuperarlos evaporando ésta, de modo que «disuelto» denota un estado de disposición; y en cuanto a «roto», basta considerar de qué modo procedemos *cuando dudamos* acerca de si una cosa está rota o no (cualquier cosa que se nos haya caído, o bien uno de nuestros huesos, por ejemplo): contrastamos el comportamiento de la cosa en cuestión, tratando de averiguar si muestra cierta movilidad indebida; de modo que «roto», lo mismo que «disuelto», describe ciertas disposiciones a comportarse de una manera regular o legal. Análogamente, decimos de una superficie que es roja, o blanca, si tiene la disposición para reflejar la luz roja o blanca, respectivamente, y si tiene, en consecuencia, la disposición a presentar un aspecto rojo o blanco a la luz del día. En general, el carácter de cualquier propiedad universal de corresponder a disposiciones se hace patente si consideramos qué contrastaciones emprendemos cuando dudamos sobre si una propiedad se presenta o no en un caso particular.

Así pues, el intento de distinguir entre predicados de disposiciones y otros que no lo sean está equivocado, lo mismo que le ocurre al de distinguir entre términos (o bien, lenguajes) teóricos y términos (lenguajes) no teóricos, empíricos, de observación, fácticos u ordinarios. Quizá ocurra lo siguiente: se tiende a considerar fáctico u «ordinario» lo que se ha aprendido antes de llegar a determinada edad crítica, y teórico —o, tal vez, «meramente instrumental»— aquello de que se oye hablar después. (Al parecer, la edad crítica depende del tipo psicológico.)

4) Las leyes universales trascienden la experiencia, aunque no sea más que por

ser universales y trascender, por ello, cualquier número finito de sus ejemplos observables; y los enunciados singulares la trascienden también debido a que los términos universales que aparecen normalmente en ellos entrañan disposiciones a comportarse de una manera legal, de suerte que entrañan leyes universales (o cierto grado inferior de universalidad, por regla general). Según esto, las leyes universales trascienden la experiencia, al menos, de dos modos: debido a su universalidad, y por efecto de la aparición en ellas de términos universales (o de disposiciones); y también lo hacen en grado más elevado si los términos de disposiciones que se encuentran en ellas tienen este carácter en grado más alto o son más abstractos. Hay estratos sucesivos de grados de universalidad cada vez más elevados, y, por tanto, lo mismo de trascendencia. (En el apartado *15 del *PostScript* trato de explicar en qué sentido existen también estratos de lo que podría llamarse «profundidad».)

Naturalmente, las leyes o las teorías científicas no son verificables por causa de dicha trascendencia, y debido a ésta la *contrastabilidad* o *refutabilidad* es lo único que las distingue, en general, de las teorías metafísicas.

Si se pregunta por qué empleamos estas leyes universales trascendentes en lugar de ceñirnos más a la «experiencia», pueden darse dos tipos de respuesta.

a) Porque las necesitamos: es decir, porque no existe tal «pura experiencia», sino solamente la experiencia interpretada a la luz de expectativas o de teorías que son «trascendentes».

b) Porque un teórico es un hombre que *quiere explicar* las experiencias, y porque toda explicación conlleva la utilización de hipótesis explicativas, que (para ser contrastables independientemente: véase el apartado *15 del *PostScript*) han de trascender lo que esperamos explicar.

La razón encabezada con a) es pragmática o instrumentalista, y aunque creo que es verdadera, no considero que sea comparable en importancia a la que he marcado con b): pues, aun en caso de que tuviese éxito un programa destinado a eliminar las teorías explicativas para los fines prácticos (digamos, para la predicción), las metas del teórico no resultarían afectadas por ello^[4].

5) En muchos lugares de este libro he aseverado que las teorías trascienden la experiencia, en el sentido que aquí indico, a la vez que describía las teorías como enunciados estrictamente universales.

William Kneale ha planteado una crítica sumamente penetrante de la tesis de que es posible expresar de un modo adecuado las teorías —o las leyes de la Naturaleza— por medio de enunciados universales, tales como «todos los planetas se mueven en elipses». He tenido grandes dificultades para entender la crítica de Kneale, e incluso ahora no estoy enteramente seguro de entenderle correctamente; pero confío en que sí lo hago^[5].

Creo que la cuestión que señala Kneale puede exponerse del modo siguiente. Aunque los enunciados de leyes naturales *entrañan* enunciados universales, aquéllos son lógicamente más exigentes que los últimos: no solamente aseveran que «todos los

planetas se mueven en elipses», sino algo así como «todos los planetas se mueven necesariamente en elipses». Kneale llama a un enunciado de esta índole un «principio de necesidad» [en ingl., *necessitation*], pero a mi entender no logra aclarar enteramente cuál sería la diferencia entre un enunciado universal y un «principio de necesidad»: habla de que «es menester una formulación más precisa de las nociones de contingencia y de necesidad»^[6], pero un poco más adelante leemos, con gran sorpresa: «En realidad, la palabra ‘necesidad’ es la más inocua de todas con las que tenemos que ocuparnos en esta parte de la filosofía»^[7]. Admito, desde luego, que entre estos dos pasajes de Kneale trata de persuadirnos de que «el sentido de esta diferencia —la existente entre contingencia y necesidad— puede comprenderse fácilmente con unos ejemplos»^[8]; pero sus ejemplos me dejan perplejo. En el supuesto siempre de que mis esfuerzos por entender a Kneale hayan tenido éxito, he de decir que su teoría positiva de las leyes naturales es para mí absolutamente inaceptable. Y, con todo, sus críticas me parecen del máximo valor.

6) Voy a explicar ahora, valiéndome de un ejemplo, aquello en que, según creo, consiste esencialmente la crítica de Kneale de la tesis para la cual pueden caracterizarse las leyes de la Naturaleza de un modo *lógicamente suficiente* y, asimismo, *intuitivamente adecuado*, diciendo que son enunciados universales.

Consideremos un animal extinguido, digamos la moa, un ave gigantesca cuyos huesos abundan en algunas ciénagas de Nueva Zelanda (yo mismo he excavado buscándolos). Decidimos utilizar el nombre de «moa» como nombre universal (en lugar de como nombre propio: cf. el apartado 14) de cierta estructura biológica; pero hemos de admitir que es completamente probable —e incluso completamente creíble— que no hayan existido en el universo moas ningunas, ni vayan a existir, excepto las que vivieron en otro tiempo en Nueva Zelanda; y asumamos que esta tesis creíble es exacta.

Supongamos ahora que la estructura biológica del organismo de la moa es de tal índole que un animal de esta especie pueda vivir fácilmente, en condiciones muy favorables, hasta sesenta años o más; y supongamos, además, que las condiciones con que se encontró la moa en Nueva Zelanda distaban mucho de ser ideales (debido, tal vez, a la presencia de cierto virus), de modo que ninguna moa llegó jamás a tener cincuenta años. En este caso, el enunciado estrictamente universal «todas las moas mueren antes de tener cincuenta años» será verdadero: pues, según los supuestos asumidos, no ha habido, hay, ni habrá moa en todo el universo con más de cincuenta años de edad. Pero este enunciado universal no será una ley de la Naturaleza, pues —de acuerdo con las asunciones hechas— sería *posible* que una moa viviese durante más tiempo, y el hecho de que ninguna haya vivido más se debe únicamente a unas condiciones *accidentales o contingentes* (tales como la copresencia de cierto virus).

Este ejemplo pone de manifiesto que puede haber *enunciados estrictamente universales y verdaderos* que tengan un carácter accidental, en lugar del de verdaderas leyes de la Naturaleza; y, en consecuencia, la caracterización de éstas

como enunciados estrictamente universales es lógicamente insuficiente e intuitivamente inadecuada.

7) También indica este ejemplo en qué sentido cabe describir las leyes naturales como «principios de necesidad» o «principios de imposibilidad», tal y como Kneale propone. Pues, según nuestras asunciones —que son perfectamente razonables— sería *posible* que una moa alcanzase una edad más elevada de la que realmente ha alcanzado moa alguna, con tal de que se diesen unas condiciones favorables. Pero si existiera una ley natural que limitase la edad de cualquier organismo del tipo moa a cincuenta años, *entonces no sería posible* que moa ninguna viviera más años que éstos. Así pues, las leyes naturales imponen ciertos límites a lo que es posible.

Todo esto me parece aceptable intuitivamente; y, en realidad, cuando he dicho en varios lugares de este libro que las leyes naturales *prohíben* que ocurran determinados eventos, o que tienen el carácter de *prohibiciones*, expresaba la misma idea intuitiva. Pienso también que es enteramente posible, y tal vez incluso conveniente, hablar de «necesidad natural» o de «necesidad física» para describir dicho carácter de las leyes naturales y de sus consecuencias lógicas.

8) Pero, a mi juicio, es un error infravalorar las diferencias existentes entre esta necesidad natural o física y otros tipos de ella, por ejemplo, la necesidad lógica. Poco más o menos, podemos llamar lógicamente necesario aquello que sería válido en cualquier mundo concebible. Ahora bien, aunque es concebible que la ley de Newton de la inversa del cuadrado de la distancia sea una verdadera ley de la Naturaleza en algún mundo, y que en esa medida sea naturalmente necesaria en él, es perfectamente *concebible* un mundo en que no fuese válida.

Kneale ha criticado este argumento señalando que *podemos concebir* que la conjetura de Goldbach (según la cual todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos) sea verdadera, y también que sea falsa, y ello aun cuando muy bien pueda ser demostrable (o refutable) y, por tanto, sea matemáticamente —o lógicamente— necesaria (o imposible). De aquí saca el argumento de que «no ha de tomarse el que podamos concebir lo contradictorio como prueba negativa de la necesidad en las matemáticas»^[9]; pero si esto es así, ¿por qué —pregunta— «tendríamos que suponer que nos proporcione una prueba negativa en la ciencia natural»?^[10] Ahora bien, a mi entender esta argumentación se apoya excesivamente en la palabra «concebible», y además maneja un sentido de ella que es distinto del que nosotros tenemos en cuenta: una vez que disponemos de una demostración del teorema de Goldbach, podemos decir que dicha demostración estatuye precisamente que es inconcebible un número par (mayor que dos) que no sea la suma de dos primos (en el sentido de que lleva a resultados contradictorios, entre otros, a la aserción de que $0 = 1$, lo cual es «inconcebible»). En otro sentido, $0 = 1$ puede ser perfectamente concebible, y hasta cabe utilizarlo —del mismo modo que cualquier otro enunciado matemáticamente falso— como supuesto para una demostración indirecta. Ciertamente, podemos disponer una demostración indirecta del modo

siguiente: «*Concibamos* que *a* sea verdadero; entonces tendríamos que admitir que *b* sea verdadero; pero sabemos que *b* es absurdo, luego es *inconcebible* que *a* sea verdadero». Es evidente que, aunque este empleo de «concebible» e «inconcebible» es un poco vago y ambiguo, nos engañaríamos si pretendiéramos que este modo de razonar tiene que no ser válido, basándonos en que la verdad de *a* no puede ser inconcebible, ya que habíamos empezado precisamente concibiéndola.

Así pues, en lógica y en matemáticas, «inconcebible» es simplemente una palabra para «conducente a una contradicción manifiesta»: cualquier cosa que no nos lleva a una contradicción manifiesta es *lógicamente* posible o «concebible», y cualquier otra que nos lleva es lógicamente imposible o «inconcebible». Cuando Kneale dice que el enunciado contradictorio de un teorema puede ser «concebible», emplea esta palabra en otro sentido —que también es irreprochable.

9) Por tanto, una suposición es lógicamente posible si no es contradictoria en sí misma, y físicamente posible si no contradice a las leyes naturales. Estos dos sentidos de «posible» tienen de común lo suficiente para explicar por qué empleamos la misma palabra; pero si ocultamos sus diferencias bajo una uniformidad superficial sólo nos veremos llevados a toscas confusiones.

Cuando se las compara con las tautologías lógicas, las leyes de la Naturaleza tienen un carácter accidental, contingente. Leibniz reconoce tal cosa al enseñar (cf. *Philos. Schriften*, Gerhardt, 7, pág. 390) que el mundo es la obra de Dios, en un sentido parecido a como un soneto, un rondó, una sonata o una fuga son la obra de un artista. Éste puede elegir libremente cierta *forma*, con lo cual restringe su libertad por medio de una elección: impone a su creación ciertos principios de imposibilidad, por ejemplo, sobre su ritmo (y, en menor medida, sobre sus palabras, que en comparación con el ritmo pueden parecer contingentes, accidentales: pero esto no quiere decir que su elección de la forma o del ritmo no haya sido también contingente, pues podría haber elegido otros).

Análogamente ocurre con las leyes naturales. Restringen la elección (lógicamente) posible de hechos singulares: son, por tanto, principios de imposibilidad con respecto a éstos, que parecen enormemente contingentes comparados con las leyes naturales. Pero éstas, si bien son necesarias cuando se las compara con los hechos singulares, son contingentes frente a las tautologías lógicas, ya que puede haber *mundos estructuralmente diferentes*, es decir, mundos con leyes naturales diferentes.

Así pues, la necesidad —o imposibilidad— natural es como la necesidad —o imposibilidad— musical: es como la imposibilidad de un compás de cuatro por cuatro en un minué clásico, o la de acabar éste con un intervalo de séptima disminuida o con cualquier otra disonancia. Impone principios *estructurales* sobre el mundo; pero todavía permite una libertad muy grande a los hechos contingentes y singulares, o sea, a las condiciones iniciales.

Si comparamos la situación existente en la música con la de nuestro ejemplo de la

moa, podemos decir: no hay ninguna ley musical que prohíba escribir un minué en *sol* sostenido menor, pero, a pesar de ello, es muy posible que no se haya escrito ni se escriba jamás minué alguno en dicha clave tan desusada. Por tanto, podemos decir que las leyes necesarias musicales pueden distinguirse de los enunciados universalmente verdaderos acerca de los hechos históricos de la composición musical.

10) Parece que lo que Kneale propone —si le entiendo correctamente— es la tesis opuesta, o sea, la de que las leyes naturales no son contingentes en ningún sentido; lo cual, para mí, es algo tan equivocado como la tesis que él critica con razón: la de que las leyes de la Naturaleza no son sino enunciados universales verdaderos.

Podría tal vez expresarse en términos religiosos la opinión de Kneale de que las leyes de la Naturaleza son necesarias en el mismo sentido en que lo son las tautologías lógicas, del modo siguiente: Dios puede haberse enfrentado con la elección entre crear un mundo físico o no crearlo, pero una vez que eligió ya no fue libre para escoger la forma —o estructura— del mundo; pues dado que dicha estructura —las regularidades de la Naturaleza descritas por las leyes naturales— es necesariamente lo que es, lo único que ha podido elegir libremente han sido las condiciones iniciales.

Me parece que Descartes sostuvo una tesis muy parecida a ésta. Según él, todas las leyes de la Naturaleza se siguen necesariamente de un solo principio analítico (la definición esencial de «cuerpo»), según el cual «ser un cuerpo» significa lo mismo que «ser extenso»: lo cual viene a implicar dos cuerpos *diferentes* no pueden ocupar la misma extensión o espacio (en realidad, este principio es semejante al ejemplo habitual de Kneale, el de «que nada que sea rojo será también verde»^[11]). Pero la teoría física —a partir de Newton— ha conseguido una profundidad de penetración que sobrepasa inmensamente la posición cartesiana gracias a haber ido más allá de estas «verdades de Perogrullo» [en ingl., *truisms*] (como Kneale las llama, acentuando su parecido con las tautologías lógicas^[12]).

Considero que la doctrina de que las leyes de la Naturaleza *no son contingentes en ningún sentido* es una forma particularmente extrema de una tesis que he descrito y criticado en otro lugar con el nombre de «esencialismo»^[13], ya que entraña la doctrina de la existencia de *explicaciones últimas*: es decir, la existencia de teorías explicativas que a su vez no necesiten ninguna explicación ulterior ni fuesen capaces de tenerla. Pues si lográsemos reducir todas las leyes de la Naturaleza a verdaderos «principios de necesidad» —a verdades de Perogrullo como la de que dos cosas esencialmente extensas no pueden ocupar la misma extensión, o la de que nada que sea rojo será también verde—, toda explicación ulterior se haría, al mismo tiempo, innecesaria e imposible.

No encuentro razón para creer que la doctrina de la existencia de explicaciones últimas sea verdadera, y sí muchas para creer que es falsa. Cuanto más sabemos acerca de las teorías —o de las leyes de la Naturaleza— tanto menos nos recuerdan a

las verdades de Perogrullo cartesianas, que se explican a sí mismas, o a las definiciones esencialistas. Lo que la ciencia descubre no son perogrulladas; antes bien, parte de la grandeza y de la belleza de la ciencia consiste en que podemos aprender, mediante nuestras propias investigaciones críticas, que el mundo es enteramente diferente de cuanto habíamos imaginado nunca —hasta que enardecimos la imaginación al quedar refutadas nuestras teorías anteriores—. No parece haber razón alguna para que se ponga fin a este proceso^[14].

El apoyo más fuerte en favor de cuanto he dicho proviene de nuestras consideraciones sobre el contenido y la probabilidad lógica (absoluta). Si las leyes de la Naturaleza no son meramente enunciados estrictamente universales, han de tener *mayor fuerza lógica* que los enunciados universales correspondientes, ya que estos últimos tienen que ser deductibles de ellas. Pero, como hemos visto (al final del apéndice *v), podemos definir la *necesidad lógica* de *a* por medio del *definiens*.

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 1$$

Por otra parte, obtenemos para enunciados *a* universales (cf. el mismo apéndice y los *vii y *viii):

$$p(a) = p(a, \bar{a}) = 0;$$

y lo mismo tiene que ocurrir con cualquier enunciado de mayor fuerza lógica. Según esto, y por su mayor contenido, toda ley de la Naturaleza está todo lo lejos de ser un enunciado lógicamente necesario que puede estarlo un enunciado coherente; y en cuanto a su significación lógica, se encuentra mucho más cerca de un enunciado universal «meramente accidental» que de una verdad lógica de Perogrullo.

11) El fruto de toda esta discusión es que estoy dispuesto a aceptar las críticas de Kneale en la medida en que lo estoy a aceptar la tesis de que existe una categoría de enunciados —las leyes de la Naturaleza— que tienen mayor fuerza lógica que los enunciados universales correspondientes. En mi opinión, esta doctrina es incompatible con cualquier teoría de la inducción, pero causa pocos efectos, o ninguno, en mi propia metodología. Por el contrario, es evidente que será preciso someter a contraste cualquier principio —propuesto o conjeturado— que declare la imposibilidad de determinados eventos: y ello tratando de hacer ver que dichos eventos son posibles. Pero éste es precisamente el procedimiento de contrastar por que yo abogo.

Por tanto, no es necesario cambiar absolutamente nada desde el punto de vista que hemos adoptado —en lo que se refiere a metodología—. El cambio afectará al nivel ontológico, metafísico; y podemos describirlo diciendo que si conjeturamos que *a* es una ley natural, conjeturamos que *a* expresa una *propiedad estructural de nuestro mundo*: propiedad que impide que acontezcan ciertos eventos singulares —lógicamente posibles— o ciertas situaciones de determinado tipo (de parecido modo a como hemos explicado en los apartados 21 a 23 del libro, y, asimismo, en los 79, 83 y

85).

12) Como Tarki ha puesto de manifiesto, es posible explicar la *necesidad lógica* a partir de la universalidad: cabe decir de un enunciado que es lógicamente necesario si y sólo si es deductible (por ejemplo, gracias a una particularización) de una función de enunciados «*universalmente válida*», es decir, de una función de enunciados que *se satisface por todo modelo*^[15] (esto quiere decir que es verdadera en todos los mundos posibles).

Considero que podemos explicar por el mismo método lo que queremos decir por *necesidad natural*; pues cabe adoptar la siguiente definición.

Cabe decir que un enunciado es naturalmente —o físicamente— necesario si y sólo si es deductible de (la clausura de) una función de enunciados que se satisfaga en todos los mundos que, a lo más, difieran del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales.

Desde luego, no podemos nunca saber si una supuesta ley lo es auténticamente, o si parece serlo pero depende, en realidad, de ciertas condiciones iniciales peculiares existentes en nuestra zona del universo (cf. el apartado 79). Por tanto, no llegaremos jamás a averiguar si un enunciado dado no lógico es de hecho naturalmente necesario: la conjetura de que lo es no deja jamás de serlo (no solamente porque no podemos escudriñar la totalidad de nuestro mundo para asegurarnos de que no exista ningún ejemplo en contra, sino por la razón aún más fuerte de que no nos es posible escudriñar todos los mundos que difieran del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales). Pero aunque la definición que hemos propuesto excluye la posibilidad de obtener un *criterio positivo* de necesidad natural, podemos aplicar en la práctica aplicarla de un modo negativo: encontrando condiciones iniciales bajo las que la supuesta ley resulte perder su validez, podemos hacer patente que no era necesaria, o sea, que no es una ley de la Naturaleza. Con lo cual, la definición que hemos propuesto se ajusta perfectamente a nuestra metodología.

Según esta definición, todas las leyes de la Naturaleza, juntamente con todas sus consecuencias lógicas, serían, desde luego, *natural o físicamente necesarias*^[16].

Puede advertirse inmediatamente que la definición propuesta se encuentra de perfecto acuerdo con los resultados a que habíamos llegado en nuestra discusión del ejemplo de la moa (cf. los puntos anteriores 6 y 7): precisamente porque pensábamos que las moas podrían vivir un tiempo más largo bajo otras condiciones diferentes —y más favorables— es por lo que nos parecía que un enunciado universal verdadero acerca de su máxima edad real tenía carácter accidental.

13) Introducimos ahora el símbolo «N» como nombre de la clase de los enunciados que son necesariamente verdaderos en el sentido de la necesidad natural o física: esto es, verdaderos cualesquiera que sean las condiciones iniciales.

Valiéndonos de «N» podemos definir « $a \rightarrow b$ » (o, expresado lingüísticamente, «si a , entonces necesariamente b ») por la siguiente definición, bastante obvia:

(D) $a \xrightarrow{N} b$ es verdadero si y solamente si $a \rightarrow b \in N$;

que quizá pueda formularse del modo siguiente: «si a , entonces necesariamente b » es válido si y solamente si «si a entonces b » es necesariamente verdadero. Aquí « $a \rightarrow b$ » es, desde luego, el nombre de un condicional corriente, cuyo antecedente sea a y cuyo consecuente sea b ; si hubiéramos tenido la intención de definir el entrañamiento lógico o «implicación estricta» podríamos utilizar también (D), pero interpretando «N», sin embargo, como «lógicamente necesario» (en lugar de como «natural o físicamente necesario»).

En virtud de la definición (D), podemos decir de « $a \xrightarrow{N} b$ » que es el nombre de un enunciado con las siguientes propiedades.

(A) $a \xrightarrow{N} b$ no siempre es verdadero si a es falso, frente a lo que ocurre con $a \rightarrow b$.

(B) $a \xrightarrow{N} b$ no siempre es verdadero si b es verdadero, frente a lo que sucede con $a \rightarrow b$.

(A') $a \xrightarrow{N} b$ es siempre verdadero si a es imposible —o necesariamente falso—, o si su negación, $\neg a$, es necesariamente verdadera —ya se trate de una necesidad lógica o física—. (Cf., más adelante, las páginas 410-11 y la nota 26.)

(B') $a \xrightarrow{N} b$ es siempre verdadero si b es necesariamente verdadero (bien por necesidad lógica o física).

En todo lo anterior, a y b pueden ser tanto enunciados como funciones de enunciados.

Podemos llamar a « $a \xrightarrow{N} b$ » un «condicional necesario» o «condicional nómico»; y expresa, según creo, lo que algunos autores han llamado «condicionales subjuntivos» o «condicionales contrafácticos» (me parece, sin embargo, que otros autores mientan algo diferente con «condicional contrafáctico»: consideran que este nombre implica que a es fácticamente falso^[17]; a mi entender no debe recomendarse este empleo).

Basta una ligera reflexión para darse cuenta de que la clase de los enunciados naturalmente necesarios, N, no solamente comprende la clase de todos los enunciados que —del mismo modo que ocurre con las verdaderas leyes universales de la Naturaleza— es posible describir intuitivamente como los que no quedan afectados por cambios de las condiciones iniciales, sino también todos aquellos enunciados que se siguen de verdaderas leyes universales de la Naturaleza, o de teorías estructurales verdaderas acerca del mundo. Entre éstos habrá enunciados que describirán un conjunto perfectamente definido de condiciones iniciales: por ejemplo, unos que tengan la forma, «si en este matraz se mezclan hidrógeno y oxígeno a la temperatura ordinaria y a una presión de 1.000 g/cm², ..., entonces ...». Si los enunciados condicionales de este tipo son deductibles de verdaderas leyes naturales, entonces su verdad será invariante con respecto a todos los cambios de condiciones iniciales: o bien éstas (que se describen en el antecedente) se satisfarán, y entonces el consecuente será verdadero (y, por tanto, todo el condicional), o bien dichas

condiciones (iniciales) expresadas en el antecedente no se satisfarán, y serán, por tanto, fácticamente falsas («contrafácticas»); y, en tal caso, el condicional será verdadero satisfaciéndose de un modo vacío. Así pues, el satisfacerse de un modo vacío —de que se ha discutido tanto— desempeña su propio papel para asegurar que los enunciados deductibles de leyes naturalmente necesarias son también «naturalmente necesarios» en el sentido de nuestra definición.

Es verdad que podríamos haber definido N sencillamente como la clase de las leyes naturales y de sus consecuencias lógicas; pero quizá es algo más ventajoso definirla valiéndose de la idea de condiciones iniciales (o sea, de una clase simultánea de enunciados singulares): por ejemplo, si definimos N como la clase de los enunciados que son verdaderos en todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales, evitamos emplear un modo de expresión subjuntivo (o contrafáctico), tal como «que serían verdaderos incluso si (en nuestro mundo) prevalecieran condiciones iniciales distintas de las que prevalecen realmente».

Con todo, la frase «todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en lo que respecta a las condiciones iniciales» contiene implícitamente la idea de leyes de la Naturaleza: lo que queremos decir es «todos los mundos que tienen la misma estructura —o las mismas leyes naturales— que el nuestro». En la medida en que nuestro *definiens* contiene implícitamente la idea de leyes de la Naturaleza puede decirse que (D) adolece de circularidad; pero todas las definiciones tienen que ser circulares *en este sentido*, y precisamente todas las deducciones (frente a las demostraciones^[18]) —por ejemplo, todos los silogismos— son circulares: la conclusión tiene que estar contenida en las premisas. Sin embargo, nuestra definición no es circular en un sentido más técnico: su *definiens* maneja una idea intuitiva perfectamente clara, la de que varíen las condiciones iniciales de nuestro mundo (idea con la que se encuentra habitualmente cualquier experimentador todos los días); interpreta el resultado de tales cambios como la construcción de una especie de «modelo» de nuestro mundo (modelo o «copia» que no necesita ser fiel en lo que respecta a las condiciones iniciales), e imita luego el conocido sistema de llamar «necesarios» a los enunciados que son verdaderos en (el universo de) todos estos modelos (es decir, para todas las condiciones iniciales *lógicamente posibles*).

14) El modo en que he tratado ahora este problema es diferente intuitivamente del de una versión anteriormente publicada^[19]. A mi entender, ha habido un perfeccionamiento considerable, y reconozco con gusto que, en gran medida, debo dicho perfeccionamiento a las críticas de Kneale. No obstante tal cosa, desde un punto de vista más técnico (y ya no intuitivo) los cambios son leves. Pues en aquel trabajo yo partía: a) de la idea de leyes naturales; b) de la idea de los condicionales que se siguen de éstas —ahora bien, a) y b) juntamente tienen la misma extensión que N, como hemos visto—; sugería, además, c) que los «condicionales subjuntivos» son los que se siguen de b) —esto es, son justamente los de la clase b)— y, en el último

párrafo, d) que tal vez tengamos que introducir la suposición de que todas las condiciones iniciales lógicamente posibles (y, por tanto, todos los eventos y procesos compatibles con las leyes) se realizan en algún lugar y en algún momento del mundo: lo cual es una forma algo tosca de decir poco más o menos lo que digo actualmente apoyándome en la idea de todos los mundos que, a lo más, difieren del nuestro en cuanto a condiciones iniciales^[20].

En realidad, podría formularse mi posición de 1949 con ayuda del enunciado siguiente: aunque nuestro mundo no comprenda quizá todos los mundos lógicamente posibles, ya que tal vez sean posibles mundos de estructura diferente —o sea, con diferentes leyes—, comprende todos los mundos físicamente posibles, en el sentido de que en él están realizadas —en algún lugar, en algún momento— todas las condiciones iniciales físicamente posibles. Mi tesis actual es que es enteramente obvio que esta suposición metafísica posiblemente sea verdadera —en ambos sentidos de «posible»—, pero que es mucho mejor no cargamos con ella.

Mas una vez que se adopta la suposición metafísica mencionada, mis tesis antigua y actual se convierten en equivalentes (excepto en cuanto a diferencias puramente terminológicas) en lo que se refiere al *estatuto de las leyes*. De modo que mi antigua tesis es, todo lo más, más «metafísica» (o menos «positivista») que la de ahora, aun cuando no emplea la *palabra* «necesario» al describir dicho estatuto.

15) Para un estudioso de la metodología que se oponga a la doctrina de la inducción y se adhiera a la de la falsación, hay poca diferencia entre la tesis de que las leyes universales no son sino enunciados estrictamente universales y la de que son «necesarios»: en uno y otro caso, sólo podemos someter a contraste nuestras conjeturas intentando refutarlas.

Para el inductivista, en este punto reside una diferencia crucial: tendría que rechazar la idea de leyes «necesarias», ya que éstas, por tener mayor fuerza lógica, serán aún menos accesibles a la inducción que los meros enunciados universales.

Mas los inductivistas, de hecho, no razonan siempre de esta manera: por el contrario, algunos parecen pensar que quizá pueda utilizarse de algún modo, para justificar la inducción, un enunciado que afirme que las leyes de la Naturaleza son necesarias; tal vez algo por el estilo de un «principio de uniformidad de la Naturaleza».

Pero es evidente que ningún principio de esta índole podría justificar jamás la inducción: nunca podría hacer válidas, ni siquiera probables, las conclusiones inductivas.

Es enteramente verdad, desde luego, que podríamos apelar a un enunciado tal como «existen leyes de la Naturaleza» si quisiéramos justificar nuestra búsqueda de tales leyes^[21]. Pero en el contexto de la observación que he hecho, «justificar» tiene un sentido muy diferente del que adquiere en el contexto acerca de la cuestión sobre si podemos justificar la inducción. En este último caso, queremos estatuir ciertos enunciados (las generalizaciones inducidas); en el primero, se trata simplemente de

justificar una actividad, la búsqueda de leyes. Además, aun cuando esta actividad pueda justificarse —en cierto sentido— por el conocimiento de que existan verdaderas leyes (o sea, de que en el mundo existan regularidades estructurales), podría quedar justificada lo mismo incluso sin tal conocimiento: la esperanza de que haya alimentos en algún sitio «justifica», sin duda, su búsqueda —especialmente si desfallecemos de hambre—, aunque dicha esperanza esté muy lejos de un conocimiento. Así pues, podemos decir que, si bien el conocimiento de que existan verdaderas leyes aumentaría algo la justificación de nuestra búsqueda de ellas, tal indagación está justificada —aun en caso de que nos falte dicho conocimiento— por nuestra curiosidad, o por la mera esperanza de tener éxito.

Todavía más: la distinción entre leyes «necesarias» y enunciados estrictamente universales no parece tener trascendencia para este problema: sean necesarias o no, el conocimiento de que existan leyes aumentaría algo la «justificación» de nuestra búsqueda, sin ser preciso para este tipo de «justificación».

16) Creo, sin embargo, que la idea de que haya leyes necesarias en la Naturaleza, en el sentido de la necesidad natural o física expuesta en el punto 12), tiene importancia metafísica u ontológica, y un gran significado intuitivo en relación con nuestras tentativas de comprender el mundo. Y aunque es imposible estatuir esta idea metafísica ni apoyándose en razones empíricas (pues no es falsable) ni en razones de otra índole, creo que es verdadera, como he indicado en los apartados 79 y 83 a 85. Mas trato actualmente de ir más allá de lo que dije en tales apartados, acentuando el peculiar estatuto ontológico de las leyes universales (por ejemplo, hablando de su «necesidad» o de su «carácter estructural») y subrayando también que el carácter metafísico —o la irrefutabilidad— de la aserción de que las leyes de la Naturaleza existan, no tiene por qué impedimos discutir dicha aserción de un modo racional: esto es, de un modo crítico (véase mi *PostScript*, especialmente los apartados *6, *7, *15 y *120).

Pese a lo cual, considero —en disconformidad con Kneale— que «necesario» es una mera palabra: un marbete útil para distinguir *la universalidad de las leyes* de la universalidad «accidental». Desde luego, cualquier otro marbete valdría lo mismo, pues apenas hay relación alguna con la necesidad lógica; y estoy fundamentalmente de acuerdo con el espíritu de la paráfrasis wittgensteiniana de Hume: «No existe necesidad alguna de que ocurra una cosa por haber ocurrido otra. No hay más necesidad que la necesidad lógica»^[22]. $a \nrightarrow b$ está relacionado con la necesidad lógica de un solo modo: no se encontrará el lazo necesario entre a y b ni en a ni en b , sino en el hecho de que el condicional correspondiente, $a \rightarrow b$ (sin «N»), se sigue con *necesidad lógica* de una ley de la Naturaleza —de que es necesario, relativo a una ley de la Naturaleza^[23]—. Y puede decirse que una ley natural es necesaria a su vez por ser lógicamente deductible de una ley de un grado de universalidad aún más elevado, o de mayor «profundidad» —o explicable por ella—. (Véase mi *PostScript*, apartado *15.) Podría suponerse que la conjetura de que exista esta dependencia, lógicamente

necesaria, de enunciados verdaderos de mayor universalidad, es lo que ha sugerido inicialmente la idea de la «conexión necesaria» entre causa y efecto^[24].

17) Hasta donde puedo entender as discusiones modernas acerca de «condicionales subjuntivos» (o «condicionales contrarios a los hechos», o «condicionales contrafácticos»), me parece haber surgido principalmente de la situación problemática creada por las dificultades inherentes al inductivismo, al positivismo, al operacionismo o al fenomenismo.

El fenomenista, por ejemplo, quiere traducir los enunciados sobre objetos físicos en enunciados sobre observaciones. Por ejemplo, «hay un tiesto en el alféizar de la ventana» sería traducible por algo así como «si alguien situado en el lugar apropiado mira en la dirección apropiada, verá lo que ha aprendido a llamar tiesto». La objeción más sencilla (pero en modo alguno la más importante) que se puede oponer al segundo enunciado como traducción del primero es señalar que mientras el segundo será verdadero (de un modo vacío) cuando nadie mira el alféizar, sería absurdo decir que siempre que nadie mira a cierto alféizar tiene que haber en él un tiesto; mas el fenomenista siente la tentación de contestar que el argumento depende de la tabla veritativa del condicional (o de la (¿implicación material)), y que hemos de percatarnos de la necesidad de interpretar éste de un modo diferente: una interpretación *modal* que tenga en cuenta el hecho de que lo que queremos decir es algo así como «si alguien mira —o si alguien estuviese mirando—, verá —o vería— un tiesto»^[25].

Podrá pensarse que nuestro $a \xrightarrow{N} b$ es capaz de proporcionarnos el condicional modal deseado, y, en cierto modo, así es: en realidad, cumple este papel del mejor modo que es posible cumplirlo. No obstante lo cual, subsiste nuestra objeción primera, porque sabemos que si a es necesario esto es, si $\bar{a} \in N$ — entonces se cumple $a \xrightarrow{N} b$ para todo b : esto quiere decir que si, por la razón que sea, el sitio en que está situado (o no lo está) un tiesto es tal que es físicamente *imposible* que nadie lo mire, entonces, «si alguien mira —o si alguien estuviese mirando— a dicho sitio, verá —o vería— un tiesto» será verdadero, simplemente por no *poder* mirar nadie tal lugar; pero esto significa que la traducción modal fenomenista de «hay un tiesto en el sitio x » será verdadera en todos los sitios en que, por la razón física que sea, nadie *pueda* mirarlo (así pues, hay un tiesto —o cualquier otra cosa que queramos— en el centro del sol). Ahora bien, esto es absurdo.

Por esta razón, y por otras muchas, no creo que haya muchas posibilidades de rescatar el fenomenismo por este método.

En cuanto a la doctrina del operacionismo —que exige que puedan definirse los términos científicos, tales como longitud o solubilidad, a base de un procedimiento experimental apropiado—, puede hacerse ver muy fácilmente que todas las llamadas definiciones operativas adolecerán de circularidad; lo cual haré patente brevemente en el caso de «soluble»^[26].

En los experimentos mediante los cuales contrastamos si una substancia, por ejemplo el azúcar, es *soluble en agua*, se llevan a cabo contrastaciones tales como la recuperación del azúcar disuelto a partir de la disolución (digamos, evaporando el agua: cf. el punto anterior 3). Es evidente que es necesario identificar la substancia que se ha recuperado, es decir, averiguar si posee las mismas propiedades que el azúcar, entre las cuales una de ellas es la *solubilidad* en agua. Así, pues, para definir «[309] es soluble en agua» por medio de una contrastación operativa típica tendríamos que decir, por lo menos, algo análogo a lo siguiente:

«x es *soluble en agua* si y sólo si, a) cuando se introduce x en agua (necesariamente), desaparece, y b) cuando, una vez que se ha evaporado el agua se recupera (necesariamente) una substancia que, a su vez, es *soluble en agua*».

La razón fundamental de la circularidad de este tipo de definición es muy sencilla: los experimentos no son nunca concluyentes; y han de ser contrastables, a su vez, por medio de experimentos ulteriores.

Al parecer, los operacionistas han creído que, una vez resuelto el problema de los condicionales subjuntivos (de suerte que pudiera evitarse el satisfacerse en vacío el condicional definidor), no se encontrarían con ningún otro obstáculo que estorbase la definición operacional de términos de disposiciones; y todo indica que el gran interés manifestado en el llamado problema de los condicionales subjuntivos (o contrafácticos) se ha debido, principalmente, a dicha creencia. Pero me parece haber mostrado que incluso en caso de haber resuelto el problema de analizar lógicamente los condicionales subjuntivos (o «nómicos»), no podemos abrigar la esperanza de definir operativamente los términos de disposiciones (o términos universales): pues éstos trascienden la experiencia, según he explicado en el presente apéndice en los puntos 1 y 2, y en el apartado 25 del libro.

APÉNDICE *XI.

Sobre el uso y abuso de experimentos imaginarios, especialmente en la teoría cuántica

Las críticas que presento en la parte final de este apéndice son de carácter lógico. No trato de refutar ciertos argumentos, algunos de los cuales —según tengo entendido— quizá hace bastante tiempo que han sido dados de lado por sus creadores, sino que intento más bien poner de manifiesto que ciertos *métodos de argumentar* son inadmisibles: métodos que se han empleado durante muchos años en las discusiones acerca de la interpretación de la teoría cuántica, sin que nadie los haya puesto en tela de juicio. Lo que aquí crítico es, fundamentalmente, el *empleo apologético* de experimentos imaginarios, y no ninguna teoría en concreto en cuya defensa se hayan esgrimido tales argumentos^[1]. Y menos aún quiero dar lugar a la impresión de que dudo de la utilidad de los experimentos imaginarios.

1) Uno de los experimentos imaginarios más importantes de la historia de la filosofía natural, y uno de los argumentos más sencillos y más ingeniosos de la historia del pensamiento racional acerca de nuestro universo, están contenidos en la crítica de Galileo de la teoría del movimiento aristotélico^[2]. Allí se desaprueba la suposición aristotélica de que la velocidad natural de un cuerpo más pesado sea mayor que la de un cuerpo más ligero. «Si tuviésemos dos móviles —argumenta el portavoz de Galileo— de velocidades naturales diferentes, sería de esperar que, uniendo el más tardo con el más veloz, éste sería en parte retardado por el más tardo, y el más tardo en parte acelerado por el más veloz»; así pues, «si esto es así, y es también verdad que una piedra grande se mueve, supongamos, con ocho grados de velocidad, y una menor con cuatro, al unir las dos, el sistema compuesto tendrá que moverse con velocidad menor que ocho grados; sin embargo, las dos piedras unidas hacen una piedra mayor que la primera, que se movía con ocho grados de velocidad; *sin embargo, este compuesto (que es mayor que la primera piedra sola) se moverá más lentamente que la primera piedra sola, que es menor*. lo que está en contra de tu suposición»^[3]. Y como se había partido para el razonamiento de dicha suposición de Aristóteles, ésta queda ahora refutada, pues se pone de manifiesto que es absurda.

Encuentro en el experimento imaginario de Galileo un modelo perfecto del empleo mejor de los experimentos imaginarios: se trata del *empleo crítico*. No quiero sugerir, sin embargo, que no haya ningún otro modo de utilizarlos: su uso heurístico, en especial, es muy valioso; pero también existen otros usos menos valiosos.

Un ejemplo antiguo de lo que yo llamo empleo heurístico de experimentos imaginarios es el que constituye la base heurística del atomismo. Imaginamos que tomamos un trozo de oro, o de otra substancia, y que lo partimos en trozos cada vez más pequeños «hasta que llegamos a partes tan pequeñas que no pueden subdividirse más»: se trata de un experimento mental que se emplea para explicar los «átomos indivisibles». Los experimentos imaginarios heurísticos han adquirido especial importancia en la termodinámica (ciclo de Carnot), y últimamente se han puesto algo de moda debido a su empleo en las teorías de la relatividad y de los cuantos. Uno de los mejores ejemplos de este tipo es el experimento de Einstein de la elevación acelerada: nos da una imagen de la equivalencia local de la aceleración y la gravedad, y sugiere que los rayos de luz puedan avanzar en un campo gravitatorio a lo largo de trayectorias curvilíneas. Este empleo tiene importancia y es legítimo.

El propósito principal de esta nota es poner en guardia frente a lo que podría llamarse *empleo apologético* de los experimentos imaginarios: el cual proviene, según creo, de las discusiones sobre el comportamiento de metros y de relojes desde el punto de vista de la relatividad especial. Estos experimentos se utilizaron primeramente a modo de ejemplo o con fines de exponer algo claramente, lo cual es perfectamente legítimo; pero más tarde —y también en los debates sobre la teoría cuántica— se han empleado a veces como argumentos, lo mismo con talante crítico como apologético (el microscopio imaginario de Heisenberg —a través del cual podrían observarse electrones— ha desempeñado un importante papel en este proceso: véanse, más adelante, los puntos 9 y 10).

Ahora bien; no cabe duda de que el empleo de experimentos imaginarios en la argumentación crítica es legítimo: pues equivale al intento de poner de manifiesto que el autor de una teoría ha pasado por alto ciertas posibilidades; y es claro que también ha de ser legítimo enfrentarse con tales objeciones críticas mostrando, por ejemplo, que el experimento imaginario propuesto es imposible en principio, y que —al menos en el caso de que se trata— no se había dejado de tener en cuenta ninguna posibilidad^[4]. Generalmente, puede permitirse un experimento imaginario ideado con espíritu crítico (es decir, con objeto de criticar una teoría haciendo ver que no se habían tomado en consideración ciertas posibilidades), pero ha de guardarse un cuidado extremo al replicarle: cuando para defender dicha teoría se reconstruye el experimento controvertido, tiene una importancia especial *no introducir idealizaciones algunas* ni otras suposiciones especiales, a menos que sean favorables a un contradictor, o a menos que ningún objetante que utilice el experimento imaginario en cuestión tenga que aceptarlas.

De un modo más general, considero que el empleo de experimentos imaginarios para fines de argumentación es legítimo solamente si se enuncian con claridad las tesis del que se opone a nuestros argumentos, y si se observa estrictamente la regla de que *las idealizaciones que se hagan han de ser concesiones a nuestro oponente, o al menos aceptables por él*. Por ejemplo, en el caso del ciclo de Carnot todas las

idealizaciones introducidas aumentan el rendimiento de la máquina, de modo que el objetante a la teoría —quien afirma que una máquina térmica puede producir trabajo mecánico sin hacer pasar calor de una temperatura más elevada a otra más baja— ha de reconocer que se trata de concesiones. Es evidente que siempre que se infringe esta regla no han de permitirse idealizaciones con fines de argumentación crítica.

3) Puede aplicarse la regla mencionada, por ejemplo, al debate iniciado con el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (experimento que Einstein vuelve a enunciar de un modo sucinto en una carta que reproducimos aquí en el apéndice *XII; y debate sobre el que hago comentarios ulteriores en mi *PostScript*, apartado *109). En su argumentación crítica, Einstein, Podolski y Rosen tratan de emplear idealizaciones aceptables por Bohr —y, en su réplica, este físico no cuestiona la validez de las mismas—: introducen (cf. el apartado *109 citado y el apéndice *XII) dos partículas, A y B, cuya interacción es tal que gracias a medir la posición (o el momento) de B, la teoría nos permite calcular la posición (o el momento) de A, que, mientras tanto, se ha alejado mucho y no puede sufrir perturbaciones procedentes de la medición efectuada sobre B. Así pues, el momento (o la posición) de A no puede hacerse difuso —o «borroso», por emplear un término de Schrödinger—, como quería Heisenberg^[5]. En su contestación, Bohr parte de la idea de que sólo puede medirse una posición por medio de «algún aparato *fijado rígidamente al soporte que define el marco espacial de referencia*», mientras que habría que medir el momento con una «diafragma» móvil cuyo «momento se mida tanto antes como después del paso de la partícula»^[6]; y esgrime el argumento de que al elegir uno de estos dos sistemas de referencia «nos separamos de cualquier... posibilidad» de emplear el otro en el sistema físico que estamos investigando. Si le entiendo correctamente, Bohr sugiere que aunque no se interfiere con A, sus coordenadas pueden quedar borrosas debido a haberse hecho borroso el *marco de referencia*.

4) La respuesta de Bohr me parece inaceptable por tres razones distintas, por lo menos.

En primer lugar, la razón que se había dado antes del experimento imaginario propuesto por Einstein, Podolski y Rosen para que se hiciera borrosa la posición —o el momento— de un sistema, era que, al medir esta magnitud, habíamos interferido con el sistema. En mi opinión, Bohr abandona subrepticamente este argumento y lo reemplaza por otro al decir (con mayor o menor claridad) que la razón de tal cosa es que interferimos con nuestro marco de referencia —o con el sistema de coordenadas— en lugar de hacerlo con el sistema físico. Se trata de una modificación demasiado grande para pasar inadvertida: debería haberse reconocido explícitamente que el experimento imaginario había refutado la posición antes adoptada, y también por qué con tal cosa no se destruye el principio en que aquélla se fundaba.

A este respecto no hemos de olvidar qué es lo que se pretendía hacer ver con el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen: únicamente se intentaba

refutar ciertas interpretaciones de las fórmulas de *indeterminación*, y en modo alguno se pretendía refutar las fórmulas mismas. En cierto sentido —si bien de un modo no explícito—, la contestación de Bohr reconocía que el experimento imaginario había logrado su propósito, ya que este físico trataba meramente de defender las relaciones de indeterminación como tales, y abandonaba la tesis de que la medición interfiriera con el sistema A, al cual se había supuesto que hacía borroso. Aún más: el argumento de Einstein, Podolski y Rosen puede llevarse un poco más adelante si suponemos que (accidentalmente) medimos la posición de A en el mismo instante en que medimos el momento de B: obtenemos entonces, para dicho instante, las posiciones y los momentos tanto de A como de B (hemos de admitir, desde luego, que el momento de A y la posición de B habrán quedado alterados o borrosos en virtud de tales mediciones); y esto basta para demostrar lo que Einstein, Podolski y Rosen pretendían: que es incorrecto interpretar las fórmulas de indeterminación como si afirmaran que el sistema no puede tener a la vez una posición y un momento netos —aun cuando tengamos que admitir que no podemos *predecir* ambos simultáneamente (para una interpretación que tiene en cuenta todo esto, véase mi *PostScript*).

En segundo término, el argumento que da Bohr de que «nos aislamos» del otro marco de referencia parece ser *ad hoc*: pues, evidentemente, es posible medir el momento espectroscópicamente (ya de un modo directo, ya utilizando el efecto Doppler), y el espectroscopio estará unido rígidamente al mismo marco que el primer «aparato» (el hecho de que el espectroscopio absorba la partícula B carece de importancia para la argumentación acerca de la suerte que ha de sufrir A). Así pues, no podemos aceptar que un dispositivo con un marco de referencia móvil constituya una parte esencial del experimento.

En cuanto a lo tercero, Bohr no explica cómo habría que medir el momento de B valiéndose de su diafragma móvil; en un trabajo posterior describe un método de hacerlo, pero me vuelve a parecer inaceptable tal método^[7]: pues consiste en medir (dos veces) la posición de un «diafragma provisto de una ranura ... colgado por medio de resortes muy suaves de una horquilla rígida»^[8]; pero puesto que la medición del momento con un dispositivo de esta clase depende de mediciones de posición, no vale para apoyar los argumentos de Bohr frente a Einstein, Podolski y Rosen; ni sirve tampoco para nada, ya que, de esta forma, no podemos obtener el momento «con precisión tanto antes como después del paso» de B^[9]: la primera de las mediciones de momento interferirá con el momento del diafragma (ya que utiliza una medición de posición), y, por tanto, será solamente retrospectiva, y no tendrá ninguna utilidad para calcular el momento del diafragma en el instante inmediatamente anterior a la interacción con B.

Por consiguiente, no parece que Bohr se haya adherido en su contestación al principio de hacer solamente las idealizaciones o suposiciones especiales que favorezcan a su contradictor (independientemente de que dista mucho de ser claro qué es lo que trataba de impugnar).

5) Esto hace patente que, en relación con experimentos imaginarios de este tipo, existe un grave peligro de llevar el análisis justamente hasta el punto en que es útil para nuestros propios propósitos, y nunca más allá; peligro que sólo podría evitarse si nos adhiriéramos estrictamente a los principios arriba mentados.

Hay tres casos parecidos a los que quiero referirme también, ya que los encuentro muy instructivos.

6) Con objeto de hacer frente a un experimento imaginario crítico de Einstein, basado en su famosa fórmula $E = mc^2$, Bohr ha recurrido a argumentos tomados de la teoría gravitatoria einsteiniana (esto es, a la relatividad general)^[10]; pero es posible deducir $E = mc^2$ de la relatividad especial, e incluso de razonamientos no relativistas; y, en todo caso, al suponer la fórmula antedicha no asumimos —desde luego— la validez de la teoría de Einstein de la gravitación. Por tanto, si, como sugiere Bohr, hemos de suponer ciertas fórmulas características de esta última teoría para rescatar la compatibilidad de la teoría cuántica (en presencia de $E = mc^2$), ello equivale a la extraña aserción de que la teoría de los cuantos contradice a la teoría gravitatoria de Newton, y, además, a la aserción aún más extraña de que la validez de la teoría einsteiniana de la gravitación (o al menos, las fórmulas características que se emplean, que son parte de la teoría del campo gravitatorio) pueden deducirse de la teoría cuántica. No creo que este resultado agrade mucho ni siquiera a los que estén dispuestos a aceptarlo.

Una vez más tenemos un experimento imaginario que hace suposiciones extravagantes con propósito apologético.

7) La réplica de David Bohm al experimento de Einstein, Podolski y Rosen me parece también sumamente insatisfactoria^[11]. Cree que tiene que mostrar cómo la partícula einsteiniana A, que se ha apartado mucho de B y del aparato de medida, se hace, sin embargo, borrosa en su posición (o en su momento) cuando se mide el momento (o la posición) de B: y con este fin trata de hacer ver que A, pese a haberse alejado, sigue sufriendo una interferencia de un modo imposible de predecir. Embarcado en esta empresa, pretende poner de manifiesto que su propia teoría está de acuerdo con la interpretación de Heisenberg de las relaciones de indeterminación. Pero no lo logra: lo cual queda patente si consideramos que las ideas de Einstein, Podolski y Rosen nos permiten, mediante una leve ampliación de su experimento, determinar simultáneamente las posiciones y los momentos tanto de A como de B —si bien el resultado de esta determinación sólo tendrá significación predictiva para la posición de una de las partículas y el momento de la otra. Pues, según hemos explicado en el punto anterior 4), podemos medir la posición de B, y alguien situado a gran distancia puede medir el momento de A en el mismo instante de un modo accidental, o, en todo caso, antes de que haya posibilidad de que ningún efecto de hacer borroso (procedente de nuestra medición de B) pueda alcanzar A. Pero esto es todo lo que se necesita para mostrar que la tentativa de Bohm de salvar la idea de Heisenberg sobre la interferencia que producimos en A está fuera de lugar.

La contestación de Bohm a esta objeción está implícita en su aserto de que el efecto de hacer borroso avanza con una velocidad superior a la de la luz, o incluso instantáneamente (cf. la velocidad superior a la de la luz propuesta por Heisenberg, que comentamos en el apartado 76), suposición que ha de apoyarse en otra más: la de que este efecto no podrá emplearse para transmitir señales. Pero, ¿qué es lo que ocurre si ambas mediciones se llevan a cabo simultáneamente?; ¿comienza acaso a bailar a la vista de uno la partícula que suponemos se observa a través del microscopio de Heisenberg?; y si lo hace, ¿no se trata de una señal? (Este efecto de hacer borroso, peculiar de Bohm, no forma parte de su formalismo, sino de su interpretación, lo mismo que ocurre con la «reducción del paquete de ondas».)

8) La respuesta de Bohm a otro experimento imaginario crítico propuesto por Einstein (con el que resucitaba las críticas de Pauli a la teoría de la onda piloto de De Broglie)^[12], es otro experimento parecido.

Einstein propone que consideremos una «partícula» macroscópica (puede ser una cosa bastante grande, por ejemplo, una bola de billar) que se mueve en ambos sentidos con cierta velocidad constante entre dos paredes paralelas, en las que es reflejada elásticamente; hace ver que este sistema puede representarse en la teoría de Schrödinger por una onda estacionaria, y, además, que la teoría de la onda piloto de De Broglie —o la llamada «interpretación causal de la teoría cuántica» de Bohm— conduce al resultado paradójico (señalado por primera vez por Pauli) de que la velocidad de la partícula (o de la bola de billar) se hace nula: dicho de otro modo, nuestra suposición de partida de que la partícula se mueva con una velocidad arbitrariamente elegida conduce, en esta teoría y cualquiera que sea la velocidad que hayamos elegido, a la conclusión de que la velocidad es cero y de que aquella no se mueve.

Bohm acepta esta conclusión, y contesta del modo siguiente: «El ejemplo considerado por Einstein —escribe— es el de una partícula que *se mueve libremente* entre dos paredes perfectamente lisas y reflectoras»^[13] (no necesitamos entrar en más detalles sobre todo el dispositivo); «ahora bien, en la interpretación causal de la teoría cuántica —esto es, en la interpretación de Bohm— ... la partícula está *en reposo*», sigue escribiendo; y continúa diciendo que si queremos *observar* la partícula, hemos de «disparar» un proceso que hará que la partícula se mueva^[14]. Pero este razonamiento acerca de la observación, pese a sus méritos, no nos interesa ya; lo que nos interesa es que la interpretación de Bohm paraliza la partícula en libre movimiento: su argumentación equivale a afirmar que no puede moverse entre las dos paredes mientras no se la observe, pues la suposición de que *se mueva* lleva a Bohm a concluir que está *en reposo* hasta que una observación la dispare. Bohm se percata de dicho efecto paralizador, pero simplemente no lo estudia; en lugar de tal cosa, pasa a afirmar que aunque la partícula no se mueve, nuestras observaciones nos la mostrarán moviéndose (que no es la cuestión que se debatía); y, sobre ello, a construir un experimento imaginario completamente nuevo en el que se describe

cómo nuestra observación —la señal de radar o el fotón empleado para observar la velocidad de la partícula— podría disparar el movimiento deseado. Pero, en primer lugar, éste no era el problema, repetimos; y, en segundo término, Bohm no consigue explicar cómo el fotón que dispara la *partícula* podría revelarnos ésta con toda su velocidad propia, y no en un estado de aceleración hasta alcanzarla: pues tal cosa parece exigir que la partícula (que puede ser tan rápida y pesada como queramos) adquiera toda su velocidad y nos revele tenerla durante el tiempo extremadamente corto de su interacción con el fotón que la dispara; y todo ello son suposiciones *ad hoc* que pocos de sus contradictores aceptarían.

Pero podemos desarrollar el experimento imaginario de Einstein manejando dos partículas (o dos bolas de billar), una de las cuales se mueva en uno y otro sentido entre la pared izquierda y el centro de la caja, mientras que la otra se mueva entre la pared derecha y el centro; y que en éste ambas partículas choquen elásticamente entre sí. Este ejemplo nos conduce de nuevo a las ondas estacionarias, y, por tanto, a la desaparición de la velocidad, al mismo tiempo que las críticas de Pauli-Einstein permanecen inalteradas. Pero el efecto de disparo de Bohm se hace aún más precario; pues supongamos que observamos la partícula izquierda lanzando sobre ella un fotón de disparo desde la izquierda: según Bohm, así se romperá el equilibrio de fuerzas que mantenía la partícula en reposo, y ésta comenzará a moverse (es de presumir que de izquierda a derecha); pero aunque hemos disparado solamente la partícula izquierda, la derecha tendrá que comenzar simultáneamente, y en la dirección opuesta. Es pedir demasiado a un físico pretender que asienta a la posibilidad de todos estos procesos —todos ellos asumidos *ad hoc*, con objeto de evitar las consecuencias del argumento de Pauli y de Einstein.

Este último hubiera respondido a Bohm del modo siguiente, según pienso.

En el caso considerado, nuestro sistema físico era una bola grande, macroscópica; nadie ha presentado razón alguna por la que fuese inaplicable en este caso la doctrina clásica, normal, de la medición; y, después de todo, se trata de una doctrina cuyo acuerdo con la experiencia es tan bueno como pueda desearse.

Pero, dejando a un lado la medición, ¿se asevera en serio que simplemente *no puede* existir una bola oscilante (o dos bolas oscilantes según la disposición simétrica descrita) mientras no se la observe? O —lo cual equivale a lo mismo— ¿se afirma seriamente que la suposición de que se mueva —u oscile— mientras no se la observa ha de llevar a la conclusión de que no lo hace? ¿Y qué ocurre si, una vez que nuestra observación ha puesto en movimiento la bola, el sistema deja de sufrir interferencias asimétricas, de suerte que el sistema se convierta de nuevo en estacionario? ¿Se detiene la partícula súbitamente, como había empezado a moverse? ¿Y se transforma su energía en energía de campo?; ¿o es irreversible el proceso?

Incluso si suponemos que pueda responderse de algún modo a todas estas preguntas, en mi opinión bastan para darnos un ejemplo visible de la significación de las críticas de Pauli y de Einstein, y del empleo crítico de experimentos imaginarios,

especialmente del experimento de Einstein, Podolski y Rosen. Y, a mi entender, nos ofrecen, asimismo, un buen ejemplo del peligro que entraña la utilización apologetica de los experimentos imaginarios.

9) Hasta ahora hemos tratado del problema de las *parejas de partículas*, introducidas en el debate por Einstein, Podolski y Rosen. Ahora me voy a ocupar de algunos de los experimentos imaginarios, más antiguos, que manejaban corpúsculos aislados, como el famoso microscopio imaginario de Heisenberg a través del cual podían «observarse» electrones y «medir», ya sus posiciones, ya sus momentos. Pocos experimentos imaginarios han ejercido una influencia mayor que éste en el pensamiento acerca de la física.

Valiéndose de su experimento imaginario, Heisenberg trataba de estatuir diversos puntos, de los cuales mencionaré tres: a) la interpretación de las fórmulas de indeterminación de Heisenberg en el sentido de que enunciasen la existencia de *barreras insuperables frente a la precisión de nuestras mediciones*; b) *la perturbación del objeto medido por el proceso de medición, ya fuese de la posición o del momento*, y c) *la imposibilidad de someter a contraste la «trayectoria» espacio-temporal de la partícula*. Creo que los argumentos de Heisenberg que tienden a estatuir estos tres puntos carecen, sin duda, de validez, cualesquiera que sean los méritos que tengan éstos en sí mismos. Y ello por la razón de que el estudio de Heisenberg *no logra demostrar que las mediciones de posición y de momento sean simétricas*: esto es, simétricas con respecto a la perturbación que sufre el objeto medido en virtud del proceso de medición. Pues Heisenberg, con ayuda de su experimento, sí muestra que para medir la *posición* del electrón hemos de emplear luz de frecuencia muy elevada, o sea, fotones de gran energía: lo cual quiere decir que impartimos al electrón un *momento* de valor desconocido y, por tanto, lo perturbamos, ya que, hacemos algo así como darle un fuerte golpe. Pero no muestra que la situación sea análoga si queremos medir el momento del electrón, en lugar de su posición; pues, en este caso, dice Heisenberg, hemos de observarlo con una luz de frecuencia baja, tan baja que podamos suponer que *no perturbamos el momento del electrón mediante nuestra observación*; la observación resultante, aunque revelará el momento, no logrará revelar la posición del electrón, que permanecerá, por ello, indeterminada.

Consideremos ahora este último razonamiento. En él no se afirma que hayamos *perturbado* (o hecho «borrosa») la posición del electrón, pues lo único que asevera Heisenberg es que *no hemos conseguido descubrirla*. En realidad, su argumentación implica que no hemos perturbado el sistema en absoluto (o tan poco que podemos despreciar la perturbación causada): hemos empleado fotones de un nivel de energía tan bajo que simplemente no teníamos energía suficiente para perturbar al electrón. Así pues, los dos casos —el de medición de posición y el de medición de momento— están muy lejos de ser análogos © simétricos, según el razonamiento de Heisenberg; hecho que, sin embargo, queda velado por el parloteo usual (positivista, operacionista

o instrumentalista) acerca de los «resultados de medida», cuya incertidumbre admitimos todos que es simétrica con respecto a la posición y el momento; pero en incontables estudios del experimento —comenzando por el del propio Heisenberg— se asume siempre que esta argumentación estatuye la simetría de las perturbaciones (en cuanto al formalismo de la teoría, la simetría entre la posición y el momento es completa, desde luego, pero esto no quiere decir que el experimento imaginario de Heisenberg dé cuenta de dicha simetría). Por tanto, se asume —de un modo enteramente erróneo— que perturbamos la posición del electrón si medimos su momento con el microscopio de Heisenberg, y este efecto de hacer «borroso» ha sido estatuido por el estudio de Heisenberg sobre su experimento imaginario.

Mi propio experimento imaginario del apartado 77 estaba basado en gran medida en dicha simetría del experimento heisenberguiano (cf. la nota *1 del apéndice VI); pero aquél no es válido justamente porque la asimetría invalida toda la discusión que hace Heisenberg del experimento: sólo pueden servir como ejemplos para las fórmulas de Heisenberg las mediciones que se obtengan mediante una selección física (como yo la llamo), y ésta ha de satisfacer siempre (como he señalado de un modo enteramente correcto en el libro) las «relaciones de dispersión» (la selección física sí perturba el sistema).

Si las «mediciones» de Heisenberg fuesen posibles, podríamos comprobar incluso el momento de un electrón entre dos mediciones de posición sin perturbarlo, lo cual nos permitiría también —frente a lo que hemos dicho más arriba, en el punto c)— comprobar (parte de) su «trayectoria» espacio-temporal que es calculable a partir de dichas dos mediciones de posición.

Sin duda, la insuficiencia del razonamiento de Heisenberg ha permanecido inadvertida durante tanto tiempo debido al hecho de que las fórmulas de indeterminación se siguen claramente del formalismo de la teoría cuántica (la ecuación de onda), y de que en este formalismo se halla implícita la simetría entre la posición (q) y el momento (p). Esto puede explicar por qué muchos físicos han dejado de escudriñar con suficiente cuidado el experimento de Heisenberg: no lo tomaban en serio, supongo, sino meramente como un ejemplo ilustrativo de una fórmula deductible. Yo sostengo que es un ejemplo malo —justamente porque no da cuenta de la simetría entre posición y momento—: y, por ello, es enteramente inadecuado como base para interpretar tales fórmulas (no digamos la totalidad de la teoría cuántica).

10) Estoy convencido de que la inmensa influencia del experimento imaginario de Heisenberg se debe a que este físico logró comunicar a través de él una nueva imagen metafísica del mundo físico, a la vez que pretendía no tener nada que ver con la metafísica (con lo cual rendía culto a una curiosa obsesión ambivalente de nuestra época postracionalista: su preocupación por matar al Padre —esto es, la Metafísica— y por mantenerle a la vez inatacable —bajo otra forma distinta— y más allá de toda crítica. En el caso de algunos físicos cuánticos, parece, a veces, como si el padre

fuese Einstein). La imagen metafísica del mundo, transmitida de cierta manera a través de la discusión de Heisenberg de su experimento imaginario (si bien nunca realmente implicada en ella), es la siguiente. La *cosa en sí* es incognoscible: podemos conocer solamente sus apariencias, que han de entenderse (como señaló Kant) que resultan de la cosa en sí y de nuestro aparato perceptivo; de modo que las apariencias provienen de una especie de interacción entre las cosas en sí mismas y nosotros. Y esto es por lo que una cosa puede aparecernos de formas distintas, según las diferentes maneras que tenemos de percibirla: es decir, de observarla y de entrar en interacción con ella. Intentamos algo así como atrapar la cosa en sí misma, pero nunca lo logramos: sólo encontramos apariencias en nuestros armadijos; podemos montar, bien un cebo de partículas clásico o un cebo de ondas clásico («clásico» porque podemos construirlos y montarlos como el clásico cebo para ratones): y en el proceso en que la cosa dispara el cebo —y, por tanto, entra en interacción con él— se la induce a asumir la apariencia de una partícula o de una onda. Todavía más: al montar el armadijo no solamente hemos de proporcionar un estímulo a la cosa con objeto de inducirla a asumir una de sus dos apariencias clásicas, sino que hemos de poner en él el cebo de la energía —la que se necesita para que se haga real o se materialice la incognoscible cosa en sí—; y de este modo se salvan las leyes de conservación.

Ésta es la imagen metafísica transmitida por Heisenberg y tal vez también por Bohr.

Ahora bien; estoy muy lejos de poner objeciones a una metafísica de este tipo (aun cuando no me atrae demasiado esta mezcla especial de positivismo y de trascendentalismo); ni tampoco lo hago a que se nos comunique mediante metáforas. A lo que sí objeto es a la diseminación casi inconsciente de esta imagen metafísica, frecuentemente combinada con pretensiones de ser un antimetafísico: pues considero que no nos debe estar permitido sumergirnos en lo inadvertido, y, por tanto, en lo inalcanzable por la crítica.

A mi entender, es una cosa interesante que gran parte de la obra de David Bohm parezca estar inspirada por la misma metafísica; podría describírsela incluso como una valiente tentativa de construir una teoría física que hiciera clara y explícita la metafísica mencionada; lo cual es admirable. Pero me pregunto si esta metafísica, en concreto, es suficientemente buena, y si merece realmente la pena, teniendo en cuenta que no es posible apoyarla (como hemos visto) en el experimento imaginario de Heisenberg, que es la fuente intuitiva de todo lo demás.

A mi parecer, existe una relación obvia entre el «principio de complementariedad» de Bohr y esta tesis metafísica de una realidad incognoscible —tesis que sugiere la «renuncia» (para «emplear un término favorito de Bohr) de nuestras aspiraciones al conocimiento, y la restricción de nuestros estudios físicos a apariencias y a sus relaciones mutuas—. Pero no he de discutir semejante relación aquí: en vez de ello, me limitaré a proceder a la discusión de ciertos argumentos en favor de la

complementaridad que se han basado en otros experimentos imaginarios.

11) En relación con su «principio de complementaridad» (de que trato más a fondo en mi PostScript; cf. también mi trabajo «Three Views Concerning Human Knowledge», *Contemporary British Philosophy*, III, ed. por H. D. Lewis, 1956), Bohr ha analizado un gran número de sutiles experimentos imaginarios con un temple parecidamente apologético. Como las formulaciones de Bohr del principio de complementaridad son vagas y difíciles de debatir, recurriré a un libro muy conocido y excelente en muchos respectos, *Anschauliche Quantentheorie*, de P. Jordán (libro en que, incidentalmente, se sometía a discusión brevemente mi *Logik der Forschung*) [15].

Jordan formula (sólo parte de) el contenido del principio de complementaridad de tal modo, que pone a éste en una relación muy estrecha con el problema del *dualismo entre partículas y ondas*. Lo expresa de este modo: «Cualquier experimento que hiciese aparecer *simultáneamente* las propiedades ondulatorias y corpusculares de la luz, no solamente estaría en contradicción con las teorías clásicas (que se han ido acostumbrando a contradicciones de esta índole), sino que, a más y por encima de ello, sería absurdo en sentido lógico y matemático» [16].

Jordan ilustra este principio con un ejemplo: el famoso experimento de la ranura doble (véase el apéndice —antiguo— v). «Supongamos que tenemos una fuente luminosa de la cual emana una luz monocromática que cae sobre una pantalla negra, provista de dos ranuras [paralelas] muy próximas. Supongamos ahora, por una parte, que las ranuras y sus distancias son lo suficientemente pequeñas (comparadas con la longitud de onda de la luz) como para que se obtengan franjas de interferencia sobre una placa fotográfica que registre la luz que pasa por las dos ranuras; y, por otra parte, que mediante cierto dispositivo experimental fuese posible averiguar, para un fotón aislado, por cuál de las dos ranuras ha pasado» [17].

Jordán afirma «que estas dos suposiciones contienen una contradicción» [18].

No voy a impugnar esto, aun cuando tal contradicción no sería un contrasentido lógico o matemático (como él sugiere en una de las frases antes citadas), sino que, más bien, las dos suposiciones juntas contradirían el formalismo de la teoría cuántica. Quiero objetar a una cuestión diferente: Jordán emplea este experimento como ejemplo ilustrativo de su formulación del contenido del principio de complementaridad; mas cabe poner de manifiesto que el mismo experimento de que se vale para dicho fin lo refuta.

En efecto, consideremos la descripción de Jordán del experimento de la ranura doble, si bien omitiendo primero su segunda suposición (la precedida por las palabras «por otra parte»); conseguimos unas franjas de interferencia en la placa fotográfica, con lo cual tenemos un experimento que «hace aparecer las propiedades ondulatorias de la luz». Supongamos ahora que la intensidad de la luz es lo suficientemente débil como para obtener en la placa impactos de fotones distinguibles entre sí; dicho de otra forma: tan débil que las franjas al ser analizadas revelen deberse a la distribución

de densidad del impacto de un fotón aislado: hemos obtenido «un experimento» que «hace aparecer simultáneamente las propiedades ondulatorias y corpusculares de la luz» (por lo menos, algunas de ellas). Es decir, este experimento logra precisamente lo que, según Jordán, tiene que ser «absurdo en sentido lógico y matemático».

Es indudable que si, además, fuésemos capaces de averiguar a través de cuál de las ranuras ha pasado un fotón concreto, seríamos capaces de determinar su trayectoria; y podríamos decir entonces que este experimento (que es de presumir sea imposible) habría hecho aparecer las propiedades corpusculares del fotón de un modo aún más destacado. Reconozco todo esto; pero no hace al caso. Pues lo que afirmaba el principio de Jordán no era que algunos experimentos que a primera vista parecen posibles resultan luego imposibles —lo cual es baladí—, sino que ningún experimento en absoluto puede «hacer aparecer simultáneamente las propiedades ondulatorias y las corpusculares de la luz». Aserción que, como hemos visto, es simplemente falsa: está refutada por casi todos los experimentos típicos de la mecánica cuántica.

Pero, ¿qué quería afirmar Jordán? ¿Tal vez que ningún experimento haría aparecer todas las propiedades ondulatorias y todas las propiedades corpusculares de la luz? Es evidente que su intención no pudo haber sido ésa, ya que incluso un experimento que hiciese aparecer simultáneamente todas las propiedades ondulatorias es algo imposible, y ello aun cuando renunciemos al requisito de que haga aparecer alguna propiedad corpuscular (y lo mismo ocurre al revés).

Lo que incomoda tanto en este razonamiento de Jordán es su arbitrariedad. Teniendo en cuenta lo que hemos dicho, es algo obvio que tiene que haber ciertas propiedades ondulatorias y otras corpusculares que ningún experimento pueda combinar. Jordán generaliza este hecho primeramente, y lo formula como un principio (cuya formulación por este físico, en todo caso, hemos refutado); y luego pone como ejemplo ilustrativo un experimento imaginario que él demuestra ser imposible. Pero, según hemos visto, la parte del experimento que todo el mundo admite que es posible refuta en realidad aquel principio, al menos tal como lo formula Jordán.

Pero, fijémonos un poco más en la otra mitad del experimento imaginario (la precedida por las palabras «por otra parte»). Si preparamos unos dispositivos que determinen la ranura por la que ha pasado el fotón, se nos dice, acabamos con las franjas. Bien. Pero, ¿acabamos con las propiedades ondulatorias? Supongamos el dispositivo más sencillo posible: tapamos una de las ranuras; si hacemos esto, todavía sigue habiendo muchos signos del carácter ondulatorio de la luz (incluso con una sola ranura tenemos una distribución ondulatoria de la densidad). Mas ahora nuestros oponentes admiten que las propiedades corpusculares se manifiestan con plenitud, ya que podemos trazar la trayectoria de la partícula.

12) Desde un punto de vista racional, todos estos argumentos son inadmisibles. No dudo de que exista una interesante idea intuitiva tras el principio de

complementaridad de Bohr; pero ni él ni ningún otro miembro de su escuela han sido capaces de explicarlo, ni siquiera a aquellos críticos que, como Einstein, han tratado de entenderlo durante años^[19].

Mi impresión es que muy bien pueda tratarse de la idea metafísica descrita más arriba, en el punto 10); puedo estar equivocado; pero sea lo que sea, me parece que Bohr nos debe una explicación mejor.

APÉNDICE XII

El experimento de Einstein, Podolski y Rosen

Una carta de Albert Einstein (1935)

La carta de Albert Einstein que reproduzco aquí traducida, acaba sucinta y decisivamente con mi experimento imaginario del apartado 77 del libro (y también hace referencia a una versión ligeramente distinta incluida en un trabajo no publicado) y pasa a describir con claridad y brevedad admirables el experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (que exponemos, asimismo, en el punto 3 del apéndice *XI).

Se encontrarán entre estos dos temas unas pocas observaciones acerca de las relaciones existentes en general entre teoría y experimento, y sobre la influencia de las ideas positivistas en la interpretación de la teoría cuántica.

Los dos últimos párrafos se ocupan también de un problema que trato en el libro (y en mi *Postscript*): el de las probabilidades subjetivas y de cómo sacar conclusiones estadísticas de la ignorancia. Sobre este punto sigo no estando de acuerdo con Einstein: creo que sacamos estas conclusiones probabilísticas de conjeturas sobre la equidistribución (a menudo, conjeturas muy naturales, y que, por ello, tal vez no se hacen de un modo consciente), y, por tanto, de premisas probabilísticas.

Los albaceas literarios de Einstein pedían que si se había de publicar una traducción de la carta, se publicase a la vez el texto original: ello me ha sugerido la idea de reproducir la carta de Einstein tal como aparece de su puño y letra.

Old Lyme, 11. IX. 35.

Querido Sr. Popper:

He mirado su opúsculo, y estoy de acuerdo con él en gran parte [*weitgehend*]^[x]. Solamente, no creo que sea factible un «caso super puro» que nos permitiera pronosticar con una precisión «inadmisible» la posición y el impulso (color) de un cuanto luminoso. Tengo por ineficaces en principio los medios que usted propone (una pantalla con obturador instantáneo juntamente con un equipo selectivo de filtros de vidrio), por la razón de que oreo firmemente que semejante filtro haría «borrosa» la posición, como ocurre con una red espectroscópica.

Mi argumentación es como sigue. Figúrese usted una señal luminosa breve (posición exacta), que, para poder ver cómodamente los efectos producidos por el

filtro de absorción, considero analizada de un modo puramente formal en un gran número de trenes de onda monocromáticos, W_n . El equipo de filtros de absorción eliminará todos los W_n (colores) excepto W_1 ; mas este grupo de ondas tendrá una extensión considerable (una posición borrosa), debido a ser casi monocromático: lo cual quiere decir que la acción del filtro necesariamente hace «borrosa» la posición.

De un modo general, no me agrada todo el aferrarse «positivista» a lo observable, que ahora está de moda. Me parece una cosa trivial que no se pueda pronosticar en el campo de lo atómico con una precisión arbitraria, y pienso (como usted, por lo demás) que no se puede fabricar la teoría a partir de resultados de observación, sino sólo inventarla.

No tengo aquí ejemplares del trabajo que he escrito con los señores Rosen y Podolski, pero puedo decirle sucintamente de qué se trata.

Cabe preguntarse si, desde el punto de vista de la teoría cuántica actual, el carácter estadístico de nuestros resultados experimentales es *meramente efecto de una intervención desde el exterior —incluyendo la medición—*, mientras que los sistemas como tales —descritos por una función ψ — se conducen en sí mismos de un modo determinista. Heisenberg coquetea [*liebäugelt*] con semejante interpretación, sin adoptarla de una forma consecuente. Pero puede preguntarse también: ¿no hemos de interpretar la función ψ , que en cuanto al tiempo cambia —según la ecuación de Schrödinger— de un modo determinista, como una descripción *completa* de la realidad física, y, con ello, que la intervención desde el exterior (insuficientemente conocida) sea totalmente responsable de que las prognosis tengan solamente un carácter estadístico?

Llegamos al resultado de que no puede interpretarse la función ψ como una descripción completa del estado físico de un sistema.

Consideramos un sistema compuesto, que consta de los sistemas parciales **A** y **B**, los cuales se encuentran en interacción mutua sólo durante un tiempo limitado.

Sea conocida la función ψ del sistema compuesto *antes* de la interacción (por ejemplo, un choque entre dos partículas libres); entonces la ecuación de Schrödinger nos da la función ψ del sistema compuesto *después* de aquélla.

Ahora (después de la interacción) se llevará a cabo sobre el sistema parcial A una medición (lo más acabada posible [*vollständige*]), que, sin embargo, es posible realizar de modos diversos, según las variables a conocer (con precisión) —por ejemplo, el impulso o la coordenada espacial—. La mecánica cuántica nos da entonces la función ψ para el sistema parcial **B**, que será *en cada caso distinta, según la elección hecha de la medición a ejecutar sobre A*.

Como no es razonable suponer que el estado físico de **B** dependa de cuál medición yo haya llevado a cabo sobre el sistema **A**, que está [ya] enteramente separado de aquél, esto quiere decir que al mismo estado físico **B** pertenecen dos funciones distintas. Puesto que una descripción *completa* de un estado físico tiene que

ser necesariamente una descripción *unívoca* (descontando superficialidades tales como unidades, elección de las coordenadas, etc.), no puede interpretarse la función ψ como la descripción *completa* de aquel estado.

Naturalmente, un teórico cuántico ortodoxo dirá que no existe una descripción completa, de modo que tendremos solamente la descripción estadística de un *agregado* de sistemas, y no de *un* sistema. Pero, primeramente, ha de *decirlo* (y, en segundo término, no creo que nos contentemos duraderamente con una descripción tan vaga de la Naturaleza).

Es de advertir que las prognosis (exactas) para el sistema B a que puedo llegar (de acuerdo con la libre elección de la forma de medir **A**), muy bien pueden estar entre sí como lo están las mediciones de impulso y de posición. Así pues, no se puede eludir fácilmente la concepción de que el sistema **B** tenga un impulso y una coordenada espacial determinados; pues lo que puedo predecir tras haber elegido libremente [esto es, sin interferir con ello], tiene que existir, asimismo, en la realidad.

En mi opinión, la [forma de] descripción contemporánea, que es, en principio, estadística, sólo es un estadio de transición.

He de decir de nuevo^[*] que no considero verdadera su tesis de que a partir de una teoría determinista no se puedan seguir conclusiones estadísticas. Piense solamente en la mecánica estadística clásica (teoría de los gases, teoría del movimiento browniano). Por ejemplo, un punto material se mueve con movimiento uniforme sobre una circunferencia; puedo calcular la probabilidad de encontrarle en un momento determinado en una parte determinada de la periferia. Lo esencial es únicamente que no conozco el estado inicial, o que no lo conozco con exactitud.

Le saluda amistosamente,

A. EINSTEIN

*(Facsímil reducido
de la carta de A. Einstein)*

Lieber Herr Popper!

Ihre habe Ihre Abhandlung angesehen und stimme weitgehend überein. Nur glaube ich mischt aus die Herstellbarkeit eines „intermittierenden Falles“, die es erlauben würde, die erste Impuls (Farbe) eines Lichtstromes mit „unregelmäßiger“ Genauigkeit zu registrieren. Ich halte (Poland und Hornumare - Verschlussklappe in Verbindung mit selektiv durchlässigen Glimmer) halte ich aus dem Grunde für prinzipiell unwirksam, weil ich bestimmt glaube, dass ein solches Filter „stärker absorbierend“ wirkt wie etwa ein Benzolgasfilter.

Meine Begründung ist folgende. Denken Sie an ein knapp Lichtgitter (genauer Ort). Um die Wirksamkeit des Filter-systems zu übersehen, dachte ich mir dieses rein formal in eine grosse Anzahl von quasi-monochromatischen Wellenlängen zu zerlegen. Die Absorption würde auf alle ^(in einem) Strahlen bis auf W. Diese Wellenlänge hat aber eine erhebliche Ausdehnung, weil sie quasi-monochromatisch ist (Absorptionskurve); d. h. das Filter wirkt notwendig „stärker absorbierend“.

Hier gefällt das ganze modische „gestirnte“ Kleben aus Beobachtungen überhaupt nicht. Ich

^(stärker)
 * Klarheit: Die ψ -Funktion charakterisiert ein System - Gesamtheit, nicht eine Einzelgröße. Das ist auch die Ursache, dass die meisten meisten demselben Betrachtung. Diese Auffassung macht es auch möglich, „reine“ und „gemischte“ Filter besonders zu unterscheiden.

hätte es für trivial, dass man auf statistischem
Gebiete nicht beliebig genau prognostizieren kann
und denke, dass Theorie nicht aus Beobachtungs-
resultaten fabriziert sondern nur aufgefunden
werden kann (wie Sie übrigens auch). -

Ich habe keine Exemplare meiner mit dem
Herrn Rosen und Polkei zusammen verfassten
Arbeit hier, kann Ihnen aber kurz sagen, was
es sich handelt.

Über die Natur der Wahrscheinlichkeiten

Man kann sich ja fragen, ob die statistische Charakteristik
unserer experimentellen Tiefendegenerates die heutige
Quantentheorie erst durch die fremden Begriffe inhärente
Korrekturen veranlaßt wird, während die Systeme als
solche = noch eine ψ -Funktion beschreibenssich an
sich deterministisch verhalten. Hierunter ist eingeleitet
mit einer solchen Auffassung, dass sie Konsequenz
zu ziehen. Man kann auch so fragen: Ist die ψ -Funktion,
die sich nach der Schrödingergleichung zeitlich deterministisch
verändert, nicht als ^{statistische} Beschreibung der physikalischen Realität
aufzufassen, wobei lediglich der fremde Begriff ^{infolge bekannter} durch
Beobachtung dafür unantastbar ist, dass die ψ -Funktion
nur statistischen Charakter haben?

Wir kommen zu dem Ergebnis, dass die ψ -Funktion
nicht als vollständige Beschreibung des physikalischen
Zustandes eines Systems aufgefasst werden kann.

Wir betrachten ein Gesamtsystem, das aus den Teilsystemen
A und B besteht, die nur während einer bestimmten
Zeit der Wechselwirkung untereinander stehen.

Die ψ -Funktionen des Gesamtsystems vor der Messung
(z. B. Zusammenstoß ^{zwei} Teilchen) sind bekannt. Die Teilwelliger
gleichung liefert dann die ψ -Funktionen des Gesamtsystems
nach der Messung. (nach der Messung)

Es made man an Teilystem A eine (vollständige)
Messung angestrichelt, was aber in verschiedenen Weise
möglich ist, je nach der Messung, die man (genau)
macht (z. B. Impuls oder Koordinate). Die Quanten-
Mechanik liefert dann die ψ -Funktionen für die
Teilystem B, und zwar verschieden, je nach der
Wahl der Messung, die man an A angestrichelt hat.

Da es aber ungenügend ist, anzunehmen, dass
der physikalische Zustand von B davon abhängt
sei, was für eine Messung ich an dem von ihm
getrennten System A vornehme, so heißt dies, dass
zu demselben physikalischen Zustande von B
mehrere verschiedene ψ -Funktionen gehören. Da eine vollständige
Beschreibung eines physikalischen Zustandes unmöglich
eine eindeutige Beschreibung sein muss, so kann die
 ψ -funktion nicht als die vollständige Beschreibung
des Zustandes aufgefasst werden.

Natürlich wird ein orthodoxer Quantenphysiker sagen,
es gebe eben keine vollständige Beschreibung, bspw. der
statistische Beschreibung eines Systemensembles und
nicht eines Systems. Aber er muss sich dies sagen (und
weiterhin gleich ich nicht, dass er für die Dauer
mit einer so fadenscheinigen Naturbeschreibung werden
begnügen müssen).

