Mostramos primeramente que la fórmula (2) no sólo es válida para sucesiones de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$, sino también para sucesiones de segmentos adyacentes, α_n. Y después hacemos ver que estas últimas son «absolutamente libres». (No es posible invertir el orden de estos pasos, ya que, decididamente, una sucesión de segmentos imbricados, $\alpha_{(n)}$, no es «absolutamente libre»: de hecho, estas sucesiones constituyen un ejemplo típico de lo que podrían llamarse «sucesiones con secuelas[3]»).

Primer paso. Las sucesiones de segmentos adyacentes, a_n, son subsucesiones de $\alpha_{(n)}$, y pueden obtenerse a partir de éstas por medio de una selección ordinal normal. Así pues, si somos capaces de mostrar que los límites de las frecuencias de las sucesiones imbricadas, $_{\alpha(n)}\mathbf{F}'(m)$, son insensibles a la selección ordinal normal, hemos dado el primer paso (e incluso hemos ido un poco más lejos), ya que en tal caso hemos demostrado la fórmula

$$_{\alpha_n}\mathbf{F}'(m) = {}_{\alpha(n)}\mathbf{F}'(m) \qquad (4)$$

Esbozaré primero esta demostración para $n = 2$: esto es, haré ver que

$$_{\alpha_2}\mathbf{F}'(m) = {}_{\alpha(2)}\mathbf{F}'(m) \qquad (m \leq 2) \qquad (4a)$$

es verdadera; y luego será fácil generalizar esta fórmula para todo n.

A partir de una sucesión $\alpha_{(2)}$ de segmentos imbricados podemos seleccionar dos —y sólo dos— sucesiones distintas, α_2, de segmentos adyacentes: una de ellas, que denotaremos con (A), contiene los segmentos primero, tercero, quinto, …, de $\alpha_{(2)}$, esto es, las parejas de a formadas por los números 1,2; 3,4; 5,6;…; la otra —para denotar la cual utilizaremos el símbolo (B)— contiene los segmentos segundo, cuarto, sexto, …, de $\alpha_{(2)}$, o sea, las parejas de elementos de α constituidas por los números 2,3; 4,5; 6,7;…, etc. Supongamos ahora que la fórmula (4a) *no* sea válida para *una* de las *dos* sucesiones (A) o (B), de modo que el segmento (o sea, la pareja) 0,0 aparezca *demasiado frecuentemente* en la sucesión (A), por ejemplo; entonces, en la sucesión (B) tiene que aparecer una desviación complementaria, es decir, el segmento 0,0 ha de aparecer *demasiado poco frecuentemente* («demasiado frecuentemente» y «demasiado poco frecuentemente» en comparación con la fórmula binomial). Pero esto se encuentra en contradicción con la «libertad absoluta» que hemos asumido para α; pues si la pareja 0,0 aparece en (A) con mayor frecuencia que en (B), entonces dicha pareja debe aparecer —en segmentos suficientemente largos de $\alpha_{(2)}$— más frecuentemente a ciertas *distancias características* entre sí que a otras distancias mutuas: las distancias correspondientes a la frecuencia mayor serían las que prevalecerían si las parejas 0,0 perteneciesen a *una* sola de las dos sucesiones α_2, y las correspondientes a la frecuencia menor de dicha pareja serían las que dominarían si ésta perteneciese a ambas sucesiones α_2. Lo cual contradice la «libertad absoluta» de α: pues, de acuerdo con la segunda fórmula binomial, aquélla entraña que la frecuencia con que aparece una sucesión determinada de longitud *n* en cualquier sucesión de $\alpha(n)$ depende *exclusivamente* del número de unos y de ceros que aparecen en ella, y no de su *colocación* en la sucesión[*2].

De este modo se demuestra (4a); y como esta demostración puede generalizarse fácilmente a cualquier *n*, se sigue de ello la validez de (4), con lo que se completa el primer paso de la demostración.

Segundo paso. Mediante una argumentación análoga puede mostrarse que las sucesiones α_n son «absolutamente libres», como vamos a ver. Volvemos a considerar únicamente en un principio las sucesiones α_2; y pondremos de manifiesto que éstas son libres-1, para empezar. En efecto: supongamos que una de las dos sucesiones α_2 —por ejemplo, la (A)— *no* sea libre-1; entonces, en (A), a continuación de *al menos* uno de los segmentos constituidos por dos elementos (o sea, una pareja concreta de α), digamos tras del segmento 0,0, ha de aparecer otro segmento —digamos, 1,1— con mayor frecuencia de lo que aparecería si (A) fuese «absolutamente libre»; lo cual quiere decir que el segmento 1,1 tendría que aparecer con mayor frecuencia en la subsucesión seleccionada a partir de (A) de acuerdo con el segmento predecesor 0,0 de lo que nos haría esperar la fórmula binomial.

Pero este supuesto contradice a la «libertad absoluta» de la sucesión α. Pues si en (A) el segmento 1,1 sigue al 0,0 demasiado frecuentemente, como compensación debe ocurrir lo contrario en (B), ya que, de otro modo, la cuaterna 0,0,1,1 aparecería demasiado frecuentemente —en un segmento suficientemente largo de α— a ciertas *distancias características* entre sí: a saber, a las distancias que resultarían si las dobles parejas en cuestión perteneciesen a *una* y la misma sucesión α_2; y, además, a otras *distancias características* aparecería dicha cuaterna con una frecuencia demasiado baja —es decir, a las distancias que prevalecerían si perteneciesen a ambas sucesiones α_2—. Así pues, nos tropezamos exactamente con la misma situación que antes; y es posible mostrar, mediante consideraciones análogas a las anteriores, que el supuesto de una aparición preferente a ciertas distancias características es incompatible con la «libertad absoluta» que hemos supuesto para α.

Una vez más podemos generalizar esta demostración; de suerte que es posible decir de las sucesiones a que no sólo son libres-1, sino también libres—*n* para todo *n*; y, en —consecuencia, que son *azarosas*— o, aleatorias.

Así se termina nuestro esquema de los dos pasos. Por tanto, estamos ya autorizados para remplazar **F**’ por **F** en (4): lo cual quiere decir que podemos aceptar la pretensión de que la tercera fórmula binomial resuelve el problema de Bernoulli.

Hemos hecho patente también, de pasada, que las sucesiones $\alpha_{(n)}$ de segmentos imbricados son insensibles a la *selección normal ordinal* siempre que α sea «absolutamente libre».

Lo mismo ocurre con las sucesiones α_n de segmentos adyacentes, pues toda selección ordinal normal de α_n puede considerarse como una selección del mismo tipo de α_n; y, por tanto, será también aplicable a la sucesión a misma, ya que ésta es idéntica a $\alpha_{(1)}$ y a α

Hemos mostrado, pues, entre otras cosas, que de la «libertad absoluta» —que quiere decir, insensibilidad a un tipo especial de selección de vecindad— se sigue la insensibilidad a la selección ordinal normal. Puede verse fácilmente que otra consecuencia ulterior es la insensibilidad a cualquier selección «pura» de vecindad (esto es, a una selección que tenga en cuenta una caracterización constante de la vecindad, o sea, una caracterización que no varíe con el número ordinal del elemento). Y, por fin, se sigue que la «libertad absoluta» ha de entrañar insensibilidad a todas[*3] las combinaciones de estos dos tipos de selección.

61. LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS (TEOREMA DE BERNOULLI)

El teorema de Bernoulli —o (primera[1]) «ley de los grandes números»— puede deducirse de la tercera fórmula binomial mediante razonamientos puramente aritméticos, una vez hecha la asunción de que podemos llevar n al límite: $n \to \infty$. Cabe afirmarla únicamente, por tanto, de sucesiones α infinitas, ya que solamente en éstas pueden aumentar indefinidamente de longitud los segmentos—n de las sucesiones α_n; mas sólo de, las sucesiones α que sean, además, «absolutamente libres», puesto que nada más podemos llevar n al límite $n \to \infty$ si asumimos la libertad—n para todo n.

El teorema de Bernoulli nos da la solución de un problema sumamente afín al que (siguiendo a Von Mises) he denominado «problema de Bernoulli»: concretamente, al del valor de $\alpha_n\mathbf{F}(m)$. Según indiqué en el apartado 56, puede decirse que un segmento—n tiene la propiedad «m» cuando contiene precisamente m unos; y la frecuencia relativa de los unos dentro de este segmento (finito) es, naturalmente, m/n. Podemos establecer ahora la siguiente definición: un segmento—n de α tiene la propiedad «Δp» si y sólo si la frecuencia relativa de los unos discrepa del valor $\alpha\mathbf{F}(1) = p$ en una cantidad menor que δ —siendo δ una cantidad tan pequeña como queramos (pero distinta de cero)—: es decir, si discrepa de la probabilidad de los unos en la sucesión α en una cantidad menor… Podemos también expresar esta condición diciendo: un segmento—n tiene la propiedad «Δp» si y sólo si $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta$ y, en otro caso, tendrá la propiedad «$\overline{\Delta p}$». Ahora bien; el teorema de Bernoulli responde a la pregunta acerca del valor de la frecuencia —o probabilidad— de segmentos de este tipo (o sea, de los que tienen la propiedad Δp) dentro de sucesiones α_n: contesta, por tanto, a la cuestión acerca del valor de $\alpha_n\mathbf{F}(\Delta p)$.

Intuitivamente se adivina que si el valor de δ ($\delta > 0$) está fijado y $> n$ crece, la frecuencia de dichos segmentos (que poseen la propiedad Δp) crecerá también, y, con ella, el valor de $\alpha_n\mathbf{F}(\Delta p)$ (y que este crecimiento será monótono). La demostración de Bernoulli (que puede encontrarse en cualquier tratado de cálculo de probabilidades) procede a evaluar semejante aumento apoyándose en la fórmula binomial; se encuentra que si n aumenta más allá de todo límite, el valor de $\alpha_n\mathbf{F}(\Delta p)$ se aproxima a su valor máximo, 1, por pequeño que sea el de δ; lo cual puede expresarse con los símbolos conocidos así:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n\mathbf{F}(\Delta p) = 1 \qquad \text{(para cualquier valor de } \Delta p\text{)} \qquad (1)$$

Se llega a esta fórmula transformando la *tercera* fórmula binomial (para sucesiones de segmentos *adyacentes*); la *segunda* fórmula binomial, que es análoga a ella, pero corresponde a sucesiones de segmentos *imbricados*, llevaría, empleando el mismo método, a la fórmula correspondiente a la anterior,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n\mathbf{F}'(\Delta p) = 1 \qquad \text{(para cualquier valor de } \Delta p\text{)} \qquad (2)$$

que es válida para sucesiones de segmentos imbricados y para selecciones ordinales normales de ellos, y, por tanto, para sucesiones con *secuelas* (estudiadas por Smoluchowski[2]). La fórmula (2) misma da lugar a la (1) en caso de que se seleccionen segmentos que no estén imbricados, y que sean, por tanto, libres—n. Puede decirse que (2) es una variante del teorema de Bernoulli —a la cual se aplica, *mutatis mutandis*, lo que voy a decir acerca del teorema de Bernoulli.

Es posible expresar lingüísticamente el teorema de Bernoulli —esto es, la fórmula (1)— del modo siguiente: Diremos que un segmento finito de (gran) longitud determinada, seleccionado de una sucesión aleatoria α, es una «buena muestra» si y sólo si la frecuencia de los unos *en tal segmento* difiere de p —esto es, del valor de la probabilidad de los unos en la sucesión aleatoria α— en una cantidad menor que una pequeña fracción fijada arbitrariamente. Podemos decir que la probabilidad de dar con una buena muestra se acerca a 1 cuanto queramos con tal de que hagamos los segmentos en cuestión suficientemente largos[*1].

Al formular de este modo el teorema aparece dos veces la palabra «probabilidad» (o «*valor de la probabilidad*»). ¿Cómo debe interpretarse o traducirse aquí? En el sentido de mi definición de frecuencia sería menester traducirla del modo siguiente (y doy en cursiva las dos versiones de la palabra «probabilidad» en el lenguaje frecuencial): *una mayoría aplastante* de todos los segmentos suficientemente largos serían «buenas muestras», es decir, su frecuencia relativa discreparía del *valor p de la frecuencia* de la sucesión aleatoria en cuestión, en una cantidad tan pequeña como quisiéramos; de un modo más breve: la *frecuencia p* se realiza aproximadamente en *casi todos* los segmentos suficientemente largos. (No hace al caso para la discusión presente cómo llegamos al valor p: podría ser, por ejemplo, el resultado de una estimación hipotética).

Teniendo en cuenta que la frecuencia de Bernoulli, $\alpha_n \mathbf{F}'(\Delta p)$, crece monótonamente al crecer la longitud n del segmento y decrece también monótonamente al decrecer n, y que, por tanto, el valor de la frecuencia relativa se realiza raramente en segmentos cortos (si se los compara con los largos), podemos decir también lo que sigue.

El teorema de Bernoulli enuncia que los segmentos cortos de sucesiones «absolutamente libres» o azarosas mostrarán a menudo discrepancias de p relativamente grandes (y, por tanto, fluctuaciones relativamente grandes); mientras que en los más largos se observarán, en la mayoría de los casos, discrepancias de p cada vez más pequeñas al aumentar su longitud. En consecuencia, la mayoría de las desviaciones (del valor de p) se' harán tan pequeñas como queramos en segmentos suficientemente largos; o, dicho de otro modo, las desviaciones grandes se harán tan raras como queramos.

Por tanto, si tomamos un segmento muy largo de una sucesión aleatoria, con objeto de hallar por recuento —o quizá empleando otros métodos empíricos y estadísticos— cuáles son las frecuencias en sus subsucesiones, encontraremos, en la inmensa mayoría de los casos, el siguiente resultado: existe una frecuencia media característica, tal que las frecuencias relativas del segmento total y de casi todos los subsegmentos largos se desvían muy poco de ella, mientras que las correspondientes a subsegmentos más pequeños discreparán cada vez más —y más a menudo— de dicha frecuencia media según vayamos escogiéndolos más y más pequeños. Cabe denominar este hecho, este comportamiento estadísticamente comprobable de los segmentos finitos, llamándole su «*comportamiento casi-convergente*», o el hecho de que *las sucesiones aleatorias son estadísticamente estables*[*2].

Así pues, el teorema de Bernoulli afirma que los segmentos pequeños de las sucesiones azarosas muestran a menudo grandes fluctuaciones, mientras que los grandes se comportan siempre de una manera que sugiere constancia y convergencia; dicho sucintamente: que en lo pequeño encontramos desorden y aleatoriedad, y en lo grande orden y constancia. A este comportamiento es a lo que se refiere «*la ley de los grandes números*».

62. EL TEOREMA DE BERNOUILLI Y LA INTERPRETACIÓN DE LOS ENUNCIADOS PROBABILITARIOS

Acabamos de ver que al formular lingüísticamente el teorema de Bernoulli aparece dos veces la palabra «probabilidad».

El teórico de la frecuencia no tiene ninguna dificultad para traducir esta palabra, en ambos casos, de acuerdo con su definición, y puede dar una interpretación clara de la fórmula de Bernoulli y de la ley de los grandes números. ¿Puede hacer lo mismo quien se adhiere a la teoría subjetiva en su forma lógica?

El teórico de la probabilidad subjetiva que quiere definir «probabilidad» como «grado de creencia racional» es perfectamente coherente, y está en su pleno derecho, cuando interpreta las palabras «la probabilidad de… se acerca a 1 cuanto queramos» en el sentido de: «es casi seguro[1] que…»; pero cuando continua diciendo «… que la frecuencia relativa discrepará *de su valor más probable p* en una cantidad menor que una dada…» —o, con las palabras de Keynes[2], «que la proporción de la aparición de los eventos divergirá de *la proporción más probable, p*, en una cantidad menor que una dada…»—, lo único que hace es dejar en la obscuridad las dificultades que encuentra. Pues tales expresiones parecen ser correctas, al menos cuando se oyen por primera vez; pero si traducimos de nuevo la palabra «*probable*» (que a veces se suprime) conforme a la teoría subjetiva, entonces el texto completo es del siguiente tenor: «es casi seguro que las frecuencias relativas discreparán del valor *p* del grado de creencia racional en una cantidad menor que una dada…»; lo cual, para mí, carece enteramente de sentido[*1] pues las frecuencias relativas sólo pueden compararse con otras frecuencias relativas, y pueden discrepar o no únicamente de ellas. Y es claro que sería inadmisible dar a *p, después* de la deducción del teorema de Bernoulli, un sentido diferente del que tenía antes de la misma[3].

Vemos, pues, que la teoría subjetiva es incapaz de interpretar la fórmula de Bernoulli basándose en la ley *estadística* de los grandes números. La deducción de las leyes estadísticas es sólo posible dentro del marco de la teoría frecuencial: si partimos de una teoría estrictamente subjetiva no llegaremos jamás a enunciados estadísticos —ni siquiera si tratamos de salvar la separación por medio del teorema de Bernoulli[*2].

63. EL TEOREMA DE BERNOULLI Y EL PROBLEMA DE LA CONVERGENCIA

Desde un punto de vista epistemológico, la deducción que he esbozado de la ley de los grandes números es insatisfactoria: pues el papel desempeñado en nuestro análisis por el teorema de la convergencia dista mucho de ser claro.

En efecto, he introducido tácitamente un axioma de este tipo al confinar mi investigación a las sucesiones matemáticas con límites de frecuencia (cf. el apartado 57). En consecuencia, podría uno sentirse tentado a pensar que nuestro resultado —es decir, la deducción de la ley de los grandes números— es trivial: pues podría considerarse que el hecho de que las sucesiones «absolutamente libres» sean *estadísticamente estables* está entrañado por su convergencia, que se ha asumido axiomáticamente, si no implícitamente.

Pero esta opinión sería errónea, como Von Mises ha hecho ver con toda claridad. Pues existen sucesiones[1] que satisfacen el axioma de convergencia aunque el teorema de Bernoulli no es válido para ellas, ya que —siendo la frecuencia cercana a 1— pueden aparecer segmentos de una longitud cualquiera que discrepen de *p* en una cantidad cualquiera (la existencia del límite *p* se debe, en estos casos, a que las discrepancias, aunque pueden crecer sin límite, se anulan mutuamente); estas sucesiones tienen el *aspecto* de divergentes en segmentos arbitrariamente grandes, aun cuando las sucesiones correspondientes de frecuencias convergen, en realidad. Así pues, la ley de los grandes números no es, en modo alguno, una consecuencia trivial del axioma de convergencia, y éste es enteramente insuficiente para deducir aquélla; y, por esta razón, no es posible prescindir de mi axioma de aleatoriedad modificado o requisito de «libertad absoluta».

La reconstrucción que hemos realizado de la teoría sugiere, sin embargo, la posibilidad de que la ley de los grandes números sea *independiente* del axioma de convergencia. Pues hemos visto que el teorema de Bernoulli se sigue inmediatamente de la fórmula binomial, y además, hemos puesto de manifiesto que la primera fórmula binomial puede deducirse para *sucesiones finitas*, y —por tanto— sin necesidad de ningún teorema de convergencia: sólo se requería el supuesto de que la sucesión de referencia, α, era, al menos, libre—$n - 1$ (supuesto del que se seguía la validez del teorema especial de multiplicación, y, con ella, la validez de la primera fórmula binomial); y todo lo que era menester para llevar a cabo el paso al límite —y obtener el teorema de Bernoulli— era suponer que podíamos hacer n tan grande como quisiéramos. Teniendo presente esto nos damos cuenta de que el teorema de Bernoulli es, aproximadamente, válido incluso para sucesiones *finitas*, con tal de que sean libre—n para un n suficientemente grande.

Parece, pues, que la deducción del teorema de Bernoulli no depende de ningún axioma que postule la existencia de un límite de la frecuencia, sino *únicamente* de la «libertad absoluta» o aleatoriedad. El concepto de límite desempeña sólo un papel secundario: se lo emplea para aplicar cierta concepción de la frecuencia relativa (que originariamente está sólo definida para clases finitas, y sin la cual no podría formularse el concepto de libertad—n) a las sucesiones que pueden continuarse indefinidamente.

Aún más: no debería olvidarse que el mismo Bernoulli dedujo su teorema dentro del marco de la teoría clásica, que no incluye ningún axioma de convergencia; y, asimismo, que la definición de la probabilidad como *límite* de frecuencias es solamente una *interpretación* —y no la única posible— del formalismo clásico.

Trataré de justificar mi conjetura —la independencia del teorema de Bernoulli con respecto al axioma de convergencia— deduciendo este teorema sin suponer nada más que la libertad—n (que ha de definirse de un modo apropiado)[*1]. Y me esforzaré por hacer ver que es válido incluso para sucesiones matemáticas cuyas propiedades primarias *no tengan límites de frecuencia*.

Sólo consideraré satisfactoria, desde el punto de vista del epistemólogo, mi deducción de la ley de los grandes números, si puede hacerse patente lo que acabo de indicar. Pues es un «hecho de experiencia» —o, al menos, así se nos dice a veces— que las sucesiones empíricas azarosas presentan el peculiar comportamiento que he designado como «casi-convergente» o «estadísticamente estable» (cf. el apartado 61):

si se registra estadísticamente el comportamiento de largos segmentos, cabe determinar que las frecuencias relativas se acercan cada vez más a un valor fijo, y que los intervalos dentro de los que fluctúan se hacen cada vez más pequeños. Es posible contemplar bajo muy diversos ángulos este llamado «hecho empírico», tan discutido y analizado, y al que, sin duda, se considera a menudo como la corroboración empírica de la ley de los grandes números. Los pensadores con inclinaciones inductivistas suelen tomarlo como una ley fundamental de la Naturaleza, que no cabría reducir a un enunciado más sencillo: o sea, como una peculiaridad de nuestro mundo que —simplemente— es menester aceptar. Creen que habría que convertir a esta ley natural, expresada en forma adecuada —por ejemplo, mediante el axioma de convergencia—, en el fundamento de la teoría de la probabilidad, con lo que ésta asumiría el carácter de una ciencia natural.

Mi propia actitud con respecto a este llamado «hecho empírico» es bastante diferente. Me inclino a creer que es reductible al carácter azaroso de las sucesiones; o sea, que cabe deducirle del hecho de que éstas sean libres—*n*. Considero que la gran hazaña de Bernoulli y Poisson en el campo de la teoría de la probabilidad ha consistido, precisamente,'en su descubrimiento de una vía por la que hacer ver que este pretendido «hecho de experiencia» es una tautología, y que, a partir del desorden en lo pequeño (siempre que satisfaga una condición de libertad—*n* convenientemente formulada), se sigue lógicamente cierto tipo de estabilidad en lo grande.

Si logramos deducir el teorema de Bernoulli sin *asumir* axioma alguno de convergencia, habremos reducido el problema epistemológico de la ley de los grandes números a un problema de independencia axiomática, y, por tanto, a una cuestión puramente lógica. Tal deducción explicaría también por qué el axioma de convergencia da muy buen resultado en todas las aplicaciones prácticas (en los intentos de calcular el comportamiento aproximado de las sucesiones empíricas); pues, incluso si resulta que la restricción a sucesiones convergentes es innecesaria, es patente que no será inadecuado emplear sucesiones matemáticas convergentes para el cálculo de la conducta aproximada de sucesiones empíricas que, por razones lógicas, son estadísticamente estables.

64. ELIMINACIÓN DEL AXIOMA DE CONVERGENCIA. SOLUCIÓN DEL «PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DEL AZAR»

Hasta ahora, los límites de las frecuencias no habían tenido en nuestra reconstrucción de la teoría de la probabilidad otra función que la de proporcionarnos un concepto inequívoco de frecuencia relativa aplicable a sucesiones infinitas, de suerte que apoyándonos en él fuese posible definir el concepto de «libertad absoluta» (de secuelas): pues es una *frecuencia relativa* lo que ha de ser insensible a la selección que tiene en cuenta los predecesores.

Hemos restringido antes nuestro estudio a las alternativas con límites frecuenciales, con lo cual introdujimos tácitamente un axioma de convergencia. Ahora bien; para liberarnos de este axioma voy a eliminar tal restricción sin remplazaría por ninguna otra; esto quiere decir que tendremos que construir un concepto frecuencial que pueda asumir la función del límite de frecuencias —que hemos rechazado— y que sea capaz de ser aplicado a *todas* las sucesiones de referencia infinitas[*1].

Un concepto frecuencial que cumple estas condiciones es el de *punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas*. (Se dice que un valor a es un punto de acumulación de una sucesión, si a partir de cierto elemento existen elementos que discrepen de a en una cantidad menor que una dada, por pequeña que ésta sea). Puede verse que este concepto es aplicable sin restricciones a todas las sucesiones infinitas de referencia, teniendo en cuenta el hecho de que para toda alternativa infinita tiene que existir, *al menos*, un punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas correspondiente a aquélla: como las frecuencias relativas no pueden ser nunca mayores que 1 ni inferiores a 0, cualquier sucesión de ellas ha de estar acotada por 1 y 0; y (según un famoso teorema de Bolzano y Weierstrass) por ser una sucesión infinita acotada, ha de tener, *al menos*, un punto de acumulación[1].

Por razones de brevedad, llamaremos «una *frecuencia media de* α» a todo punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas correspondiente a una alternativa a; y podemos ahora decir: si una sucesión α tiene *una y sólo una* frecuencia media, ésta es, al mismo tiempo, su *límite* frecuencial; y a la inversa: si no tiene límite frecuencial, entonces tiene más de una[2] frecuencia media.

Veremos que la idea de frecuencia media es muy apropiada para nuestros propósitos: exactamente lo mismo que habíamos *estimado* antes —quizá en una estimación hipotética— que *p* era el límite frecuencial de una sucesión α, trabajamos ahora con la estimación de que *p* es una frecuencia media de α. Y, siempre que tomemos ciertas precauciones necesarias[3], podemos llevar a cabo *cálculos* mediante las frecuencias medias estimadas, de modo análogo a como lo hacíamos con los límites de las frecuencias. Además, el concepto de frecuencia límite es aplicable a todas las sucesiones de referencia infinitas posibles, sin ninguna restricción.

Si pretendemos ahora interpretar nuestro símbolo $\alpha F''(\beta)$ como una frecuencia media —en lugar de como límite frecuencial— y cambiamos, de acuerdo con ello, la definición de probabilidad objetiva (apartado 59), la mayoría de nuestras fórmulas seguirán siendo deductibles. Sin embargo, surge una dificultad: las frecuencias medias *no son únicas*; si estimamos o conjeturamos que $_{\alpha}\mathbf{F}'(\beta) = p$ es una frecuencia media, ello no excluye la posibilidad de que $_{\alpha}\mathbf{F}'(\beta)$ tenga otros valores distintos de *p*; y si postulamos que no ha de ocurrir así, introducimos de este modo, por implicación, el axioma de convergencia. Si, por otra parte, definimos la probabilidad objetiva prescindiendo de semejante postulado de unicidad[4], llegamos (al menos en primera instancia) a un *concepto ambiguo de probabilidad*: pues bajo ciertas circunstancias una sucesión puede tener simultáneamente varias frecuencias medias que sean «absolutamente libres» —cf. el apartado *c*) del apéndice IV—. Lo cual es difícilmente aceptable, ya que estamos acostumbrados a trabajar con probabilidades *únicas o desprovistas de ambigüedad*; es decir, a suponer que para una y la misma propiedad únicamente puede existir una y sólo una probabilidad *p* dentro de una sola sucesión de referencia.

No obstante tal cosa, cabe superar fácilmente la dificultad que se encuentra para definir un concepto de probabilidad única sin el axioma del límite. En efecto, podemos introducir el requisito de unicidad en el último paso, *tras* haber postulado que la sucesión sea «absolutamente libre» (que es, después de todo, el procedimiento más natural): lo cual nos lleva a proponer, para resolver nuestro problema, la siguiente modificación de nuestras definiciones de sucesiones azarosas y de probabilidad objetiva.

Sea α una alternativa (con una o varias frecuencias medias), y sea el caso que los unos de «tengan una y sólo una frecuencia media, *p*, que sea «absolutamente libre»: decimos entonces que a es azarosa o aleatoria, y que *p* es la probabilidad objetiva de los unos en α.

Será conveniente dividir esta definición en dos requisitos axiomáticos[*2]:

1) Requisito de aleatoriedad: para que una alternativa sea azarosa debe existir, al menos, una frecuencia media «absolutamente libre», esto es, ha de existir su probabilidad objetiva *p*.

2) Requisito de unicidad: para una y la misma propiedad de una sola alternativa azarosa tiene que existir *una y sólo una probabilidad p*.

Tenemos asegurada la compatibilidad del nuevo sistema axiomático por el ejemplo que hemos presentado ya. Es posible construir sucesiones que, aun teniendo una y sólo una probabilidad, carecen de frecuencia límite —cf. el apartado b) del apéndice IV—; lo cual hace ver que las nuevas condiciones impuestas axiomáticamente son, en realidad, más amplias— o sea, menos exigentes— que las antiguas. Este hecho se hace aún más obvio si (ya que es posible tal cosa) enunciamos nuestros antiguos axiomas de la forma siguiente:

1) Requisito de aleatoriedad: como se ha indicado.
2) Requisito de unicidad: como se ha indicado.
2’) Axioma de convergencia: para una y la misma propiedad de una sola alternativa azarosa no existe ninguna otra frecuencia media que su probabilidad *p*.

A partir del sistema de requisitos que hemos propuesto podemos deducir el teorema de Bernoulli, y con él todos los teoremas del cálculo de probabilidades clásico; lo cual resuelve nuestro problema, puesto que ya es posible deducir la ley de los grandes números dentro del marco de la teoría frecuencial sin emplear el axioma de convergencia. Además, no sólo permanecen inalteradas la fórmula (1) del apartado 61 y la formulación lingüística del teorema de Bernoulli[5], sino que la interpretación que hemos dado de él queda, asimismo, sin variación: en el caso de una sucesión azarosa *sin* límite frecuencial continuará siendo verdad que casi todas las sucesiones suficientemente largas ostentarán discrepancias de *p* muy pequeñas, si bien en ellas (como también en las sucesiones azarosas con límite frecuencial) aparecerán de cuando en cuando —como es natural— segmentos de una longitud cualquiera que se comporten casi-divergentemente (esto es, segmentos que discrepen de p en una cantidad cualquiera): pero serán relativamente raros, ya que los han de compensar parles de la sucesión enormemente largas en las que todos (o casi todos) los segmentos se comporten casi-convergentemente. Los cálculos indican que estas últimas partes tienen que ser algo así como varios órdenes de magnitud mayores que los segmentos de comportamiento casi-divergente que ellas compensan[*3].

Éste es también el momento de resolver el «*problema fundamental de la teoría del azar*» (como se le llamó en el apartado 49). La inferencia —al parecer, paradójica — que lleva de la imprevisibilidad e irregularidad de los acontecimientos singulares a la aplicabilidad de las reglas del cálculo de probabilidades es verdaderamente válida: si bien sólo en el supuesto de que podamos expresar la irregularidad, con un buen grado de aproximación, basándonos en asumir, de un modo hipotético, que, sólo una de las frecuencias recurrentes —es decir, de las «frecuencias medias»— aparece de tal modo en cualquier selección realizada según predecesores, que no se encuentran secuelas (pues con tales supuestos es posible demostrar que la ley de los grandes números es tautológica). Se puede sostener la conclusión de que en una sucesión irregular, en la cual (como si dijéramos) todo puede suceder en uno u otro momento —aunque algunas cosas solamente muy raras veces—, ha de aparecer cierta regularidad o estabilidad en subsucesiones enormemente largas: pues es una conclusión admisible y no contradictoria (contra lo que se ha afirmado en ocasiones[6]); y tampoco se trata de algo trivial, ya que necesitamos para ella determinados recursos matemáticos (el teorema de Bolzano-Weierstrass, el concepto de libertad—*n*. y el teorema de Bernoulli). La aparente paradoja de un razonamiento que pasa de la imprevisibilidad a la previsibilidad, o de la ignorancia al conocimiento, desaparece cuando nos damos cuenta de que es posible poner el supuesto de la irregularidad en la forma de una *hipótesis frecuencial* (la de libertad de secuelas), y de que es menester ponerlo en esta forma si queremos hacer patente la validez de dicho argumento.

Ahora se aclara por qué las antiguas teorías habían sido incapaces de hacer justicia a lo que yo llamo el «problema fundamental». Hemos admitido ya que la teoría subjetiva puede deducir el teorema de Bernoulli; pero es incapaz de interpretarlo a base de frecuencias, al modo de la ley de los grandes números (cf. el apartado 62), y de ahí que le sea imposible explicar el éxito estadístico de las predicciones probabilitarias. Por otra parte, la antigua teoría frecuencial postula explícitamente —con su axioma de convergencia— la regularidad en lo grande: y, por tanto, dentro de ella no aparece el problema de la inferencia que parte de la irregularidad en lo pequeño y llega a estabilidad en lo grande: pues se infiere meramente desde la estabilidad en lo grande (axioma de convergencia) unida a irregularidad en lo pequeño (axioma de aleatoriedad) a una forma especial de estabilidad en lo grande (teorema de Bernoulli, ley de los grandes números)[*4].

El axioma de convergencia no es una parte necesaria de los fundamentos del cálculo de probabilidades. Y con este resultado termino mi análisis del cálculo matemático[7].

Volvemos ahora a considerar los problemas más específicamente metodológicos, en particular el de cómo decidir los enunciados probabilitarios.

65. EL PROBLEMAS DE LA DECIBILIDAD

Cualquiera que sea el modo como definamos el concepto de probabilidad, o independientemente de las formulaciones axiomáticas que elijamos, mientras la fórmula binomial sea deductible dentro del sistema *los enunciados probabilitarios no serán falsables*. Las hipótesis probabilitarias *no excluyen nada observable*: las estimaciones de probabilidad no pueden contradecir a ningún enunciado básico, ni ser contradichas por él; tampoco cabe que las contradiga la conyunción de un número finito de enunciados básicos, ni —por tanto— tampoco ningún número finito de observaciones.

Supongamos que hemos propuesto una hipótesis equiazarosa para cierta alternativa α: por ejemplo, que hemos estimado que en las tiradas de cierta moneda saldrán con igual frecuencia «1» y «0», de modo que sean $_{\alpha}\mathbf{F}(l) = {}_{\alpha}\mathbf{F}(0) = ½$; y admitamos que empíricamente nos sale una y otra vez «1», sin excepción; entonces, sin duda alguna, abandonaremos en la práctica la estimación que habíamos hecho, y la daremos por falsada. Pero en un sentido lógico no será cuestión de falsación alguna: pues es seguro que solamente podemos observar una sucesión finita de tiradas, y aunque —según la fórmula binomial— la probabilidad de dar con un segmento muy largo que presente una gran discrepancia de ½ es sumamente pequeña, siempre será mayor que cero. Por tanto, una aparición de un segmento finito que presente incluso la máxima desviación con respecto a lo estimado, si se da con la suficiente rareza, nunca contradirá a la estimación hecha; y, en realidad, hemos de esperar que ocurra, pues es una consecuencia de ésta. La esperanza de que la *rareza* —calculable— de semejante segmento sea un medio de falsar la estimación probabilitaria resulta ser ilusoria, ya que, incluso una aparición frecuente de un largo segmento que se desvíe en gran medida, puede considerarse siempre no más que una aparición de un segmento todavía mayor y más desviado; así pues, no existe ninguna sucesión de eventos que nos haya sido dada extensionalmente —y, por tanto, ningún acervo—*n* finito de enunciados básicos— que pueda falsar un enunciado probabilitario.

Solamente una sucesión infinita de eventos —definidos intensionalmente por una regla— podría contradecir a una estimación de probabilidad. Pero, a la vista de las consideraciones expuestas en el apartado 38 (cf. el 43), esto quiere decir que las hipótesis probabilitarias son infalsables, debido a tener dimensión infinita. Por tanto, podríamos decir de ellas que son empíricamente no informativas, como vacías que están de contenido empírico[1].

Con todo, esta tesis es claramente inaceptable cuando nos enfrentamos con los *éxitos* que la física ha alcanzado con las predicciones obtenidas a partir de estimaciones hipotéticas de probabilidades (y éste es el mismo argumento que hemos utilizado mucho antes contra la interpretación de los enunciados probabilitarios como tautologías, hecha por la teoría subjetiva). Muchas de estas estimaciones no son inferiores en lo que respecta a significación científica a ninguna otra hipótesis física (por ejemplo, a una de carácter determinista); y el físico suele ser capaz de decidir perfectamente si puede aceptar por el momento una hipótesis probabilitaria concreta en calidad de «confirmada empíricamente», o si es menester rechazarla en concepto de «prácticamente falsada» (esto es, de inútil para fines de predicción), está bastante claro que solamente puede llegarse a esta «falsación práctica» mediante una decisión metodológica de considerar excluidos —o prohibidos— los eventos sumamente improbables. Pero, ¿con qué derecho los condenamos de tal modo? ¿Dónde hemos de trazar la línea de separación? ¿Dónde empieza semejante «suma improbabilidad»?

Dado que desde un punto de vista lógico no cabe la menor duda sobre el hecho de que los enunciados probabilitarios no pueden ser falsados, el hecho igualmente indudable de que los empleemos empíricamente ha de aparecer como un golpe fatal para mis ideas metodológicas básicas, que penden decisivamente de mi criterio de demarcación. Sin embargo, trataré de contestar a las cuestiones que he planteado —y que constituyen el problema d la decidibilidad— mediante una resuelta aplicación de aquellas mismas ideas. Mas para hacerlo, tengo que analizar primero la forma lógica de los enunciados probabilitarios teniendo en cuenta, tanto las relaciones lógicas existentes entre ellos, como aquéllas en que están con respecto a los enunciados básicos[*1].

66. LA FORMA LÓGICA DE LOS ENUNCIADOS PROBABILITARIOS

Las estimaciones de probabilidad *no* son falsables. Ni, por supuesto, verificables, por la misma razón que se puede esgrimir contra las demás hipótesis: que no hay resultados experimentales —por numerosos y favorables que sean— que puedan establecer de un modo definitivo que la frecuencia relativa de las «caras» es ½ y será *siempre* ½.

Así pues, los enunciados probabilitarios y los básicos son incapaces de contradecirse ni de entrañarse mutuamente. No obstante tal cosa, sería un error concluir de este hecho que no existen relaciones lógicas de ningún tipo entre unos y otros enunciados; y estaríamos igualmente descaminados si creyésemos que, si bien se encuentran relaciones lógicas entre ellos (puesto que es evidente que las sucesiones de observaciones pueden estar de acuerdo más o menos perfecto con un enunciado probabilitario), el análisis de dichas relaciones nos obliga a introducir una lógica probabilísima especial[1] que rompería los grilletes de la lógica clásica. Frente a semejantes opiniones, creo que las relaciones en cuestión pueden ser analizadas completamente a base de las «clásicas» relaciones lógicas de *deductibilidad* y *contradicción*[*1].

A partir de la infalsabilidad y de la inverificabilidad de los enunciados probabilitarios puede inferirse que no tienen consecuencias falsables, y que, a su vez, no pueden ser consecuencia de enunciados verificables. Pero no quedan excluidas con esto las posibilidades contrarias: pues puede ocurrir: *a*) que tengan consecuencias verificables unilateralmente (consecuencias puramente existenciales o consecuencias de «hay»), o *b*) que sean consecuencia de enunciados universales unilateralmente falsables (enunciados totales).

La posibilidad *b*) difícilmente podrá ayudar al esclarecimiento de la relación lógica existente entre enunciados probabilitarios y básicos: pues es enteramente obvio que un enunciado no falsable —o sea, uno que dice demasiado poco— puede pertenecer a la clase consecuencia de uno falsable, y que, por tanto, dice más que aquél.

Tiene más interés para nosotros la posibilidad *a*), que en modo alguno es trivial, sino que, realmente, resulta ser fundamental para nuestro análisis de la relación existente entre los enunciados probabilitarios y los básicos. Pero nos encontramos con que de todo enunciado probabilitario cabe deducir una clase infinita de enunciados existenciales, pero no viceversa (así pues, aquél afirma más que ninguno de éstos). Por ejemplo: sea p una probabilidad estimada —hipotéticamente— para cierta alternativa (siendo $0 \neq p \neq 1$); de aquí podemos deducir, por ejemplo, la consecuencia existencial de que aparecerán ceros y unos en la sucesión (y, naturalmente, también pueden seguirse consecuencias mucho menos simples: así, que aparecerán segmentos cuya discrepancia con respecto a p será muy pequeña).

Pero podemos deducir mucho más a partir de semejante estimación: por ejemplo, que «una y otra vez» aparecerá un elemento con la propiedad «1» y lo mismo otro con la propiedad «0»; es decir, que *después* de un elemento cualquiera x de la sucesión se encontrarán también en ésta un elemento y que posea la propiedad «1» y un elemento z con la propiedad «0». Un enunciado de esta forma («para *todo* x existe un y con la propiedad observable —o contrastable extensionalmente— β») es infalsable —debido a no tener consecuencias falsables— e inverificable —ya que «todo» o «para cada» lo convierten en hipotético[*2]. A pesar de ello, puede estar mejor o peor «confirmado», en el sentido de que podemos lograr verificar muchas, pocas o ninguna de sus consecuencias existenciales: de ahí que se encuentre, con respecto a los enunciados básicos, en una relación que, al parecer, es característica de los enunciados probabilitarios. Los enunciados de la forma indicada pueden ser llamados «enunciados existenciales universalizados» o «*hipótesis existenciales*» (universalizadas).

Lo que yo mantengo es que se puede entender la relación entre las estimaciones probabilitarias y los enunciados básicos —así como la posibilidad de que aquéllas estén más o menos bien «confirmadas»— parando mientes en el hecho de que de todas las estimaciones de probabilidad son *deductibles lógicamente* hipótesis existenciales. Lo cual hace pensar en la cuestión de si cabe que las estimaciones probabilitarias mismas tengan la forma de hipótesis existenciales.

Toda estimación probabilitaria (hipotética) entraña la conjetura de que la sucesión empírica en cuestión es, aproximadamente, azarosa (o aleatoria): es decir, entraña la aplicabilidad (aproximada) de los axiomas del cálculo de probabilidades. Nuestra cuestión es, pues, equivalente a la de si tales axiomas representan lo que he llamado «hipótesis existenciales».

Si observamos atentamente los dos requisitos propuestos en el apartado 64, veremos que el de aleatoriedad tiene realmente la forma de una hipótesis existencial[2]. El requisito de unicidad, por el contrario, no tiene tal forma: ni puede tenerla, ya que un enunciado de la forma «hay *sólo un*…» ha de poseer la de un enunciado universal (pues cabe traducirle por «no hay más que un…» o por «todos los… son idénticos»).

Ahora bien; mi tesis acerca de la cuestión es que lo único que establece una relación lógica entre las estimaciones probabilitarias y los enunciados básicos es lo que podría llamarse el «constituyente existencial» de aquéllas (y, por tanto, el requisito de aleatoriedad); de acuerdo con esto, el requisito de unicidad, como enunciado universal que es, no tendrá consecuencias extensionales de ninguna clase. Es cierto que puede «confirmarse» extensionalmente —aunque, desde luego, sólo de un modo provisional— que existe un valor p con las propiedades que se exigen para él, pero no que exista *sólo un* valor semejante. Este último enunciado, que es universal, solamente podría tener significación extensional si los enunciados básicos fueran capaces de establecer la existencia de más de uno de tales valores; pero como no lo son (pues recordamos que a la fórmula binomial está ligada la infalsabilidad), el requisito de unicidad ha de carecer de semejante significación[*3].

Ésta es la razón por la que las relaciones lógicas existentes entre una estimación probabilitaria y los enunciados básicos permanecen inalterables si eliminamos del sistema el requisito de unicidad (y lo mismo le ocurre a la «confirmabilidad» —en mayor o menor grado— de la primera). Mediante esta operación podríamos dar al sistema la forma de una pura hipótesis existencial[3]; pero entonces tendríamos que abandonar la unicidad de las estimaciones probabilitarias[*4], y de ahí llegaríamos (en lo que se refiere a la unicidad) a algo distinto del cálculo de probabilidades usual.

Por tanto, el requisito de unicidad no es superfluo, evidentemente. ¿Cuál es, pues, su función lógica?

Mientras que el requisito de aleatoriedad contribuye a establecer una relación entre los enunciados probabilitarios y los enunciados básicos, el de unicidad regula las relaciones existentes entre los diversos enunciados de probabilidad mismos; sin este requisito, algunos de ellos podrían —como hipótesis existenciales— ser deductibles de otros, pero nunca podrían contradecirse mutuamente. Sólo la condición de unicidad asegura que los enunciados probabilitarios puedan contradecirse unos a otros: pues gracias a ella adquieren éstos la forma de una conyunción cuyos componentes son un enunciado universal y una hipótesis existencial; y los enunciados de esta forma pueden encontrarse entre sí exactamente en las mismas relaciones lógicas fundamentales (equivalencia, deductibilidad, compatibilidad o incompatibilidad) de que son capaces los enunciados universales «normales» de una teoría cualquiera —por ejemplo, de una teoría falsable.

Si nos volvemos ahora al axioma de convergencia, encontramos que se parece al requisito de unicidad en tener la forma de un enunciado universal infalsable, pero que pide más de lo que exige este requisito. Sin embargo, aquello que pide de modo suplementario no puede tener ninguna significación extensional; y, además, tampoco la tiene lógica o formal, sino exclusivamente *intensional*: se pide la exclusión de todas las sucesiones definidas intensionalmente (esto es, matemáticas) que carezcan de límite frecuencial. Pero, desde el punto de vista de las aplicaciones, semejante exclusión resulta que no tiene significación ni siquiera intensional, ya que en la teoría de la probabilidad aplicada, desde luego, no tratamos con las sucesiones matemáticas mismas, sino solamente con estimaciones hipotéticas acerca de sucesiones empíricas. Por tanto, la eliminación de las sucesiones carentes de límite frecuencial podría servir únicamente para ponemos en guardia y no considerar azarosas o aleatorias aquellas sucesiones empíricas con respecto a las cuales asumiéramos que no tenían límite frecuencial. Mas, ¿qué pasos habríamos de dar en respuesta a esta advertencia[4]?. ¿A qué clase de consideraciones o de conjeturas deberíamos entregamos acerca de la posible convergencia o divergencia de sucesiones empíricas, o de cuáles deberíamos abstenemos, en vista de lo que se nos había advertido, si tenemos en cuenta que los criterios de convergencia ya no son aplicables a ellas, ni más ni menos que los de divergencia? Todas estas embarazosas cuestiones[5] desaparecen en cuanto nos libramos del axioma de convergencia.

Así pues, nuestro análisis lógico convierte en transparentes tanto la forma como la función de los diversos requisitos parciales del sistema, y hace ver qué razones militan contra el axioma de aleatoriedad y en favor del de unicidad. Pero, mientras tanto, el problema de la decidibilidad parece hacerse cada vez más amenazador; y aunque no nos vemos forzados a decir que nuestros requisitos (o axiomas) «carecen de sentido[6]», parece que nos encontramos obligados a describirlos como no empíricos. Pero semejante descripción de los enunciados probabilitarios —cualesquiera que sean las palabras que empleemos para expresarla— ¿no contradice la idea fundamental de nuestra posición?

67. UN SISTEMA PROBABILÍSTICO DE METAFÍSICA ESPECULATIVA

La utilización más importante de los enunciados de probabilidad en la física es la siguiente: se interpretan ciertas regularidades físicas o ciertos efectos físicos observables como «macro-leyes»; esto es, se los interpreta o explica como efectos masivos, o como los resultados observables de «micro-eventos» hipotéticos y no directamente observables. Las macro-leyes se deducen de estimaciones probabilitarias por el método siguiente: hacemos ver que las observaciones que estén de acuerdo con la regularidad observada en cuestión deben esperarse con una probabilidad muy próxima a 1 (es decir, con una probabilidad que discrepe de 1 en una cantidad que se puede hacer tan pequeña como se quiera); y decimos entonces que mediante nuestra estimación probabilitaria hemos «explicado» el efecto observable a que nos referíamos como un macro-efecto.

Pero si empleamos de esta manera las estimaciones probabilitarias para «explicar» regularidades observables *sin tomar precauciones especiales*, podemos vernos inmediatamente complicados en especulaciones que —de acuerdo con el uso general— cabe perfectamente indicar que son típicas de la *metafísica especulativa*.

Pues, como los enunciados probabilitarios no son falsables, siempre será posible «explicar» de este modo, mediante estimaciones de probabilidad, *cualquier regularidad que nos venga en gana*. Sea, por ejemplo, la ley de la gravedad. Podemos arreglárnoslas para que ciertas estimaciones probabilitarias hipotéticas «expliquen» esta ley del modo siguiente. Elegimos unos eventos de cierto tipo para que hagan de eventos elementales o atómicos: por ejemplo, los del movimiento de una pequeña partícula. Elegimos también qué ha de ser una propiedad primaria de tales eventos: así, la dirección y velocidad del movimiento de la misma. Asumimos luego que tales eventos presentan una distribución azarosa, y, finalmente, calculamos la probabilidad de que todas las partículas dentro de cierta región espacial finita —y durante cierto período de tiempo finito, o «período cósmico»— se muevan accidentalmente (con una exactitud especificada) del modo que exige la ley de la gravedad. La probabilidad calculada, naturalmente, será muy pequeña: en realidad, será despreciable, pero no igual a cero. Podemos entonces plantear la cuestión acerca de la longitud que ha de tener un segmento—*n* de la sucesión —o, de otro modo, de la duración que es preciso asumir para la totalidad del proceso— de modo que podamos esperar con probabilidad próxima a 1 (o que discrepe de 1 en una cantidad no mayor que un valor e arbitrariamente pequeño) la aparición de semejante período cósmico, en el que —como resultado de una acumulación de accidentes— nuestras observaciones estén de acuerdo con la ley de la gravedad: para cualquier valor próximo a 1 que elijamos obtenemos un número finito, aunque enormemente grande. Podemos decir, por tanto: si suponemos que el segmento de la sucesión tiene esa grandísima longitud —o, dicho de otro modo, que el «mundo» dura el tiempo suficiente—, entonces al asumir la aleatoriedad estamos autorizados a esperar que aparezca un período cósmico en el que la ley de la gravedad parezca tener validez, aunque, «en realidad», no haya sino dispersión aleatoria. Este tipo de «explicación» por medio de la asunción de aleatoriedad es aplicable a cualquier regularidad que escojamos; realmente, podemos «explicar» de este modo el conjunto de nuestro mundo, con todas las regularidades que en él se observan, como una fase de un caos aleatorio —o sea, *como una acumulación de coincidencias puramente accidentales*.

Para mí está claro que las especulaciones de esta índole son «metafísicas», y que carecen de importancia para la ciencia; e igualmente claro parece estar que este hecho va unido a su infalsabilidad, es decir, al hecho de que siempre y en todas las circunstancias podemos entregarnos a ellas. Por tanto, mi criterio de demarcación tiene aire de estar francamente de acuerdo con el uso general de la palabra «metafísico».

Por consiguiente, las teorías que incluyen la probabilidad no deben considerarse científicas si se aplican sin adoptar precauciones especiales. Hemos de eliminar su empleo metafísico para que puedan tener alguna utilidad en la práctica de la ciencia empírica[*1].

68. LA PROBABILIDAD EN LA FÍSICA

El problema de la decidibilidad solamente desasosiega al metodólogo, no al físico[*1]. Si se pide a éste que dé un concepto de probabilidad aplicable prácticamente, quizá proponga algo así como una *definición física de la probabilidad*, cuyo perfil será más o menos el siguiente. Existen ciertos experimentos que conducen a resultados variables, incluso si se llevan a cabo en condiciones perfectamente reguladas; en algunos de ellos —los que son «azarosos», como las tiradas de una moneda— la repetición frecuente lleva a resultados con frecuencias relativas que, según se van reiterando una y otra vez, se aproximan cada vez más a un valor fijo que podemos llamar la *probabilidad* del evento en cuestión: este valor es «… determinable empíricamente con un grado cualquiera de aproximación mediante largas series de experimentos[1]»; lo cual explica, incidentalmente, por qué es posible falsar una estimación hipotética de probabilidad.

Tanto los matemáticos como los lógicos plantearán ciertas objeciones contra toda definición de análogo perfil; y, en particular, las siguientes:

1) Tal definición no está de acuerdo con el cálculo de probabilidades, ya que, según el teorema de Bernoulli, sólo son estadísticamente estables —esto es, se comportan como convergentes— casi todos los segmentos muy largos. Por esta

razón, la probabilidad no puede ser definida por dicha estabilidad (o sea, por el comportamiento casi-convergente), ya que la expresión «casi todos» —que debería aparecer en el *definiens*— es, a su vez, solamente un sinónimo de «muy probable»: la definición es, pues, circular —hecho que puede ocultarse (pero no eliminarse) omitiendo la palabra «casi», que es lo que ha hecho el físico en su definición (que, por tanto, es inaceptable).

2) ¿Cuándo ha de llamarse «*larga*» a una serie de experimentos? Si no se nos da un criterio de lo que hemos de considerar «largo», no podemos saber cuándo hemos llegado a una aproximación de la probabilidad, o si hemos llegado.

3) ¿Cómo podemos saber si hemos alcanzado realmente el grado de *aproximación* deseado?

Aunque opino que estas objeciones están justificadas, con todo ello sigo creyendo que podemos conservar la definición del físico, y voy a apoyar tal creencia por medio de los argumentos esbozados en el apartado anterior. Según éstos, las hipótesis probabilitarias pierden todo contenido informativo cuando se les concede una posibilidad de aplicación sin restricciones; pero el físico nunca las utilizaría de semejante forma. Y, siguiendo su ejemplo, no permitiré una aplicación sin límites de tales hipótesis: propongo que adoptemos *la decisión metodológica de no explicar nunca efectos físicos —esto es, regularidades reproducibles— como acumulaciones accidentales*. Esta decisión, como es natural, modifica el concepto de probabilidad: precisamente lo restringe[*2]. Así pues, la objeción 1) no afecta a mi posición, ya que yo no afirmo, en absoluto, la identidad de los conceptos físico y matemático de probabilidad, sino que —por el contrario— la niego; pero surge una nueva objeción en el lugar de aquélla.

1’) ¿Cuándo podemos hablar de «acumulaciones accidentales»? Cabe presumir que en el caso de una probabilidad pequeña; pero, ¿cuándo es «*pequeña*» una probabilidad? Podemos aceptar que la propuesta que acabo de hacer elimina el empleo del método (de que hemos tratado en el apartado precedente) de fabricamos una probabilidad tan grande como queramos a partir de una pequeña sin más que cambiar la formulación del problema matemático. Mas para ejecutar la decisión propuesta tenemos que saber lo que hemos de considerar *pequeño*.

Mostraremos en las páginas que siguen que la regla metodológica que he propuesto está de acuerdo con la definición del físico, y que, apoyándonos en ella, podemos contestar a las objeciones planteadas por las cuestiones 1’), 2) y 3). Me referiré, por de pronto, solamente a un caso típico de aplicación del cálculo de probabilidades: el de ciertos macro-efectos reproducibles que pueden describirse mediante (macro—) leyes precisas —como la de presión de un gas— y que interpretamos o explicamos diciendo que se deben a una enorme acumulación de micro-procesos, tales como colisiones moleculares. Otros casos típicos (así, las fluctuaciones estadísticas o la estadística de procesos individuales azarosos) pueden reducirse sin gran dificultad al anterior[*3].

Fijémonos en un macro-efecto del tipo indicado, que se describe por medio de una ley bien corroborada y que hemos de reducir a sucesiones aleatorias de micro-eventos. Supongamos que la ley afirma que bajo ciertas condiciones una magnitud física tiene el valor p; y admitamos, asimismo, que el efecto tiene «precisión», de suerte que no aparezcan fluctuaciones observables, esto es, discrepancias con respecto a p fuera del intervalo $\pm\varphi$ (el intervalo de imprecisión; cf. el apartado 37) dentro del cual han de fluctuar, en todo caso, nuestras medidas debido a las imprecisiones inherentes a la técnica de medición empleada. Proponemos ahora la hipótesis de que p es una probabilidad dentro de una sucesión de micro-eventos; y, además, que son n de éstos los que contribuyen a producir el efecto del caso. Entonces (cf. el apartado 61), podemos calcular —para cada valor de δ que elijamos— la probabilidad $_{\alpha_n}$,$\mathbf{F}(\Delta p)$, esto es, la probabilidad de que el valor medio caiga dentro del intervalo «ε». Denotemos con «ε» la probabilidad complementaria: tenemos que δ que elijamos— la probabilidad $_{\alpha_n}$,$\mathbf{F}(\Delta p) = \varepsilon$, y, según el teorema de Bernoulli, ε tiende a cero cuando n crece sin fin y sin límite.

Suponemos ahora que ε es tan «pequeña» que puede despreciarse (nos ocuparemos muy pronto de la cuestión 1'), que se refiere a qué quiere decir «pequeño» dentro de esta suposición); y es claro que Δp ha de interpretarse como el intervalo dentro del cual las medidas se acercan al valor p. Vemos, pues, que las tres cantidades ε, n y Δp corresponden, respectivamente, a las tres cuestiones 1'), 2) y 3). Podemos elegir Δp —o δ— arbitrariamente, con lo cual se restringe la arbitrariedad de la elección de ε y de n. Como lo que nos proponemos es deducir el macro-efecto exacto p ($\pm\varphi$), no supondremos que δ pueda ser mayor que φ; y en lo que respecta al efecto reproducible p, la deducción será satisfactoria si la llevamos a cabo para cierto valor $\delta \leq \varphi$ (aquí está dada φ, ya que está determinada por la técnica de medición): elijamos ahora δ de modo que sea (aproximadamente) igual a φ. Hemos reducido, por tanto, la cuestión 3) a las otras dos o sea, a la 1') y la 2).

Al elegir δ (esto es, Δp) hemos establecido una relación entre n y ε, ya que a cada n corresponde ahora unívocamente un valor de ε. Así pues, la cuestión 2), es decir, la de si n es suficientemente grande, ha quedado reducida a la 1'), esto es, a la de cuándo es pequeña ε (y viceversa).

Pero esto quiere decir que podríamos responder a *las tres cuestiones* con sólo que fuésemos capaces de decidir *qué valor determinado de* ε podemos no tener en cuenta por ser ya «despreciable». Ahora bien, nuestra regla metodológica equivale a la decisión de despreciar pequeños valores de e; pero no estamos dispuestos fácilmente a ligarnos para siempre a un valor determinado de ε.

Si le planteamos la cuestión a un físico, o sea, si le preguntamos qué valor de e está dispuesto a despreciar —si será 0,001, o 0,00001, o …—, contestará probablemente que ε no le interesa lo más mínimo: que lo que ha elegido no es ε, sino

n, y que lo ha elegido de tal modo que la correlación entre n y Δp se haga en gran medida *independiente de los cambios* en el valor de e que podamos elegir.

La respuesta del físico está justificada, debido a las peculiaridades matemáticas de la distribución de Bernoulli, pues es posible determinar para cada n la dependencia funcional entre ε y Δp[*4]: un examen de esta función hace ver que para *cada n* («grande») existe un valor característico de Δp tal, que en su vecindad Δp es sumamente insensible a los cambios de valor de ε; y esta insensibilidad aumenta al crecer n. Si adoptamos para n el orden de magnitud que es de esperar en el caso de fenómenos extremadamente masivos, entonces Δp es tan insensible —en las proximidades de su valor característico— a las modificaciones que pueda experimentar ε, que apenas cambia en absoluto si varía el orden de magnitud de ε; y ahora el físico atribuirá poco valor a unos límites de Δp más definidos que éstos. Pero en el caso de fenómenos masivos típicos —al cual se limita esta investigación—, recordamos que puede adoptarse para Δp el intervalo de precisión $\pm\varphi$, que depende de nuestra técnica de medición y no posee límites o extremos netos, sino únicamente lo que en el apartado 37 he llamado «extremos de condensación». Por tanto, llamaremos grande a n cuando la insensibilidad de Δp en las proximidades de su valor característico —que podemos determinar— sea, por lo menos, tan grande que incluso cambios en el orden de magnitud de ε hagan fluctuar a Δp exclusivamente dentro de los extremos de condensación de $\pm\varphi$ (si $n \to \infty$, Δp se hace completamente insensible). Pero si esto es así, entonces no necesitamos preocuparnos más de una determinación exacta de ε: *basta la decisión de despreciar un ε pequeño*, incluso si no hemos enunciado exactamente a qué se debe considerar «pequeño»: pues equivale a la decisión de trabajar con los valores característicos de Δp mencionados, que son insensibles a los cambios que sufra ε.

La regla de que han de despreciarse las improbabilidades extremas (regla que únicamente se hace suficientemente explícita a la luz de lo que acabamos de decir) concuerda con la exigencia de *objetividad científica*. Pues la objeción obvia a nuestra regla es, sin duda, que incluso la mayor improbabilidad es siempre una probabilidad —por pequeña que sea— y que, en consecuencia, algún día ocurrirán incluso los procesos más improbables —esto es, los que proponemos que se desprecien—. Pero es posible acabar con esta objeción recordando *la idea de efecto físico reproducible*, que está ligada estrechamente a la de objetividad (cf. el apartado 8). No niego la posibilidad de que ocurran efectos improbables: no aseguro, por ejemplo, que las moléculas de un pequeño volumen de gas no puedan quizá retirarse espontáneamente durante un corto intervalo de tiempo a una parte de dicho volumen, ni que jamás ocurran fluctuaciones de la presión de un volumen mayor de gas. Lo que sí afirmo es que semejantes acontecimientos no serán efectos físicos, ya que —debido a su inmensa improbabilidad— *no son reproducibles a voluntad*. Incluso en caso de que un físico llegara a observar un proceso dé este tipo sería completamente incapaz de reproducirlo, y, por tanto, no podría nunca decidir qué era lo que realmente había sucedido, o si no había cometido un error al hacer la observación. Pero si encontramos desviaciones *reproducibles* con respecto al macro-efecto estimado del modo que hemos indicado, entonces hemos de suponer que la estimación probabilitaria ha quedado *falsada*.

Estas consideraciones pueden ayudarnos a comprender afirmaciones como la siguiente de Eddington, en la que distingue dos tipos de leyes: «algunas cosas no ocurren nunca en el mundo físico porque son *imposibles*, otras por ser demasiado *improbables*. Las leyes que prohíben las primeras son leyes primarias, las que prohíben las segundas, leyes secundarias[2]». Aunque este modo de expresar las cosas no esté, tal vez, a salvo de toda crítica (yo preferiría abstenerme de hacer aserciones no contrastables acerca de si ocurren o no cosas sumamente improbables), se encuentra en buen acuerdo con la aplicación que hace el físico de la teoría de la probabilidad.

Otros casos en que puede aplicarse esta teoría —tales como las fluctuaciones estadísticas, o la estadística de eventos individuales azarosos— son reducibles al que hemos tratado, es decir, al de los macro— efectos medibles con precisión. Por fluctuaciones estadísticas entiendo fenómenos tales como el del movimiento browniano; aquí, el intervalo de precisión de la medida ($\pm\varphi$) es más pequeño que el intervalo Δp que caracteriza al número n de micro-eventos que contribuyen a dar origen al efecto, y, por ello, son de esperar con gran probabilidad discrepancias de p medibles. El que ocurran tales discrepancias será un hecho contrastable, ya que la fluctuación misma se convierte en un efecto reproducible; y se pueden aplicar a este mismo mis argumentaciones anteriores: las fluctuaciones más allá de cierta magnitud (o sea, fuera del intervalo Δp) no serán reproducibles —según mis exigencias metodológicas—, ni largas sucesiones de fluctuaciones en una y la misma dirección, etc. En el caso de la estadística de eventos individuales azarosos serían válidas consideraciones análogas.

Resumiré ahora mi argumentación acerca del problema de la decidibilidad.

Nuestra pregunta era: ¿Cómo pueden desempeñar el papel de leyes naturales de la ciencia empírica las hipótesis probabilitarias, que —como hemos visto— son infalsables? Respondemos del modo siguiente: los enunciados probabilitarios son metafísicos y carecen de significación empírica, en cuanto que no son falsables; mas pueden utilizarse como enunciados falsables en la medida en que se emplean como enunciados empíricos.

Pero esta respuesta plantea otra pregunta: *¿Cómo es posible* que los enunciados probabilitarios —que no son falsables— puedan *emplearse* como enunciados falsables? (El hecho de que se empleen de esta manera está fuera de duda: el físico sabe muy bien cuándo ha de considerar falsada una suposición probabilitaria). Vemos que la cuestión tiene dos aspectos: por un lado, tenemos que hacer comprensible la posibilidad de emplear los enunciados probabilitarios, basándonos en su forma lógica; por otro, hemos de analizar las reglas que gobiernan su empleo como enunciados falsables.

Según el apartado 66, los enunciados básicos aceptados pueden estar de mejor o peor acuerdo con determinada estimación probabilitaria propuesta: pueden representar mejor o peor un segmento típico de una sucesión probabilitaria. Lo cual nos da ocasión para aplicar cierto tipo de *regla metodológica*: por ejemplo, una que pida que la conformidad entre los enunciados básicos y la estimación probabilitaria alcance un nivel mínimo; con lo cual la regla trazaría una línea arbitraria y decretaría que solamente están «permitidos» segmentos razonablemente representativos (o razonablemente «buenas muestras»), mientras que están «prohibidos» segmentos atípicos o no representativos.

Al analizar más de cerca esta sugerencia hemos visto que no es preciso trazar tan arbitrariamente como podría parecer en un principio la línea de separación entre lo permitido y lo prohibido; y, en particular, que no es menester trazarla «con tolerancia», ya que cabe estructurar la regla de tal modo que aquella línea quede determinada por la precisión alcanzable por nuestras mediciones, lo mismo que ocurre en el caso de otras leyes.

La regla metodológica que proponemos de acuerdo con el criterio de demarcación, no prohíbe que aparezcan segmentos atípicos, ni la aparición repetida de desviaciones (que, naturalmente, son típicas de las sucesiones probabilitarias). Lo que prohíbe es que tengamos desviaciones sistemáticas —tales como las que van en una dirección concreta, o la aparición de segmentos atípicos de un modo definido— en forma previsible y reproducible. Así pues, no se contenta con exigir una conformidad meramente grosera, sino la mejor posible *en todo cuanto es reproducible y contrastable*; dicho brevemente, en todos los *efectos reproducibles*.

69. LEY Y AZAR

A veces oye uno decir que los movimientos de los planetas obedecen a leyes rigurosas, mientras que la tirada de un dado es fortuita —o sujeta al azar—. En mi opinión, la diferencia reside en el hecho de que hasta ahora hemos sido capaces de predecir con éxito aquellos movimientos, pero no los resultados individuales de las tiradas de un dado.

Para deducir predicciones se necesitan leyes y condiciones iniciales: si no se dispone de leyes apropiadas o si no cabe averiguar cuáles son las condiciones iniciales, el modo científico de predecir se desmorona. Al tirar el dado, lo que nos falta, sin duda alguna, es un conocimiento suficiente de las condiciones iniciales; si dispusiéramos de mediciones suficientemente precisas de éstas también sería posible hacer predicciones en este caso; pero las reglas para tirar el dado correctamente (agitar el cubilete) están elegidas de tal modo que nos impidan medir las condiciones iniciales. Llamaré «*marco de condiciones*» las reglas de juego y todas aquellas otras que determinen las condiciones en que han de ocurrir los diversos eventos de una sucesión azarosa: consisten en requisitos tales como que el dado tiene que ser «correcto» (hecho de un material homogéneo), que se le ha de menear bien, etc.

Hay otros casos en que las predicciones pueden no dar resultado: quizá porque hasta el momento no haya sido posible formular leyes adecuadas, o porque hayan fracasado todas las tentativas de encontrar una ley y hayan quedado falsadas todas las predicciones. En tales casos, tal vez desesperemos de encontrar nunca una ley satisfactoria (aunque no es probable que dejemos enteramente de hacer intentos, a menos que el problema no nos interese demasiado: como puede ocurrir, por ejemplo, cuando nos damos por satisfechos con las predicciones frecuenciales). Sin embargo, en ningún caso podemos decir definitivamente que no hay leyes en un campo determinado (y esto es una consecuencia de la imposibilidad de verificación): lo cual quiere decir que mi tesis convierte en *subjetivo* el concepto de azar[*1]. Hablo de «azar» cuando lo que sabemos no es suficiente para predecir: como ocurre al tirar el dado, situación en que hablamos de «azar» debido a que no sabemos cuáles son las condiciones iniciales (y cabe concebir que un físico equipado con buenos instrumentos pueda predecir una tirada que otras personas no puedan).

A veces se ha defendido una tesis objetiva, opuesta a la subjetiva; pero no la estudiaré aquí (cf. los apartados 71 y 78), en cuanto que se apoya en la idea metafísica de que los eventos están —o no están— determinados en sí mismos. Si nuestra predicción tiene éxito podemos hablar de «leyes», y por lo demás no podemos saber nada acerca de la existencia o inexistencia de leyes o de irregularidades[*2].

Quizá la tesis siguiente es más digna de atención que aquella idea metafísica. Encontramos el «azar» en sentido objetivo, puede decirse, cuando nuestras estimaciones probabilitarias resultan confirmadas, del mismo modo que encontramos regularidades causales cuando las predicciones que deducimos de leyes vienen a corroborarse.

Tal vez no sea enteramente inutilizable la definición de azar implícita en esta tesis, pero debería hacerse resaltar enérgicamente que el concepto que así se ha definido no se opone al de ley; y ésta es la razón por que he llamado *azarosas* [en inglés: «*chance-like*», lit. «*parecidas* al azar» o «*como* el azar»] a las sucesiones probabilitarias. En general, será azarosa una sucesión de resultados experimentales cuando el marco de condiciones que la define difiera de las condiciones iniciales; o sea, cuando los experimentos individuales llevados a cabo en idéntico marco de condiciones partan de condiciones iniciales diversas, y den lugar, pues, a resultados diversos. En cuanto a si existen sucesiones azarosas cuyos elementos no sean previsibles de ninguna forma, es algo que ignoro. Del hecho de que una sucesión sea azarosa no podemos siquiera inferir que sus elementos no puedan predecirse, ni que sean «debidos al azar» en el sentido subjetivo de conocimiento insuficiente; y menos que nada cabe inferir de tal hecho el hecho «objetivo» de que no existan leyes[*3].

No solamente no es posible inferir, a partir del carácter azaroso de una sucesión, nada acerca de la conformidad o disconformidad a leyes de los *eventos individuales*; ni siquiera podemos inferir —partiendo de la corroboración de estimaciones probabilitarias— que la sucesión misma sea completamente irregular, ya que sabemos que existen sucesiones azarosas construidas de acuerdo con una regla matemática (cf. el apéndice IV). El hecho de que una sucesión tenga una distribución bernoulliana no es síntoma de la ausencia de leyes, y mucho menos idéntico con la ausencia de leyes «por definición[1]». No hemos de ver en el éxito de las predicciones de probabilidad otra cosa que un síntoma de la ausencia de leyes sencillas en la estructura de la *sucesión* (cf. los apartados 43 y 58) —frente a los eventos que la constituyen—; ha quedado corroborada la suposición de libertad de secuelas, que equivale a la hipótesis de que no es posible descubrir tales leyes *sencillas*, pero esto es todo.

70. LA DEDUCTIBILIDAD DE MACRO-LEYES A PARTIR DE MICRO-LEYES

Hay una doctrina que casi ha llegado a convertirse en un prejuicio, si bien últimamente ha sufrido severas críticas: la de que todos los eventos observables deben explicarse como macro-eventos, es decir, como valores medios, o sea, acumulaciones de ciertos micro-eventos (doctrina algo parecida a ciertas formas de materialismo). Como ocurre con otras de la misma índole, parece ser el resultado de una hipóstasis metafísica de una regla metodológica a la que por sí misma no cabe hacer objeciones: me refiero a la regla de que deberíamos tratar de simplificar, o generalizar, o unificar nuestras teorías empleando hipótesis explicativas del tipo mencionado (esto es, hipótesis que expliquen los efectos observables como sumas o integraciones de macro-eventos). Al valorar el éxito de semejantes intentos sería un error pensar que bastarán alguna vez hipótesis *no estadísticas* acerca de los micro-eventos y de sus interacciones para explicar los macro-eventos; pues necesitaremos, además, *estimaciones frecuenciales* hipotéticas, ya que sólo cabe deducir conclusiones estadísticas de premisas estadísticas. Dichas estimaciones son siempre hipótesis independientes, que, ciertamente, pueden ocurrírsenos a veces cuando estamos ocupados con el estudio de las leyes referentes a micro-eventos, pero que nunca pueden ser deducidas de éstas. Las estimaciones frecuenciales forman una clase especial de hipótesis: son prohibiciones que hacen algo así como referirse a regularidades de lo grande[1]; Von Mises lo ha enunciado muy claramente: «ni el teorema más minúsculo de la teoría cinética de los gases se sigue de la física clásica sola, sin supuestos adicionales de índole estadística[2]».

Las estimaciones estadísticas —o los enunciados frecuenciales— no pueden nunca deducirse simplemente de leyes de tipo «determinístico», por la sencilla razón de que para deducir predicción alguna de tales leyes se necesitan condiciones iniciales. En lugar de éstas, en toda deducción en que se obtienen leyes estadísticas a partir de micro-suposiciones de carácter determinístico o «preciso», entran suposiciones acerca de la *distribución* estadística de las condiciones iniciales: esto es, asunciones estadísticas específicas[*1].

Es sorprendente el hecho de que las suposiciones frecuenciales de la física teórica son en gran medida *hipótesis equiazarosas*, pero esto no implica en absoluto que sean «evidentes» ni válidas *a priori*; y las amplias diferencias existentes entre la estadística clásica, la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac hacen ver hasta qué punto están lejos de ser así: estas estadísticas ponen de manifiesto cómo pueden combinarse asunciones especiales con hipótesis equiazarosas, con lo cual se llega en cada caso a definiciones distintas de las sucesiones de referencia y de las propiedades primarias para las que se asume una equidistribución.

Con el ejemplo siguiente podremos tal vez dar una imagen del hecho de que las suposiciones frecuenciales son indispensables incluso aunque nos sintamos inclinados a pasarnos sin ellas.

Imaginemos una cascada. En ella podremos discernir una extraña clase de regularidad, pues el tamaño de las corrientes que componen la chorrera varía, y de cuando en cuando algo de agua salpica y se separa de la vena principal; pero a través de todas estas variaciones aparece cierta regularidad que sugiere irresistiblemente un electo estadístico. Descontando ciertos problemas de hidrodinámica aún no resueltos (referentes a la formación de torbellinos, etc.), podemos, en principio, predecir la ruta de un volumen cualquiera de agua —digamos, de un grupo de moléculas— con el grado de precisión que queramos, si se nos dan unas condiciones iniciales suficientemente precisas. Podemos suponer, por tanto, que sería posible predecir de una molécula cualquiera situada muy por encima de la caída de agua, en qué punto pasará sobre el borde, dónde llegará al socaz, etc. De este modo sería posible, en principio, calcular la trayectoria de un número cualquiera de partículas; y —dadas que estén las condiciones iniciales suficientes— seríamos capaces, en principio, de deducir cada una de las fluctuaciones estadísticas individuales de la cascada. Pero sólo cabría obtenerse de este modo ésta o aquélla fluctuación *individual*, no las regularidades estadísticas recurrentes que hemos descrito, y menos la distribución estadística general como tal. Para explicar estas últimas necesitamos estimaciones estadísticas, por lo menos la suposición de que ciertas condiciones iniciales recurrirán una y otra vez para muchos grupos diferentes de partículas (lo cual viene a equivaler a un enunciado universal): llegamos a un resultado estadístico si y sólo si hacemos tales asunciones estadísticas específicas —por ejemplo, que conciernan la distribución frecuencial de las condiciones iniciales recurrentes.

71. ENUNCIADOS PROBABILITARIOS FORMALMENTE SINGULARES

Llamo «formalmente singular» a un enunciado probabilitario cuando adscribe una probabilidad a un acontecimiento aislado, o a un elemento aislado de cierta clase de acontecimientos[*1]: por ejemplo, «la probabilidad de sacar cinco en la próxima tirada con este dado es 1/6», o «la probabilidad de sacar cinco en una tirada aislada cualquiera (con este dado) es 1/6». Por lo general, estos enunciados no se consideran enteramente correctos en su formulación, desde el punto de vista de la teoría frecuencial, ya que no es posible adscribir probabilidades a acontecimientos aislados, sino solamente a sucesiones infinitas de acontecimientos o de eventos. Sin embargo, es fácil interpretarlos como correctos, sin más que definir las probabilidades formalmente singulares valiéndonos del concepto de probabilidad objetiva o frecuencia relativa; empleo «${}_{\alpha}P_{k}(\beta)$» para denotar la probabilidad formalmente singular de que cierto acontecimiento k tenga la propiedad β, por la capacidad que le proviene de ser un elemento de la sucesión α—en símbolos[1]: $k \varepsilon \alpha$— y defino ahora la probabilidad formalmente singular del modo siguiente:

$${}_{\alpha}P_{k}(\beta) = {}_{\alpha}\mathbf{F}(\beta) \qquad (k \varepsilon \alpha) \qquad \text{(Definición)}$$

Lo cual puede expresarse lingüísticamente como sigue: la probabilidad formalmente singular de que el evento k tenga la propiedad β —dado que k sea un elemento de la sucesión α— es, por definición, igual a la probabilidad de la propiedad β en la sucesión de referencia α.

Esta sencilla definición, casi obvia, resulta ser sorprendentemente útil; y puede, incluso, ayudarnos a aclarar algunos intrincados problemas de la teoría cuántica moderna (cf. los apartados 75 y 76).

Como hace ver la definición, un enunciado probabilitario formalmente singular sería incompleto si no enunciase explícitamente una clase de referencia. Pero aunque a menudo no se menciona explícitamente a, solemos saber en tales casos de qué a se trata: así, el primer ejemplo citado no especifica ninguna sucesión de referencia a, pero está perfectamente claro que se refiere a todas las sucesiones de tiradas con dados correctos.

En muchos casos pueden existir diversas sucesiones de referencia para un evento k, y entonces resultará tal vez palmario que pueden expresarse diversos enunciados probabilitarios formalmente singulares acerca del mismo evento. Así, la probabilidad de que muera una persona concreta en un plazo dado puede tomar valores muy diferentes según la consideremos como miembro de su grupo de edad, de su grupo profesional, etc. Y no es posible dar una regla general con arreglo a la cual fuera posible escoger una clase de referencia entre varias posibles (la clase de referencia más restringida es a menudo la más apropiada, dado que sea suficientemente numerosa para permitir que la estimación probabilitaria se base en una extrapolación estadística razonable y esté apoyada por una cantidad suficiente de datos corroboradores).

No pocas de las llamadas paradojas de la probabilidad desaparecen en cuanto caemos en la cuenta de que pueden adscribirse probabilidades diferentes a uno y el mismo acontecimiento o evento, en cuanto elemento de diversas clases de referencia. Por ejemplo, se dice a veces que la probabilidad ${}_{\alpha}P_{k}(\beta)$ de un evento *antes de que suceda* es distinta a la del mismo después de haber ocurrido: antes puede ser igual a 1/6, mientras que después sólo podrá valer 1 ó 0. Desde luego, esta opinión es enteramente errónea: ${}_{\alpha}P_{k}(\beta)$ vale siempre lo mismo, tanto antes como después del suceso. Lo único que ha cambiado es que, basándonos en la información $k \varepsilon \beta$ (o la $k \varepsilon \bar{\beta}$) —que se nos puede proporcionar tras de observar el suceso—, podemos elegir una nueva clase de referencia, a saber β (o $\bar{\beta}$), y preguntar cuál es el valor de ${}_{\beta}P_{k}(\beta)$: y esta probabilidad vale, naturalmente, 1, lo mismo que ${}_{\bar{\beta}}P_{k}(\beta) = 0$. Los enunciados que nos informan sobre el resultado real de acontecimientos aislados —los cuales no se refieren a frecuencias, sino que tienen la forma «$k \varepsilon \varphi$»— no pueden cambiar la probabilidad de éstos; pueden sugerirnos, sin embargo, que elijamos otra clase de referencia.

El concepto de enunciado probabilitario formalmente singular nos proporciona una especie de puente con la teoría *subjetiva*, y, por tanto, también con la teoría del ámbito, como podrá verse en el apartado siguiente. Pues podemos acordar que interpretaremos la probabilidad formalmente singular como el «grado de creencia racional» (siguiendo a Keynes), con tal de que permitamos que nuestras «creencias racionales» se guíen por un *enunciado frecuencial* objetivo; y este último constituirá la información de que dependen nuestras creencias. Dicho de otro modo: puede ocurrir que no sepamos nada acerca de un evento, excepto que pertenece a cierta clase de referencia en la que se ha contrastado con éxito cierta estimación de probabilidad; esta información no nos capacita para predecir cuál será la propiedad del evento en cuestión, pero sí para expresar todo lo que sabemos acerca de él por medio de un enunciado probabilitario formalmente singular que tiene el aspecto de *una predicción indefinida acerca del evento concreto del caso*[*2].

Así pues, no planteo ninguna objeción a la interpretación subjetiva de los enunciados probabilitarios acerca de eventos aislados, es decir, a su interpretación como predicciones indefinidas: como si dijéramos, como confesiones de nuestro deficiente conocimiento acerca del evento concreto en cuestión (sobre el cual, es cierto, nada se sigue de un enunciado frecuencial). Esto quiere decir que no objeto nada mientras reconozcamos claramente que los *enunciados frecuenciales objetivos son fundamentales, ya que son los únicos empíricamente contrastables*. Rechazo, sin embargo, toda interpretación de los enunciados probabilitarios formalmente singulares —o predicciones indefinidas— que los convierta en enunciados acerca de una situación objetiva distinta de la situación estadística objetiva: me refiero a la opinión según la cual un enunciado sobre la probabilidad 1/6 al echar un dado no es una mera confesión de que no sabemos nada definido (teoría subjetiva), sino más bien una aserción acerca de la próxima tirada: una aserción de que su resultado está, a la vez, determinado e indeterminado, de que es algo todavía en suspenso[*3]. Considero equivocadas todas las tentativas de hacer una interpretación objetiva de este tipo (que Jeans ha debatido largamente, entre otros): cualesquiera que sean los aires indeterminísticos que puedan adoptar estas interpretaciones, todas implican la idea metafísica de que no solamente podemos deducir y contrastar predicciones, sino que —además— la Naturaleza está más o menos «determinada» (o «indeterminada»): de modo que el éxito (o el fracaso) de las predicciones no habría de explicarse por las leyes de que aquéllas se deducen, sino —sobre ello y por encima de ello— por el hecho de que la Naturaleza estaría realmente constituida (o no constituida) conforme a tales leyes[*4].

72. LA TEORÍA DEL ÁMBITO

He dicho en el apartado 34 que un enunciado falsable en mayor grado que otro puede describirse como lógicamente más improbable que éste, y que el enunciado menos falsable sería el más probable lógicamente (por otra parte, aquél entraña[1] a este último). Entre el concepto de probabilidad lógica y el de probabilidad numérica objetiva o formalmente singular existen ciertas afinidades. Algunos filósofos de la probabilidad (Bolzano, Von Kries, Waismann) han intentado basar el cálculo de probabilidades sobre el concepto de ámbito lógico, y, por ello, sobre un concepto que coincide (cf. el apartado 37) con el de probabilidad lógica; y, al mismo tiempo, han intentado sacar a luz las afinidades entre la probabilidad lógica y la numérica.

Waismann[2] ha propuesto medir el grado de relación mutua entre los ámbitos lógicos de diversos enunciados (algo así como sus razones) por medio de las frecuencias relativas correspondientes; y, por tanto, considerar que las frecuencias determinan un *sistema de medida de ámbitos*. Creo factible erigir una teoría de la probabilidad sobre estos cimientos; y podemos decir, en realidad, que este plan viene a ser como coordinar las frecuencias relativas con ciertas «predicciones indefinidas» —tal como hemos hecho en el apartado anterior al definir los enunciados probabilitarios formalmente singulares.

Debe decirse, sin embargo, que este método de definir la probabilidad es practicable sólo si se ha construido previamente una teoría frecuencial: pues de otro modo habría que preguntar cómo se definen a su vez las frecuencias empleadas para definir el sistema de medida. Mas si tenemos ya a nuestra disposición una teoría frecuencial, la introducción de la teoría del ámbito resulta verdaderamente superflua. No obstante esta objeción, considero significativa la practicabilidad de la propuesta de Waismann: es satisfactorio encontrar que una teoría más comprehensiva puede salvar el vacío —que al principio parecía insalvable— entre los diferentes intentos de abordar el problema, especialmente entre las interpretaciones subjetiva y objetiva. Con todo, la teoría de Waismann pide ciertas ligeras modificaciones. Su concepto de razón de ámbitos (cf. la nota 2 del apartado 48) no sólo presupone haber unos ámbitos que pueden compararse por medio de sus relaciones de subclasificación (o de sus relaciones de entrañamiento), sino, además —y de un modo más general—, que pueden llegar a compararse incluso ámbitos que se solapan sólo parcialmente (es decir, ámbitos de enunciados no comparables); este último supuesto, sin embargo, que entraña considerables dificultades, es superfluo. Puede mostrarse que, en los casos que interesan (tales como los de aleatoriedad), la comparación de las subclases y de las frecuencias han de llevar a resultados análogos, lo cual justifica el procedimiento de coordinar frecuencias y ámbitos con objeto de medir estos últimos: al hacer esto convertimos en comparables los enunciados en cuestión (que no lo eran por el método de las subclases). Indicaré ahora sumariamente cómo podría justificarse este procedimiento.

Si entre dos clases de propiedades, γ y β, es válida la relación de subclasificación,

$$\gamma \subset \beta$$

entonces tenemos:

$$(k)[\mathrm{Fsb}\,(k \,\varepsilon\, \gamma) \geq \mathrm{Fsb}\,(k \,\varepsilon\, \beta)] \qquad \text{(cf. el apartado 33).}$$

de suerte que la probabilidad lógica o ámbito del enunciado ($k \,\varepsilon\, \gamma$) ha de ser menor o igual a la de ($k \,\varepsilon\, \beta$). Será igual únicamente si existe una clase de referencia a (que puede ser la clase universal) con respecto a la cual se cumpla la siguiente ley (que, puede decirse, tiene la forma de una «ley natural»):

$$(x)\,\{[x \,\varepsilon\, (\alpha \,.\, \beta)] \rightarrow (x \,\varepsilon\, \gamma)\}.$$

Si no se cumple esta «ley natural» —con lo cual podemos asumir que hay aleatoriedad desde este punto de vista— se toma la desigualdad; pero, en este caso, si *a* es numerable y puede aceptarse como sucesión de referencia, tenemos:

$${}_{\alpha}\mathrm{F}\,(\gamma) < {}_{\alpha}\mathrm{F}\,(\beta).$$

Esto significa que una comparación entre ámbitos ha de llevar —en el caso de aleatoriedad— a la misma desigualdad que una comparación entre frecuencias relativas. Por tanto, si existe aleatoriedad podemos coordinar las frecuencias relativas con los ámbitos con objeto de hacer medibles estos últimos. Pero esto es precisamente lo que hemos hecho en el apartado 71 —si bien indirectamente— al definir los enunciados probabilitarios formalmente singulares; y, en realidad, de los supuestos que admitimos podríamos haber inferido inmediatamente que

$${}_{\alpha}\mathrm{F}_{k}(\gamma) < {}_{\alpha}\mathrm{F}_{k}(\beta).$$

Así, pues, hemos vuelto al punto de partida, al problema de la interpretación de la probabilidad. Y ahora nos encontramos con que cabe eliminar completamente el conflicto entre las teorías objetiva y subjetiva, que a primera vista parecía tan empedernido, mediante la definición —en cierta manera, trivial— de probabilidad formalmente singular.

CAPÍTULO NOVENO

Algunas observaciones sobre la teoría cuántica

El análisis del problema de la probabilidad que hemos realizado ha puesto a nuestra disposición unos instrumentos que podemos ahora someter a contraste, aplicándolos a uno de los problemas más frecuentados de la ciencia moderna: valiéndome de ellos intentaré analizar y aclarar algunos de los puntos más obscuros de la moderna teoría cuántica.

Es seguro que mi tentativa, algo audaz, de abordar uno de los problemas centrales de la física por medios filosóficos o lógicos ha de despertar la desconfianza del físico. Admito que su escepticismo es saludable y que su desconfianza tiene fundamento; y con todo, tengo cierta esperanza de llegar a vencer uno y otra. Pero, mientras tanto, merece la pena de recordar que en cualquier rama de la ciencia pueden muy bien brotar multitud de cuestiones principalmente de carácter lógico. Es un hecho innegable que en las discusiones epistemológicas vienen participando ardientemente físicos cuánticos, lo cual hace sospechar que ellos mismos tienen la sensación de que es menester buscar en la tierra de nadie que se encuentra entre la lógica y la física la solución de muchos de los problemas de la teoría cuántica aún por resolver.

Empezaré sentando anticipadamente las principales conclusiones que surgirán en el análisis que voy a realizar.

1) En la teoría cuántica existen ciertas fórmulas matemáticas que Heisenberg ha interpretado a base de su principio de incertidumbre: esto es, como enunciados sobre los márgenes de incertidumbre debidos a los limites de precisión que podemos alcanzar en nuestras mediciones. Intentaré mostrar que dichas fórmulas han de interpretarse como enunciados probabilitarios formalmente singulares (cf. el apartado 71), es decir, que debe dárseles una interpretación estadística: e interpretadas de esta suerte, tales fórmulas afirman que *existen ciertas relaciones entre ciertos márgenes de «dispersión» o «variando» o «diseminación»* (a las que llamaremos «relaciones estadísticas de dispersión»).

2) Trataré de hacer patente que ni el sistema de fórmulas de la teoría cuántica ni su interpretación estadística son incompatibles con medidas de mayor grado de precisión que el permitido por el principio de incertidumbre. Así pues, dicha teoría no quedaría refutada necesariamente si algún día fuesen posibles mediciones con el grado de precisión indicado.

3) Por tanto, la existencia de un límite para la precisión que se puede alcanzar, que Heisenberg ha afirmado, no será una consecuencia lógica que quepa deducir de

las fórmulas de la teoría: se trataría más bien de un supuesto separado o suplementario.

4) Aún más: este supuesto adicional de Heisenberg, en realidad *contradice* —como trataré de poner de manifiesto— a las fórmulas de la teoría cuántica si se las interpreta estadísticamente: pues no sólo son compatibles con ella mediciones más precisas, sino que cabe describir experimentos imaginarios que muestren la posibilidad de las mismas. En mi opinión, esta contradicción es la que origina todas aquellas dificultades por que se encuentra cercada la admirable estructura de la física cuántica moderna, hasta tal punto que Thirring ha podido decir que la teoría cuántica «continúa siendo un misterio impenetrable para sus propios creadores, según ellos mismos admiten[1]».

Quizá podrían caracterizarse las páginas que siguen como una investigación acerca de los fundamentos de la teoría cuántica2. En su desarrollo evitaré todos los razonamientos matemáticos y —con una sola excepción— todas las fórmulas matemáticas; será posible hacer tal cosa porque no voy a poner en cuestión si es correcto el sistema de las fórmulas matemáticas de dicha teoría, sino que me ocuparé exclusivamente de las consecuencias lógicas de su interpretación física debida a Born.

En cuanto a la controversia sobre la «causalidad», propongo que disintamos de la metafísica indeterminista (fue es tan popular actualmente. Lo que la distingue de la metafísica determinista que estaba en boga hasta hace poco entre los físicos no es tanto su mayor lucidez cuanto su mayor esterilidad.

En beneficio de la claridad, mis críticas son a menudo severas. Puede ser justo, por tanto, decir también que considero que la hazaña de los creadores de la teoría cuántica moderna es una de las mayores de toda la historia de la ciencia[*1].

73. EL PROGRAMA DE HEISENBERG Y LAS RELACIONES DE INCERTIDUMBRE

Heisenberg empezó, en su intento por asentar la teoría atómica sobre una nueva base, con un programa epistemológico[1]: el de librar a la teoría de «inobservables», esto es, de magnitudes inaccesibles a la observación experimental; podríamos decir, el de librarla de elementos metafísicos. En la teoría de Bohr, que había precedido a la propia de Heisenberg, aparecían tales magnitudes inobservables: no hay nada observable por medio de experimentos que corresponda a las órbitas de los electrones, ni siquiera a la frecuencia de sus revoluciones (ya que las frecuencias emitidas que pueden observarse en forma de líneas espectrales no podían identificarse con las frecuencias de las revoluciones electrónicas). Heisenberg esperaba que al eliminar tales magnitudes inobservables lograría curar a la teoría de Bohr de sus limitaciones.

Hay cierto parecido entre esta situación y aquélla con la que se encontró Einstein cuando trató de reinterpretar la hipótesis de la contracción, de Lorentz-Eitzgerald. Esta hipótesis trataba de explicar el resultado negativo de los experimentos de Michelson y Morley haciendo uso de magnitudes inobservables, como eran los movimientos relativos al éter inmóvil de Lorentz: o sea, de magnitudes inaccesibles a la contrastación experimental. Tanto en este caso como en el de las concepciones de Bohr, las teorías que necesitaban ser reformadas explicaban ciertos procesos naturales observables; y ambas echaban mano del insatisfactorio supuesto de que existan eventos físicos y magnitudes definidas físicamente que la Naturaleza consigue esconder de nosotros haciéndolos inaccesibles para siempre al contraste de las observaciones.

Einstein hizo ver cómo podían eliminarse los eventos inobservables inherentes a la teoría de Lorentz. Tal vez podría uno sentirse inclinado a decir lo mismo de la teoría de Heisenberg, o al menos de su contenido matemático; sin embargo, parece que aún caben muchos perfeccionamientos. Incluso desde el punto de vista de la propia interpretación que hace Heisenberg de su teoría, no parece que su programa se haya llevado a cabo del todo: la Naturaleza logra todavía escondernos hábilmente diversas magnitudes incluidas en aquélla.

Esta situación está ligada al llamado *principio de incertidumbre*, enunciado por Heisenberg, que quizá pueda explicarse del modo siguiente, Toda medición física requiere un cambio de energía entre el objeto medido y el aparato de medida (que puede ser el mismo observador): puede dirigirse sobre el objeto un rayo de luz, por ejemplo, y absorberse parte de la luz dispersada por aquél en el instrumentó de medición. Pero tal cambio de energía alterará el estado del objeto, que se encontrará, después de haber sido medido, en un estado diferente al que tenía antes; así pues, la medición hace algo así como darnos a conocer un estado que acaba de ser destruido por el proceso mismo de medición. En el caso de objetos macroscópicos puede despreciarse esta interferencia entre el proceso de medir y el objeto medido, pero no en el de objetos atómicos, ya que éstos pueden quedar profundamente afectados —por ejemplo— al sufrir una irradiación luminosa. Por tanto, a partir del resultado de una medición es imposible inferir el estado preciso de un objeto atómico inmediatamente después de haber sido medido; y, *en consecuencia, la medida no puede servir de base para hacer predicciones*. Se admite que siempre es posible averiguar por medio de una nueva medición, el estado del objeto tras la medición anterior, pero al hacer tal cosa se interfiere de nuevo con el sistema de un modo no calculable. También se admite que es siempre posible preparar nuestras mediciones de modo que no se perturben algunas de las características del estado que se va a medir (por ejemplo, el momento de la partícula); pero sólo cabe lograr esto a costa de interferir de modo aún más violento con otras magnitudes características de tal estado (en este caso, con la posición de la partícula): y si dos magnitudes tienen esta correlación mutua, se cumple para ellas el teorema de que no pueden ser medidas con precisión simultáneamente, aun cuando cada una de ellas sí puede serlo separadamente. De ahí que si aumentamos la precisión de una de la medidas —digamos, del momento p_x *al* reducir el margen o intervalo de error Δp_x— nos vemos obligados a disminuir la precisión en la medida de la coordenada de posición x, esto es, a dilatar el intervalo Δp. De forma que la máxima precisión que se puede conseguir está limitada, según Heisenberg, por la relación de incertidumbre[2]

$$\Delta x \cdot \Delta px \geq \frac{h}{4\pi}$$

En lo que se refiere a otras coordenadas sé tienen relaciones análogas. La fórmula que hemos escrito nos dice que el producto de los dos márgenes de error tiene, al menos, el orden de magnitud de h —siendo h el cuanto de acción de Planck—. Se sigue de ella que una medición completamente precisa de una de las dos magnitudes tendría como precio una indeterminación total de la otra.

Según las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, toda medición de la posición interfiere con la de la componente correspondiente del momento. Así pues, en principio es imposible *predecir la trayectoria de una partícula*: «en la nueva mecánica, el concepto de 'trayectoria' no tiene ningún significado definido…»[3].

Pero aquí surge la primera dificultad. Las relaciones de incertidumbre se aplican sólo a las magnitudes (características de estados físicos) que pertenecen a la partícula después de que se han realizado las mediciones. En principio, es posible averiguar con una precisión ilimitada la posición y el momento de un electrón *hasta el instante de la medición*: lo cual se sigue del hecho mismo de que es posible llevar a cabo varias operaciones de medida sucesivas. Por tanto, combinando los resultados de: *a*) dos mediciones de posición, *b*) una medición de posición precedida de una de momento o *c*) una medición de posición seguida por una de momento, sería posible calcular, con los datos obtenidos, las coordenadas exactas de posición y de momento durante todo el período de tiempo comprendido entre las dos mediciones (empezaremos limitando nuestras consideraciones exclusivamente a este intervalo[4]). Pero —según Heisenberg— estos cálculos precisos no pueden utilizarse para hacer predicciones, y, por tanto, es imposible contrastarlos: lo cual ocurriría porque dichos cálculos son válidos para la trayectoria entre los dos experimentos solamente si el segundo es sucesor inmediato del primero —en el sentido de que no ha ocurrido ninguna otra interferencia en el lapso de tiempo entre uno y otro—. Toda contrastación que pudiera disponerse con el propósito de comprobar la trayectoria entre ambos experimentos habrá de perturbarla de suerte que nuestros cálculos acerca de la trayectoria exacta pierdan su validez. Heisenberg dice acerca de dichos cálculos exactos: «… el que atribuyamos realidad física a la historia anterior del electrón, que hemos calculado, es una pura cuestión de gusto[5]»: con lo cual quiere decir, sin duda, que semejantes cálculos de trayectorias que no son contrastables, carecen de significación desde el punto de vista del físico. Schlick comenta este pasaje de Heisenberg del modo siguiente: «Yo me hubiera expresado aún más enérgicamente, de completo acuerdo con las tesis fundamentales de Bohr y de Heisenberg mismos, que creo incontestables. Si un enunciado referente a la posición de un electrón en el campo de las dimensiones atómicas no es verificable, entonces no podemos atribuirle ningún sentido: resulta imposible hablar de la 'trayectoria' de una partícula entre dos puntos en que ha sido observado[6]». (En March[7], Weyl[8] y otros pueden encontrarse análogos comentarios).

Mas, como acabamos de oír, es posible calcular semejante trayectoria «sin sentido» o metafísica por medio del nuevo formalismo. Lo cual hace patente que Heisenberg no ha conseguido llevar a cabo por completo su programa, ya que esta situación tolera solamente dos interpretaciones. La primera sería que la partícula tiene una posición y un momento exactos (y, por consiguiente, una trayectoria exacta), pero que es imposible para nosotros medir ambos simultáneamente; en tal caso, la Naturaleza seguiría estando dispuesta a esconder a nuestra mirada ciertas magnitudes físicas: no la posición, ni el momento de la partícula, sino la combinación de estas dos magnitudes, la «*positio cum momento*» o la «trayectoria». Esta interpretación considera que el principio de incertidumbre es una limitación de nuestro conocimiento, y, por tanto, es *subjetiva*. La otra interpretación posible, que es *objetiva*, afirma que es inadmisible —o incorrecto, o metafísico— atribuir a la partícula nada que sea una «*positio cum momento*» o una «trayectoria» netamente definidas: simplemente, no *tiene* «trayectoria», sino sólo una posición exacta combinada con un momento inexacto, o un momento exacto combinado con una posición inexacta. Pero si aceptamos esta interpretación, entonces el formalismo de la teoría vuelve a contener elementos metafísicos, ya que —según hemos visto— cabe calcular exactamente una «trayectoria» o una «*positio cum momento*» de la partícula para aquellos períodos de tiempo en los que es imposible, en principio, contrastarlas por medio de la observación.

Es revelador ver cómo los campeones de la relación de incertidumbre vacilan entre el tratamiento subjetivo y el objetivo. Schlick, por ejemplo, inmediatamente después de haber sustentado la tesis objetiva —como hemos leído— dice: «Es imposible afirmar con sentido de los eventos naturales cosas tales como 'esfumamiento' o 'inexactitud'. Todas las cosas de esta índole pueden aplicarse solamente a nuestros propios pensamientos (especialmente, si no sabemos cuáles enunciados… son verdaderos)»: observación que es obvio está dirigida precisamente *contra* la interpretación que supone que no es nuestro conocimiento, sino el momento de la partícula lo que se vuelve algo así como «difuso» o «borroso» a consecuencia de haberse medido de forma precisa su posición[*1]. Y otros autores muestran vacilaciones parecidas. Pero, ya se decida uno en favor de la tesis objetiva o de la subjetiva, subsiste el hecho de que el programa de Heisenberg no se ha llevado a cabo y de que no ha tenido éxito en la tarea que se había impuesto de expulsar todos los elementos metafísicos de la teoría atómica. Por tanto, no se gana nada en absoluto cuando se intenta, con Heisenberg, fundir las dos interpretaciones opuestas con observaciones tales como la de que «… realmente ha dejado de ser posible una física 'objetiva' en este sentido, esto es, en el de una división neta del mundo en sujeto y objeto[9]». Hasta ahora, Heisenberg no ha realizado la tarea que se había propuesto: no ha purgado aún la teoría cuántica de sus elementos metafísicos.

74. BREVE BOSQUEJO DE LA INTERPRETACIÓN ESTADÍSTICA DE LA TEORÍA CUÁNTICA

Al deducir las relaciones de incertidumbre, Heisenberg sigue a Bohr en cuanto que hace uso de la idea de que los procesos atómicos pueden ser representados igualmente por la «imagen teórico-cuántica de partícula» que por la «imagen teórico-cuántica de onda».

Esta idea está en conexión con el hecho de que la teoría cuántica moderna ha avanzado por dos rutas diferentes. Heisenberg partió de la clásica teoría del electrón como corpúsculo, que reinterpretó de acuerdo con la teoría cuántica; mientras que Schrödinger tomó como origen la teoría ondulatoria de De Broglie (igualmente «clásica»): coordinó a cada electrón un «paquete de ondas», esto es, un grupo de oscilaciones que se refuerzan por interferencia en el interior de una pequeña región y se anulan mutuamente fuera de ella. Schrödinger ha hecho ver más tarde que su mecánica ondulatoria conduce a resultados matemáticamente equivalentes a los de la mecánica corpuscular de Heisenberg.

La interpretación estadística dada por Born de ambas teorías resolvió la paradoja de que fuesen equivalentes dos imágenes tan radicalmente diferentes como las de partícula y onda: puso de manifiesto que también la teoría ondulatoria puede tomarse como teoría corpuscular, ya que cabe interpretar la ecuación de onda de Schrödinger de modo que nos dé la *probabilidad de encontrar* el corpúsculo en una región cualquiera dada del espacio (la probabilidad está determinada por el cuadrado de la amplitud de onda: es grande en el interior del paquete de ondas, en que éstas se refuerzan mutuamente, y tiende a cero fuera de él).

Varias facetas de la situación del problema sugerían que la teoría cuántica debía interpretarse estadísticamente. Su tarea más importante —la deducción de los espectros atómicos— tenía que considerarse *estadística* desde que apareció la hipótesis einsteiniana de los fotones (o cuantos de luz), ya que ésta interpretaba los efectos luminosos observados como fenómenos masivos, debidos a la incidencia de muchos fotones. «Los métodos experimentales de la física atómica…, guiados por la experiencia, llegan a ocuparse exclusivamente de cuestiones estadísticas. La mecánica cuántica, que nos proporciona la teoría sistemática de las regularidades observadas, corresponde, en todos los respectos, al estado actual de la física experimental: pues se limita, desde el comienzo, a preguntas estadísticas y a respuestas estadísticas[1]».

La teoría cuántica llega a resultados que divergen de los de la mecánica clásica solamente al aplicarse a los problemas de la física atómica: en lo que se refiere a las aplicaciones a los procesos macroscópicos, sus fórmulas conducen, dentro de una estrecha aproximación, a las de aquella disciplina. «Según la teoría cuántica, las leyes de la mecánica clásica son válidas si se las considera como enunciados acerca de las relaciones entre medias estadísticas», dice March[2]: dicho de otro modo, cabe deducir las fórmulas clásicas como macro-leyes.

En algunas exposiciones se pretende *explicar* la interpretación estadística de la teoría cuántica por el hecho de que la precisión que se puede alcanzar en la medida de las magnitudes físicas está limitada por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg. Se argumenta diciendo que, *debido a esta incertidumbre* de las medidas correspondientes a los experimentos atómicos, «… en general, el resultado no estará determinado: esto es, si el experimento se repite varias veces bajo idénticas condiciones se obtendrán varios resultados diferentes. Si se repite un gran número de veces se encontrará que cada resultado concreto se obtiene una fracción determinada del número total de veces, ele suerte que puede decirse que hay una probabilidad determinada de que aparezca tal resultado cada vez que se realiza el experimento» (Dirac)[3]. March escribe también refiriéndose a la relación de incertidumbre: «Entre el presente y el futuro existen… solamente relaciones probabilitarias; por lo cual, resulta claro que el carácter de la nueva mecánica ha de ser el de una teoría estadística[4]».

No creo que este análisis de las relaciones entre las fórmulas de incertidumbre y la interpretación estadística de la teoría cuántica sea aceptable. Me parece que la relación lógica existente es justamente la contraria: pues podemos deducir las fórmulas de incertidumbre de la ecuación de ondas de Schrödinger (que ha de interpretarse estadísticamente), pero no esta última de aquéllas.

Para tener en cuenta como es debido estas relaciones de deductibilidad, será menester que sometamos a una revisión la interpretación de las fórmulas de incertidumbre.

75. UNA INTERPRETACIÓN ESTADÍSTICA DE LAS FÓRMULAS DE INCERTIDUMBRE

A partir de Heisenberg se acepta como un hecho firmemente establecido que cualesquiera mediciones que se hicieran simultáneamente de la posición y el momento, con precisión superior a la permitida por las relaciones de incertidumbre de aquel autor, contradirían a la teoría cuántica: pues se cree que es posible deducir lógicamente de ésta —o de la mecánica ondulatoria— la «prohibición» de mediciones exactas. Según esta opinión, debería considerarse falsada la teoría si se llevaran a cabo, realmente, experimentos que condujesen a medidas de una «exactitud prohibida[1]»

Creo que esta opinión es falsa. Desde luego, es cierto que las fórmulas de

Heisenberg $\left(\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}, etc.\right)$ se obtiene como conclusiones lógicas de aquella teoría[2], pero la *interpretación* de estas fórmulas como reglas que limitan la precisión alcanzable en las medidas, en el sentido de Heisenberg, no se sigue de la teoría; por tanto, cualesquiera mediciones más exactas que las permitidas según Heisenberg no pueden contradecir lógicamente a la teoría cuántica, ni a la mecánica ondulatoria. En vista de lo cual, trazare una distinción neta entre las *fórmulas* —que llamaré, por razones de brevedad, las «fórmulas de Heisenberg»— y su interpretación (también debida a Heisenberg) como relaciones de incertidumbre: esto es, como enunciados que imponen *limitaciones a la precisión de medida alcanzable*.

Cuando se procede a deducir matemáticamente las fórmulas de Heisenberg, se tiene que emplear la ecuación de onda u otra asunción equivalente: esto es, una asunción que pueda *interpretarse estadísticamente* (como hemos visto en el apartado anterior). Ahora bien; al adoptar semejante interpretación, la descripción de una partícula aislada como un paquete de ondas no es, sin duda alguna, sino *un enunciado probabilitario formalmente singular* (cf. el apartado 71): como vimos más arriba, la amplitud de onda determina la probabilidad de detectar la partícula en un lugar determinado, y justamente a este tipo de enunciado probabilitario —al tipo que se refiere a un corpúsculo (o evento) aislado— es al que he llamado «formalmente singular». Si se acepta la interpretación estadística de la teoría cuántica, entonces se ve uno obligado a interpretar a su vez como enunciados probabilitarios (y de nuevo como formalmente singulares si se aplican a una partícula aislada) aquellos enunciados que —como las fórmulas de Heisenberg— pueden deducirse de enunciados probabilitarios formalmente singulares de la teoría; por tanto, también aquéllos han de interpretarse, en última instancia, como *aserciones estadísticas*.

Frente a la interpretación subjetiva de, «cuanto mayor sea la precisión con que medimos la posición de un corpúsculo menos sabremos acerca de su momento», propongo que se acepte una interpretación objetiva y estadística de las relaciones de incertidumbre, que habría de ser la fundamental, y que podría expresarse del modo siguiente. Dado un agregado de partículas y una selección —en el sentido de una separación física— de aquéllas que en un cierto instante y con cierto grado de precisión dado tengan una posición x, encontraremos que sus momentos p_x muestran una dispersión aleatoria; y que la dispersión Δp_x será tanto mayor cuanto menor hayamos hecho Δx, es decir, la dispersión o imprecisión tolerada para la posición. Y viceversa: si seleccionamos —o separamos— las partículas cuyos momentos p_x se encuentren dentro de un margen prescrito Δp_x, encontraremos que sus posiciones se dispersan en forma aleatoria dentro de un margen Δx, que será tanto mayor cuanto menor hayamos hecho Δp_x, esto es, el margen de dispersión o de imprecisión tolerada para los momentos. Y, finalmente: si tratamos de seleccionar las partículas que poseen las dos propiedades Δx y Δp_x sólo podremos realizar físicamente tal selección

—o sea, separar físicamente las partículas— si los dos márgenes se hacen suficientemente grandes como para satisfacer la inecuación $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{4\pi}{h}$. Según esta interpretación objetiva de las fórmulas de Heisenberg, éstas afirmarían que se cumplen ciertas relaciones entre ciertos márgenes de dispersión; y me referiré a aquéllas, interpretadas de este modo, con el nombre de «*relaciones estadísticas de dispersión*[*1]».

Hasta ahora, en mi interpretación estadística no he mencionado *medición* alguna: únicamente he aludido a *selección física*[3]. Es necesario que aclaremos ahora las relaciones existentes entre ambos conceptos.

Hablo de selección o de separación físicas cuando, por ejemplo, de un chorro de corpúsculos eliminamos con una pantalla todos excepto los que pasan a través de una estrecha abertura Δx, es decir, a través de un margen Δx tolerado para su posición; y diré que las partículas pertenecientes al rayo que hemos aislado de este modo han sido seleccionadas físicamente —o técnicamente— de acuerdo con su propiedad Δx. A éste sólo proceso —o a su resultado, esto es, el rayo corpuscular aislado física o técnicamente— es a lo que designaré con «selección física»: contraponiéndolo a una selección puramente «mental» o «imaginada», como la que hacemos al hablar de la clase de todos los corpúsculos que han pasado o han de pasar a través del margen Δx, es decir, de una clase dentro de una clase más amplia de corpúsculos de la cual no ha sido extraída físicamente.

Ahora bien; toda selección física puede considerarse, desde luego, como una *medición*, y cabe emplearla realmente como tal[4]. Si un rayo de partículas, digamos, se selecciona interceptando con una pantalla o cerrando el paso a todas las que no se deslizan a través de cierto margen de posiciones («selección de lugar»), y si después se mide el momento de una de ellas, podemos considerar la selección de lugar como una medida, ya que gracias a ella sabemos que la partícula ha pasado por cierta posición (aunque a veces no sabemos cuándo sucedió tal cosa, o podemos saberlo únicamente mediante otra medición). Por otro lado, no hemos de considerar toda medición como una selección física. Imaginemos, por ejemplo, un rayo monocromático de electrones moviéndose en la dirección *x*; empleando un contador de Geiger podemos registrar los electrones que llegan a una posición determinada; y por medio de los intervalos temporales entre los impactos sobre el contador podemos medir, asimismo, intervalos espaciales, es decir, medimos sus posiciones en la dirección *x* hasta el momento del impacto; pero al realizar estas mediciones no llevamos a cabo una selección física de las partículas de acuerdo con sus posiciones en la dirección *x* (*y*, en realidad, tales mediciones nos darán, en general, una distribución completamente aleatoria de las posiciones en la dirección *x*).

Así pues, nuestras relaciones estadísticas de dispersión se reducen en su aplicación física a lo siguiente: si por los medios físicos que sean se intenta conseguir *un agregado de partículas lo más homogéneo posible*, nos encontraremos con las relaciones—^de dispersión, que forman una barrera específica frente a tal intento. Por ejemplo, es posible obtener por una selección física un rayo monocromático plano (digamos, un rayo de electrones de igual momento); pero si pretendemos hacer aún más homogéneo este agregado de electrones —quizá eliminando con una pantalla parte de él—, con objeto de tener electrones que no sólo tengan el mismo momento, sino que hayan pasado a través de una estrecha hendidura que determine un margen de posiciones Δx, entonces hemos de fracasar: porque toda selección de acuerdo con la posición de las partículas equivale a una interferencia con el sistema, que dará como resultado un aumento de la dispersión de las componentes p_x de los momentos; de suerte que ésta crecerá (de conformidad con la ley expresada por la fórmula de Heisenberg) al estrecharse la hendidura. Y a la inversa: si se nos da un rayo seleccionado de acuerdo con la posición gracias a haber pasado por una ranura, y si tratamos de hacerlo «paralelo» (o «plano») y monocromático, hemos de destruir la selección ejecutada según la posición, ya que no podemos evitar que aumente el ancho del rayo. (En el caso ideal —por ejemplo, si todas las componentes p_x de las partículas se han hecho igual a 0— la anchura tendría que hacerse infinita). Si la homogeneidad de una selección se ha hecho lo más grande posible (esto es, todo lo que permiten las fórmulas de Heisenberg, de forma que sea aplicable el signo de igualdad en las mismas), diremos que se trata de un *caso puro*[5].

Al emplear esta terminología, podemos formular las relaciones estadísticas de dispersión así: no existe agregado de partículas más homogéneo que el de un caso puro[*2].

No se ha tenido hasta ahora suficientemente en cuenta que a la deducción matemática de las fórmulas de Heisenberg a partir de las ecuaciones fundamentales de la teoría cuántica ha de corresponder justamente una deducción de la *interpretación* de aquellas fórmulas partiendo de la *interpretación* de dichas ecuaciones. March, por ejemplo, ha descrito la situación exactamente del modo inverso (como hemos indicado en el apartado anterior): la interpretación estadística de la teoría cuántica aparece —según él la presenta— como una consecuencia de las limitaciones de Heisenberg acerca de la precisión alcanzable. Por otra parte, Weyl da una deducción estricta de las fórmulas de Heisenberg a partir de la ecuación de ondas (que interpreta en sentido estadístico); pero su interpretación de tales fórmulas —que acaba de deducir de una premisa interpretada estadísticamente— las convierte en limitaciones impuestas a la precisión alcanzable. Y obra de tal modo pese al hecho de darse cuenta de que su interpretación de las fórmulas es contraria en ciertos aspectos a la interpretación estadística de Born; pues, según Weyl, esta última ha de someterse a «una corrección» a la luz de las relaciones de incertidumbre: «No se trata meramente de que la posición y la velocidad de una partícula estén sujetas justamente a leyes estadísticas, estando, por lo demás, determinadas con precisión en cada caso aislado, sino que el mismo sentido de estos conceptos depende de las mediciones que necesitamos para averiguar su valor: y la medida exacta de la posición nos hurta la posibilidad de averiguar la velocidad[6]».

El conflicto —de que se percató Weyl— entre la interpretación estadística de Bora de la teoría cuántica y las limitaciones de Heisenberg que se imponen a la precisión alcanzable existe verdaderamente; pero es más agudo de lo que Weyl pensaba. No sólo es imposible deducir las limitaciones citadas de la ecuación de onda estadísticamente interpretada, sino que el hecho (que todavía no he demostrado) de que ni los experimentos posibles ni los resultados experimentales reales concuerden con la interpretación de Heisenberg puede considerarse como un argumento decisivo —una especie de *experimentum crucis*— a favor de la interpretación estadística de la teoría cuántica.

76. UN INTENTO DE ELIMINAR LOS ELEMENTOS METAFÍSICOS POR INVERSIÓN DEL PROGRAMA DE HEISENBERG; CON APLICACIONES

Si partimos del supuesto de que las fórmulas peculiares de la teoría cuántica sean hipótesis probabilitarias —y, por tanto, enunciados estadísticos— es difícil ver cómo podrán deducirse prohibiciones de eventos aislados de una teoría estadística del carácter indicado (excepto, tal vez, en los casos en que la probabilidad sea igual al o a 0). La creencia de que unas medidas aisladas puedan contradecir a las fórmulas de la física cuántica parece insostenible lógicamente: tan insostenible como la creencia de que puede descubrirse algún día una contradicción entre un enunciado probabilitario formalmente singular, $_{\alpha}P_{k}(\beta) = p$ (digamos, «la probabilidad de que en la tirada k salga un cinco, es igual a 1/6»), y uno de los dos enunciados siguientes: $k \varepsilon \beta$ («de hecho sale un cinco») y $k \varepsilon \bar{\beta}$(«de hecho no sale un cinco»).

Estas sencillas consideraciones ponen a nuestra disposición la manera de refutar cualquiera de las supuestas demostraciones destinadas a hacer ver que una medición exacta de la posición y del momento estaría en contradicción con la teoría cuántica —o, quizá, a hacer ver que la mera suposición de que semejantes medidas sean posibles tiene que conducir a contradicciones en el seno de esta teoría—. Pues toda demostración de tal índole ha de emplear consideraciones teórico-cuánticas aplicadas a partículas *aisladas*: lo cual quiere decir que ha de utilizar enunciados probabilitarios formalmente singulares, y, además, que tiene que ser posible traducir la demostración —poco menos que palabra por palabra— al lenguaje estadístico. Si hacemos tal cosa nos encontramos con que no hay contradicción entre las medidas que hemos supuesto muy precisas y la teoría cuántica en su interpretación estadística; existe solamente una contradicción aparente entre estas medidas precisas y ciertos enunciados probabilitarios formalmente singulares de la teoría. (Examinaremos en el apéndice v un ejemplo de este tipo de demostración).

Pero, si bien es erróneo decir que la teoría cuántica *excluye* medidas exactas, será correcto afirmar que *no se pueden deducir predicciones singulares precisas* de fórmulas peculiares a la teoría cuántica —si es que se las interpreta estadísticamente

— (y no cuento la ley de conservación de la energía ni la de conservación del momento entre las fórmulas que acabo de mencionar).

Esto es así porque, tejiendo en cuenta las relaciones de dispersión, hemos de fracasar muy especialmente en nuestro intento de conseguir condiciones iniciales precisas por manipulación física del sistema (esto es, por lo que he llamado selección física). Ahora bien; es completamente cierto que la técnica normal del experimentador reside en *producir o construir* condiciones iniciales: lo cual nos permite deducir de nuestras relaciones estadísticas de dispersión el teorema —que, sin embargo, sólo es válido para la técnica experimental «*constructiva*»— de que a partir de la teoría cuántica no podemos llegar a predicción singular alguna, sino solamente a predicciones frecuenciales[1].

Este teorema resume mi actitud con respecto a todos aquellos experimentos imaginarios que Heisenberg discute (siguiendo en gran medida a Bohr) con objeto de demostrar que es imposible realizar mediciones de una precisión prohibida por su principio de incertidumbre. En todos los casos, lo esencial es lo mismo: la dispersión estadística hace imposible *predecir* cuál será la trayectoria de la partícula después de la operación de medida.

Muy bien puede parecer que no hemos ganado mucho al reinterpretar el principio de incertidumbre: pues incluso Heisenberg no afirma fundamentalmente (como he tratado de hacer ver), sino que nuestras *predicciones* están sujetas a dicho principio; y como en esta materia estoy de acuerdo con él, hasta cierto punto, podría pensarse que estoy alborotando sólo por unas palabras, en lugar de debatir ninguna cuestión esencial. Pero esta opinión apenas haría justicia a mi razonamiento: pienso, en realidad, que la tesis de Heisenberg y la mía son diametralmente opuestas, como pondré de manifiesto extensamente en el próximo apartado; mientras tanto, trataré de resolver las dificultades típicas de la interpretación de Heisenberg, e intentaré poner en claro cómo y por qué surgen.

Debemos examinar primeramente la dificultad con la que se malogra, como hemos visto, el programa de Heisenberg: es la aparición en el formalismo de enunciados precisos de posición más momento; o, dicho de otro modo, de cálculos exactos de una trayectoria (cf. el apartado 73) cuya realidad física Heisenberg se ve obligado a poner en duda, mientras que otros —como Schlick— la niegan rotundamente. Pero todos los experimentos en cuestión, *a*), *b*) y *c*) —véase el apartado 73—, pueden interpretarse estadísticamente. Por ejemplo, la combinación c) —esto es, una medición de posición seguida de una de momento— puede realizarse por medio de un experimento tal como el siguiente. Seleccionamos un rayo según la posición, por medio de un diafragma con una estrecha ranura (medida de posición); medimos luego el momento de las partículas que, procedentes de la ranura, se movían en una dirección determinada (medición que, naturalmente, producirá una nueva dispersión de las posiciones); los dos experimentos juntos determinarán con precisión la trayectoria de todas las partículas que pertenecen a la segunda selección (en lo que se refiere a la trayectoria entre las dos mediciones): pues cabe calcular con precisión tanto la posición como el momento entre las dos operaciones de medir.

Ahora bien; estas mediciones y estos cálculos, que corresponden precisamente a los elementos considerados superfluos en la interpretación de Heisenberg de la teoría, en la que yo hago son todo menos superfluos. Reconozco que no sirven como condiciones iniciales o como base para deducir predicciones, pero, sin embargo, son indispensables: *se necesitan para contrastar nuestras predicciones, que son predicciones estadísticas*. Pues lo que afirman nuestras relaciones estadísticas de dispersión es que los momentos deben dispersarse cuando las posiciones están determinadas más exactamente, y viceversa. Lo cual es una predicción que no sería contrastable —o falsable— si no estuviésemos en situación de medir y calcular, mediante los experimentos del tipo descrito, los diferentes momentos dispersos que aparecen inmediatamente después de haberse realizado una selección de acuerdo con la posición[*1].

La teoría estadísticamente interpretada, por tanto, no sólo no excluye la posibilidad de mediciones aisladas exactas, sino que sería no contrastable —y, por tanto, «metafísica»— si fueran imposibles. Con lo cual hemos logrado cumplir el programa de Heisenberg (la eliminación de los elementos metafísicos), pero por un método exactamente opuesto al suyo: ya que, mientras él trataba de excluir ciertas magnitudes que consideraba inadmisibles (sin llegar a conseguirlo enteramente), yo he invertido su tentativa, por así decirlo, haciendo ver que el formalismo que contiene dichas magnitudes es correcto precisamente porque *éstas no son metafísicas*. Una vez que hemos abandonado el dogma incluido en la limitación impuesta por Heisenberg sobre la precisión alcanzable, ya no hay razón por la que hayamos de dudar de la significación física de tales magnitudes, las relaciones de dispersión son predicciones frecuenciales acerca de trayectorias: y, por tanto, éstas han de ser medibles —justamente del mismo modo en que han de poderse averiguar empíricamente, digamos, las tiradas en que sale cinco— para que seamos capaces de contrastar nuestras predicciones frecuenciales acerca de ellas —o acerca de dichas tiradas.

La repulsa de Heisenberg al concepto de trayectoria, y su hablar de «magnitudes no observables», hacen ver claramente la influencia de ideas filosóficas, especialmente positivistas. Bajo la misma influencia escribe March: «Tal vez pueda decirse, sin miedo de ser mal entendido… que para el físico un cuerpo sólo tiene realidad en el instante en que lo observa. Como es natural, nadie está tan enajenado como para afirmar que un cuerpo cesa de existir en el momento en que nos volvemos de espaldas a él; pero en ese momento cesa de ser objeto de investigación para el físico, pues no existe posibilidad de decir nada acerca de él que esté basado en experimentos[2]» Dicho de otro modo: la hipótesis de que un cuerpo se mueve siguiendo esta o aquella trayectoria mientras no se le observa es *inverificable*: lo cual es obvio, desde luego, pero carece de interés. Lo que sí tiene importancia, sin embargo, es que esta hipótesis y otras parecidas a ella son *falsables*: basándonos en la hipótesis de que se mueve a lo largo de cierta trayectoria somos capaces de predecir que será observable en tal o cual posición, lo cual constituye una predicción que puede refutarse. En el próximo apartado veremos que la teoría cuántica no excluye este modo de proceder; pero, en realidad, lo que hemos dicho ahora es muy suficiente[*2], ya que acaba con todas las dificultades en relación con la «carencia de sentido» del concepto de trayectoria. Nos daremos cuenta de hasta qué punto aclara esto la atmósfera si recordamos las drásticas conclusiones que se habían extraído del supuesto fallo del concepto de trayectoria, y que Schlick formula de este modo: «Quizá el modo más conciso de describir la situación que estamos examinando sea decir (como hacen los investigadores más eminentes de los problemas cuánticos) que la validez de los conceptos ordinarios espacio-temporales está confinada a la esfera de lo observable macroscópicamente, y que éstos no son aplicables a las dimensiones atómicas[3]». Schlick alude aquí probablemente a Bohr, que escribe: «Por tanto, puede asumirse que, en lo que se refiere al problema general de la teoría cuántica, no es una mera cuestión de un cambio en las teorías mecánicas y electrodinámicas, y que podría describirse con les conceptos físicos ordinarios, sino el fracaso profundo de nuestras imágenes espacio-temporales, que hasta ahora se habían utilizado para la descripción de los fenómenos naturales[4]». Heisenberg adoptó esta idea de Bohr —a saber, la renuncia a las descripciones espacio-temporales— como base de su programa de investigación; su éxito pareció hacer patente que se trataba de una renuncia fructuosa, pero, realmente, el programa no llegó nunca a realizarse basta el final. A la luz de nuestro análisis parece ahora justificable el empleo frecuente e inevitable —si bien se haga subrepticiamente— de conceptos espacio-temporales; pues aquél ha puesto de manifiesto que los relaciones estadísticas de dispersión son enunciados acerca de la dispersión de la posición más momento, y, por ello, enunciados sobre trayectorias.

Una vez que hemos mostrado que las relaciones de incertidumbre son enunciados probabilitarios formalmente singulares, podemos desenmarañar también la intrincada madeja de sus interpretaciones objetiva y subjetiva. En el apartado 71 nos dimos cuenta de que todo enunciado de este tipo puede interpretarse asimismo subjetivamente, como una predicción indefinida, es decir, como un enunciado referente a la incertidumbre de nuestro conocimiento. Hemos visto también bajo qué Supuestos tiene que fracasar el intento justificado y necesario de interpretar objetivamente un enunciado de esta índole: cuando se pretende sustituir una interpretación objetiva estadística por una interpretación objetiva singular, atribuyendo la incertidumbre directamente al evento aislado[*3]. Con todo, si se interpretan (directamente) las fórmulas de Heisenberg en un sentido subjetivo, se pone en peligro la posición de la física como ciencia objetiva, ya que para ser coherente habría que interpretar asimismo subjetivamente las ondas de probabilidad de Schrödinger; ésta es la conclusión que saca Jeans[5], que escribe: «En resumen, la imagen corpuscular nos dice que nuestro conocimiento de un electrón es indeterminado; la imagen ondulatoria, que el electrón mismo es indeterminado, ya realicemos experimentos con él o no. Pero el contenido del principio de incertidumbre tiene que ser el mismo en ambos casos; y sólo hay una manera de lograr tal cosa: hemos de suponer que la imagen ondulatoria no nos da una representación de la Naturaleza objetiva, sino de nuestro conocimiento de la Naturaleza…». Por tanto, para Jeans las ondas de Schrödinger son *ondas de probabilidad subjetiva*, ondas de nuestro conocimiento: con lo cual, toda la teoría subjetiva de la probabilidad invade el dominio de la física, y los razonamientos que he rechazado —el empleo del teorema de Bernoulli como «puente» de la ignorancia al conocimiento estadístico, y otros parecidos (cf. el apartado 62)— resultan inevitables. Jeans formula del modo siguiente la actitud subjetivista de la física moderna: «Heisenberg ha abordado el enigma del universo físico abandonando el enigma principal —el de la naturaleza del universo objetivo— por insoluble, y dedicándose al rompecabezas más reducido de coordinar nuestras observaciones del universo. Por ello, no sorprende que la imagen ondulatoria que ha surgido finalmente demuestre referirse con exclusividad a nuestro conocimiento del universo tal y como se consigue a través de nuestras observaciones».

Sin duda alguna, estas observaciones parecerán sumamente aceptables a los positivistas. Pero mis propias opiniones acerca de la objetividad no han quedado afectadas. Los enunciados estadísticos de la teoría cuántica tienen que ser contrastables intersubjetivamente, del mismo modo que cualesquiera otros enunciados de la física; y mi sencillo análisis no sólo pone a salvo la posibilidad de descripciones espacio-temporales, sino también el carácter objetivo de la física.

Es interesante saber que existe una contrapropuesta simétrica de la interpretación subjetiva mencionada de las ondas de Schrödinger, a saber, una interpretación no estadística, y, por tanto, objetiva directa (esto es, singular). El mismo Schrödinger, en sus famosos *Collected Papers on Wave-Mechanics*, ha propuesto cierta interpretación de este tipo para su ecuación de onda (que, como liemos visto, es un enunciado probabilitario formalmente singular): ha tratado de identificar inmediatamente la partícula con el paquete de onda mismo. Pero esta tentativa lleva directamente a las dificultades características de este género de interpretaciones, quiero decir, a adscribir la incertidumbre a los objetos físicos mismos (incertidumbres objetivizadas): Schrödinger se ha visto forzado a admitir que la carga del electrón estaba «difusa» o «borrosa» en el espacio (con una densidad de carga determinada por la amplitud de onda) —asunción que ha resultado ser incompatible con la estructura atómica de la electricidad[6]—. La interpretación estadística de Born ha resuelto el problema, pero la conexión lógica existente entre las interpretaciones estadística y no estadística ha permanecido obscura; y así ha ocurrido que se ha continuado sin caer en la cuenta del carácter peculiar de otros enunciados probabilitarios formalmente singulares —tales como las relaciones de incertidumbre—, que han podido seguir socavando las bases físicas de la teoría.

Quizá pueda concluir con una aplicación de lo dicho en este apartado a un experimento imaginario propuesto por Einstein[7], y que Jeans llama[8] «una de las partes más difíciles de la teoría cuántica nueva»; si bien me parece que nuestra interpretación lo hace completamente claro, si no trivial[*4].

Imagínese un espejo semitransparente, esto es, que refleja parte de la luz y deja pasar a su través otra parte. La probabilidad formalmente singular de que un fotón (o cuanto luminoso) dado atraviese el espejo, ${}_{\alpha}P_{k}(\beta)$, puede admitirse que sea igual a la de ser reflejado; tenemos, por tanto,

$${}_{\alpha}P_{k}(\beta) = {}_{\alpha}P_{k}(\bar{\beta}) = ½.$$

Esta estimación probabilitaria, como sabemos, está definida dentro de las probabilidades estadísticas objetivas: es decir, es equivalente a la hipótesis de que la mitad de una clase dada de cuantos de luz, α, pasará a través del espejo, mientras que la otra mitad será reflejada. Sea ahora k un fotón que incide sobre el espejo, y sea el caso que se averigüe experimentalmente que este fotón ha sido reflejado; entonces, parece que las probabilidades cambian como si fuese repentinamente, de modo discontinuo: todo ocurre como si antes del experimento hubieran sido ambas iguales a ½, pero que una vez sabido el hecho de la reflexión se hubiesen vuelto de repente 0 y 1, respectivamente. Es evidente que este ejemplo es, en realidad, el mismo que hemos propuesto en el apartado 71[*5]. Y difícilmente aclara la situación el describir este experimento —tal como lo hace Heisenberg[9]— en los siguientes términos: «Mediante el experimento [esto es, la medición por la cual encontramos el fotón reflejado] se ejerce cierto tipo de acción física (una reducción de los paquetes de ondas) desde el lugar en que se ha encontrado la mitad reflejada del paquete de ondas a otro lugar —todo lo distante que queramos— en que acontece estar la otra mitad del paquete»; descripción a la cual añade: «esta acción física se propaga con velocidad superior a la de la luz». Todo esto no sirve para nada, ya que nuestras probabilidades originarias, ${}_{\alpha}P_{k}(\beta)$ y ${}_{\alpha}P_{k}(\bar{\beta})$ continúan siendo iguales a ½: lo único que ha ocurrido es que hemos elegido una nueva clase de referencia —β, o $\bar{\beta}$, en lugar de α— bajo la enérgica influencia del resultado del experimento (o sea, de la información $k \varepsilon \beta$ o $k \varepsilon \bar{\beta}$, respectivamente). Decir que las consecuencias lógicas de esta elección (o, tal vez, que las consecuencias lógicas de esta información) se propagan con velocidad superior a la de la luz», ayuda a comprender las cosas poco más o menos lo mismo que decir que dos por dos se convierten en cuatro con velocidad superior a la de la luz; y una observación ulterior de Heisenberg acerca de que este tipo de propagación de una acción física no puede emplearse para transmitir señales, aunque es verdadera, apenas mejora la situación.

El destino de este experimento imaginario es el de recordarnos la urgente necesidad de distinguir y definir los conceptos probabilitarios estadísticos y formalmente singulares. También hace ver que el problema de interpretación a que ha dado origen la teoría cuántica sólo puede abordarse por medio de un análisis lógico de la interpretación de los enunciados probabilitarios.

77. LOS EXPERIMENTOS DECISIVOS

(*He retirado el experimento imaginario que describo en el presente apartado, ya que se basa en un error, acerca de cuyo origen véanse la nota *1 del apéndice VI, página 278 y el punto 10 del apéndice *XI; este error fue sometido a crítica por primera vez por Von Weizsäcker en *Naturwiss*. **22**, 1934, página 807, y por Einstein —en su carta reproducida en el apéndice *XII—. Ya no creo en dicho experimento, ni creo tampoco, por otra parte, que sea «decisivo» en el sentido mencionado en el texto ni siquiera necesario, pues dentro de mi argumentación puede reemplazarle el famoso experimento imaginario de Einstein, Podolski y Rosen (cf. la nota *4 del presente apartado y los apéndices *XI y *XII). Todavía más: los argumentos de los apartados precedente y siguiente no quedan alterados por ello. Como se me ha criticado por reimprimir el presente apartado, he de decir que tal reimpresión no me ha producido gozo alguno; pero que algunos lectores preferirían quizá ver exactamente qué errores había cometido, y que podría habérseme criticado fácilmente si hubiese suprimido o tapado mi error).

He llevado a cabo hasta ahora las dos primeras partes del programa que había bosquejado en la introducción que precedía al apartado 73. He puesto de manifiesto, 1) que las fórmulas de Heisenberg pueden interpretarse estadísticamente, y de ahí, 2) que su interpretación como limitaciones impuestas a la precisión alcanzable no se sigue lógicamente de la teoría cuántica: la cual, por tanto, no puede quedar contradicha simplemente porque consigamos en nuestras mediciones un grado de precisión más elevado[*1].

«Por ahora vamos bien», podría decir alguien; «no niego que sea posible considerar la teoría cuántica de ese modo; pero no me parece que sus argumentos hayan rozado siquiera el verdadero núcleo físico de la teoría de Heisenberg, es decir, la imposibilidad de hacer *predicciones* singulares exactas».

Si se pidiera a mi contradictor que diese forma a su tesis por medio de un ejemplo físico, podría continuar del modo siguiente: «Imagínese un haz de electrones, tal como uno en un tubo catódico, y asumamos que la dirección que sigue es la dirección x. Podemos efectuar diversas selecciones físicas de tal haz: por ejemplo, cabe separar o seleccionar un grupo de electrones teniendo en cuenta su posición en la dirección x (esto es, de acuerdo con su coordenada x en un instante determinado) —quizá por medio de un diafragma que abriríamos durante un tiempo cortísimo—. De este modo, obtendríamos un grupo de electrones cuya extensión en la dirección x sería muy pequeña; de acuerdo con las relaciones de dispersión, los momentos en la dirección x de los distintos electrones del grupo discreparían entre sí ampliamente (y, por tanto, también sus energías). Como usted ha afirmado con razón, podemos contrastar estos enunciados acerca de la dispersión: y ello midiendo las energías o los momentos de electrones aislados, pues como conocemos la posición llegaremos a saber la posición y el momento. Podría ejecutarse una medición de esta índole, por ejemplo, haciendo que los electrones chocasen sobre una placa, cuyos átomos quedarían excitados: encontraríamos —entre otras cosas— algunos átomos para cuya excitación se habría requerido una energía superior a la energía media de los electrones. Admito, pues, que tenía usted razón de sobra en hacer resaltar que tales mediciones son, no sólo posibles, sino significativas; pero —y aquí llega mi objeción— al ejecutar semejante medición hemos de perturbar el sistema que estamos examinando, es decir, o bien los electrones aislados, o bien —si medimos varios (como en nuestro ejemplo)— la totalidad del haz de electrones. Reconozco que la teoría no sufriría contradicción lógica si pudiéramos conocer los momentos de los distintos electrones del grupo antes de que éste se vea perturbado (con tal de que, naturalmente, esto no nos permitiese emplear dicho conocimiento para llevar a cabo una selección prohibida); pero no hay modo de conocer tal cosa acerca de los electrones aislados sin perturbarlos. En conclusión: sigue siendo cierto que las predicciones aisladas precisas son imposibles».

A esta objeción yo contestaría diciendo, en primer lugar, que no sería extraño que fuese correcta. Después de todo, es evidente que a partir de una teoría estadística no pueden deducirse nunca predicciones singulares exactas, sino exclusivamente predicciones aisladas «indefinidas» (esto es, formalmente singulares). Pero lo que yo afirmo en este momento es que, si bien la teoría no nos proporciona semejantes predicciones, *no las excluye* tampoco: podría hablarse de la imposibilidad de predicciones singulares únicamente si pudiera afirmarse que al perturbar el sistema o interferir con él tiene que impedirse todo tipo de medición predictiva.

«Pero eso es precisamente lo que yo afirmo —diría mi impugnador—; afirmo justamente la imposibilidad de semejante medición. Usted supone que es posible medir la energía de uno de esos electrones en movimiento sin sacarle de su trayectoria y del grupo de electrones: y *ésa* es la asunción que yo considero insostenible; pues admitiendo que dispusiera de un aparato con el que pudiese llevar a cabo tales mediciones, entonces con él o con otro aparato semejante sería capaz de *producir* agregados de electrones en los que todos éstos, *a*) estarían limitados en cuanto a posición, y *b*) tendrían el mismo momento. Y, desde luego, también usted opina que la existencia de semejantes agregados estaría en contradicción con la teoría cuántica, ya que está excluida por sus propias 'relaciones de dispersión', como usted las llama. Así pues, lo único que podría usted contestar es que es posible concebir un aparato que nos permitiese hacer mediciones, pero no efectuar selecciones. Admito que la idea es tolerable lógicamente; pero como físico lo único que puedo decir es que mis intuiciones se rebelan contra la idea de que podamos medir los momentos de unos electrones sin ser capaces de eliminar, por ejemplo, todos aquéllos cuyo momento supera (o no llega) a una cantidad dada».

Mi primera respuesta sería que todo ello parece sumamente convincente. Pero que todavía no se ha dado (ni se puede dar, según veremos pronto) una *demostración* rigurosa de la aserción según la cual, si es posible una medición predictiva también ha de serlo la separación física correspondiente. Ninguno de los argumentos aducidos prueba que las predicciones precisas contradirían a la teoría cuántica, ya que todos introducen una *hipótesis suplementaria*: pues el enunciado (que corresponde a la tesis de Heisenberg) de que las predicciones aisladas exactas son imposibles resulta ser equivalente a la hipótesis de que *las mediciones predictivas y las selecciones físicas estén ligadas inseparablemente*. Y mi concepción tiene verdaderamente que chocar con este nuevo sistema teórico —la conyunción de la teoría cuántica con esta hipótesis auxiliar, la «*hipótesis de ligadura*[*1]».

Al llegar a esta situación he llevado a cabo el punto 3) de mi programa. Pero todavía tiene que asentarse el 4): esto es, hemos de hacer ver todavía que el sistema que combina la teoría cuántica estadísticamente interpretada (incluyendo, según asumimos, las leyes de conservación del momento y de la energía) con la «hipótesis de ligadura» es internamente contradictorio. Existe, supongo, una convicción profundamente arraigada de que las mediciones predictivas y las selecciones físicas están siempre ligadas entre sí; y la extensión general de semejante convicción presuntiva podrá tal vez explicar por qué no se han elaborado los sencillos argumentos que asentarían la presunción opuesta.

Querría destacar que las principales consideraciones físicas que voy a presentar ahora no forman parte de las asunciones o premisas de mi análisis lógico de las relaciones de incertidumbre, aunque podría decirse que son fruto de ellas. En realidad, el análisis que hemos efectuado hasta ahora es *enteramente independiente* de lo que se va a decir, y especialmente del experimento físico imaginario que describiré más abajo[*2], con el cual se pretende establecer la posibilidad de predicciones arbitrariamente precisas de la trayectoria de partículas aisladas.

Como introducción a este experimento imaginario estudiaré primero algunos otros más sencillos, con los que intento hacer patente que podemos hacer sin dificultad predicciones de trayectoria de precisión arbitraria, así como contrastarlas. A este nivel de la cuestión, me ocupo únicamente de predicciones que no se refieran a corpúsculos aislados determinados, sino a todas las partículas que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas a la dirección x con un momento conocido igual para todas; también se conocerán las componentes del momento en las otras direcciones —esto es, se sabrá que son iguales a cero—. Ahora bien; en lugar de determinar la posición en la dirección x de un grupo de corpúsculos por medio de una selección *física* —o sea, en vez de aislar dicho grupo del resto del haz por medios técnicos (como hicimos antes)—, nos contentaremos con diferenciar este grupo de los demás dirigiendo meramente nuestra atención a él: por ejemplo, podemos prestar atención a todas las partículas que tienen (con una precisión dada) la coordenada de lugar x en un instante dado, y que, por tanto, no están esparcidas por fuera de un margen arbitrariamente pequeño Δx. Conocemos con precisión el momento de cada una de tales partículas, y conocemos, por ello, con precisión, dónde se va a encontrar tal grupo en cada instante futuro (es claro que la mera existencia de semejante grupo de corpúsculos no contradice a la teoría cuántica: sólo lo haría su existencia separada, o sea, la posibilidad de seleccionarlo físicamente). Podemos llevar a cabo el mismo tipo de selección imaginaria en lo que se refiere a las demás coordenadas espaciales; el haz monocromático seleccionado físicamente tendría que tener un gran ancho en las direcciones y y z (sería infinitamente ancho en el caso de un haz monocromático ideal), ya que suponemos que en estas direcciones el momento se ha seleccionado con precisión (es decir, es igual a cero): de suerte que las posiciones en estas direcciones estarán muy separadas; mas podemos fijar nuestra atención de nuevo en un rayo parcial muy estrecho. Una vez más, no sólo conoceremos la posición, sino también el momento de todo corpúsculo de este rayo: y seremos capaces —por tanto— de predecir, con respecto a cualquier partícula de este estrecho rayo (que, por decirlo así, leemos seleccionado imaginativamente), en qué punto y con qué momento incidirá sobre una placa fotográfica colocada en su trayectoria; y, desde luego, podremos contrastar empíricamente esta predicción (como ocurría con el experimento anterior).

Pueden efectuarse selecciones imaginarias análogas a la que acabamos de hacer a partir de un «caso puro» de un tipo concreto, partiendo de otros tipos de agregados. Por ejemplo, podemos tomar un haz monocromático en el cual se haya ejecutado una selección física por medio de una estrecha ranura Δy (con lo cual tendremos como punto de partida físico una selección física que corresponderá a la selección meramente imaginada del ejemplo precedente). No sabemos, de ninguna de las partículas, en qué dirección saldrá después de atravesar la ranura; pero si tenemos en cuenta una dirección determinada podemos calcular con precisión la componente del momento de todas las que se dirigen en esta dirección concreta. Así pues, los corpúsculos que después de haber pasado por la ranura se mueven en una dirección determinada forman de nuevo una selección imaginada; podemos predecir su posición y su momento, o, dicho brevemente, sus trayectorias; y, una vez más, si colocamos una placa fotográfica en su camino, podemos someter a contraste nuestras predicciones.

En principio, la situación es la misma (aun cuando las contrastaciones empíricas son algo más difíciles) que en el casó del primer ejemplo considerado; a saber, una selección de partículas de acuerdo con su posición en la dirección de movimiento. Si realizamos una selección física correspondiente a este caso, entonces corpúsculos diferentes se moverán con velocidades diferentes, debido a la dispersión de los momentos: el grupo corpuscular se esparcirá sobre un margen o zona que será cada vez más grande en la dirección x según avanza (el paquete se hará más ancho); y ahora podemos establecer el momento de un grupo parcial de tales corpúsculos (seleccionado imaginativamente) que se encuentre en un instante dado en una posición dada a lo largo de la dirección *x*: el momento será mayor cuanto más adelante se encuentre el grupo parcial seleccionado (y viceversa). Sustituyendo la placa fotográfica por una tira móvil de película fotográfica podríamos llevar a cabo la contrastación empírica de la predicción que hubiéramos hecho de este modo. Como sabríamos para cada punto de la cinta el instante en que estaría expuesto al impacto de los electrones, podríamos *predecir* también con respecto a cada uno de tales puntos con qué momento se producirían los impactos; predicciones que podríamos *someter a contraste*, por ejemplo, insertando un filtro delante de la banda móvil o quizás ante el contador de Geiger (un filtro en el caso de rayos luminosos, y un campo eléctrico en ángulo recto con la dirección del rayo cuando se tratase de electrones), al cual seguiría una selección según la dirección que permitiese pasar solamente a las partículas que poseyeran un momento mínimo dado. Podríamos averiguar de este modo si estas partículas llegaban realmente en el instante predicho o no.

La precisión de las medidas que se obtienen con estas contrastaciones no está limitada por las relaciones de incertidumbre: pues éstas han de aplicarse —según liemos visto— principalmente a las mediciones que se emplean para la deducción de predicciones, pero no a las encaminadas a contrastarlas; es decir, se entiende que se aplican a «*mediciones predictivas*» y no a a «*mediciones no predictivas*». En los apartados 73 y 76 he estudiado tres casos de tales mediciones «no predictivas», a saber, *a*) la medición de dos posiciones, *b*) la medición de una posición precedida —o *c*) sucedida— por un momento. La medición arriba expuesta, por medio de un filtro delante de una tira de película o de un contador de Geiger, constituye un ejemplo de *b*), esto es, de una selección de acuerdo con el momento seguida por una de posición; y es de suponer que éste es el caso que, según Heisenberg (cf. el apartado 73), permite «un cálculo del pasado del electrón»; pues mientras en los casos *a*) y *c*) sólo eran posibles cálculos referentes al tiempo comprendido *entre* las dos mediciones, en el *b*) cabe calcular la trayectoria *previa* a la primera medición, con tal de que ésta sea una selección de acuerdo con un momento dado: ya que tal selección no perturba la posición del corpúsculo[*3]. Como ya sabemos, Heisenberg cuestiona la «realidad física» de la medida, porque nos permite calcular el momento de la partícula sólo a su llegada a una posición y en un instante medidos ambos exactamente: la medición parece carecer de contenido predictivo, ya que no es posible deducir de ella conclusión alguna contrastable. Con todo, apoyaré mi experimento imaginario —que pretende asentar firmemente la posibilidad de predecir con precisión la posición y el momento de una partícula determinada— en este dispositivo especial de medición, a primera vista no predictivo.

Como me dispongo a deducir unas consecuencias de tanto alcance del supuesto de que son posibles mediciones precisas «no predictivas» de este tipo, considero apropiado discutir la admisibilidad de semejante supuesto: lo cual se hace en el apéndice VI.

Con el experimento imaginario que viene a continuación desafío directamente el método argumentativo de Bohr y Heisenberg, que han utilizado para justificar la interpretación de las fórmulas de este último como limitaciones impuestas a la precisión alcanzable. Pues estos autores han tratado de justificar tal interpretación mostrando que no puede idearse un experimento imaginario que dé origen a medidas predictivas más exactas; pero es claro que este método de argumentar no excluye la posibilidad de que un día pueda idearse un experimento imaginario que (empleando efectos y leyes físicos conocidos) haga ver cómo después de todo serían posibles tales mediciones. Se ha dado por seguro que cualquier experimento de esta índole estaría en contradicción con el formalismo de la teoría cuántica, y parece que esta idea ha determinado la dirección de la búsqueda de semejantes experimentos; pero mi análisis —en el que he llevado a cabo los puntos 1) y 2) de mi programa— ha despejado el camino para idear un experimento imaginario que hace ver, de *pleno acuerdo* con la teoría cuántica, que son posibles las mediciones precisas en cuestión.

Para realizarlo emplearé, como antes, una «selección imaginaria»; pero escogeré un dispositivo tal, que si existe realmente una partícula caracterizada por la selección seamos capaces de averiguar tal hecho.

En cierto modo, mi experimento consiste en una especie de idealización de los de Compton-Simon y Bothe-Geiger[2]. Como queremos llegar a predicciones singulares, no podemos trabajar únicamente con supuestos estadísticos: hemos de emplear también las leyes no estadísticas de la conservación de la energía y del momento, y podemos sacar partido del hecho de que tales leyes nos permiten calcular lo que ocurre cuando las partículas chocan —supuesto que se nos den dos de las cuatro magnitudes con que se describe la colisión (esto es, los momentos $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{b_1}$ previos, y los $\mathbf{a_2}$ y $\mathbf{b_2}$, posteriores a ella) y una componente[3] de una tercera—. (El método de cálculo es una parte perfectamente conocida de la teoría del efecto Compton[4]).

Imaginemos ahora el dispositivo experimental siguiente (véase la figura 2). Hacemos que se corten dos haces corpusculares (de los cuales, como máximo uno podrá ser un rayo de luz y como máximo uno tendrá carga eléctrica[5]), ambos «*casos puros*», en el sentido concreto de que el haz A será monocromático (o sea, se tratará de una selección de acuerdo con el momento $\mathbf{a_1}$) y el B pasará a través de una estrecha ranura *Rn* (y estará sujeto, por tanto, a una selección física que tiene en cuenta la posición); supongamos también que las partículas de B tienen el momento (absoluto) $\mathbf{b_1}$. Se producirán algunas colisiones entre corpúsculos de uno y otro haz. Ahora *imaginamos* dos finos rayos parciales, [A] y [B], que se intersecan en el punto lugar P; conocemos el momento de [A], que es $\mathbf{a_1}$, y lo mismo ocurre con el del rayo parcial [B] en cuando nos hemos decidido por una dirección concreta para él: sea, pues, $\mathbf{b_1}$. Elegimos ahora una dirección *PX*; si nos fijamos en las partículas del rayo parcial [A] que después del choque se mueven en dicha dirección, podemos calcular su momento, $\mathbf{a_2}$, y, asimismo, $\mathbf{b_2}$ (esto es, el momento que tienen después de la colisión los corpúsculos con los que aquéllas habían chocado): a cada partícula de [A] que quedó lanzada en el punto *P* en dirección de *X* y con el momento $\mathbf{a_2}$, ha de corresponder

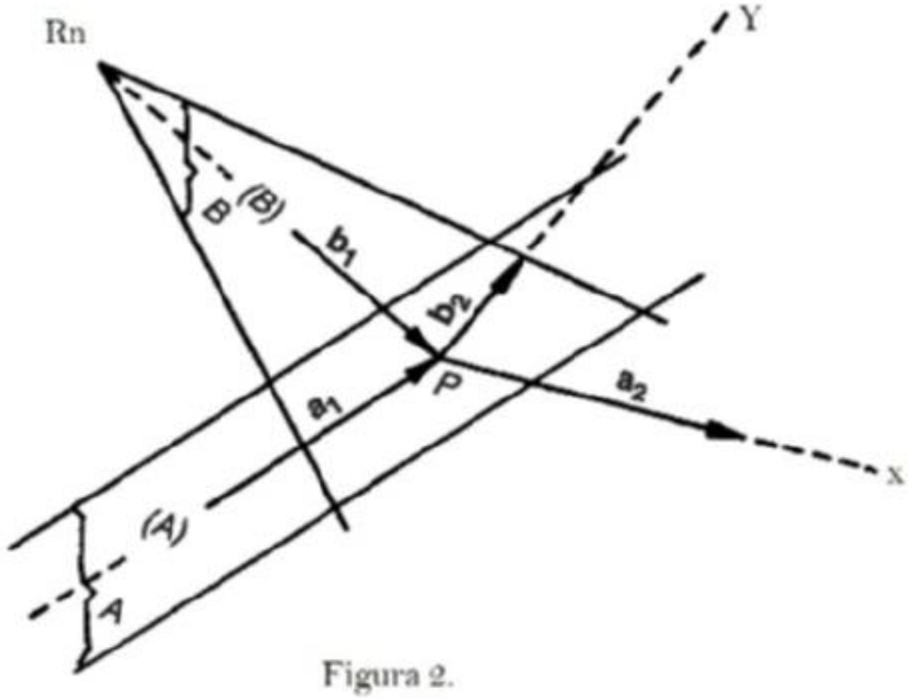

Figura 2.

una segunda partícula —de [B]— que ha sufrido una deflexión en *P* en la dirección calculable *PY* y tiene el momento $\mathbf{b_2}$. Colocamos un aparato en X —por ejemplo, un contador de Geiger o una tira móvil de película— que registra los impactos de los corpúsculos que llegan desde *P* a la región *X* (cuya extensión cabe reducir a nuestro arbitrio). Podemos decir ahora: en cuanto advertimos que se ha registrado una de tales llegadas, sabemos que, al mismo tiempo, una segunda partícula ha de estar moviéndose desde P hacia Y con el momento $\mathbf{b_2}$, y sabemos, asimismo, dónde se encontraba esta segunda partícula en todo instante, pues teniendo en cuenta cuándo se produjo el impacto de la primera en *X* y su velocidad —que conocemos—, podemos calcular el instante en que se produjo la colisión en *P*. Y colocando otro contador de Geiger (o la tira móvil de película) en *Y*, podemos contrastar nuestras predicciones con respecto al segundo corpúsculo[*4].

La precisión de estas predicciones —lo mismo que la de las mediciones realizadas para contrastarlas— no está, en principio, sujeta a ninguna de las limitaciones debidas al principio de incertidumbre en lo que se refiere a la coordenada de posición y a la componente del momento en la dirección *PY*: pues mi experimento imaginario reduce la cuestión de la precisión con que se pueden hacer predicciones acerca de una partícula de B que sufre una deflexión en *P*, a la de la precisión alcanzable en las mediciones que se efectúan en *X*. Y éstas parecen ser, a primera vista, mediciones no predictivas de tiempo, posición y momento de la primera partícula correspondiente de [A]: cuyo momento en la dirección *PX*, así como el instante de su impacto en *X* (esto es, de su posición en la dirección *PRn*), pueden medirse con el grado de precisión que queramos (cf. el apéndice VI) si realizamos una selección de momentos —por ejemplo, interponiendo un campo eléctrico o un filtro delante del contador de Geiger— antes de medir la posición. Pero, como consecuencia de todo esto (según se verá más a fondo en el apéndice VII), podemos hacer predicciones con un grado de precisión cualquiera acerca del corpúsculo de *B* que se mueve en la dirección *PY*.

Este experimento imaginario nos permite advertir, no sólo que pueden ejecutarse predicciones aisladas precisas, sino bajo qué condiciones pueden realizarse —o, mejor, bajo qué condiciones son compatibles con la teoría cuántica—: solamente si podemos llegar a conocer el estado de la partícula sin ser capaces de dar origen a dicho estado a voluntad. Así pues, llegamos a un conocimiento que es posterior al evento, como si dijéramos, ya que cuando lo alcanzamos el corpúsculo habrá asumido ya su estado de movimiento; y, sin embargo, podemos utilizar tal conocimiento para deducir de él predicciones contrastables (si la partícula de B es un fotón, por ejemplo, podríamos ser capaces de calcular el instante de su llegada a Sirio). Los impactos de las partículas que alcanzan *X* se sucederán unos a otros en intervalos de tiempo irregulares, lo cual significa que los corpúsculos del rayo parcial [B] sobre el que estamos haciendo predicciones se sucederán también uno a otro a intervalos irregulares de tiempo. Estaría en contradicción con la teoría cuántica que pudiésemos alterar el estado de cosas haciendo, por ejemplo, iguales los intervalos mencionados. Así pues, es como si fuésemos capaces de apuntar y predeterminar la fuerza de la bala, como si pudiéramos, asimismo (y ello antes de que la bala dé en el blanco *Y*), calcular el instante exacto en que se hizo el disparo en *P*; pero no podemos elegir libremente el momento en que se dispara, sino que liemos de esperar hasta que el arma de fuego entre en acción; ni tampoco podemos evitar que se bagan disparos al blanco que escapan a nuestra previsión (desde las cercanías de *P*).

Es evidente que nuestro experimento y la interpretación de Heisenberg son incompatibles. Tilas, puesto que es posible deducir la posibilidad de llevarlo a cabo a partir de la interpretación estadística de la teoría cuántica (más las leyes de la energía y del momento), resulta que la interpretación de Heisenberg, que le contradice, ha de estar también en contradicción con la interpretación estadística de aquella teoría. A la vista de los experimentos de Compton-Simon y Bothe-Geiger parece posible realizar el experimento arriba expuesto, que puede considerarse como una especie de *experimentum crucis* que sirve para decidir entre la concepción heisenberguiana y una interpretación estadística coherente de la teoría cuántica.

78. LA METAFÍSICA INDETERMINISTA

La tarea del científico de la Naturaleza es buscar leyes que le permitan deducir predicciones; y es posible dividir esta tarea en dos partes: por un lado, tendrá que intentar descubrir leyes que le permitan deducir predicciones aisladas (leyes «causales» o «deterministas», o «enunciados precisos»); por el otro, ha de tratar de proponer hipótesis acerca de frecuencias —esto es, leyes que afirmen probabilidades— con objeto de deducir predicciones frecuenciales. No existe nada en estas dos tareas que las haga mutuamente incompatibles en ningún respecto: sin duda alguna, no ocurre que siempre que presentemos enunciados precisos no debamos hacer hipótesis frecuenciales, pues —como hemos visto— a algunos de aquéllos corresponden macro-leyes deductibles de asunciones frecuenciales; ni tampoco ocurre que siempre que haya enunciados frecuenciales perfectamente confirmados en un campo particular, estemos autorizados a concluir que en dicho campo *no se puedan proponer enunciados precisos*. Esta situación parece perfectamente clara, y, sin embargo, la segunda de las conclusiones que acabamos de rechazar se ha propugnado repetidamente: una y otra vez nos encontramos con la creencia de que donde rige lo fortuito la regularidad está excluida (en el apartado 69 he estudiado esta creencia desde un punto de vista crítico).

A juzgar por el estado actual del desarrollo científico, no será fácil superar el dualismo de las macro-leyes y las micro-leyes —quiero decir, el hecho de que operemos con ambas—. Lo que, sin embargo, podría ser lógicamente posible es una reducción de todos los enunciados precisos conocidos a enunciados frecuenciales (interpretándolos como macro-leyes). Pero la reducción contraria no es posible: los enunciados frecuenciales no pueden deducirse jamás de los otros, como hemos visto en el apartado 70; necesitan partir de asunciones propias que tienen que ser específicamente estadísticas; sólo es posible calcular probabilidades a partir de estimaciones probabilitarias[*1].

Ésta es la situación lógica; no favorece ni una tesis determinista ni una indeterminista. Y si llegara el momento en que fuese posible trabajar en la física con enunciados frecuenciales exclusivamente, entonces seguiríamos sin estar autorizados a sacar conclusiones indeterministas: es decir, que no lo estaríamos para afirmar que «no existen leyes precisas en la Naturaleza, ninguna ley de la que puedan deducirse predicciones sobre el curso de procesos aislados o elementales». El científico no dejará nunca que nada le impida continuar buscando leyes, ni siquiera las leyes de esta índole; y por mucho éxito que tengamos al operar con estimaciones probabilitarias, no debemos concluir que sea vana la búsqueda de leyes precisas.

Estas reflexiones no constituyen, en modo alguno, aquello a que va a parar el experimento imaginario descrito en el apartado 77; todo lo contrario: supongamos que las relaciones de incertidumbre no queden refutadas por dicho experimento (por las razones que sean: porque el *experimentum crucis* detallado en el apéndice VI se decidiera contra la teoría cuántica, digamos); pues incluso en tal caso se las podría contrastar y solamente cabría corroborarlas como enunciados frecuenciales. Así pues, en ningún caso tendríamos derecho a extraer conclusiones indeterministas del hecho de que dichas relaciones estuviesen perfectamente corroboradas[*2].

¿Está gobernado el mundo por leyes estrictas, sí o no? Considero esta pregunta como metafísica. Las leyes que encontramos son siempre hipótesis, lo cual quiere decir que pueden quedar siempre superadas, y que posiblemente puedan deducirse de estimaciones probabilitarias; pero negar la causalidad sería lo mismo que intentar persuadir al teórico de que abandone su búsqueda, y acabamos de hacer ver que semejante intento no puede estar respaldado por demostración de ninguna clase. El llamado «principio de causalidad» o «ley de causalidad», aunque es susceptible de formulación, posee un carácter enteramente diferente de una ley natural; y no puedo estar de acuerdo con Schlick cuando dice que «… la ley de causalidad puede ser contrastada en cuanto a su verdad exactamente en el mismo sentido en que puede serlo cualquier otra ley natural[1]».

La creencia en la causalidad es metafísica[*3]. No es sino una típica hipóstasis metafísica de una regla metodológica perfectamente justificada, a saber, la decisión del científico de no abandonar jamás su búsqueda de leyes. La creencia metafísica en la causalidad, en sus varias manifestaciones, parece ser más fértil que ninguna metafísica indeterminista de la índole defendida por Heisenberg; y —en realidad— podemos percatarnos de que los comentarios de este autor han tenido un efecto paralizador en la investigación: es fácil no caer en la cuenta de relaciones que no habría que buscar muy lejos si se repite incesantemente que la indagación de las mismas «carece de sentido».

Las fórmulas de Heisenberg —como otros enunciados análogos que sólo pueden quedar corroborados por sus consecuencias estadísticas— no conducen necesariamente a conclusiones indeterministas; pero esto no prueba por sí mismo que no pueda existir otro enunciado empírico que justifique esta conclusión u otras parecidas: por ejemplo, la de que la regla metodológica mencionada —la decisión de no abandonar nunca la búsqueda de leyes— no puede cumplir su propósito, por ser fútil, o carente de sentido, o «imposible» (cf. la nota 2 del apartado 12) buscar leyes o predicciones singulares. Pero no puede haber enunciado empírico con consecuencias metodológicas que nos obligue a abandonar la búsqueda de leyes: pues la única forma en que un enunciado que suponemos libre de elementos metafísicos pueda tener conclusiones indeterministas es que éstas sean falsables[*1]; pero, a su vez, sólo es posible mostrar que son falsas si logramos formular leyes, y deducir de éstas predicciones que se corroboren; y, de acuerdo con ello, si suponemos que estas conclusiones indeterministas son *hipótesis empíricas*, deberíamos hacer lo posible por contrastarlas (esto es, por falsarias), lo cual quiere decir que tendríamos que buscar leyes y predicciones. Así pues, no podemos obedecer una exhortación de abandonar la búsqueda sin repudiar el carácter empírico de estas hipótesis; lo cual hace patente que sería contradictorio pensar que pueda existir ninguna hipótesis empírica que nos obligue a abandonar la búsqueda de leyes.

No pretendo mostrar ahora en detalle cómo tan repetidos intentos de estatuir el indeterminismo revelan un modo de pensar que sólo cabe describir como determinista —en sentido metafísico— (Heisenberg, por ejemplo, pretende dar una explicación causal de por qué son imposibles las explicaciones causales[*5]); únicamente recordaré al lector los intentos que se han hecho para demostrar que las relaciones de incertidumbre cierran ciertas vías de posible investigación, análogamente a como lo hace el principio de constancia de la velocidad de la luz: se ha interpretado la analogía entre las constantes *c* y *h* —la velocidad de la luz y la constante de Planck— diciendo que ambas ponen, en principio, un límite a las posibilidades de investigación; y se han rechazado las cuestiones planteadas al tratar de saltar al otro lado de tales barreras por el conocido método de dejar de lado los problemas indigeribles titulándolos «pseudo» —problemas. En mi opinión, existe realmente una analogía entre las constantes *c* y *h*: analogía que —incidentalmente— asegura que la constante h no constituye barrera más firme que la constante *c*. El principio de la constancia de la velocidad de la luz (y de la imposibilidad de exceder esta velocidad) no nos prohíbe buscar velocidades que sean más elevadas que la de la luz, ya que sólo afirma que no encontraremos ninguna con esta característica, es decir, que seremos incapaces de producir señales que se muevan más de prisa que la luz. Y, análogamente, las fórmulas de Heisenberg no deberían interpretarse como si prohibiesen la búsqueda de casos «super puros», ya que afirman solamente que no encontraremos ninguno de ellos, y, en particular, que no podremos producir ninguno. Las leyes que prohíben velocidades mayores que la de la luz y casos «super puros» desafían al investigador —del mismo modo que otros enunciados empíricos— a iniciar la búsqueda de lo prohibido: pues sólo puede contrastar los enunciados empíricos tratando de falsarios.

Desde un punto de vista histórico, la aparición de la metafísica indeterminista es perfectamente comprensible: durante largo tiempo, los físicos habían tenido fe en una metafísica determinista, y el fracaso de los repetidos intentos de deducir los espectros luminosos —que son efectos estadísticos— de un modelo mecánico del átomo tenía forzosamente que producir una crisis del determinismo (dado que no se comprendía con integridad cuál era la situación desde el punto de vista lógico). Hoy vemos claramente que el fracaso era inevitable, puesto que es imposible deducir leyes estadísticas de un modelo atómico no estadístico (mecánico); pero en aquel entonces (alrededor de 1924, en la época de la teoría de Bohr, Kramers y Slater) no podía sino parecer que las probabilidades reemplazaban a las leyes estrictas en el mecanismo de cada uno de los átomos. El edificio determinista se venía abajo, especialmente porque los enunciados probabilitarios se expresaban como enunciados formalmente singulares; de las ruinas del determinismo brotó el indeterminismo, estribado en el principio de incertidumbre de Heisenberg —pero, como hemos visto, a partir de la misma falta de comprensión de los enunciados probabilitarios formalmente singulares.

La lección a sacar de todo esto es que deberíamos esforzarnos por encontrar leyes estrictas —prohibiciones— que puedan fundarse en la experiencia; pero que hemos de abstenernos de promulgar prohibiciones que pongan límites a las posibilidades de investigación.

CAPÍTULO DÉCIMO

La corroboración, o de qué forma sale indemne de la contrastación una teoría

Las teorías no son verificables, pero pueden ser «corroboradas».

Se ha hecho a menudo el intento de describir las teorías como algo que no puede ser *verdadero* ni *falso*, sino solamente más o menos *probable*. En especial, la lógica inductiva ha sido elaborada en el sentido de que puede adscribir a los enunciados, no sólo los dos valores de «verdadero» y «falso», sino, asimismo, grados de probabilidad: tipo de lógica que cabe llamar «*lógica probabilitaria*». Según aquéllos que creen en esta lógica, la inducción debería determinar la probabilidad de un enunciado; y habría un principio de inducción que, bien nos *daría la seguridad* de que el enunciado inducido es «probablemente válido», bien nos *daría la probabilidad* que fuese acerca de ello (ya que el principio de inducción podría, a su vez, ser nada más que «probablemente válido»). Pero, en mi opinión, todo el enfoque del problema de la probabilidad de hipótesis es erróneo: en lugar de discutir la «probabilidad» de una hipótesis deberíamos tratar de averiguar qué contrastaciones, qué pruebas ha soportado; esto es, tendríamos que intentar la averiguación de hasta qué punto ha sido capaz de demostrar que es apta para sobrevivir —y ello por haber salido indemne de las contrastaciones—. En resumen, deberíamos disponernos a averiguar en qué medida está «corroborada[*1]».

79. SOBRE LA VERIFICACIÓN DE HIPÓTESIS

Con frecuencia no se ha parado mientes en el hecho de que las teorías no son verificables. Se dice a menudo que una teoría está verificada cuando se han verificado algunas de las predicciones deducidas de ella; quizá se admita que la verificación no es impecable desde un punto de vista lógico, o que no es posible asentar de un modo definitivo un enunciado asentando unas consecuencias suyas; pero se está dispuesto a ver en tales objeciones el resultado de escrúpulos algo exagerados. Es completamente cierto, se dice, e incluso trivial, que no podemos saber con certeza si el sol saldrá mañana; pero esta incertidumbre puede no tomarse en cuenta: el hecho de que las teorías puedan no solamente mejorarse, sino también *falsarse por nuevos experimentos*, presenta al científico una seria posibilidad que puede actualizarse en cualquier momento, mas hasta ahora nunca ha tenido que considerarse falsada una teoría debido a un fallo súbito de una ley perfectamente confirmada; jamás ocurre que los antiguos experimentos den un día resultados nuevos; lo único que pasa es que unos experimentos nuevos se colocan enfrente de la antigua teoría. Ésta, incluso cuando queda superada, suele conservar su validez como una especie de caso límite de la nueva: aún es aplicable, al menos con bastante aproximación, en los casos en que antes tenía éxito. Brevemente dicho: las regularidades contrastables directamente por medio de experimentos no cambian. Admitimos, sin duda, que es concebible —o lógicamente posible— que cambien, pero esta posibilidad no se tiene en cuenta en la ciencia empírica y no afecta a sus métodos: por el contrario, el método científico presupone la *inmutabilidad de los procesos naturales*, o el «principio de la uniformidad de la Naturaleza».

Pueden decirse varias cosas en favor de los argumentos anteriores, pero hay que hacer constar que éstos no afectan a mi tesis: expresan la fe metafísica en la existencia de regularidades en nuestro mundo (fe que comparto, y sin la cual es difícil de concebir la actuación práctica)[*1]; pero la cuestión que se nos presenta —la que hace significativa en el contexto actual la inverificabilidad de las teorías— se encuentra en un plano totalmente distinto. Conforme a mi actitud con respecto a otras cuestiones metafísicas, me abstendré de argumentar a favor o en contra de la fe en la existencia de regularidades en nuestro mundo; pero trataré de hacer patente que la *inverificabilidad de las teorías tiene importancia metodológica*; y éste es el plano en que me opongo al razonamiento propuesto.

Por consiguiente, consideraré pertinente sólo uno de los puntos expresados: la referencia al llamado «principio de la uniformidad de la Naturaleza». Según me parece, este principio expresa de un modo muy superficial una importante regla metodológica —y justamente una que podría deducirse muy ventajosamente de un estudio sobre la inverificabilidad de las teorías[*2].

Supongamos que el sol no salga mañana (y que, pese a ello, continuemos viviendo, y, asimismo, tratando de dar alcance a les cuestiones científicas que nos interesan). Si tal cosa ocurriera, la ciencia tendría que *explicarla*, esto es, que deducirla de leyes; posiblemente habría que revisar de un modo drástico las teorías actuales; pero las teorías revisadas no tendrían que dar razón meramente de la nueva situación: *también habrían de ser deductibles de ellas nuestras experiencias anteriores*. Desde el punto de vista metodológico se ve que el principio de la uniformidad de la Naturaleza está remplazado por el postulado de la *invariancia de las leyes naturales*, tanto con respecto al espacio como al tiempo. A mi entender, pues, sería un error afirmar que las regularidades naturales no cambian (y éste sería un tipo de enunciado tal, que no cabe argumentar ni a su favor ni en contra suya); diríamos más bien que es parte de nuestra *definición* de las leyes naturales, si postulamos que éstas han de ser invariantes en el espacio y el tiempo, y si postulamos, además, que no han de tener excepciones. Así pues, la posibilidad de falsar una ley corroborada no carece, en modo alguno, de importancia desde un punto de vista metodológico: nos ayuda a encontrar lo que exigimos a las leyes naturales y esperamos de ellas. Y, a su vez, el «principio de la uniformidad de la Naturaleza» puede considerarse como una interpretación metafísica de una regla metodológica (como su pariente cercana, la «ley de causalidad»).

Si se intenta reemplazar los enunciados metafísicos de esta índole por principios del método, se llega al «principio de inducción», que, según se supone, gobierna el método inductivo —y, por ello, el de verificación de las teorías—. Pero esta tentativa fracasa, ya que el principio de inducción es en sí mismo de carácter metafísico: como he señalado en el apartado 1, el supuesto de que este principio sea empírico conduce a una regresión infinita. Por consiguiente, podría introducírsele solamente como proposición primitiva (o postulado, o axioma); lo cual tal vez no tendría demasiada importancia si no fuese porque en todo caso habría de considerársele un *enunciado infalsable*. Pues si este principio —que se supone da validez a la inferencia de teorías — fuera falsable a su vez, quedaría falsado al mismo tiempo que la primera teoría falsada, ya que ésta sería una conclusión deducida valiéndose del principio de inducción: y éste, como premisa, quedaría, desde luego, falsado, en virtud del *modus tollens*, siempre que una teoría derivada de él resultase falsada[*3]. Pero esto quiere decir que un principio de inducción, falsable quedaría falsado de nuevo con cada progreso de la ciencia. Sería necesario, pues, introducir un principio de inducción que no fuese falsable: lo cual equivaldría a la equivocada noción de un enunciado sintético válido *a priori*, esto es, de un enunciado irrefutable acerca de la realidad.

Así pues, si tratamos de convertir nuestra fe metafísica en la uniformidad de la Naturaleza y en la verificabilidad de las teorías en una teoría del conocimiento basada en la lógica inductiva, abocamos en el dilema de elegir entre una regresión infinita y el *apriorismo*.

80. PROBABILIDAD DE UNA HIPÓTESIS Y PROBABILIDAD DE EVENTOS: CRÍTICA DE LA LÓGICA PROBABILITARIA

Incluso si se admite que las teorías nunca quedan verificadas de un modo definitivo, ¿no podemos conseguir que sean seguras en mayor o menor grado, es decir, más o menos probables? Después de todo, quizá sería posible reducir la cuestión de la *probabilidad de una hipótesis* a la de la *probabilidad de eventos*, digamos, y de esta forma podría hacérsela susceptible de tratamiento matemático y lógico[*1].

Del mismo modo que la lógica inductiva en general, la teoría de la probabilidad de hipótesis parece haber surgido gracias a una confusión de cuestiones psicológicas y lógicas. Reconozco, desde luego, que nuestros sentimientos subjetivos de convicción tienen diferentes intensidades, y que el grado de confianza con que esperamos que se cumpla una predicción y que luego se corrobore una hipótesis dependerá, probablemente —entre otras cosas—, del modo en que dicha hipótesis haya salido indemne de las contrastaciones hasta el momento: o sea, de su corroboración anterior. Pero hasta los creyentes en la lógica probabilitaria reconocen que estas cuestiones psicológicas no pertenecen a la epistemología ni a la metodología[*2]; sin embargo, razonan que es posible —basándose en decisiones inductivistas— adscribir grados de probabilidad a las *hipótesis mismas*, y, además, que cabe reducir este concepto al de la probabilidad de eventos.

La probabilidad de hipótesis suele considerarse un mero caso especial del problema general de la *probabilidad de un enunciado*, al que, a su vez, se tiene por el problema de la *probabilidad de un evento*, y nada más, sólo que expresado en una terminología especial. Así, leemos en Reichenbach, por ejemplo: «El que atribuyamos probabilidad a enunciados o a eventos es solamente una cuestión de terminología. Hasta ahora habíamos considerado la asignación de la probabilidad 1/6 a que salga una cara determinada de un dado como un caso de la probabilidad de eventos; pero podríamos decir exactamente igual que aquello a lo que se asigna la probabilidad 1/6 es al *enunciado* 'saldrá la cara marcada con 1'»[1].

Puede quizá llegar a entenderse mejor esta identificación de la probabilidad de eventos con la de enunciados, si recordamos lo dicho en el apartado 23. Allí definíamos el concepto de «evento» como una clase de enunciados singulares; y, por tanto, estará permitido hablar de la *probabilidad de enunciados* en vez de la probabilidad de eventos. Por tanto, podemos mirar tal sustitución como un simple cambio de terminología: las sucesiones de referencia se interpretan como sucesiones de enunciados. Si consideramos representada por enunciados una «alternativa» —o, mejor, sus elementos—, podemos describir el que salga cara por el enunciado «fe es cara», y lo contrario por la negación de este enunciado; de este modo, obtenemos una sucesión de enunciados de la forma p_j, p_k, p_l, p_m, p_n, …, en la que a veces un enunciado p_i está caracterizado como «verdadero», y otras (en las que se coloca una raya sobre él) como «falso». Por tanto, la probabilidad dentro de una alternativa puede interpretarse como la «*frecuencia veritativa*[2]» *relativa de los enunciados dentro de una sucesión de enunciados* (en lugar de la frecuencia relativa de una propiedad).

Si nos place, podemos llamar «probabilidad de enunciados» o «probabilidad de proposiciones» al concepto de probabilidad transformado de este modo; y cabe hacer patente una conexión muy estrecha entre este concepto y el de «verdad»: pues si hacemos cada vez más corta la sucesión de enunciados, de modo que finalmente no contenga más que un solo elemento —esto es, *un* enunciado *aislado*—, entonces la probabilidad (o frecuencia veritativa) de la sucesión puede únicamente asumir uno de los dos valores 1 y 0, según que el enunciado aislado sea verdadero o falso. Por lo cual se puede considerar la verdad o falsedad de un enunciado como un caso límite de la probabilidad; y, a la inversa, ésta puede considerarse como una generalización del concepto de verdad, dado que incluye a este último como caso límite. Finalmente, cabe definir las operaciones con frecuencias veritativas de tal suerte que las operaciones veritativas de la lógica clásica se conviertan en casos límites de aquellas operaciones; y puede llamarse «*lógica probabilitaria*» al cálculo con las mismas[3].

Pero, ¿podemos realmente identificar la *probabilidad de hipótesis* con la probabilidad de enunciados que acabamos de definir, y, por tanto, indirectamente, con la de eventos? Creo que estas identificaciones son el resultado de una confusión. La idea de que se parte es la de que la probabilidad de hipótesis debe encuadrarse bajo el rótulo de «probabilidad de enunciados» *—en el sentido que se acaba de definir—*, por tratarse, sin duda alguna, de un tipo de probabilidad de un enunciado; pero esta conclusión resulta ser injustificada, y de ahí que esta terminología sea completamente inadecuada. Tal vez, en resumidas cuentas, lo mejor sería no emplear nunca la expresión «probabilidad de enunciados» si nos queremos referir a la probabilidad de eventos[*3].

Sea esto como fuere, afirmo que las consideraciones basadas en la lógica probabilitaria no rozan siquiera los temas que surgen a partir del concepto de una *probabilidad de hipótesis*; y que si alguien dice de una hipótesis que no es verdadera, sino «probable», entonces este enunciado, bajo *ningunas* circunstancias puede traducirse por otro acerca de la probabilidad de eventos.

Pues si se intenta reducir la idea de probabilidad de hipótesis a la de frecuencia veritativa —que emplea el concepto de sucesión de enunciados—, se encuentra uno frente a frente con la siguiente cuestión: *¿con referencia a qué sucesión* de enunciados puede asignarse un valor probabilitario a una hipótesis? Reichenbach identifica la misma «aserción de la ciencia natural» —con lo cual quiere decir una hipótesis científica— con una sucesión de referencia de enunciados: dice, «…las aserciones de la ciencia natural —que no son nunca enunciados singulares— son, en realidad, sucesiones de enunciados, a las cuales, hablando rigurosamente, no hemos de asignar el grado de probabilidad 1, sino otro más pequeño; por tanto, solamente la lógica probabilitaria nos proporciona la forma lógica capaz de representar el concepto de conocimiento propio de la ciencia natural[4]». Tratemos ahora de seguir la sugerencia de que las hipótesis mismas son sucesiones de enunciados. Una forma de interpretar esto sería tomar como elementos de tal sucesión a los diversos enunciados singulares que pueden estar en contradicción con la hipótesis, o conformes con ella; entonces la probabilidad de dicha hipótesis estaría determinada por la frecuencia veritativa de los enunciados contenidos en la misma que estuvieran de acuerdo con ella. ¡Pero entonces la hipótesis adquiriría la probabilidad 1/2 si, por término medio, la refutase un enunciado singular de esta sucesión sí y otro no! Con objeto de eludir esta conclusión devastadora podemos ensayar otros expedientes[*4]. Atribuiríamos a la hipótesis cierta probabilidad —quizá una no muy precisa— basándonos en una estimación que hiciésemos de la razón de todas las contrastaciones superadas por ella a las que aún no Se han llevado a cabo. Pero este camino no lleva a ninguna parte, pues lo que ocurre es que es posible calcular semejante estimación de modo absolutamente preciso: y el resultado es siempre que la probabilidad es cero. Finalmente, podríamos tratar de apoyar nuestra estimación en la razón entre las contrastaciones que llevan a un resultado favorable y las que conducen a uno indiferente, esto es, las que no dan lugar a una decisión clara (con lo cual podríamos verdaderamente obtener algo que se parecería a la sensación subjetiva de confianza con que el experimentador mira sus resultados). Pero tampoco valdría este último expediente, incluso si no tenemos en cuenta el hecho de que con semejante tipo de estimación nos desviaríamos sobremanera del concepto de frecuencia veritativa y del de probabilidad de eventos (pues estos conceptos se basan en la razón de los enunciados verdaderos a los falsos, y —como es natural— no hemos de igualar un enunciado indiferente con uno objetivamente falso); la razón del fracaso de esta última tentativa es que la definición que hemos sugerido convertiría la probabilidad de una hipótesis en algo tan subjetivo que echaría todo a perder: dependería más de los conocimientos y la habilidad del experimentador que de resultados objetivamente reproducibles y contrastables.

Pero entiendo que es enteramente imposible aceptar la sugerencia de que haya que tomar una hipótesis por una sucesión de enunciados. Sería posible tal cosa si los enunciados universales tuviesen la forma, «para todo valor de *k* es verdadero que en el lugar *k* ocurre esto y lo otro»; entonces podríamos considerar los enunciados básicos (aquéllos que estuvieran en contradicción o en conformidad con el enunciado universal) como elementos de una sucesión de enunciados —que sería la que habría que tomar como enunciado universal—. Pero, según hemos visto (cf. los apartados 15 y 28), los enunciados universales no poseen tal forma: los enunciados básicos no son jamás deductibles de enunciados universales solos[*5], y, por ello, estos últimos no pueden considerarse como sucesiones de aquéllos. Mas si pretendemos tomar en consideración la sucesión de aquellas negaciones de enunciados básicos que *sean* deductibles de enunciados universales, entonces la estimación de *toda* hipótesis coherente conduciría a la misma probabilidad, a saber, 1; pues, en tal caso, habríamos de tener en cuenta la razón entre los enunciados básicos negados *no falsados* que pueden deducirse (o bien otros enunciados deductibles) y los *falsados*; lo cual quiere decir que, en lugar de considerar una frecuencia de verdad, tendríamos que atender al valor complementario de una frecuencia de falsedad: pero este valor sería igual a la unidad, ya que tanto la clase de los enunciados deductibles como, incluso, la clase de las negaciones —deductibles— de enunciados-básicos, son infinitas; y, por otra parte, no puede haber más que un número finito de enunciados básicos falsadores aceptados. Así pues, aun en caso de que no tengamos en cuenta el hecho de que los enunciados universales no son nunca sucesiones de enunciados, y de que hasta tratemos de interpretarlos como una cosa de esta índole y de coordinarlos con sucesiones de enunciados singulares completamente decidibles, no llegamos a conseguir un resultado aceptable.

Tenemos que examinar todavía otra posibilidad —enteramente diferente— de explicar la probabilidad de una hipótesis a base de sucesiones de enunciados. Puede recordarse que hemos llamado «probable» a un acontecimiento singular dado (en el sentido de un «enunciado probabilitario formalmente singular») si es un *elemento de una sucesión* de acontecimientos que tienen cierta probabilidad; podría intentarse análogamente llamar «probable» a una hipótesis si es un *elemento de una sucesión de hipótesis* con una frecuencia veritativa determinada. Pero esta tentativa vuelve a fracasar —independientemente de la dificultad de establecer la sucesión de referencia (que puede elegirse de muchas maneras: cf. el apartado 71)—, pues no podemos hablar de una frecuencia veritativa dentro de una sucesión de hipótesis, por el simple hecho de que no podemos saber nunca si una hipótesis es verdadera: si *pudiéramos* saberlo, apenas necesitaríamos para nada el concepto de probabilidad de una hipótesis. Ahora podemos intentar, como hemos hecho más arriba, tomar como punto de partida el complemento de la frecuencia falsitativa dentro de una sucesión de hipótesis. Pero si, digamos, definimos la probabilidad de una hipótesis valiéndonos de la razón de las hipótesis de la sucesión no falsadas a las falsadas, entonces —lo mismo que antes— la probabilidad de *toda* hipótesis dentro de *toda* sucesión de referencia *infinita* ha de ser igual a 1. E incluso si elegimos una sucesión de referencia *finita* no nos encontramos en mejor situación: pues supongamos que, de acuerdo con este procedimiento, podamos atribuir a los elementos de cierta sucesión de hipótesis (*finita*) un grado de probabilidad comprendido entre 0 y 1, por ejemplo, el valor 3/4; podremos hacer esto si llegamos a informarnos de que tal o cual hipótesis de la sucesión ha quedado falsada; pero entonces, en la medida en que estas hipótesis *falsadas* son elementos de la sucesión, hemos de adscribirles —*debido a la información obtenida*— no el valor 0, sino 3/4; y, en general, la probabilidad de una hipótesis habría de decrecer en 1/*n* a consecuencia de la información de que es falsa (en donde *n* es el número de hipótesis de la sucesión de referencia). Todo esto contradice de un modo palmario el programa, que nos habíamos propuesto, de expresar por medio de una «*probabilidad de hipótesis*» el grado de seguridad o confianza que tendríamos que atribuir a una hipótesis a la vista de los datos que la apoyan o la quebrantan.

Con lo cual me parece que quedan agotadas las posibilidades de basar el concepto de probabilidad de una hipótesis en el de frecuencia de enunciados verdaderos (o en el de frecuencia de enunciados falsos), y, por tanto, en la teoría frecuencial de la probabilidad de eventos[*6].

A mi entender, hemos de considerar la tentativa de identificar la probabilidad de una hipótesis con la probabilidad de eventos como un completo fracaso. Esta conclusión es enteramente independiente de si aceptamos la pretensión (de Reichenbach) de que *todas las hipótesis de la física* no son, «en realidad», o «cuando se las estudia detalladamente», sino enunciados probabilitarios (acerca de ciertas frecuencias medias dentro de sucesiones de observaciones, en las que siempre se observan desviaciones con respecto a un valor medio), o de si nos sentimos inclinados a establecer una distinción entre dos *tipos* diferentes de leyes naturales: las leyes «deterministas» o «precisas», por un lado, y las «leyes probabilitarias» o «hipótesis frecuenciales», por otro. Pues ambos tipos son asunciones hipotéticas que nunca pueden hacerse «probables» a su vez: lo único que pueden hacer es quedar corroboradas, en el sentido de que pueden «demostrar su temple» bajo el fuego (el fuego de nuestras contrastaciones).

¿Cómo explicaremos el hecho de que los creyentes en la lógica probabilitaria han llegado a la tesis opuesta? ¿Dónde se oculta el error cometido por Jeans cuando escribe —al principio en un sentido con el que puedo estar completamente de acuerdo — que «… no sabemos nada… *con seguridad*» y continúa: «En el mejor de los casos podemos tratar tan sólo de *probabilidades*; [y] las predicciones de la nueva teoría cuántica se encuentran en tanta conformidad [con las observaciones], que la verosimilitud de que este esquema tenga cierta correspondencia con la realidad es *enorme*: en realidad, podemos decir que es casi seguro que sea cuantitativamente verdadero…»[5]?.

Sin duda alguna, el error más corriente consiste en creer que las estimaciones hipotéticas de frecuencias —esto es, las hipótesis acerca de las probabilidades— pueden ser, a su vez, solamente probables; o —dicho de otro modo— en atribuir a las *hipótesis probabilitarias* cierto grado de una supuesta *probabilidad de hipótesis*. Podemos llegar a construir un argumento muy persuasivo en favor de esta errónea conclusión si recordamos que las hipótesis acerca de las probabilidades no son verificables ni falsables, en lo que a su forma lógica se refiere, e independientemente de nuestro requisito metodológico de falsabilidad (cf. los apartados 65 a 68): no son verificables por ser enunciados universales, y tampoco estrictamente falsables debido a que nunca pueden contradecirlas enunciados básicos algunos. Son, pues (según lo expresa Reichenbach), completamente indecidibles[6].

Ahora bien, como hemos tratado de mostrar, pueden *estar mejor o peor «confirmadas»*, es decir, pueden estar de mayor o menor acuerdo con los enunciados básicos aceptados: y éste es el punto en que, según puede parecer, entra la lógica probabilitaria. La simetría entre la verificabilidad y la falsabilidad aceptada por la lógica inductivista clásica sugiere la creencia en que ha de ser posible coordinar tales enunciados probabilitarios «indecidibles» con cierta escala de grados de validez, algo así copio «grados continuos de probabilidad, cuyos límites superior e inferior, inalcanzables, son la verdad y la falsedad[7]» (por citar de nuevo a Reichenbach). Sin embargo, según mi tesis, los enunciados probabilitarios, precisamente por ser completamente indecidibles, son *metafísicos* —a menos que nos decidamos a hacerlos falsables aceptando una regla metodológica—; por tanto, el sencillo resultado de su infalsabilidad no es que puedan estar mejor o peor corroborados, sino que *no pueden estar corroborados empíricamente en medida alguna*: pues, de otro modo —y teniendo en cuenta que no excluyen nada y que, por ello, son compatibles con todo enunciado básico—, podría decirse que estaban «corroborados» por *todo enunciado básico arbitrariamente elegido* (de un grado de composición cualquiera), con tal de que describiera un acontecimiento pertinente.

Creo que la física sólo emplea los enunciados probabilitarios del modo que he estudiado extensamente al tratar de la teoría de la probabilidad; y, más en particular, que utiliza las asunciones probabilitarias como enunciados falsables, exactamente lo mismo que hace con las demás hipótesis. Pero rehusaría participar en ninguna discusión acerca de cómo proceden, «en realidad», los físicos, ya que ello tendrá que ser siempre, en gran medida, una cuestión de interpretación.

Tenemos aquí un ejemplo bastante claro del contraste entre mi tesis y lo que he llamado en el apartado 10 la tesis «naturalista»: puede hacerse ver, en primer término, la coherencia lógica interna de mi teoría, y, en segundo, que está libre de las dificultades que cercan a otras. Reconozco, naturalmente, que es imposible demostrar que mi tesis sea exacta, y que, probablemente, sería fútil una controversia con quienes mantienen otra lógica de la ciencia: todo lo que cabe poner de manifiesto es que el modo en que abordo este problema particular es consecuencia de la concepción de la ciencia que he estado defendiendo[*7].

81. LÓGICA INDUCTIVA Y LÓGICA PROBABILITARIA

No es posible reducir la probabilidad de hipótesis a la de eventos: ésta es la conclusión que surge del examen llevado a cabo en el apartado anterior. Pero, ¿no podría llevar un modo distinto de enfrentarse con la cuestión a una definición satisfactoria de la idea de una *probabilidad de hipótesis*?

No creo que sea factible un concepto de esta última que pueda interpretarse en el sentido de que exprese el «grado de validez» de la hipótesis, de un modo análogo a como ocurre con los de «verdadero» y «falso» (y que, además, se encuentre en una relación suficientemente estrecha con el concepto de «probabilidad objetiva» —esto es, de frecuencia relativa— como para justificar el empleo de la palabra «probabilidad»)[1]. Sin embargo, adoptaré con fines dialécticos la *suposición* de que se haya construido realmente semejante concepto, de suerte que se pueda plantear la cuestión sobre de qué modo afectaría tal cosa al problema de la inducción.

Supongamos que se ha reconocido que cierta hipótesis —digamos, la teoría de Schrödinger— es «probable» en un sentido determinado: ya sea «probable en este o aquel grado numérico» o meramente «probable», sin especificar grado. Podemos llamar *evaluación* de la teoría de Schrödinger al enunciado que la describe como «probable».

Desde luego, una evaluación tiene que ser un enunciado sintético —una aserción acerca de la realidad— del mismo modo que lo serían los enunciados «la teoría de Schrödinger es verdadera» y «la teoría de Schrödinger es falsa». Es evidente que todos ellos dicen algo acerca de la adecuación de la teoría, y que, por tanto, sin duda alguna, no son tautológicos[*1]: dicen que una teoría es adecuada o inadecuada, o que tiene cierto grado de adecuación. En segundo lugar, toda evaluación de la teoría de

Schrödinger ha de ser un enunciado sintético *inverificable*, exactamente lo mismo que la teoría misma: pues la «probabilidad» de una teoría —esto es, la probabilidad de que ésta continúe siendo aceptable— no puede deducirse *de un modo definitivo* de enunciados básicos, como es patente. Nos vemos obligados a preguntar, pues: ¿cómo puede justificarse una evaluación?; ¿cómo puede contrastársela? (con lo cual surge de nuevo el problema de la inducción: véase el apartado 1).

En cuanto a la evaluación misma, podríamos afirmar que es «verdadera» o que es, a su vez, «probable». Si se la considera «verdadera» tiene que ser un *enunciado sintético verdadero* que no ha sido verificado empíricamente, esto es, un enunciado sintético verdadero *a priori*; y si se la toma como «probable», necesitamos una *nueva* evaluación, como si dijéramos una evaluación de la evaluación, y, por tanto, una evaluación de orden superior: pero esto quiere decir que estamos cogidos en una regresión infinita. La apelación a la probabilidad de la hipótesis es incapaz de mejorar la precaria situación de la lógica inductiva.

La mayoría de los que creen en la lógica probabilitaria sostienen la tesis de que se llega a la evaluación por medio de un «principio de inducción», que adscribe probabilidades a las hipótesis inducidas. Pero si vuelven a atribuir una probabilidad a este principio, entonces continúa el regreso infinito; y si, por el contrario, le atribuyen la «verdad», entonces se enfrentan con el dilema de elegir entre la regresión infinita y el *apriorismo*. «De una vez para siempre —dice Heymans—la teoría de la probabilidad es incapaz de explicar los razonamientos inductivos: pues exactamente el mismo problema que se encuentra latente bajo éstos lo está bajo aquélla (en la aplicación empírica de la teoría de la probabilidad). En ambos casos, la conclusión va más allá de lo que está dado en las premisas[2]». Así pues, no se gana nada con sustituir la palabra «verdadero» por «probable», ni la palabra «falso» por «improbable». Sólo si se tiene en cuenta *la asimetría entre verificación y falsación* —la asimetría que procede de la relación lógica existente entre las teorías y los enunciados básicos— es posible evitar las celadas del problema de la inducción.

Los creyentes en la lógica de la probabilidad pueden tratar de frustrar mis críticas afirmando que provienen de una mentalidad «atada al marco de la lógica clásica», e incapaz —por tanto— de seguir los métodos de razonar que se emplean en la lógica probabilitaria: admito, desde luego, que soy incapaz de seguir tales métodos.

82. TEORÍA POSITIVA DE LA CORROBORACIÓN: CÓMO PUEDE «DEMOSTRAR SU TEMPLE» UNA HIPÓTESIS

¿No podrán volverse, quizá, contra mi propia tesis las objeciones que acabo de plantear a la teoría probabilitaria de la inducción? Podría muy bien ocurrir que así fuera, ya que están basadas en la idea de una *evaluación*: y —sin duda— tengo que emplear yo también esta idea. Yo hablo de la «*corroboración*» de una teoría, y ésta sólo puede expresarse como una evaluación (a este respecto no existe diferencia alguna entre corroboración y probabilidad). Además, también yo mantengo que no puede afirmarse que las hipótesis sean enunciados «verdaderos», sino solamente «conjeturas provisionales» (o algo semejante): tesis que también puede sólo expresarse en forma de evaluación de las hipótesis.

Es fácil responder a la segunda parte de esta objeción. La evaluación de hipótesis que, ciertamente, me veo obligado a emplear, y que las describe como «conjeturas provisionales» (o algo análogo), tiene el estatuto de una *tautología*: por tanto, no da lugar a dificultades del tipo originado por la lógica inductiva. Y ello porque tal descripción solamente parafrasea o interpreta la aserción (a la que por definición es equivalente) de que los enunciados estrictamente universales —esto es, las teorías— no pueden deducirse de enunciados singulares.

La situación es parecida en lo que respecta a la primera parte de la objeción, que se refiere a las evaluaciones que enuncian que una teoría está corroborada. La evaluación corroborante no es una hipótesis, sino que puede deducirse en cuanto se nos den la teoría y los enunciados básicos aceptados: aquella evaluación afirma el hecho de que estos enunciados no contradicen a la teoría, y su afirmación tiene debidamente en cuenta el grado de contrastabilidad de ésta y la dureza de las contrastaciones a que se la ha sometido —hasta un momento determinado.

Decimos que una teoría está «corroborada» mientras sale indemne de dichas contrastaciones. La evaluación que afirma la corroboración (esto es, la evaluación corroboradora) establece ciertas relaciones fundamentales, a saber, la compatibilidad y la incompatibilidad. Consideramos a esta última como equivalente a falsación de la teoría; pero la compatibilidad por sí sola no puede hacer que atribuyamos un grado positivo de corroboración a aquélla: el mero hecho de que una teoría no haya sido falsada aún no puede considerarse suficiente, como es claro; pues no hay nada más fácil que construir una cantidad cualquiera de sistemas teóricos que sean compatibles con un conjunto dado de enunciados básicos aceptados (y esta observación es aplicable, asimismo, a todos los sistemas «metafísicos»).

Podría sugerirse tal vez que debería concederse un grado positivo de corroboración a una teoría si es compatible con el sistema de los enunciados básicos aceptados y si, además de esto, cabe deducir de ella parte de dicho sistema. O bien —si se considera que los enunciados básicos no son deductibles de un sistema puramente teórico (aun cuando sus negaciones sí pueden serlo)— podría sugerirse que se adoptara la regla siguiente: ha de concederse a una teoría un grado positivo de corroboración si es compatible con los enunciados básicos aceptados y si, además, una subclase no vacía de estos últimos es deductible de la teoría en conyunción con los demás enunciados básicos aceptados[*1].

No tengo objeciones serias que hacer a esta última formulación, salvo que me parece insuficiente para caracterizar adecuadamente el grado positivo de corroboración de una teoría. Pues queremos decir que unas teorías están mejor o peor corroboradas; ahora bien, su *grado de corroboración*, sin duda alguna, no puede establecerse sin más que contar el número de casos corroboradores (o sea, el de enunciados básicos aceptados que sean deductibles del modo indicado): pues puede ocurrir que una teoría resulte estar mucho peor corroborada que otra, aun cuando hayamos deducido muchísimos enunciados básicos con la primera y sólo unos pocos con la segunda. Como ejemplo podemos comparar las hipótesis «todos los cuervos son negros» y «la carga del electrón tiene el valor determinado por Millikan» (que habíamos mencionado en el apartado 37): aunque es de presumir que hayamos encontrado muchos más enunciados básicos corroboradores de la primera hipótesis, juzgamos que la hipótesis de Millikan es la mejor corroborada de las dos.

Esto hace ver que lo que determina el grado de corroboración no es tanto el número de casos corroboradores cuanto *la dureza de las diversas contrastaciones* a las que puede someterse —o se ha sometido— la hipótesis en cuestión. Pero dicha dureza depende, a su vez, del *grado de contrastabilidad*, y, por tanto, de la sencillez de la hipótesis: la que es falsable en un grado más alto —o sea, la hipótesis más sencilla— es también la corroborable en grado más elevado[1]. Como es natural, el grado de corroboración alcanzado de hecho no depende *solamente* del de falsabilidad: un enunciado que sea falsable en gran medida puede estar corroborado sólo muy ligeramente, e incluso puede estar falsado en realidad; y quizá —sin que se le haya falsado— pueda estar superado por una teoría mejor contrastable, de la cual podría deducírsele —u otro enunciado suficientemente aproximado a él— (y, en este caso, su grado de corroboración disminuiría).

Del mismo modo que el grado de falsabilidad, el de corroboración de dos enunciados puede no ser comparable en todos los casos: no podemos definir un grado de corroboración calculable numéricamente, sino sólo hablar aproximadamente de grados positivos o negativos de corroboración, etc[*2]. Pero podemos asentar varias reglas: por ejemplo, la de que no seguiremos atribuyendo un grado positivo de corroboración a una teoría que haya quedado falsada en virtud de un experimento contrastable intersubjetivamente y basado en una hipótesis falsadora (cf. los apartados 8 y 22) (pero podemos, con todo, conceder bajo ciertas circunstancias un grado positivo de corroboración a otra teoría que siga un modo de pensar cercano al de aquélla: tenemos un ejemplo en la teoría einsteiniana del fotón, con su cercanía a la teoría corpuscular de la luz de Newton). En general, consideramos que una falsación contrastable intersubjetivamente es definitiva (suponiendo que esté bien contrastada): éste es el modo en que se hace sentir la asimetría entre la verificación y la falsación. Cada una de estas cuestiones metodológicas contribuye de un modo peculiar al desarrollo histórico de la ciencia, que sigue un proceso de aproximaciones sucesivas: una evaluación corroborativa realizada posteriormente —esto es, una evaluación hecha tras haber añadido nuevos enunciados básicos a los ya aceptados— puede remplazar un grado positivo de corroboración por uno negativo, pero no viceversa—. Y aunque creo que en la historia de la ciencia es siempre la teoría y no el experimento, la idea y no la observación, lo que abre paso a nuevos conocimientos, creo también que es siempre el experimento lo que nos saca de las sendas que no llevan a ninguna parte —lo que nos ayuda a salir del atolladero y nos desafía a que encontremos una nueva ruta.

Así pues, el grado de falsabilidad o de sencillez de una teoría cuenta para la evaluación del grado en que está corroborada; evaluación que podemos considerar como una de las relaciones lógicas existentes entre la teoría y los enunciados básicos aceptados, y que tiene en cuenta la dureza de las contrastaciones a que ha sido sometida aquélla.

83. CORROBORABILIDAD, CONTRASTABILIDAD Y PROBABILIDAD LÓGICA[*1]

Al evaluar el grado de corroboración de una teoría tomamos en consideración su grado de falsabilidad: cuanto más contrastable es una teoría, mejor puede ser corroborada. Pero la contrastabilidad es lo contrario del concepto de *probabilidad lógica*, de modo que podemos, asimismo, decir que al evaluar la corroboración se tiene en cuenta la probabilidad lógica del enunciado en cuestión; la cual, a su vez, está en relación con el concepto de probabilidad objetiva —la probabilidad de eventos—, según vimos en el apartado 72. Así pues, por el hecho de contar con la probabilidad lógica, el concepto de corroboración está ligado —aunque sea sólo de una forma indirecta e imprecisa— con el de probabilidad de eventos. Y puede ocurrírsenos que tal vez haya aquí una conexión con la doctrina de la probabilidad de hipótesis que hemos criticado más arriba.

Cuando tratamos de evaluar el grado de corroboración de una teoría podemos razonar poco más o menos del modo siguiente. Dicho grado aumentará con el número de casos corroboradores; y a este respecto solemos conceder a los primeros ejemplos de corroboración mucha mayor importancia que a los últimos, de suerte que, una vez que una teoría está bien corroborada, sus últimos ejemplos aumentan muy poco su grado de corroboración; sin embargo, esta regla no es válida si tales nuevos ejemplos son muy distintos de los anteriores —esto es, si corroboran la teoría en un *nuevo campo de aplicación*—: si ocurre tal cosa, pueden hacer crecer considerablemente el grado de corroboración. Por tanto, el correspondiente a una teoría que tenga un grado mayor de universalidad puede ser más grande que el de otra que lo tenga menor (y, por ello, menor también de falsabilidad); y, de un modo análogo, las teorías de grado de precisión más elevado pueden corroborarse mejor que las menos precisas. Una de las razones por las que no concedemos un grado positivo de corroboración a las típicas profecías de los quirománticos y adivinos es que sus predicciones son tan cautas e imprecisas que la probabilidad lógica de que resulten exactas es sumamente elevada; y si se nos dice que se han confirmado vaticinios de esta índole, si bien más precisos y, por tanto, lógicamente menos probables, lo que ponemos en tela de juicio —por regla general— no es tanto su éxito cuanto su pretendida improbabilidad lógica: como nos inclinamos a creer que tales profecías no son corroborables, tendemos a inferir en tales casos su pequeño grado de contrastabilidad de su pequeño grado de corroborabilidad.

Si comparamos estas tesis mías con las que están implícitas en la lógica probabilitaria (inductiva) llegamos a un resultado verdaderamente notable. Según lo que yo defiendo, la corroborabilidad de una teoría, y el grado de corroboración de una que haya sobrepasado realmente contrastaciones muy duras, se encuentran algo así como[*2] en razón inversa de su probabilidad lógica, ya que ambas aumentan con su grado de contrastabilidad y de sencillez. *Pero la tesis implicada por la lógica probabilitaria es justamente la opuesta*: sus mantenedores hacen que la probabilidad de una hipótesis crezca en razón directa de su probabilidad lógica —si bien no cabe duda de que *entienden* por «probabilidad de una hipótesis» poco más o menos lo mismo que yo trato de designar con «grado de corroboración[*3]».

Entre los que razonan de tal modo se encuentra Keynes, que emplea la expresión «probabilidad *a priori*» para lo que yo llamo «probabilidad lógica» (véase la nota 1 del apartado 34). Este autor hace la siguiente observación[1] —que es enteramente exacta— acerca de una «generalización» (esto es, una hipótesis) *g* que tenga una «condición» (o antecedente, o prótasis) φ y una «conclusión» (o consecuente, o apódosis) *f*: «Cuanto más comprensiva sea la condición φ y menos la conclusión *f*, mayor probabilidad *à priori*[*4] atribuimos a la generalización *g*; con cada aumento de φ aumenta tal probabilidad, y con cada incremento de *f* habrá de disminuir». Como he dicho, esto es absolutamente exacto, aun cuando Keynes no traza una distinción tajante[*5] entre lo que él llama la «probabilidad de una generalización» —que corresponde a lo que aquí hemos llamado la «probabilidad de una hipótesis»— y su «probabilidad *a priori*». Así pues, y frente a lo que ocurre con mi concepto de la corroboración, la probabilidad keynesiana de una hipótesis *aumenta* juntamente con su probabilidad lógica (o falta de contenido); mas el hecho de que su «probabilidad» aumente con el número de casos corro horado res, y el (más importante) de que también lo haga al aumentar les diferencias entre ellos, indican, sin embargo, que Keynes entiende con aquélla lo mismo que yo hago con mi «corroboración». (Pero este autor no se da cuenta de que las teorías cuyos ejemplos corroboradores pertenecen a campos de aplicación sumamente diferentes suelen tener un grado de universalidad elevado; y, por ello, sus dos requisitos para tener gran probabilidad —la menor universalidad posible y la mayor diversidad de casos corroboradores— serán, por regla general, incompatibles).

Expresada con mi terminología, la teoría de Keynes implica que la corroboración (o la probabilidad de las hipótesis) *decrece* al aumentar la contrastabilidad, tesis a que le lleva su creencia en la lógica inductiva[*6]. En efecto, la tendencia de ésta es hacer las hipótesis científicas lo más *seguras* posible: se atribuye importancia científica a las distintas hipótesis sólo en la medida en que pueden quedar justificadas por la experiencia, y se considera científicamente valiosa una teoría sólo debido a la estrecha *proximidad lógica* (cf. la nota 2 del apartado 48 y el texto correspondiente) entre ella y los enunciados empíricos. Pero esto no significa otra cosa sino que el *contenido* de una teoría debe trascender lo que se encuentra asentado empíricamente *lo menos posible*[*7], tesis unida estrechamente a cierta tendencia a negar el valor de la predicción: «Las virtudes peculiares de la predicción —escribe Keynes[2]— … son enteramente imaginarias. Los puntos esenciales son el número de casos examinados y la analogía existente entre ellos; la cuestión acerca de si se ha propuesto una hipótesis concreta antes o después de semejante examen no hace al caso». En lo que respecta a las hipótesis «propuestas *a priori*» —esto es, propuestas antes de que tuviésemos bastante fundamento para ellas desde un punto de vista inductivo— Keynes dice: «… si lo único que se había hecho es tratar de adivinar, el hecho afortunado de haberse anticipado a algunos o a todos los casos que verifican lo dicho no añade nada en absoluto a su valor». Sin duda, esta teoría de la predicción es coherente; pero le hace a uno asombrarse de por qué generalizaríamos nunca. ¿Qué razones puede haber para que construyamos teorías e hipótesis? El punto de vista de la lógica inductiva hace incomprensibles todas estas actividades: si lo que más valoramos es el conocimiento más seguro posible, y si las predicciones no contribuyen como tales en nada a conseguir una corroboración, ¿por qué no hemos de quedarnos satisfechos con nuestros enunciados básicos[*8]?.

Otra tesis que da lugar a preguntas muy parecidas es la de Kaila[3]. Mientras que yo creo que las teorías sencillas —y justamente aquéllas que emplean pocas hipótesis auxiliares (cf. el apartado 46)— son las que pueden corroborarse bien, precisamente por su improbabilidad lógica, Kaila interpreta la situación exactamente del modo opuesto, por razones análogas a las de Keynes; también él ve que solemos atribuir una elevada probabilidad (o, en nuestra terminología, una elevada «probabilidad de hipótesis») a las teorías *sencillas*, y, especialmente, a las que necesitan pocas hipótesis auxiliares, pero sus razonamientos son opuestos a los míos. No adscribe la gran probabilidad mencionada a tales teorías como hago yo, porque éstas sean contrastables con mucha dureza, o lógicamente improbables (esto es, porque tengan a priori —por decirlo así— *muchas ocasiones de chocar con enunciados básicos*): por el contrario, considera del modo dicho a las teorías sencillas y con pocas hipótesis auxiliares porque cree que un sistema que conste de *pocas* hipótesis tendrá, *a priori*, menos ocasiones de chocar con la realidad que otro en que entren muchas. Y ahora volvemos a asombrarnos de que nos molestemos en construir tales teorías, siempre arriesgadas: si rehuimos todo conflicto con la realidad, ¿por qué ponemos en trance de que surja haciendo afirmaciones? Como nuestra meta es la seguridad, el modo de proceder más seguro sería adoptar un sistema *sin* hipótesis.

Mi regla según la cual deben emplearse lo menos posible las hipótesis auxiliares (el «principio de parquedad en el uso de hipótesis») no tiene nada en común con consideraciones tales como las de Kaila. No me preocupo simplemente por conservar reducido el número de nuestros enunciados: me importa mucho su *sencillez —en el sentido de gran contrastabilidad—*, y ello lleva, por un lado, a la regla de que las hipótesis auxiliares han de emplearse lo menos posible, y, por otro, a pedir que mantengamos el número de axiomas —o sea, el de nuestras hipótesis más fundamentales— lo más pequeño que podamos. Pues este último punto procede del requisito de que se elijan los enunciados de un elevado nivel de universalidad, y de que siempre que sea posible se deduzca un sistema que conste de muchos «axiomas» de otro con menos «axiomas», y éstos de mayor nivel de universalidad (y que, por tanto, se explique aquél a partir de éste).

84. OBSERVACIONES ACERCA DEL USO DE LOS CONCEPTOS DE VERDADERO Y CORROBORADO

En la lógica de la ciencia que he bosquejado es posible evitar el empleo de los conceptos de verdadero y falso[*1]: en su lugar, pueden entrar consideraciones lógicas acerca de las relaciones de deductibilidad. Así pues, no necesitamos decir, «la predicción *p* es verdadera si la teoría *t* y el enunciado básico *b* son verdaderos»; en vez de ello, podemos decir que el enunciado p se sigue de la conyunción (no contradictoria) de *t* y *b*. Y cabe describir la falsación de una teoría de un modo semejante: no es menester que digamos que una teoría es falsa, sino solamente que la contradice cierto conjunto de enunciados básicos aceptados. No nos vemos obligados a decir que ciertos enunciados básicos son «verdaderos» o son «falsos», ya que podemos interpretar su aceptación como el resultado de una decisión convencional, y considerar los enunciados aceptados como resultado de tal decisión.

Ciertamente, esto no quiere decir que nos esté prohibido el uso de los conceptos de «verdadero» y «falso», ni que su empleo origine dificultades especiales: el mismo hecho de que podamos eludirlos indica que no pueden dar lugar a ningún nuevo problema fundamental. Su utilización es enteramente análoga a la de conceptos tales como «*tautología*», «*contradicción*», «*conyunción*», «*implicación*» y otros por el estilo: no son conceptos empíricos, sino lógicos[1]; describen o evalúan un enunciado independientemente de cualesquiera cambios en el mundo empírico. Mientras que suponemos que las propiedades de los objetos físicos (los objetos «genidénticos» en el sentido de Lewin) cambian con el paso del tiempo, nos decidimos a emplear estos predicados lógicos de tal modo que las propiedades lógicas de los enunciados se hagan intemporales: si un enunciado es una tautología, lo es de una vez para siempre. Y adscribimos esta misma intemporalidad a los conceptos de «verdadero» y «falso», de acuerdo con el uso corriente: no se suele decir de un enunciado, que era completamente verdadero ayer pero se ha convertido hoy en falso; si ayer evaluamos como verdadero un enunciado cuya evaluación de hoy es la de falso, afirmamos implícitamente que *ayer estábamos equivocados*: que el enunciado era falso incluso ayer —falso intemporalmente—, pero que «lo tomamos por verdadero» por error.

Podemos ver aquí muy claramente la diferencia entre verdad y corroboración. La evaluación de un enunciado como corroborado o no corroborado es también una evaluación lógica, y, por tanto, intemporal, pues afirma que se cumple cierta relación lógica entre un sistema teórico y cierto sistema de enunciados básicos aceptados. Pero no podemos decir nunca que un enunciado está «corroborado» como tal, o en sí mismo (a la manera en que podemos decir que es «verdadero»), sino únicamente que está *corroborado con respecto a algún sistema de enunciados básicos* —sistema que está aceptado hasta una fecha concreta—. «La corroboración que una teoría ha recibido hasta ayer» *no es lógicamente idéntica* con «la corroboración que ha recibido hasta hoy»; así pues, podríamos añadir algo así como un subíndice a toda evaluación de la corroboración, subíndice que caracterizaría el sistema de enunciados básicos a que se refiere la corroboración (por ejemplo, indicando la fecha de su aceptación)[*2].

Por consiguiente, la corroboración no es un «valor veritativo»; o sea, no puede equiparársela a los conceptos de «verdadero» y «falso» (que están libres de subíndices temporales): pues para uno y el mismo enunciado puede existir un número cualquiera de valores distintos de corroboración, todos los cuales serán, sin duda, «correctos» o «verdaderos» simultáneamente; pues serán valores deductibles de la teoría y de diversos conjuntos de enunciados básicos, que estarían aceptados en fechas distintas.

Las observaciones anteriores pueden servir también —tal vez— para elucidar el contraste entre mis opiniones y las de los pragmatistas, que proponen *definir la «verdad» o base de los éxitos de una teoría —y, por tanto, de su utilidad— o de su confirmación o su corroboración*. Si meramente pretenden afirmar que una evaluación lógica del éxito de una teoría no puede ser sino una evaluación de su corroboración, estoy dispuesto a admitirlo. Pero me parece que identificar el concepto de corroboración con el de verdad distaría mucho de ser «*útil*[*3]»; y en el uso corriente se evita hacer tal cosa: pues cabe muy bien decir de una teoría que apenas está corroborada por ahora, o que todavía no está corroborada, mientras que normalmente no diríamos nunca que una teoría apenas es verdadera por ahora, o que todavía es falsa.

85. LA RUTA DE LA CIENCIA

En la evolución de la física puede discernirse algo así como una dirección general de su evolución, que partiendo de teorías de un nivel reducido de universalidad iría hacia teorías de nivel más elevado. A esto suele llamarse la dirección «inductiva»; y podría pensarse que el hecho de que la física avance en esta dirección permite ser utilizado como argumento en favor del método inductivo.

Ahora bien; un avance en dirección inductiva no consiste necesariamente en una sucesión de inferencias inductivas: en realidad, hemos hecho ver que puede explicarse de un modo enteramente diferente, a saber, teniendo en cuenta los grados de contrastabilidad y de corroborabilidad. Pues sólo cabe superar una teoría que esté bien corroborada por medio de otra de nivel de universalidad más alto; esto es, por una que sea más contrastable y que, además, contenga la teoría antigua y bien corroborada (o, al menos, una buena aproximación de ella). Por lo cual, sería mejor designar semejante tendencia —el paso a teorías de nivel de universalidad más elevado— diciendo que es «casi inductiva».

Los procesos casi inductivos deberían mirarse del modo siguiente. Se proponen teorías de cierto nivel de universalidad, y se contrastan deductivamente; después se proponen otras de un nivel de universalidad más elevado, que se someten a contraste valiéndose de las correspondientes a los niveles anteriores; y así sucesivamente. Los métodos de contrastación están apoyados invariablemente en inferencias deductivas que van de un nivel a otro más bajo[*1]; mientras que, por otra parte, en la sucesión temporal se llega a cada nivel de universalidad pasando de un nivel inferior a otro más elevado.

Puede plantearse ahora la cuestión siguiente. «¿Por qué no inventar directamente teorías del máximo nivel de universalidad? ¿Por qué esperamos a esta evolución casi inductiva? ¿No será, tal vez, porque, al fin y a la postre, haya algún elemento inductivo contenido en ella?». Yo no lo creo así. Una y otra vez se proponen ciertas sugerencias —conjeturas, o teorías— de todos los niveles posibles de universalidad; las teorías que se encuentran en un nivel de universalidad demasiado elevado, como si dijéramos (esto es, demasiado lejos del nivel alcanzado por la ciencia que en aquel momento es susceptible de contrastación), darán lugar, quizá, a un «sistema metafísico». En este caso, incluso si son deductibles enunciados que pertenecen al sistema científico vigente (o sólo semideductibles, como, por ejemplo, en el sistema de Spinoza), entre ellos no se encontrará ningún enunciado contrastable *nuevo*: lo cual quiere decir que no podrá idearse ningún experimento crucial con el que someter a contraste el sistema en cuestión[*2]. Pero si, por el contrario, cabe idear un experimento crucial con el fin indicado, el sistema contendrá —al menos como primera aproximación— alguna teoría bien corroborada y, además, alguna otra cosa que quepa contrastar: no será «metafísico», naturalmente, y cabrá considerarle como un nuevo paso en la evolución casi inductiva de la ciencia. Esto explica por qué, por regla general, sólo las teorías que se proponen con una pretensión de resolver los problemas a la vista en el momento —esto es, las dificultades, contradicciones y falsaciones con que se está enfrentado en el momento— establecen un contacto con la ciencia de la época: al proponer una solución para tales dificultades, tales teorías pueden indicar el camino hacia un experimento crucial.

Para tener una imagen o modelo de esta evolución casi inductiva de la ciencia podemos representarnos las diversas ideas e hipótesis como partículas suspendidas en un fluido. La ciencia susceptible de contrastación es el precipitado de dichas partículas en el fondo del recipiente, donde se depositan en capas (de universalidad);

.

el espesor del depósito crece con el número de capas, y cada capa nueva corresponde a una teoría más universal que las situadas debajo de ella. Como resultado de este proceso, es posible que el crecimiento de la ciencia llegue a alcanzar ideas que antes se encontraban flotando en regiones metafísicas más altas, con las que establece contacto y las hace asentarse. Tenemos ejemplos de estas ideas en el atomismo, en la idea de un «principio» físico —o elemento último— único (del cual se deriven todos los demás), en la teoría del movimiento terrestre (al cual se opuso Bacon como ficticio), en la antiquísima teoría corpuscular de la luz, y en la teoría de la electricidad como fluido (que ha revivido en forma de la hipótesis del gas de electrones de la conducción metálica). Todos estos conceptos e ideas metafísicos pueden haber ayudado, incluso en sus formas más primerizas, a ordenar la imagen del mundo que tiene el hombre, y, en algunos casos, han llevado a predicciones con éxito. Pero una idea de este tipo adquiere ciudadanía científica solamente cuando se la presenta en forma falsable: esto es, sólo cuando se ha hecho posible decidir empíricamente entre ella y otra teoría rival.

Mi investigación ha seguido y rastreado las diversas consecuencias de las decisiones y convenciones que habíamos adoptado al comenzar este libro, en particular del criterio de demarcación. Mirando hacia atrás, podemos tratar ahora de tener, por fin, una panorámica de la imagen de la ciencia y de la investigación científica que ha surgido. (Me refiero no a una imagen de la ciencia como fenómeno biológico, como instrumento de adaptación o como método de producción en rodeo, sino a sus aspectos epistemológicos).

La ciencia no es un sistema de enunciados seguros y bien asentados, ni uno que avanzase firmemente hacia un estado final. Nuestra ciencia no es conocimiento (epistēmē): nunca puede pretender que ha alcanzado la verdad, ni siquiera el sustituto de ésta que es la probabilidad.

Pero la ciencia tiene un valor que excede al de la mera supervivencia biológica; no es solamente un instrumento útil: aunque no puede alcanzar ni la verdad ni la probabilidad, el esforzarse por el conocimiento y la búsqueda de la verdad siguen constituyendo los motivos más fuertes de la investigación científica.

No sabemos: sólo podemos adivinar. Y nuestras previsiones están guiadas por la fe en leyes, en regularidades que podemos descubrir —descubrir—: fe acientífica, metafísica (aunque biológicamente explicable). Como Bacon, podemos describir la propia ciencia contemporánea nuestra —«el método de razonar que hoy aplican ordinariamente los hombres a la Naturaleza»— diciendo que consiste en «anticipaciones, precipitadas y prematuras», y en «prejuicios[1]».

Pero domeñamos cuidadosa y austeramente estas conjeturas o «anticipaciones» nuestras, tan maravillosamente imaginativas y audaces, por medio de contrastaciones sistemáticas: una vez que se ha propuesto, ni una sola de nuestras «anticipaciones» se mantiene dogmáticamente; nuestro método de investigación no consiste en defenderlas para demostrar qué razón teníamos; sino que, por el contrario, tratamos de derribarlas. Con todas las armas do nuestro arsenal lógico, matemático y técnico, tratamos de demostrar que nuestras anticipaciones eran falsas —con objeto de proponer en su lugar nuevas anticipaciones injustificadas e injustificables, nuevos «prejuicios precipitados y prematuros», como Bacon los llamó con gran mofa[*3].

Es posible interpretar los progresos de la ciencia más prosaicamente. Cabría decir que el progreso puede «… originarse de dos maneras solamente: acumulando nuevas experiencias perceptivas y organizando mejor las que ya teníamos a nuestra disposición[2]». Pero esta descripción del progreso científico, aunque no es realmente errónea, parece no dar en el blanco; recuerda demasiado a la inducción baconiana: sugiere en exceso su industrioso acumular los «incontables racimos, maduros y en sazón[3]» de los que esperaba que fluyese el vino de la ciencia, su mito de un método científico que partiera de la observación y el experimento para avanzar luego basta las teorías. (Diremos de pasada que este método legendario aún inspira algunas nuevas ciencias, que intentan practicarlo debido a la general creencia de que constituye el método de la física experimental).

El avance de la ciencia no se debe al hecho de que se acumulen más y más experiencias perceptivas con el correr del tiempo, ni al de que haríamos cada vez mejor uso de nuestros sentidos. No es posible destilar ciencia de experiencias sensoriales sin interpretar, por muy industriosamente que las acumulemos y escojamos; el único medio que tenemos de interpretar la Naturaleza son las ideas audaces, las anticipaciones injustificadas y el pensamiento especulativo: son nuestro solo *organon*, nuestro único instrumento para captarla. Y hemos de aventurar todo ello para alcanzar el premio: los que no están dispuestos a exponer sus ideas a la aventura de la refutación no toman parte en el juego de la ciencia.

Incluso la cuidadosa y austera contrastación de nuestras ideas por medio de la experiencia está, a su vez, inspirada por las ideas: el experimento es una acción planeada, en la que todos y cada uno de los pasos están guiados por la teoría. No tropezamos con nuestras experiencias, no las dejamos inundarnos como un río; sino que, más bien, hemos de ser activos, hemos de «*hacer*» experiencias. Somos nosotros quienes siempre formulamos las preguntas que se han de proponer a la Naturaleza, quienes intentamos una y otra vez plantearlas de tal modo que sonsaquen un «sí» o «no» tajantes (pues la Naturaleza no responde a menos que se la urja a ello). Y, finalmente, somos nosotros los que damos la respuesta, quienes —tras exigente escrutinio— decidimos acerca de la contestación a la pregunta que habíamos propuesto a la Naturaleza (después de continuados y serios intentos de sonsacarla un «no» inequívoco). «De una vez para siempre —dice Weyl[4] (con quien estoy de pleno acuerdo)— quiero manifestar mi admiración ilimitada por el trabajo del experimentador en su lucha por sacar *hechos interpretables* de una Naturaleza huraña, que tan bien sabe responder a nuestras teorías con un no decisivo o con un sí inaudible».

El antiguo ideal científico de la epistēmē —de un conocimiento absolutamente seguro y demostrable— ha mostrado ser un ídolo. La petición de objetividad científica hace inevitable que todo enunciado científico sea *provisional para siempre*: sin duda, cabe corroborarlo, pero toda corroboración es relativa a otros enunciados que son, a su vez, provisionales. Sólo en nuestras experiencias subjetivas de convicción, en nuestra fe subjetiva, podemos estar «absolutamente seguros[5]».

Juntamente con el ídolo de la certidumbre (que incluye los grados de certidumbre imperfecta o probabilidad) cae uno de los baluartes del obscurantismo, que cierra el paso del avance científico: pues la adoración de este ídolo reprime la audacia de nuestras preguntas y pone en peligro el rigor y la integridad de nuestras contrastaciones. La opinión equivocada de la ciencia se delata en su pretensión de tener razón: pues lo que hace al hombre de ciencia no es su posesión del conocimiento, de la verdad irrefutable, sino su *indagación* de la verdad persistente y temerariamente crítica.

¿Ha de ser nuestra actitud, pues, de resignación? ¿Nos veremos obligados a decir que la ciencia sólo puede cumplir su misión biológica: que únicamente puede —en el mejor de los casos— demostrar su temple en las aplicaciones prácticas que puedan corroborarla? ¿Son insolubles nuestros problemas intelectuales? No lo pienso así. La ciencia nunca persigue la ilusoria meta de que sus respuestas sean definitivas, ni siquiera probables; antes bien, su avance se encamina hacia una finalidad infinita —y, sin embargo, alcanzable—: la de descubrir incesantemente problemas nuevos, más profundos y más generales, y de sujetar nuestras respuestas (siempre provisionales) a contrastaciones constantemente renovadas y cada vez más rigurosas.

APÉNDICES

APÉNDICE I.

Definición de dimensión de una teoría

(Cf. los apartados 38 y 39).

La definición que sigue debe considerarse sólo provisional[*1]: se trata de un intento de definir la dimensión de una teoría de modo que esté de acuerdo con la dimensión del conjunto de curvas que se obtiene cuando se representa el campo de aplicación de aquélla en un papel cuadriculado. Surge una dificultad por el hecho de que inicialmente no hemos de asumir que en dicho campo estén definidas ni una métrica ni siquiera una topología; en particular, no hemos de suponer que estén definidas relaciones algunas de vecindad. Y admito que con la definición que propongo, más que vencer esta dificultad lo que se hace es sortearla: lo cual es posible porque una teoría prohíbe siempre ciertos *eventos «homotípicos»*, como los hemos llamado (esto es, una clase de acontecimientos que difieren solamente en sus coordenadas espacio-temporales; cf. los apartados 23 y 31), de modo que, en general, aparecerán coordenadas espacio-temporales en el esquema que da origen al campo de aplicación, y, en consecuencia, el campo de los enunciados relativamente atómicos manifestará tener —en general— un orden topológico, e incluso métrico.

La definición que propongo dice así. Se dice que una teoría *t* es «*d*-dimensional con respecto al campo de aplicación C» si y sólo si se cumple la siguiente relación entre *t* y C: existe un número *d* tal que, *a*) la teoría no choca con ningún acervo—*d* del campo, y b) cualquier acervo—*d* dado en conyunción con la teoría divide unívocamente todos los enunciados relativamente atómicos restantes en dos subclases infinitas, A y B, tales que se satisfacen las siguientes condiciones: α) todo enunciado de la clase A unido conyuntivamente al acervo—*d* dado forma un «acervo *d* + 1 falsador», es decir, un posible falsador de la teoría; y β) por otra parte, la clase B es la suma de una o más —pero siempre en número finito— subclases infinitas [B_i] tales que la conyunción de un número cualquiera de enunciados pertenecientes a una cualquiera de éstas [B_i], sea compatible con la conyunción del acervo—*d* dado y la teoría.

Con esta definición se pretende excluir la posibilidad de que una teoría tenga dos campos de aplicación tales que los enunciados relativamente atómicos de uno de ellos sean resultado de la conyunción de los enunciados relativamente atómicos del otro (lo cual ha de evitarse para que el campo de aplicación pueda ser identificado con el de su representación gráfica: cf. el apartado 39). Quizá convenga añadir que mediante esta definición se resuelve el problema de los enunciados atómicos (cf. la nota 2 del apartado 38) de una forma que podría llamarse «deductivista», ya que la misma teoría determina qué enunciados singulares son *relativamente atómicos* (con respecto a ella): pues el campo de aplicación se define a través de la teoría misma, y con él quedan definidos los enunciados que —debido a su forma lógica— gozan de igual estatuto con respecto a aquélla. Así pues, no resolvemos el problema de los enunciados atómicos descubriendo unos que tengan cierta forma elemental y a partir de los cuales se construyan inductivamente los otros enunciados compuestos —o se los componga por el método de las funciones veritativas—; por el contrario, los enunciados relativamente atómicos —y, con ellos, los enunciados singulares— resultan ser una especie de precipitado, o algo así como un depósito (relativamente) sólido, que se asienta a partir de los enunciados universales de la teoría.

APÉNDICE II.

Cálculo general de la frecuencia en clases finitas

(Cf. los apartados 52 y 53)[*1].

Teorema general de multiplicación. Denotamos la clase finita de referencia con «α», y las dos clases de propiedades con «β» y «γ». El primer problema que se nos plantea es el de determinar la frecuencia de los elementos que pertenecen tanto a β como a γ.

La solución está dada por la fórmula

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha}F''}(\beta).{_{\alpha.\beta}F''}(\gamma) \tag{1}$$

o bien, puesto que β y γ pueden conmutarse,

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha.\gamma}F''}(\beta).{_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1'}$$

Se obtiene la demostración de modo inmediato a partir de la definición dada en el apartado 52: sustituyendo en (1) de acuerdo con dicha definición, obtenemos

$$\frac{\mathbf{N}(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)}{\mathrm{N}\,(\alpha)} = \frac{\mathbf{N}(\alpha\,.\,\beta)}{\mathrm{N}\,(\alpha)}\,\frac{\mathbf{N}(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)}{\mathrm{N}\,(\alpha\,.\,\beta)} \tag{1,1}$$

que manifiesta ser una identidad sin más que simplificar eliminando «N (α . β)». (Compárese con esta demostración, y, asimismo, con la de (2_s), Reichenbach, «Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung», *Mathematische Zeitschrift* **34**: 568-619, 1932, pág. 593.)

Si asumimos que existe *independencia* (cf. el apartado 53), esto es, que

$$_{\alpha.\beta}F''(\gamma) = {_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1^s}$$

llegamos, a partir de (1), al *teorema especial de multiplicación*:

$$_{\alpha}F''(\beta.\gamma) = {_{\alpha}F''}(\beta).{_{\alpha}F''}(\gamma) \tag{1_s}$$

Valiéndose de la equivalencia de (1) y (1') puede demostrarse ahora la simetría de la relación de independencia (cf. también la nota 4 del apartado 53).

Los teoremas de adición se ocupan de los elementos que pertenecen a β o a γ. Si denotamos con el símbolo «$\beta + \gamma$» (en donde el signo «+», *cuando está situado entre designaciones de clases*, no significa la adición aritmética, sino el «*o*» *no excluyente*) la combinación disyuntiva de aquellas clases, el teorema general de adición es:

$$_{\alpha}F'' (\beta + \gamma) = {}_{\alpha}F'' (\beta + {}_{\alpha}F'' (\gamma) - {}_{\alpha}F'' (\beta . \gamma) \qquad (2)$$

Su demostración se basa en la definición del apartado 52 y se apoya en la fórmula universalmente válida del cálculo de clases,

$$\alpha.(\beta + \gamma) = (\alpha.\beta) + (\alpha.\gamma), \qquad (2,2)$$

y en esta otra (también universalmente válida):

$$N (\beta + \gamma) = N (\beta) + N (\gamma) — N (\beta + \gamma) \qquad (2,1)$$

Bajo el supuesto de que α, β y γ no tengan ningún miembro común a las tres, supuesto que puede simbolizarse por la fórmula

$$N (\alpha . \beta . \gamma) = 0 \qquad (2^{s})$$

llegamos, a partir de (2), al teorema especial de adición

$$_{\alpha}F'' (\beta + \gamma) = {}_{\alpha}F'' (\beta) + {}_{\alpha}F'' (\gamma). \qquad (2_{s})$$

Este teorema es válido para *todas* las propiedades que son *propiedades primarias* en una clase α, ya que éstas son mutuamente excluyentes; y la suma de las frecuencias relativas de las mismas es, naturalmente, igual a 1.

Los teoremas de división enuncian cuál es la frecuencia de la propiedad y dentro de una clase *seleccionada* a partir de α teniendo en cuenta la propiedad β. La fórmula general se obtiene inmediatamente por inversión de (1):

$$_{\alpha.\beta}\mathbf{F}'' (\gamma) = \frac{_{\alpha}\mathbf{F} (\beta . \gamma)}{_{\alpha}\mathbf{F}'' (\beta)} \qquad (3)$$

Si transformamos el *teorema general de división* (3), mediante el teorema especial de multiplicación, llegamos a

$$_{\alpha . \beta}F'' (\gamma) = {}_{\alpha}\mathbf{F}'' (\gamma) \qquad (3^{s})$$

En esta fórmula reconocemos la condición (1^{s}), y vemos, por tanto, que *cabe describir la independencia como un caso especial de selección*.

Los diversos teoremas asociados al nombre de Bayes son todos casos especiales del teorema de división. Bajo la asunción de que ($\alpha . \gamma$) sea una subclase de β, o en símbolos, que

$$\alpha.\gamma \subset \beta \qquad (3^{bs})$$

obtenemos a partir de (3) la primera forma (especial) de la regla de Bayes:

$$_{\alpha.\beta}\mathbf{F}''(\gamma) = \frac{_{\alpha}\mathbf{F}(\gamma)}{_{\alpha}\mathbf{F}''(\beta)} \qquad (3_{bs})$$

Podemos evitar el supuesto (3^{bs}) si introducimos la suma de las clases β_1, β_2, Emplearemos el signo «∑» *delante de designaciones de clases* análogamente a como hicimos cuando empleábamos el signo «+» *entre* ellas: podemos escribir, entonces, una *segunda* forma (universalmente válida) del teorema de Bayes del modo siguiente:

$$_{\alpha.\sum\beta_i}\mathbf{F}''(\beta_i) = \frac{_{\alpha}\mathbf{F}''(\beta_i)}{_{\alpha}\mathbf{F}''(\sum\beta_i)}\,, \qquad (3_b)$$

Se puede aplicar al numerador de esta fórmula el teorema especial de adición, (2^s), si asumimos que las β_i no tienen miembros comunes con α, asunción que puede escribirse así:

$$N(\alpha.\beta_i,\beta_j) = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (3/2^s)$$

En este supuesto obtenemos la tercera forma (especial) del teorema de Bayes, que es aplicable siempre en el caso de que las β_i, sean propiedades primarias:

$$_{\alpha.\sum\beta_i}\mathbf{F}''(\beta_i) = \frac{_{\alpha}\mathbf{F}''(\beta_i)}{\sum_{\alpha}F''(\beta_i)}\,. \qquad (3/2_s)$$

APÉNDICE III.

Deducción de la primera forma de la fórmula binomial

(Para sucesiones finitas de segmentos imbricados, cf. el apartado 56.)

Puede decirse que la primera fórmula binomial[*1],

$$_{\alpha(n)}F''(m) = {}^{n}C_{m}\,p^{m}q^{n-m} \tag{1}$$

—en que $p = {}_{\alpha}F''(1)$, $q = {}_{\alpha}F''(0)$ y $m \leq n$ —está demostrada, en el supuesto de que α sea (al menos) libre—*n* (despreciando los errores provinentes del último término: cf. el apartado 56), si podemos hacer patente que

$$_{\alpha(n)}F''(\sigma_{m}) = p^{m}q^{n-m} \tag{2}$$

en donde «σ_m» designa un acervo—*n* concreto (si bien elegido arbitrariamente) que contenga *m* unos (lo que se pretende indicar con dicho símbolo es que lo dado es la ordenación completa de este acervo—*n*, o sea, no solamente el número de unos, sino sus posiciones en él). Pues, supongamos que se cumple (2) para todos los *n*, *m* y σ (es decir, para las distintas ordenaciones de los unos); entonces habrá —según un teorema combinatorio perfectamente conocido— ${}^{n}C_{m}$ modos distintos de distribuir los *m* unos en *n* lugares, y teniendo en cuenta el teorema especial de adición podemos afirmar (1).

Supongamos ahora que (2) está demostrado para un *n* cualquiera —esto es, para un *n* concreto y para todo *m* y todo σ que sean compatibles con aquél—. Vamos a demostrar que en este supuesto se cumple también para *n* + 1, o sea, demostraremos

$$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m+0}) = p^{m}q^{n+1-m} \tag{3,0}$$

y

$$_{\alpha(n+1)}F''(\sigma_{m+1}) = p^{m+1}q^{(n+1)-(m+1)} \tag{3,1}$$

en donde «σ_{m+0}» y «σ_{m+0}» representan, respectivamente, las sucesiones de longitud n + 1 que se obtienen a partir de σ_m al añadir al final un cero y un uno, respectivamente.

Asumamos que, para toda longitud *n* de los acervos—*n* (o segmentos) considerados, α sea (al menos) libre—*n*−1 (de secuelas); entonces, para un segmento de longitud *n* + 1 ha de considerarse que α es, por lo menos, libre—*n*. Denotemos con

«$\acute{\sigma}_m$» la propiedad de ser sucesor de un acervo—*n*, σ_m; entonces podemos afirmar

$$_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m.\,0) = {}_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m).{}_{\alpha}\,\mathbf{F}''\,(0) = {}_{\alpha}\,\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m).q \qquad (4,0)$$

$$_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m.\,1) = {}_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m).{}_{\alpha}\,\mathbf{F}''\,(1) = {}_{\alpha}\,\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m).p \qquad (4,1)$$

Observemos ahora que es evidente que tiene que haber justamente tantos $\acute{\sigma}_m$ —esto es, sucesores de la sucesión «σ_m» en α— como sucesiones σ_m, hay en $\alpha(_n)$, y, por tanto, que

$$_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m) = \alpha_{(n)}\mathbf{F}''\,(\sigma_m) \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta esta fórmula podemos transformar el segundo miembro de (4). Y, por la misma razón, tenemos

$$_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m\,.\,0) = \alpha_{(n+1)})\mathbf{F}''\,(\sigma_{m+0}) \qquad (6,0)$$

$$_{\alpha}\mathbf{F}''\,(\acute{\sigma}_m\,.\,1) = \alpha_{(n+1)})\mathbf{F}''\,(\sigma_{m+0}). \qquad (6,1)$$

Con éstas podemos, a su vez, transformar el primer miembro de (4): es decir, al sustituir (5) y (6) en (4) llegamos a

$$\alpha_{(n+1)}\mathbf{F}''\,(\sigma_{m+0}) = \alpha_n\mathbf{F}''\,(\sigma_m).q \qquad (7,0)$$

$$\alpha_{(n+1)}\mathbf{F}''\,(\sigma_{m+1}) = \alpha_n\mathbf{F}''\,(\sigma_m).p \qquad (7,1)$$

Vemos, pues, que si suponemos que se cumple (2) para cierto *n* (y para todas las ordenaciones σ_m que le corresponden), podemos deducir (3) por medio de una inducción matemática; pero asumiendo primero que *m* = 1 y luego que *m* = 0 se advierte que (2) es realmente válida para *n* = 2 y para todo σ_m (en donde $m \leq 2$); luego podemos afirmar (3), y —en consecuencia— (2) y (1).

.

APÉNDICE IV.

Un método para construir modelos de sucesiones aleatorias

(Cf. los apartados 58, 64 y 66.)

Como en el apartado 55, suponemos que para todo número finito n dado se puede construir un período generador, libre—n (de secuelas) y con equidistribución. En cada uno de estos períodos aparecerá al menos una vez cada acervo—x combinatoriamente posible (para $x \leq n + 1$) de unos y de ceros[*1].

a) Construimos un modelo de sucesión «absolutamente libre» (de secuelas) del modo siguiente. Escribimos primero un período libre—n, para un n arbitrariamente elegido, período que tendrá un número de términos finito, digamos n_1; luego otro período que sea por lo menos libre-$n_1 - 1$, y cuya longitud será n^2. En este último ha de aparecer al menos una sucesión que sea idéntica al período dado inicialmente (de longitud n_1): pues bien, lo reordenamos de modo que empiece precisamente con dicha sucesión (lo cual es siempre posible, según el análisis llevado a cabo en el apartado 55), y al resultado le llamamos segundo período. Escribimos ahora otro nuevo período que al menos sea libre—$n_2 - 1$, y buscamos en él la sucesión idéntica al *segundo período* (una vez reordenado); lo reordenamos de suerte que el tercer período comience por el segundo; etc. Obtenemos, de este modo, una sucesión cuya longitud aumenta muy rápidamente, y cuyo período inicial es el que habíamos escrito al empezar (que es la sucesión inicial del segundo período, y así sucesivamente). Si se determina una sucesión inicial concreta y se especifican otras condiciones —por ejemplo, que los períodos que se formen no deben ser nunca más largos de lo necesario (de modo que serán *exactamente* libres—$n_i - 1$, y no *al menos* libres—$n_i - 1$); cabe perfeccionar este método de construcción hasta hacerlo *unívoco*, de suerte que defina una sucesión determinada, en la que podamos calcular para cada uno de sus términos si es un uno o un cero[*2]. Tenemos así una sucesión (determinada), construida de acuerdo con una regla matemática, y con frecuencias cuyos límites son,

$$_{\alpha}F'(1) = {_{\alpha}F'(0)} = ½.$$

Empleando el procedimiento utilizado en la demostración de la tercera forma de la fórmula binomial (apartado 60) o en la del teorema de Bernoulli (apartado 61), puede ponerse de manifiesto (con un grado cualquiera de aproximación) que *para cualquier valor frecuencial que podamos escoger* existen sucesiones que son «absolutamente libres», sin más condición que la de que exista, al menos, una sucesión absolutamente libre (condición cuyo cumplimiento acabamos de demostrar).

b) Puede emplearse ahora un método de construcción análogo para hacer ver que existen sucesiones que tienen una frecuencia media «absolutamente libre» (cf. el apartado 64), aun cuando no posean límite frecuencial. Para ello basta modificar el proceso *a*) de tal modo que, tras un número dado de aumentos de longitud, añadamos siempre a la sucesión un «bloque» (o «iteración») finito —por ejemplo, formado por unos— y cuya longitud sea tal que se llegue a cierta frecuencia dada, *p*, distinta de 1/2. Una vez alcanzada la frecuencia que acabamos de mencionar, la totalidad de la sucesión que se ha escrito (cuya longitud será m_i) se considera como sucesión inicial de un período libre—$m_i - 1$ (con equidistribución), etc.

c) Finalmente, es posible construir de un modo semejante un modelo de sucesión que tenga *más de una* frecuencia media «absolutamente libre»: según *a*), existen sucesiones que no tienen equidistribución y son «absolutamente libres», de modo que lo único que tenemos que hacer es combinar dos sucesiones de este tipo, (A) y (B) (cuyas frecuencias sean *p* y *q*), como se indica a continuación. Escribimos una sucesión inicial de (A); la buscamos en (B), y reordenamos el período de (B) que la precede de tal modo que comience con aquella sucesión. Empleamos ahora este período reordenado de (B) como sucesión inicial: la buscamos en (A) y reordenamos ésta; y así sucesivamente. Obtenemos de esta suerte una sucesión en la que aparecen una y otra vez unos términos hasta llegar a los cuales la sucesión es libre—n_i para la frecuencia relativa *p*—de la sucesión (A)—, pero en la que también aparecen una y otra vez unos términos hasta llegar a los cuales dicha sucesión es libre—n_i para la frecuencia *q*—de (B)—; como en este caso los números n_i crecen sin fin y sin límite, hemos conseguido un método de construcción de una sucesión que tiene dos «frecuencias medias» diferentes, ambas «absolutamente libres» (pues hemos determinado (A) y (B) de modo que sus límites frecuenciales sean distintos).

Nota. Está asegurada la aplicabilidad del teorema especial de multiplicación al problema clásico de echar dos dados, X e Y, simultáneamente (y a problemas relacionados con éste), si —por ejemplo— hacemos la estimación hipotética de que la «sucesión combinada» (como podemos llamarla) —esto es, la sucesión α que tiene las tiradas con X por términos impares y las con Y por términos pares— es aleatoria.

APÉNDICE IV.

Examen de una objeción. El experimento de la ranura doble

(Cf. el apartado 76)[*1].

El experimento imaginario que describimos abajo —en el párrafo *a*)— está encaminado a refutar mi aserción de que la teoría cuántica es compatible con mediciones (no predictivas) simultáneas arbitrariamente exactas de la posición y el momento de una partícula.

a) Sea A un átomo radiante, y hagamos que la luz procedente de él caiga sobre una pantalla *Pn* después de haber pasado a través de dos ranuras, Rn_1 y Rn_2. Según Heisenberg, en este caso podemos medir exactamente, ya sea la posición de A, ya el momento de la radiación (pero no ambas cosas): si medimos exactamente la posición (con esta operación se hace «difuso» o «borroso» el momento), hemos de suponer que A emite la luz en ondas esféricas; pero si medimos el momento con exactitud —por ejemplo, midiendo los retrocesos debidos a la emisión de fotones (con lo cual haremos «difusa» o «borrosa» la posición)— seremos capaces de calcular exactamente la dirección y el momento de los fotones emitidos, con lo cual hemos de considerar a la radiación corpuscular («agujas de radiación»). Así pues, a las dos operaciones distintas corresponden dos tipos distintos de radiación, de suerte que obtenemos dos resultados experimentales diferentes. Pues si medimos la posición con exactitud, obtenemos unas franjas de interferencia en la pantalla: se trata de una fuente luminosa puntual —siempre que su posición puede medirse exactamente es puntual— que emite luz coherente; si, por otra parte, medimos con exactitud el momento, no aparecen franjas de interferencia (en la pantalla aparecen únicamente relámpagos luminosos o centelleos una vez que los fotones han atravesado las ranuras, lo cual está en consonancia con el hecho de que la posición es «difusa» o «borrosa», y de una fuente luminosa no puntual no emite una luz coherente). Si supusiéramos que podíamos medir con exactitud tanto la posición como el momento, entonces el átomo tendría que emitir, por una parte —y de acuerdo con la teoría ondulatoria— ondas esféricas continuas que producirían franjas de interferencia, y, por otra, un haz corpuscular incoherente de fotones (si fuéramos capaces de calcular la trayectoria de cada fotón no tendríamos jamás nada semejante a una «interferencia», debido al hecho de que los fotones ni se anulan mutuamente ni entran en interacción de ningún otro modo). Por tanto, la suposición de que se realicen simultáneamente mediciones exactas de posición y de momento lleva a dos predicciones contradictorias entre sí: pues, por un lado, nos conduce a predecir que aparecerán franjas de interferencia, y, por otro, a que no aparecerán.

b) Voy a reinterpretar estadísticamente este experimento imaginario. Me ocuparé primero del intento de medir exactamente la posición. Sustituyo el átomo radiante *único* por un grupo de átomos, pero de tal modo que emitan luz coherente que se propague en forma de ondas esféricas: esto se consigue empleando una segunda pantalla que esté perforada por una pequeña abertura A, y colocada entre el grupo de átomos y la primera pantalla de forma que la abertura A se encuentre exactamente en el sitio ocupado antes por el átomo radiante único A. El grupo mencionado emite luz que sufre una selección según una posición dada al pasar a través de la abertura A, y que después se difunde en forma de ondas esféricas continuas: remplazamos así el átomo único de posición determinada con exactitud por un caso estadístico de selección puramente de acuerdo con la posición.

c) Substituiremos de modo análogo el átomo con momento medido exactamente por una selección pura según un momento dado; o, dicho de otro modo, por un haz monocromático de fotones que se muevan según trayectorias paralelas a partir de una fuente luminosa (no puntual).

En cada uno de estos casos obtenemos el resultado experimental correcto: franjas de interferencia en el caso *b*) y ausencia de ellas en el *c*).

d) ¿Cómo hemos de interpretar el tercer caso, que —según se admite— lleva a dos predicciones mutuamente contradictorias? Para averiguarlo imaginemos que hemos observado exactamente la trayectoria del átomo A, esto es, tanto su posición como su momento: observaremos que emite fotones aislados y que retrocede en cada emisión; cada retroceso lo desplaza a otra posición, y cada vez el desplazamiento es en una dirección distinta. Si suponemos que el átomo considerado irradia de este modo durante cierto período de tiempo (no nos ocuparemos acerca de si absorbe o no energía durante el mismo), pasará por una serie de posiciones distintas durante él, que abarcarán un volumen considerable; y, por esta razón, no nos está permitido remplazarle por un grupo de átomos puntual, sino solamente por un grupo distribuido sobre un volumen espacial considerable. Además, puesto que el átomo del caso irradia en todas direcciones, hemos de sustituirlo por un grupo de átomos que irradia de esta misma forma. Así, pues, no obtenemos un caso puro, no llegamos a tener una radiación coherente, ni franjas de interferencia.

Otras objeciones parecidas a la que hemos examinado pueden reinterpretarse estadísticamente siguiendo la misma marcha que en este ejemplo.

e) Por lo que respecta a nuestro análisis de este experimento imaginario, yo diría que —contrariamente a lo que podría suponerse a primera vista— el argumento *a*) es, en todo caso, enteramente insuficiente para elucidar el llamado problema de la complementaridad (o del dualismo de ondas y corpúsculos). Pretende hacerlo poniendo de manifiesto que el átomo es capaz de emitir solamente u ondas coherentes o fotones incoherentes, y que, *por tanto*, no se plantea ninguna contradicción, ya que los dos experimentos son mutuamente excluyentes. Pero esto último, simplemente no es verdad: pues podemos, desde luego, combinar una medición de la posición no demasiado exacta con una de momento tampoco muy exacta; y, en este caso, el átomo ni emite ondas enteramente coherentes ni fotones completamente incoherentes. Es evidente que mi propia interpretación estadística no encuentra la menor dificultad para tratar semejantes casos intermedios, aun cuando nunca he pretendido resolver con ella el problema de la dualidad entre ondas y corpúsculos. Me parece que difícilmente será posible llegar a una solución realmente satisfactoria de este problema dentro del marco de la física cuántica estadística (la teoría corpuscular de Heisenberg y de Schrödinger en la interpretación de Born de 1925-1926), pero pienso que quizá lo sea en una física cuántica de campos de onda o en la «segunda cuantización» (la teoría de Dirac de la emisión y absorción y la teoría de campos de onda de la materia de Dirac, Jordan, Pauli, Klein, Mie y Wiegner, de 1927-1928; cf. la nota 2 de la introducción al apartado 73).

APÉNDICE VI.

Sobre un procedimiento de medir no predictivo

(Cf. el apartado 77)[*1].

Supongamos que se somete a selección de acuerdo con el momento (gracias a interponer un filtro) un haz no monocromático de partículas, por ejemplo, un haz luminoso (si se tratase de un haz de electrones, en lugar del filtro se utilizaría un campo eléctrico perpendicular a la dirección del rayo, con objeto de analizar su espectro). Supondremos con Heisenberg que este proceso no modifica los momentos —o, dicho con más precisión, las componentes de éstos en la dirección *x*—, ni, por consiguiente, las *velocidades* (o sus componentes según *x*) de las partículas así seleccionadas.

Detrás del filtro colocamos un contador de Geiger (o una cinta móvil de película fotográfica) con objeto de medir el instante en que llegan los corpúsculos: lo cual nos permitirá calcular las coordenadas *x* de sus posiciones respectivas en cualquier instante anterior al de su llegada, ya que conocemos sus velocidades. Vamos a considerar ahora dos supuestos posibles. Si, por una parte, se supone que las coordenadas *x* de las posiciones de las partículas no han sufrido interferencia alguna por efecto de la medición de sus momentos, entonces es válido extender la medida de posiciones y momentos al período de tiempo que precede al instante de selección del momento (por medio del filtro). Si, por otro lado, se supone que dicha selección interfiere con las coordenadas *x* de las posiciones de las partículas, podemos calcular la trayectoria de éstas con exactitud solamente para el intervalo temporal *entre* las dos mediciones.

Ahora bien; la asunción de que la posición de los corpúsculos en la dirección de su marcha resulta afectada de un modo imprevisible por una selección que se efectúe de acuerdo con un momento dado, significa lo mismo que afirmar que dicha selección alteraría de forma no calculable la coordenada de posición de la partícula. Pero, puesto que su velocidad no se ha alterado, aquel supuesto sería equivalente al de que —por efecto de dicha selección— el corpúsculo ha tenido que saltar *discontinuamente* (con velocidad superior a la de la luz) a otro punto de su trayectoria.

Pero este supuesto es incompatible con la teoría cuántica tal como se la acepta actualmente. Pues, si bien esta teoría permite saltos discontinuos, sólo lo hace en el caso de partículas en el interior de un átomo (dentro de una gama de autovalores discontinuos, pero no para partículas libres dentro de una gama de autovalores continuos).

Es de sospechar que —para escapar a las conclusiones a que acabamos de llegar, o para conservar el principio de indeterminación— sea posible idear una teoría que modifique la teoría cuántica de tal modo que ésta sea compatible con el supuesto de que se altere la posición al seleccionar el momento; pero incluso semejante teoría —a la que podría llamar «teoría de la indeterminación»— sólo podría deducir consecuencias estadísticas del principio de indeterminación, y, por tanto, solamente cabría corroborarla estadísticamente; el principio mencionado sería en ella únicamente un enunciado probabilitario formalmente singular, aunque su contenido trascendería lo que he llamado las «relaciones estadísticas de dispersión»: pues, como pondré de manifiesto con un ejemplo, estas relaciones son compatibles con el supuesto de que al seleccionar el momento no se perturbe la posición. *Así pues, este último supuesto no nos permite inferir la existencia de un «caso super-puro», que está prohibido por las relaciones de dispersión*. Este enunciado hace ver que el método de medición que he examinado no afecta a las fórmulas de Heisenberg interpretadas estadísticamente; y, por ello, puede decirse que ocupa en mi interpretación estadística algo así como el mismo «lugar lógico» que ocupa —en la interpretación de Heisenberg— el enunciado de este físico que niega «realidad física» a las mediciones exactas; en realidad, mi enunciado puede considerarse como la traducción del de Heisenberg al lenguaje estadístico.

Mediante las consideraciones que siguen puede verse que el enunciado en cuestión es correcto. Podríamos tratar de obtener un «caso super-puro» invirtiendo el orden de los pasos que se dan en el experimento: seleccionaríamos primeramente, digamos, una posición dentro de la dirección x (la dirección de movimiento) mediante un obturador muy rápido; y después seleccionaríamos el momento por medio de un filtro. Podría pensarse que esto es perfectamente factible, ya que a consecuencia de medir la posición aparecerían toda clase de momentos, y el filtro seleccionaría de entre ellos —sin alterar la posición— precisamente los que cayesen dentro de una estrecha gama. Pero estas consideraciones son erróneas. Pues si un «obturador instantáneo» selecciona un grupo de partículas del modo indicado, entonces los paquetes de onda de Schrödinger (obtenidos por superposición de frecuencias diversas) nos dan solamente *probabilidades* de la aparición de partículas con el momento prefijado en el grupo de éstas (probabilidades que han de interpretarse estadísticamente); y entonces, para todo margen finito de momentos, Δp_x dicha probabilidad tiende a 0 en cuanto hagamos infinitamente pequeña la longitud del tren de ondas —esto es, en cuanto midamos la posición con una precisión arbitraria (abriendo el obturador instantáneo durante un tiempo arbitrariamente breve)—; y, de parecido modo, la probabilidad tiende a 0 durante un período finito cualquiera en que permanezca abierto el obturador instantáneo —o sea, para cualquier valor del margen Δx de posición— con tal de que Δp_x tienda a 0. Cuanto más exactamente seleccionemos la posición y el momento, tanto más improbable será que encontremos partículas tras el filtro. Pero esto quiere decir que para que encontremos corpúsculos detrás del filtro será menester un número muy elevado de experimentos, y que, además, no seremos capaces de predecir en cuáles de ellos los encontraremos en el lugar mencionado; así pues, en modo alguno podremos evitar que las partículas aparezcan a intervalos dispersos aleatoriamente, y de ahí que no seamos capaces de producir de este modo un agregado de ellas que sea más homogéneo que un caso puro.

Resulta que hay un experimento crucial relativamente sencillo para decidir entre la «teoría de la indeterminación» (que hemos descrito un poco más arriba) y la teoría cuántica. Según la primera, deben llegar fotones durante cierto tiempo a una pantalla situada detrás de un filtro sumamente selectivo (o un espectrógrafo), incluso después de la extinción de la fuente luminosa; y, además, tal «resplandor póstumo» originado por el filtro tiene que durar tanto más cuanto más selectivo sea éste[*2].

APÉNDICE VII.

Observaciones acerca de un experimento imaginario

(Cf. el apartado 77)[*1].

Podemos partir del supuesto de que $\mathbf{a_1}$ y $|\mathbf{b_1}|$ están medidos —o seleccionados— con un grado de precisión arbitrario. Teniendo en cuenta el resultado a que se ha llegado en el apéndice VI, podemos asumir que puede medirse el momento absoluto, $|\mathbf{a_2}|$, de la partícula que llega a *X* en la dirección *PX*, con un grado de precisión también arbitrario; según lo cual podemos determinar (empleando el principio de conservación de la energía) |b2| con la precisión que queramos. Igualmente es posible medir con una precisión arbitraria la posición de R*n* y de *X* en los instantes en que llegan a *X* las partículas de [A]. Así pues, lo único que necesitamos investigar es la situación en lo que respecta a las indeterminaciones $\Delta\mathbf{a_2}$ y $\Delta\mathbf{b_2}$ —que se deben a las indeterminaciones en las direcciones correspondientes— y el vector $\Delta\mathbf{P}$, referente a la indeterminación de la posición de ***P*** —y que es también consecuencia de la indeterminación de la *dirección*, esto es, de la dirección *PX*.

Si el haz *PX* atraviesa una ranura situada en X, se produce una indeterminación, φ en la dirección (debida a la difracción que acaece en la ranura). Podemos hacer el ángulo 9 todo lo pequeño que queramos sin más que hacer $|\mathbf{a_2}|$ suficientemente grande, ya que tenemos

$$\varphi \cong \frac{h}{r.|a_2|} \tag{1}$$

en donde ***r*** es el ancho de la ranura; pero por este método es imposible disminuir $|\Delta\mathbf{a_2}|$: sólo podría hacerlo cuando aumentase ***r***, lo cual llevaría a un aumento de $|\Delta\mathbf{P}|$, ya que tenemos

$$|\Delta\mathbf{a_2}| = \varphi|a_2| \tag{2}$$

que, recordando (1), conduce a

$$|\Delta\mathbf{a_2}| \cong \frac{n}{r} \tag{3}$$

lo cual hace ver que $|\Delta\mathbf{a_2}|$ es independiente de $|\mathbf{a_2}|$.

Debido al hecho de que, para todo ***r*** previamente elegido, podemos hacer φ tan pequeño como queramos sin más que aumentar $|\mathbf{a_2}|$, nos es dado hacer también tan pequeña como queramos la componente $\Delta\mathbf{a_2}$ en la dirección *PX* —que denotaremos con «$(\Delta\mathbf{a_2})_2$»—: lo cual podemos conseguir sin interferir con la precisión de la medida de la posición de *P*, ya que ésta se hace también más precisa cuando $|\mathbf{a_2}|$ aumenta y ***r*** disminuye. Queremos ahora poner de manifiesto que para $(\Delta\mathbf{b_2})$, —esto es, para la componente *PY* de $\Delta\mathbf{b_2}$— es válido el razonamiento correspondiente.

Como (en virtud de nuestro supuesto) podemos hacer $\Delta\mathbf{a_1} = 0$, a partir de la conservación del momento llegamos a

$$\Delta\mathbf{b_2} = \Delta\mathbf{b_1} - \Delta\mathbf{a_2} \tag{4}$$

Para toda terna dada de $\mathbf{a_1}$, $|\mathbf{b_1}|$ y $|\mathbf{a_2}|$, $\Delta\mathbf{b_1}$ depende directamente de φ, lo cual quiere decir que podemos tener un dispositivo tal que se cumpla

$$|\Delta\mathbf{b_1}| \cong |\Delta\mathbf{a_2}| \cong \frac{''}{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

y —por tanto— que también sea válida

$$|\Delta\mathbf{b_1}| - |\Delta\mathbf{a_2}| \cong \frac{''}{\boldsymbol{r}} \tag{6}$$

Además, por analogía con (2) tenemos

$$|\Delta\mathbf{b_2}| \cong \Psi, |\mathbf{b_2}|, \tag{7}$$

en donde «ψ» denota la indeterminación en la dirección de $\mathbf{b_2}$. Por tanto, y a la vista de (4) y (5),

$$\Psi \cong \frac{|\Delta\mathbf{b_1} - \Delta\mathbf{a_2}|}{\boldsymbol{b_2}} \cong \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{r}.|\mathbf{b_2}|}; \tag{8}$$

Pero esto quiere decir: por pequeña que hagamos ***r***, podemos hacer siempre ψ, con ella, $(\Delta\mathbf{b_2})_y$,— tan pequeña como queramos sin más que emplear valores suficientemente grandes para el momento $|\mathbf{b_2}|$: y esto, de nuevo, sin interferir con la precisión con que se mida la posición *P*.

Lo cual hace ver que es posible hacer tan pequeño como queramos cada uno de los dos factores del producto $(\Delta\mathbf{P})_y.(\Delta\,\mathbf{b_2})_y$, de modo independiente entre sí. Mas para refutar la aserción de Heisenberg referente a los límites de precisión alcanzables, hubiera bastado poner de manifiesto que cabe hacer tan pequeño como se desee uno de estos factores sin que por ello se haga aumentar al otro más allá de todo límite.

Puede, además, advertirse que si se elige convenientemente la dirección *PX* se puede determinar la *distancia PX* de tal modo que $\Delta\,\mathbf{P}$ y $\Delta\,\mathbf{b_2}$ sean paralelos, y, por tanto —si φ es suficientemente pequeño—, normales a *PY*[1]. En consecuencia, tanto la precisión del momento en esta dirección como —incluso— la precisión de la posición (en la misma dirección), se hacen *independientes de la precisión con que se mida la posición de P* (si empleamos valores elevados de $|\mathbf{a_2}|$, esta última posición depende principalmente de la pequeñez de *r*)*: ambas dependen exclusivamente de la precisión con que se midan la posición y el momento de la partícula que llega a X en dirección PX*, y de la pequeñez de ψ (lo cual corresponde al hecho de que la precisión, $(\Delta\mathbf{a_2})_X$, de la partícula que llega a *X* depende de la pequeñez de φ).

Se observa que —en lo que respecta a la precisión de las medidas— la medición (aparentemente no predictiva) del corpúsculo de [A] que llega a *X* y la predicción de la trayectoria del corpúsculo de [B] que procede de P, son completamente *simétricas*.

NUEVOS APÉNDICES

Aun cuando me he encontrado, con gran sorpresa mía, que aún podía asentir a casi todas las opiniones filosóficas expresadas en este libro, e incluso a la mayoría de las relativas a la probabilidad —campo en que mis ideas han cambiado más que en ningún otro—, me ha parecido que era menester incluir en él parte del material nuevo que se ha acumulado durante estos años. Su cantidad es bastante considerable, porque no he dejado de trabajar en los problemas planteados en esta obra, y, por ello, no era posible introducir en los nuevos apéndices todos los resultados de trascendencia. Mencionaré, en especial, uno que falta aquí: *es la interpretación de propensiones de la probabilidad* (como yo la llamo); pues su exposición y discusión ha crecido, bien contra mis intenciones, hasta convertirse en el núcleo principal de un nuevo libro.

El título de éste es *PostScript: After Twenty Years*[**1]; se trata de una continuación del presente libro, que contiene muchos asuntos que guardan una relación estrecha con éste, aparte de la teoría de la probabilidad. A este respecto aludiré también a dos trabajos míos que podría haber incluido entre los apéndices si no fuese opuesto a ampliarlos aún más: son «Three Views Concerning Human Knowledge[**2]» y «Philosophy of Science: A Personal Report[**3][1]».

Los dos primeros apéndices nuevos contienen tres cortas notas, publicadas entre 1933 y 1938, y que están relacionadas muy de cerca con este libro. Temo que son difíciles de leer: su concisión es excesiva, y he sido incapaz de hacerlos más legibles sin introducir cambios que hubieran disminuido su valor como documentos.

Los apéndices *II a *V son algo técnicos —al menos, lo son demasiado para mi gusto—. Pero semejantes tecnicismos son necesarios, me parece, para resolver el siguiente problema filosófico: *el grado de corroboración, o de aceptabilidad, de una teoría, ¿es una probabilidad, como han creído tantos filósofos*? O, dicho de otro modo, *¿obedece a las reglas del cálculo de probabilidades*?

En el libro mismo había contestado a esta pregunta, diciendo uno»; a esto replicaron algunos filósofos, «pero yo me refiero al hablar de probabilidad (o de corroboración, o de confirmación) a una cosa distinta de lo que usted quiere decir». Y ha sido necesario entrar en tecnicismos para justificar mi rechazo de esta evasiva respuesta (que amenaza reducir la teoría del conocimiento a un mero verbalismo): era preciso formular las reglas («axiomas») del cálculo de probabilidades, y averiguar el papel que desempeña cada una de ellas; pues había que tomar el cálculo mencionado en su sentido más amplio, y admitir en él sólo las reglas esenciales, con objeto de no prejuzgar si el grado de corroboración es o no una de sus interpretaciones posibles. En 1935 comencé estas investigaciones, y he incluido en el apéndice *II un breve informe sobre algunos de mis primeros estudios; en los apéndices *IV y *V doy un esquema de mis resultados más recientes. En todos estos apéndices se afirma que, aparte de las interpretaciones clásica, lógica y frecuencial de la probabilidad de la que me había ocupado en el libro— hay muchas interpretaciones posibles de la idea de probabilidad y del cálculo de probabilidades: de este modo preparan el camino para lo que después he llamado la interpretación de propensiones de la probabilidad[2].

Mas no solamente tenía que examinar las reglas del cálculo de probabilidades, sino también que formular *reglas para la evaluación de contrastaciones*, esto es, para el grado de corroboración; lo cual llevé a cabo en una serie de tres estudios, que he reimpreso aquí en el apéndice *IX. En cuanto a los apéndices *VII y *VIII, forman una especie de eslabón entre mi elaboración de la probabilidad y la de corroboración.

Espero que los restantes tengan interés tanto para los filósofos *como para los científicos, especialmente los que se ocupan del desorden objetivo y de los experimentos imaginarios. Por fin, el apéndice *XII consiste en una carta de Albert Einstein, que se publica aquí por primera vez, con la amable autorización de sus albaceas literarios.

APÉNDICE *I.

Dos notas sobre inducción y demarcación (1933-1934)

La primera de las notas que vuelvo aquí a sacar a luz es una carta al editor de *Erkenntnis*. La segunda es una colaboración a un debate celebrado en una conferencia filosófica en Praga, en 1934; se publicó por primera vez en *Erkenntnis* en 1935, formando parte del informe sobre dicha conferencia.

1

La carta al editor se publicó originalmente en 1933, en *Erkenntnis* **3** (es decir, en *Annalen der Philosophie*, **11**), núms. 4-6, págs. 426 y siguientes. He fragmentado algunos de sus párrafos con objeto de facilitar la lectura.

Esta carta surgió por el hecho de que, por entonces, varios miembros del Círculo de Viena debatían ampliamente mis tesis, incluso por escrito (cf. la nota 3), aun cuando no se había publicado —en parte debido a su tamaño— ninguno de mis manuscritos (así, mi libro *Logik der Forschung* tuvo que ser cercenado hasta reducirlo a una fracción de su tamaño original para poder publicarse), que algunos miembros del Círculo habían leído. En la carta acentué la diferencia entre el problema de un criterio de *demarcación* y el pseudoproblema de un criterio de *sentido* (así como el contraste entre mis opiniones y las de Schlick y Wittgenstein), movido por el hecho de que ya entonces se debatían mis tesis —en el Círculo— bajo la interpretación equivocada de que yo abogaba por el remplazamiento de un criterio de sentido, el de la verificabilidad, por otro, el de la falsabilidad: mientras que, en realidad, yo no me ocupaba del problema del *sentido*, sino del de la *demarcación*. Como puede verse en mi carta, ya en 1933 traté de corregir esta interpretación errónea de mis opiniones; lo mismo intenté en mi *Logik der Forschung*, y he seguido intentándolo desde entonces: mas parece que mis amigos positivistas siguen sin poder advertir la diferencia. La mala inteligencia a que me refiero me impulsó en la carta a señalar la diversidad entre mis opiniones y las del Círculo de Viena (y a insistir sobre ella); y, en consecuencia, algunos supusieron —equivocadamente— que las mías habían sido elaboradas originariamente como crítica a las de Wittgenstein. En realidad, yo había formulado el problema de la demarcación y del criterio de falsabilidad o contrastabilidad en el otoño de 1919, años antes de que las tesis de este autor se convirtieran en un asunto de debate en Viena (cf. mi trabajo «Philosophy of Science: A personal Report», que ahora está incluido en *Conjectures and Refutations*): lo cual explica por qué en cuanto supe algo acerca del nuevo criterio de *sentido* del Círculo —el de verificabilidad— lo contrapuse a mi criterio de falsabilidad, que es un criterio de *demarcación* encaminado a delimitar los sistemas de enunciados científicos frente a los sistemas —perfectamente llenos de sentido— de enunciados metafísicos. (En cuanto al palabreo absurdo y carente de sentido, no pretendo que mi sistema le sea aplicable.)

He aquí la carta de 1933:

Un criterio del carácter empírico de los sistemas teóricos

1) *Cuestión preliminar. El problema de Hume de la inducción* —la cuestión de la validez de las leyes naturales— procede de una contradicción aparente entre el principio del empirismo (el de que sólo la «experiencia» puede decidir sobre la verdad o falsedad de enunciados fácticos) y el haberse dado cuenta Hume de que los razonamientos inductivos (o generalizadores) no tienen validez.

Schlick[1], influido por Wittgenstein, cree que sería posible resolver esta contradicción adoptando el supuesto de que las leyes naturales «no son auténticos enunciados», sino «reglas para la transformación de enunciados[*1]»: esto es, que sean un tipo particular de «pseudoenunciados».

Este intento de resolver el problema (si bien me parece ser en todo caso una solución verbal) comparte con todos los intentos anteriores —o sea, con el *apriorismo*, convencionalismo, etc.— una suposición carente de fundamento: la de que todos los enunciados auténticos han de ser, en principio, enteramente decidibles, es decir, verificables o falsables; o —dicho con más precisión— que para todo auténtico enunciado han de ser lógicamente posibles una verificación empírica (definitiva) y una falsación empírica (también definitiva).

Si eliminamos tal asunción cabe resolver de un modo sencillo la contradicción que constituye el problema de la inducción: podemos interpretar de un modo perfectamente coherente las leyes naturales —o las teorías— como auténticos enunciados que son *parcialmente decidibles*: esto es, que por razones lógicas no son verificables, sino que *sólo son falsables, de un modo asimétrico*; pues serían enunciados que se contrastan sometiéndolos a intentos sistemáticos de falsarios.

La solución que aquí propongo tiene la ventaja de preparar también el camino para resolver el segundo —y más fundamental— de los dos problemas de la teoría del conocimiento (o de la teoría del método empírico). Me refiero al siguiente:

2) *Problema principal. Éste es el problema de la demarcación* (el problema kantiano de los límites del conocimiento científico), que puede definirse como el de encontrar un criterio mediante el cual podamos distinguir entre aserciones que

pertenecen a las ciencias empíricas y las que podríamos llamar «metafísicas».

Según una solución propuesta por Wittgenstein[2], se logra la demarcación buscada mediante la idea de «significado» o «sentido»: toda proposición con sentido —o, con significado— tiene que ser una función veritativa de proposiciones «atómicas», esto es, ha de podérsela reducir lógicamente de un modo completo a enunciados singulares de observación (o ha de ser deductible de ellos). Si un supuesto enunciado resulta no poderse reducir del modo dicho, entonces es «carente de sentido», «absurdo», «metafísico» o una «pseudoproposición». Así pues, *la metafísica sería un palabreo absurdo y carente de sentido*.

Podría parecer que los positivistas, al trazar esta línea de demarcación, han conseguido acabar con la metafísica de una manera más completa que los antimetafísicos anteriores; sin embargo, no solamente ocurre que han aniquilado la metafísica, sino que lo mismo han hecho con la ciencia natural: pues las leyes de la Naturaleza son tan poco reducibles a enunciados de observación como los discursos metafísicos (recuérdese el problema de la inducción); si se aplicase consecuentemente el criterio de sentido de Wittgenstein, cobrarían el aspecto de «pseudoproposiciones carentes de sentido», y, por tanto, el de algo «metafísico». Con lo cual se hunde la tentativa de trazar una línea de demarcación.

Puede eliminarse el dogma del significado o del sentido —y al par los pseudoproblemas a que ha dado lugar— si adoptamos el *criterio de falsabilidad* (o sea, el de una decidibilidad —al menos— unilateral o asimétrica) como criterio de demarcación. Según éste, los enunciados y los sistemas de enunciados nos transmiten una información acerca del mundo empírico solamente si son capaces de chocar con la experiencia; o, con mayor precisión, sólo si pueden ser *contrastados sistemáticamente*: es decir, si son susceptibles de ser sometidos a contraste (de acuerdo con una «decisión metodológica») de tal modo que pudieran quedar refutados[3].

De esta forma, el reconocimiento de los enunciados unilateralmente decidibles no sólo nos permite resolver el problema de la inducción (obsérvese que únicamente existe un tipo de razonamiento que se mueva en dirección inductiva: el *modus tollens*, que es deductivo), sino, asimismo, el problema más fundamental de la demarcación, que ha dado origen a casi todos los demás de la epistemología. Pues nuestro criterio de falsabilidad ha discriminado con suficiente precisión los sistemas teóricos de las ciencias empíricas de los de la metafísica (y de los sistemas convencionalistas y los tautológicos), sin aseverar, por ello, la carencia de sentido de la metafísica (la cual, desde un punto de vista histórico, puede observarse que ha sido 1» fuente de que han brotado las teorías de las ciencias empíricas).

Adaptando una observación muy conocida de Einstein[4], podríamos caracterizar las ciencias empíricas, por tanto, como sigue: *En la medida en que un enunciado científico habla acerca de la realidad, tiene que ser falsable; y en la medida en que no es falsable, no habla acerca de la realidad*.

Mediante un análisis lógico podría mostrarse que el papel de la *falsabilidad* (unilateral) como criterio de la ciencia empírica es formalmente análogo al de la *compatibilidad* para la *ciencia en general*: un sistema incompatible (o contradictorio) no es capaz de escoger un subconjunto propio del conjunto de todos los enunciados posibles, y —análogamente— un sistema infalsable no puede escoger un subconjunto propio de entre el conjunto de todos los posibles enunciados «empíricos» (o sea, de todos los enunciados sintéticos singulares)[5].

2

La segunda nota consiste en ciertas observaciones que hice durante la discusión de un trabajo leído por Reichenbach en una conferencia filosófica habida en Praga en el verano de 1934 (cuando el libro estaba en pruebas). En *Erkenntnis* se publicó posteriormente un informe de la conferencia; mi colaboración a ella apareció en *Erkenntnis* **5**, 1935, págs. 170 y sigs.

Sobre las llamadas «lógica de la inducción» y «probabilidad de hipótesis».

No creo posible elaborar una teoría satisfactoria de lo que se llama tradicionalmente —y también por Reichenbach, por ejemplo— «inducción». Por el contrario, creo que semejante teoría tiene que llevar,

por razones puramente lógicas —y ello lo mismo si emplea la lógica clásica como si emplea la probabilitaria—, o a una regresión infinita, o a apoyarse en un principio *apriorístico* de inducción (es decir, a un principio sintético que no pueda ser contrastado empíricamente).

Si distinguimos, como hace Reichenbach, entre un «procedimiento de encontrar» y un «procedimiento de justificar» (una hipótesis), entonces hemos de decir que no es posible reconstruir racionalmente el primero. Pero, en mi opinión, el análisis del procedimiento de justificar las hipótesis no nos conduce a nada que podamos decir que pertenece a una lógica inductiva; pues la teoría de la inducción es superflua, y carece de función en una lógica de la ciencia.

Nunca es posible «justificar» —o verificar las teorías científicas. Mas, a pesar de ello, una hipótesis determinada, A, puede aventajar bajo ciertas circunstancias a otra, B: bien sea porque B esté en contradicción con ciertos resultados de observación —y, por tanto, quede «falsada» por ellos—, o porque sea posible deducir más predicciones valiéndose de A que de B. Lo más que podemos decir de una hipótesis es que hasta el momento ha sido capaz de mostrar su valía, y que ha tenido más éxito que otras: aun cuando, en principio, jamás cabe justificarla, verificarla ni siquiera hacer ver que sea probable. Esta evaluación de la hipótesis se apoya exclusivamente en las consecuencias *deductivas* (predicciones) que pueden extraerse de ella: *no se necesita* *ni mencionar la palabra «inducción»*.

Es fácil explicar históricamente el error que suele cometerse en esta materia: se consideraba que la ciencia era un sistema de conocimientos (esto es, de conocimientos todo lo seguros que se pudiera), y se suponía que la «inducción» garantizaba su verdad; más tarde se vio claramente que no es posible llegar a una verdad absolutamente segura, y se trató de poner en su lugar por lo menos una especie de certidumbre o de verdad atenuadas —es decir, la «probabilidad».

Pero el hablar de la «probabilidad» en lugar de hacerlo de la «verdad» no nos sirve para escapar de la regresión infinita o del *apriorismo*[1]

Desde este punto de vista cabe darse cuenta de que es inútil y engañoso emplear el concepto de probabilidad en relación con las hipótesis científicas.

El concepto de probabilidad se emplea en la física y en la teoría de los juegos de azar de un modo concreto, que puede definirse satisfactoriamente valiéndose del concepto de frecuencia relativa (según hace Von Mises)[2]. Pero las tentativas de Reichenbach de ampliar tal concepto de suerte que incluya la llamada «probabilidad inductiva» o la «probabilidad de hipótesis» están condenadas a fracasar, según mi opinión, si bien no tengo objeción alguna que hacer contra la idea —que aquel autor trata de invocar— de una «frecuencia veritativa» en una sucesión de enunciados[3]: pues no es posible interpretar satisfactoriamente las hipótesis como sucesiones de enunciados[4], e incluso si se aceptase esta interpretación no se ganaría nada, ya que se encuentra uno abocado en diversas definiciones de la probabilidad de una hipótesis todas enteramente inadecuadas. Por ejemplo, se desemboca en una definición que atribuye la probabilidad 1/2 —en lugar de 0— a una hipótesis que ha quedado falsada mil veces: así ocurriría con una hipótesis que resultase falsada en una contrastación sí y una no. Podría quizá considerarse la posibilidad de interpretar la hipótesis, no como una sucesión de enunciados, sino como un elemento de una sucesión de hipótesis[5], y de atribuirla cierto valor probabilitario en cuanto elemento de semejante sucesión (aunque no a base de la «frecuencia de la verdad», sino de la «frecuencia de la falsedad» dentro de semejante sucesión). Pero esta tentativa es, asimismo, completamente insatisfactoria: mediante consideraciones sumamente sencillas se llega al resultado de que no podemos obtener de este modo un concepto de probabilidad que satisfaga ni siquiera la modesta condición de que una observación falsadora origine una disminución apreciable de la probabilidad de la hipótesis.

A mi entender, tenemos que hacernos a la idea de que no hemos de considerar la ciencia como un «cuerpo de conocimientos», sino más bien como un sistema de hipótesis: es decir, como un sistema de conjeturas o anticipaciones que —por principio— no son susceptibles de justificación, pero con las que operamos mientras salgan indemnes de las contrastaciones; y tales que nunca estaremos justificados para decir que son «verdaderas», «más o menos ciertas», ni siquiera «probables».