

# AAU

AMERICAN ANDRAGOGY  
UNIVERSITY







**APUNTES  
DE  
FUNDAMENTOS FÍSICOS  
DE LA INGENIERÍA  
(MECÁNICA)**

Enrique Drake Moyano



**Sección de Publicaciones  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
Universidad de Sevilla**

**Título:** Apuntes de Fundamentos Físicos de la Ingeniería (Mecánica)

**Autores:** Enrique Drake Moyano

**Edita:** Sección de Publicaciones  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
Universidad de Sevilla

**ISBN:** 978-84-88783-90-5

© El contenido de este documento es responsabilidad de los autores.  
Prohibida la reproducción total o parcial de este documento por cualquier medio sin la autorización expresa de los autores

# CONTENIDOS

<b>Vectores libres</b>	<b>1</b>
1. Magnitudes escalares y vectoriales	1
2. Definición geométrica de vector. Clasificación	1
3. Vectores libres. Suma y producto por un escalar	1
4. Bases vectoriales. Componentes de un vector. Coordenadas de un punto	2
5. Producto escalar	3
6. Producto vectorial	4
7. Producto mixto	6
8. Doble producto vectorial	6
<b>Cinemática del punto</b>	<b>7</b>
1. Introducción	7
2. Algunos elementos de la geometría de curvas	7
2.1. Ecuaciones de una curva	7
2.2. Longitud de una curva	8
2.3. Triedro intrínseco o de Frenet	9
2.4. Curvatura y radio de curvatura	10
3. Cinemática del punto. Generalidades	11
4. Componentes intrínsecas de la velocidad y la aceleración	11
5. Determinación cinemática de elementos geométricos de la trayectoria	12
6. Movimientos elementales	12
6.1. Movimiento rectilíneo	12
6.2. Movimiento circular	13
6.3. Movimiento armónico simple (m.a.s.)	14
6.4. Movimiento helicoidal uniforme (m.h.u.)	14
6.5. Movimiento central	14
6.5.1. Descripción del movimiento plano de un punto en coordenadas polares	15
6.5.2. Concepto de velocidad areolar	15
6.5.3. Teorema fundamental del movimiento central	16
<b>Vectores deslizantes</b>	<b>17</b>
1. Definición de vector deslizante. Momento	17
2. Sistema de vectores deslizantes	17
2.1. Resultante y momento resultante	18
2.2. Campo de momentos: ecuación y propiedades	18
2.3. Momento áxico	19
2.4. Invariantes	19
2.5. Eje central	19
3. Sistemas particulares	20
3.1. Vector suelto	20
3.2. Par de vectores	21
3.3. Vectores concurrentes	21
3.4. Vectores paralelos	21
4. Equivalencia de sistemas de vectores deslizantes	22
5. Reducción de sistemas de vectores deslizantes	23
6. Clasificación de sistemas de vectores deslizantes	24
7. Equiproyectividad	24
<b>Cinemática del sólido rígido</b>	<b>25</b>
1. Definición de sólido rígido: condición geométrica de rigidez	25
2. Condición cinemática de rigidez: equiproyectividad del campo de velocidades	25

3. Movimiento de rotación . . . . .	26
3.1. Rotación de eje permanente . . . . .	26
3.2. Rotación instantánea . . . . .	26
4. Movimiento de traslación . . . . .	27
4.1. Traslación instantánea . . . . .	27
4.2. Traslación permanente . . . . .	27
5. Movimiento helicoidal tangente . . . . .	28
6. Descripción del movimiento instantáneo de un sólido rígido: clasificación . . . . .	28
7. Campo de velocidades del sólido rígido . . . . .	30
8. Campo de aceleraciones del sólido rígido . . . . .	30
<b>Movimiento relativo</b>	<b>33</b>
1. Derivación temporal en triedros móviles: fórmulas de Poisson . . . . .	33
2. Notación y definiciones en el movimiento relativo . . . . .	34
3. Composición de velocidades . . . . .	35
4. Composición de velocidades angulares . . . . .	36
5. Composición de aceleraciones: teorema de Coriolis . . . . .	37
6. Composición de aceleraciones angulares . . . . .	38
7. Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual . . . . .	39
<b>Movimiento plano</b>	<b>41</b>
1. Definición de movimiento plano. Propiedades . . . . .	41
2. Centro instantáneo de rotación (C.I.R.) . . . . .	42
2.1. Definición del C.I.R. . . . .	42
2.2. Propiedades del C.I.R. . . . .	42
2.3. Determinación del C.I.R. . . . .	43
3. Teorema de los tres centros o de Aronhold-Kennedy . . . . .	44
<b>Introducción a la Dinámica</b>	<b>45</b>
1. Leyes de Newton . . . . .	45
2. Dinámica del punto material . . . . .	46
2.1. Punto material libre . . . . .	46
2.2. Punto material vinculado. Principio de liberación . . . . .	47
3. Integrales primeras: teoremas de conservación . . . . .	48
3.1. Teorema de la energía . . . . .	48
3.2. Teorema de la cantidad de movimiento . . . . .	49
3.3. Teorema del momento cinético . . . . .	50
4. Dinámica en sistemas de referencia no inerciales . . . . .	51
5. Aproximación a la dinámica de un rotor . . . . .	51
5.1. Energía cinética de rotación. Momento de inercia . . . . .	51
5.2. La segunda ley de Newton para la rotación . . . . .	52
<b>Estática</b>	<b>53</b>
1. Introducción . . . . .	53
2. Equilibrio del punto material . . . . .	53
2.1. Equilibrio del punto sobre una superficie lisa . . . . .	54
2.2. Equilibrio del punto sobre una curva lisa . . . . .	54
3. Equilibrio del sólido rígido . . . . .	54
3.1. Condición estática de rigidez. Teorema de transmisibilidad . . . . .	54
3.2. Condiciones de equilibrio del sólido . . . . .	55
4. Desvinculación de sólidos . . . . .	56
4.1. Desvinculación de un contacto puntual y liso . . . . .	56
4.2. Desvinculación de pares de enlace usuales (lisos) . . . . .	56
5. Teorema de las tres fuerzas . . . . .	58
6. Principio de fragmentación . . . . .	59
7. Contactos reales entre sólidos. Rozamiento seco de Coulomb . . . . .	59
7.1. Estudio experimental de la fuerza de rozamiento . . . . .	60
7.2. Leyes de Coulomb . . . . .	60
7.3. Deslizamiento inminente y vuelco inminente . . . . .	61

# VECTORES LIBRES

## 1. Magnitudes escalares y vectoriales.-

Una **magnitud física** es cualquier propiedad física susceptible de ser medida. Ejemplos: el tiempo ( $t$ ), la velocidad ( $v$ ), la masa ( $m$ ), la temperatura ( $T$ ), el campo eléctrico ( $E$ ).

Las magnitudes físicas se pueden clasificar en:

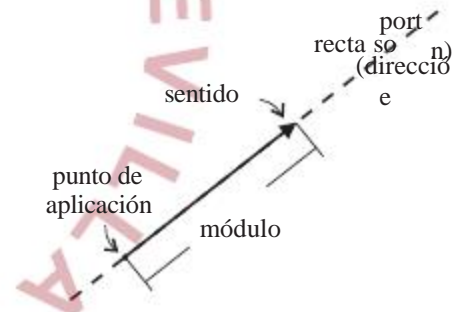
- **Magnitudes escalares**, que son aquellas que quedan completamente determinadas mediante el conocimiento de su valor expresado mediante una cantidad (un número real) seguida de una unidad (a excepción de las adimensionales). Ejemplos: el tiempo ( $t$ ), la masa ( $m$ ), la temperatura ( $T$ ), la carga eléctrica ( $q$ ), el coeficiente de rozamiento ( $\mu$ ).
- **Magnitudes vectoriales**, que son aquellas que no quedan completamente determinadas por su valor (cantidad y unidad), sino que requieren además el conocimiento de la dirección y el sentido de su actuación, e incluso en algunos casos el conocimiento de su recta soporte o de su punto de aplicación. Ejemplos: la velocidad ( $v$ ), la aceleración ( $a$ ), la fuerza ( $F$ ), el campo eléctrico ( $E$ ).
- **Magnitudes tensoriales**, que no son, por el momento, objeto de nuestra atención.

## 2. Definición geométrica de vector. Clasificación.-

El concepto de vector es un concepto matemático con interés físico, ya que permite representar o describir las magnitudes vectoriales, así como operar con ellas.

Un **vector geométrico** es un segmento orientado dotado de los siguientes elementos:

- módulo** (es su longitud, proporcional al valor de la magnitud física);
- recta soporte** (es la recta a la que pertenece el segmento);
- dirección** (es la dirección de su recta soporte);
- sentido** (es la orientación del segmento, indicada mediante una flecha que permite definir cuál es su origen y cuál su extremo); y
- punto de aplicación** (es el origen del segmento).



Los vectores geométricos se pueden clasificar en:

- **Vectores libres**, que son los que quedan definidos mediante su módulo, dirección y sentido. Por tanto, son invariantes ante traslaciones en el espacio. Ejemplo: la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido.
- **Vectores deslizantes**, que son los que quedan definidos mediante su módulo, dirección, sentido y recta soporte. Por tanto, son invariantes ante deslizamientos a lo largo de su recta soporte. Ejemplos: la velocidad angular, la fuerza que actúa sobre un sólido rígido.
- **Vectores ligados**, que son los que quedan definidos mediante su módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. No existe ningún movimiento que los deje invariantes. Ejemplos: la velocidad, el momento de una fuerza respecto a un punto.

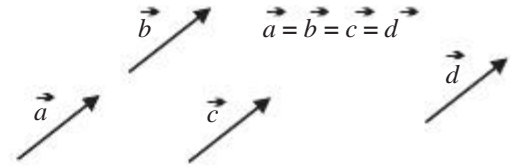
En principio, cada magnitud física vectorial, según su naturaleza, puede ser representada por una de estas tres clases de vectores. Sin embargo, en ocasiones, es la naturaleza del problema físico concreto la que determina que una misma magnitud se describa mediante una u otra clase de vectores. Así, por ejemplo, una fuerza se comporta como un vector deslizante cuando actúa sobre un sólido rígido, y como un vector ligado cuando lo hace sobre un sólido deformable.

## 3. Vectores libres. Suma y producto por un escalar.-

Los vectores libres admiten la definición de las operaciones *suma* y *producto por un escalar* con una serie de propiedades algebraicas (definición algebraica de vector). No obstante, el primer requisito para poder operar con vectores libres ha de ser la definición de una *relación de equivalencia*.

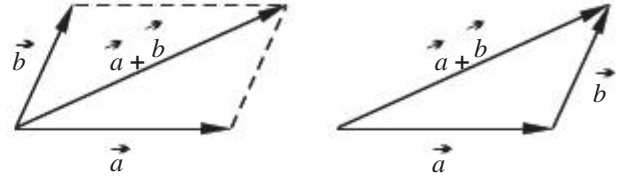


La **relación de equivalencia** entre vectores libres está implícita en la propia definición de éstos, de tal modo que diremos que dos vectores libres son equivalentes (y escribiremos  $a = b$ ) cuando tengan respectivamente iguales sus módulos, sus direcciones y sus sentidos (podrán tener diferentes, por tanto, sus rectas soporte y sus puntos de aplicación).

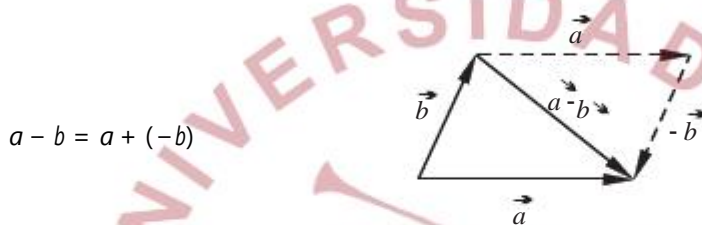


La **suma de vectores libres**,  $a + b$ , se define mediante las conocidas como *regla del paralelogramo* o *regla del triángulo*, y presenta las siguientes **propiedades algebraicas**:

- Conmutativa:  $a + b = b + a$
- Asociativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existencia de elemento neutro:  $a + 0 = a$
- Existencia de elemento opuesto:  $a + (-a) = 0$

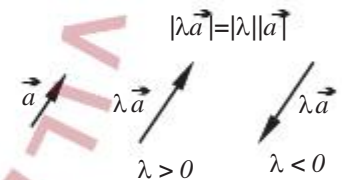


La operación suma, junto a la existencia de elemento opuesto, permite definir la **resta o diferencia de vectores**,  $a - b$ , como:



El **producto de un vector libre**,  $a$ , **por un escalar**,  $\lambda$  (número real), se define como un nuevo vector libre,  $\lambda a$ , cuyo módulo es igual al producto del escalar (en valor absoluto) por el módulo del vector original, cuya dirección es la misma que la del vector original, y cuyo sentido es el mismo o el opuesto al del vector original según el escalar sea positivo o negativo, respectivamente. Esta operación presenta las siguientes **propiedades algebraicas**:

- Asociativa respecto al producto por escalar:  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- Distributiva respecto a la suma de vectores:  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
- Distributiva respecto a la suma de escalares:  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- Existencia de escalar unidad:  $1a = a$



#### 4. Bases vectoriales. Componentes de un vector. Coordenadas de un punto.-

Una **base** de vectores libres en el espacio ordinario tridimensional  $E_3$  es cualquier terna de vectores,  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ , tal que todo vector libre,  $a$ , se pueda expresar como combinación lineal de los mismos, es decir:

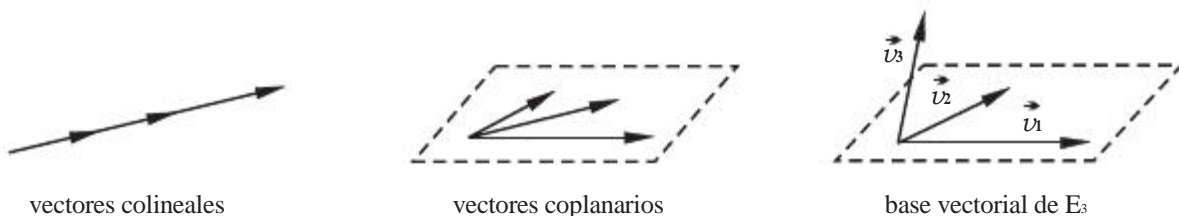
$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

Se dice entonces que  $[a_1, a_2, a_3]$  son las **componentes del vector**  $a$  en la base vectorial  $B$ , lo cual se puede expresar del siguiente modo:

$a = [a_1, a_2, a_3] \cdot B$  o bien  $a = [a_1, a_2, a_3]$  (si no hay ambigüedad respecto a la base)

Por tanto, un mismo vector tendrá una terna distinta de componentes en cada una de las infinitas bases posibles.

Desde un punto de vista geométrico, una base vectorial en el espacio ordinario  $E_3$  es cualquier terna de vectores que no sean colineales ni coplanarios.



Para describir el espacio ordinario, se puede definir un sistema de ejes coordenados cartesianos,  $OX_1X_2X_3$ , al cual se le asocia una **base cartesiana ortonormal**,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  (formada por tres vectores unitarios, perpendiculares entre sí, que siguen las direcciones de los ejes  $OX_1, OX_2$  y  $OX_3$ , respectivamente). Cuando el sistema de ejes cartesianos es  $OXYZ$ , se prefiere la notación  $\{i, j, k\}$  para su base ortonormal asociada.

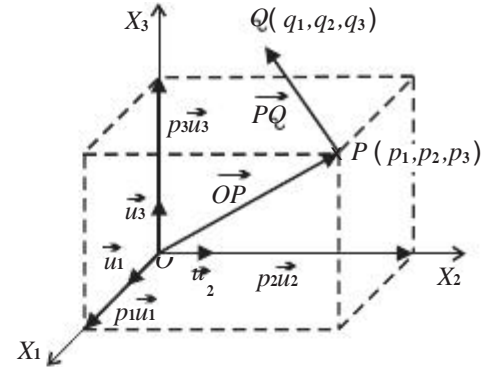
La posición de un punto genérico,  $P$ , respecto a un sistema de ejes cartesianos,  $OX_1X_2X_3$ , queda unívocamente definida mediante su vector de posición:

$$\vec{OP} = p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3$$

Se denominan **coordenadas cartesianas del punto  $P$**  en dicho sistema de ejes a las componentes de su vector de posición en la base ortonormal asociada, es decir, a la terna  $(p_1, p_2, p_3)$ .

Conocidas las coordenadas cartesianas del origen y del extremo de un vector, basta restarle las primeras a las segundas para obtener las componentes cartesianas del vector. Por ejemplo, dados los puntos  $P(p_1, p_2, p_3)$  y  $Q(q_1, q_2, q_3)$ , es inmediato calcular las componentes del vector  $PQ$ :

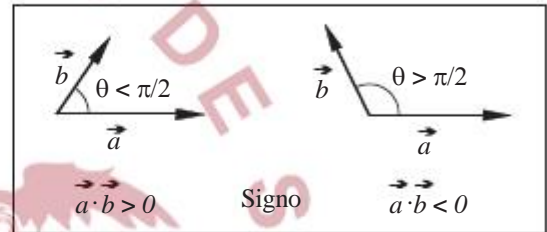
$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = [q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3]$$



### 5. Producto escalar.-

Dados dos vectores,  $a$  y  $b$ , que forman un ángulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), se denomina **producto escalar**,  $a \cdot b$ , al escalar (número real) que resulta de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

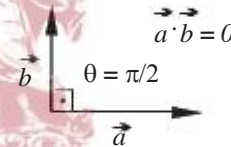
$$a \cdot b = |a||b| \cos(\theta)$$



El producto escalar presenta las siguientes **propiedades geométricas**:

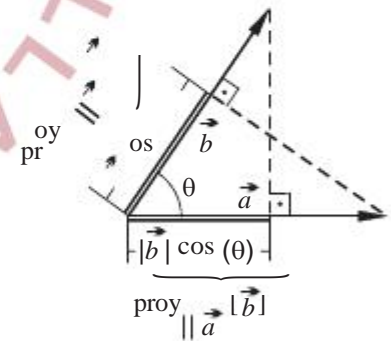
a) Condición de **ortogonalidad**:

$$\text{si } a \perp b, \text{ entonces } a \cdot b = 0 \iff a \perp b$$



b) **Proyecciones ortogonales**:

$$a \cdot b = |a| \text{proy}_a[b] = |b| \text{proy}_b[a]$$



Aplicaciones:

\* si  $|u| = 1$ , entonces  $a \cdot u = \text{proy}_u[a]$

\* si  $\{u_1, u_2, u_3\}$  es ortonormal,  $a = (a \cdot u_1)u_1 + (a \cdot u_2)u_2 + (a \cdot u_3)u_3$

c) **Métrica** (permite medir distancias y ángulos):

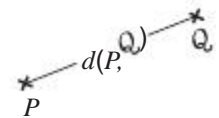
- Módulo de un vector,  $a$ :

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$



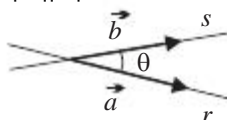
- Distancia entre dos puntos,  $P$  y  $Q$ :

$$d(P, Q) = \sqrt{PQ \cdot PQ}$$



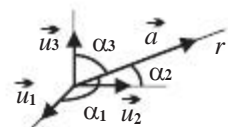
- Ángulo formado por dos rectas,  $r$  y  $s$ :

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$



- Cosenos directores de una recta,  $r$ :

$$\cos(\alpha_i) = \frac{a \cdot u_i}{|a|} \quad (i = 1, 2, 3)$$



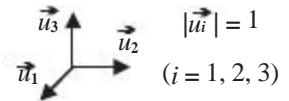
El producto escalar presenta las siguientes **propiedades algebraicas**:

- Asociativa respecto al producto por un escalar:  $(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) = \alpha (a \cdot b)$
- Conmutativa:  $a \cdot b = b \cdot a$
- Distributiva respecto a la suma:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Cancelativa:  $x \cdot a = x \cdot b \Rightarrow a = b + c$  (siendo  $c \perp x$  y, por tanto,  $x \cdot c = 0$ )

Respecto al **producto escalar en componentes cartesianas**, destacaremos:

a) Producto escalar de los vectores de una base cartesiana ortonormal,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ :

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\delta_{ij} : \text{delta de Kronecker})$$



b) Producto escalar de dos vectores arbitrarios,  $a$  y  $b$  (se deduce del punto anterior y de las propiedades algebraicas):

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Aplicaciones:

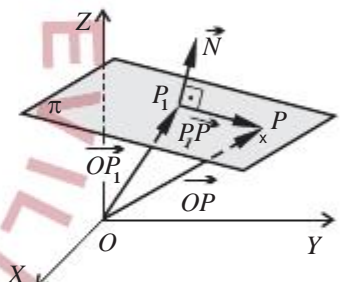
$$* d(P, Q) = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{PQ}}{\overline{PQ} \cdot \overline{PQ}} = \frac{(\overline{q_1 - p_1})^2 + (\overline{q_2 - p_2})^2 + (\overline{q_3 - p_3})^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{obsérvese que: } \cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1)$$

Finalmente, como aplicación geométrica del producto escalar, se puede deducir la **ecuación vectorial normal del plano**,  $\pi$ , que pasa por el punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y que es normal al vector  $\vec{N} = [\alpha, \beta, \gamma]$ . Si  $P(x, y, z)$  es un punto genérico del plano  $\pi$ , entonces:

$$\vec{N} \perp P_1P \Rightarrow \vec{N} \cdot \overline{P_1P} = 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot (\overline{OP} - \overline{OP_1}) = 0 \Rightarrow \vec{N} \cdot \overline{OP} = \vec{N} \cdot \overline{OP_1}$$

que, efectuando el producto escalar en componentes cartesianas, se traduce en que todo punto  $P(x, y, z)$  que pertenezca al plano debe satisfacer la **ecuación general**:

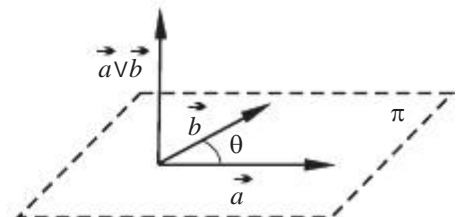
$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0$$



## 6. Producto vectorial.-

Dados dos vectores,  $a$  y  $b$ , que forman un ángulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), se denomina **producto vectorial**,  $a \wedge b$ , a un nuevo vector cuyo módulo es igual al producto de los módulos de ambos vectores por el seno (en valor absoluto) del ángulo que forman, cuya dirección es la perpendicular al plano  $\pi$  definido por los dos vectores originales, y cuyo sentido viene dado por *la regla de la mano derecha* (si colocamos nuestra mano derecha de forma que los dedos sigan el sentido de giro desde el primer vector,  $a$ , hacia el segundo vector,  $b$ , por el camino más corto, entonces el pulgar extendido apunta en el sentido de  $a \wedge b$ ).

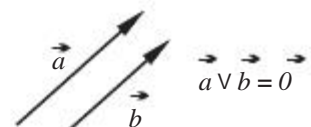
$$a \wedge b = \begin{cases} \text{módulo:} & |a \wedge b| = |a||b| \sin(\theta) \\ \text{dirección:} & (a \wedge b) \perp \text{plano } \pi \\ \text{sentido:} & \text{r. mano derecha } (a \rightarrow b) \end{cases}$$



El producto vectorial presenta las siguientes **propiedades geométricas**:

a) Condición de **paralelismo**:

$$\text{si } a = 0 = b, \text{ entonces } a \wedge b = 0 \iff a \parallel b$$

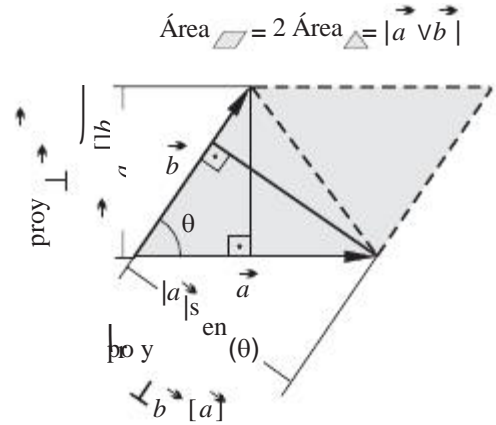


b) **Proyecciones ortogonales:**

$$|a \wedge b| = |a| \text{proy}_{\perp a}[b] = |b| \text{proy}_{\perp b}[a]$$

Aplicaciones:

- \* si  $|u| = 1$ , entonces  $|a \wedge u| = \text{proy}_{\perp u}[a]$
- \* El módulo del producto vectorial de dos vectores,  $|a \wedge b|$ , es igual al **área del paralelogramo** que tiene como lados a ambos vectores, o -lo que es lo mismo- es igual al doble del área del triángulo que tiene a ambos vectores como dos de sus lados.



El producto vectorial presenta las siguientes **propiedades algebraicas:**

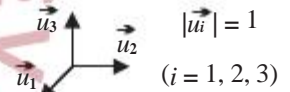
- No es asociativo:  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Anticonmutativa:  $a \wedge b = -b \wedge a$
- Asociativa respecto al producto por un escalar:  $(\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b) = \alpha (a \wedge b)$
- Distributiva respecto a la suma:  $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$
- Cancelativa:  $x \wedge a = x \wedge b \Rightarrow a = b + \lambda x$  (siendo  $\lambda$  un parámetro real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ )

Respecto al **producto vectorial en componentes cartesianas**, destacaremos:

a) Producto vectorial de los vectores de una base cartesiana ortonormal y dextrógira,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ :

$$u_1 \wedge u_2 = u_3 \quad ; \quad u_2 \wedge u_3 = u_1 \quad ; \quad u_3 \wedge u_1 = u_2$$

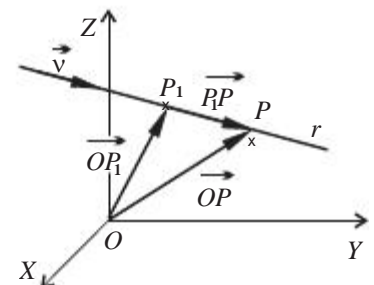
$$u_j \wedge u_i = -u_i \wedge u_j \quad ; \quad u_i \wedge u_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$



b) Producto vectorial de dos vectores arbitrarios,  $a$  y  $b$  (se deduce del punto anterior y de las propiedades algebraicas):

$$\begin{matrix} & u_2 & u_3 \\ \begin{matrix} a_1 \\ u_1 \\ b_1 \end{matrix} & \begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix} & \begin{matrix} a_3 \\ b_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Finalmente, como aplicación geométrica del producto vectorial, se puede deducir la **ecuación vectorial de la recta**,  $r$ , que pasa por el punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y que tiene la dirección del vector  $v = [\alpha, \beta, \gamma]$ . Si  $P(x, y, z)$  es un punto genérico de la recta  $r$ , entonces:



y, aplicando la propiedad cancelativa del producto vectorial, se obtiene:

$$\boxed{\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \lambda \vec{v}}$$

de donde se deducen las **ecuaciones paramétricas** (separando en componentes cartesianas) y las **ecuaciones en forma continua** (eliminando el parámetro  $\lambda$ ) de la recta  $r$ :

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \alpha \\ y = y_1 + \lambda \beta \\ z = z_1 + \lambda \gamma \end{cases} \quad \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} \quad (\text{ec. en forma continua})$$



### 7. Producto mixto.-

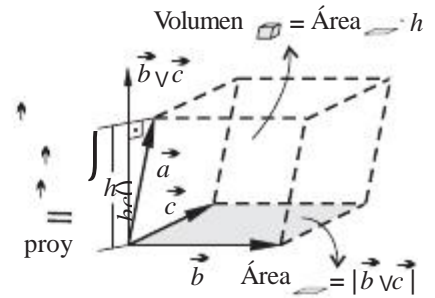
El **producto mixto**,  $a \cdot (b \wedge c)$ , presenta las siguientes **propiedades geométricas**:

- a) El valor absoluto del producto mixto de tres vectores,  $|a \cdot (b \wedge c)|$ , es igual al **volumen del paralelepípedo** que tiene como aristas a esos tres vectores:

$$|a \cdot (b \wedge c)| = |b \wedge c| \text{ proy}_{(b \wedge c)} [a] = \text{Volumen}$$

- b) Condición de **coplanariedad** (para  $a, b$  y  $c$  no nulos):

$$a \cdot (b \wedge c) = 0 \iff a, b \text{ y } c \text{ son coplanarios}$$



Aplicación:

- \* Tres vectores,  $a, b$  y  $c$ , constituyen una base vectorial del espacio ordinario  $E_3$  si, y sólo si,  $a \cdot (b \wedge c) \neq 0$ .

El producto mixto presenta las siguientes **propiedades algebraicas**:

- Permutabilidad cíclica:  $a \cdot (b \wedge c) = b \cdot (c \wedge a) = c \cdot (a \wedge b)$
- Antipermutabilidad acíclica:  $a \cdot (b \wedge c) = -b \cdot (a \wedge c)$

	$a_2$	$a_3$
$b_1$	$b_2$	$b_3$
$c_1$	$c_2$	$c_3$

Aplicaciones:

- \* Producto mixto de los vectores de una base ortonormal dextrógira,  $\{u_1, u_2, u_3\}$ :

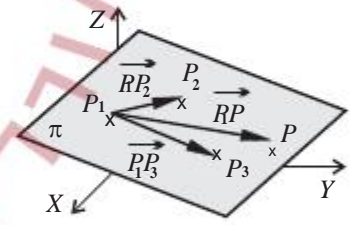
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|u_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

- \* Ecuación del plano,  $\pi$ , que pasa por tres puntos no alineados,  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  y  $P_3(x_3, y_3, z_3)$ . Todo punto  $P(x, y, z)$  que pertenezca al plano  $\pi$  debe satisfacer la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(coplanariedad de  $P_1P, P_1P_2, P_1P_3$ )



### 8. Doble producto vectorial.-

$$a \wedge (b \wedge c) = \begin{vmatrix} b & c \\ (a \cdot b) & (a \cdot c) \end{vmatrix} = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

Aplicaciones:

- \* Desarrollo del producto escalar de dos productos vectoriales:

$$(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = c \cdot [d \wedge (a \wedge b)] = c \cdot [(b \cdot d)a - (a \cdot d)b] = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

- \* Resolver, para la incógnita  $x$ , el sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} x \wedge a &= b \\ x \cdot a &= \alpha \end{aligned}$$

$$a \wedge (x \wedge a) = a \wedge b \implies |a|^2 x - (x \cdot a)a = a \wedge b \implies x = \frac{a \wedge b}{|a|^2} + \frac{\alpha a}{|a|^2}$$

# CINEMÁTICA DEL PUNTO

## 1. Introducción.-

Se dice que un cuerpo se halla en **movimiento** respecto a otro cuando existe un cambio continuo de su posición relativa a lo largo del tiempo. La rama de la Física que se dedica al estudio del movimiento de los cuerpos es la **Mecánica**, y esta se subdivide en las siguientes disciplinas:

- **Cinemática**, que describe geoméricamente el movimiento sin atender a sus causas.
- **Dinámica**, que conecta el movimiento y sus características con las causas (fuerzas) que lo producen.
- **Estática**, que establece las condiciones de equilibrio mecánico (ausencia de movimiento).

El **punto material** es un modelo matemático consistente en un punto geométrico (sin dimensiones) dotado de una masa finita y distinta de cero (densidad másica infinita). La utilidad de este modelo radica en que:

- proporciona un punto de partida relativamente simple para el desarrollo teórico de la mecánica de modelos más complejos;
- aproxima el comportamiento dinámico de aquellos cuerpos cuyas dimensiones propias son muy inferiores a las dimensiones promedio de sus desplazamientos (por ejemplo, los cuerpos celestes);
- permite estudiar el movimiento del centro de masa de cualquier sistema mecánico.

## 2. Algunos elementos de la geometría de curvas.-

El movimiento de un punto en el espacio ordinario tridimensional,  $E_3$ , genera una curva alabeada (trayectoria). En consecuencia, la descripción geométrica del movimiento de un punto (objeto de su Cinemática) requiere el previo conocimiento de algunos elementos de la geometría de curvas.

### 2.1. Ecuaciones de una curva.

La **ecuación vectorial** de una curva,  $C$ , viene dada por una función vectorial de variable real:

$$\vec{r} = r(\lambda) = \vec{OP}(\lambda) = [x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]; \quad (\text{con } \lambda \in \mathbb{R})$$

de donde, separando las componentes cartesianas, se obtienen las **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{cases}$$

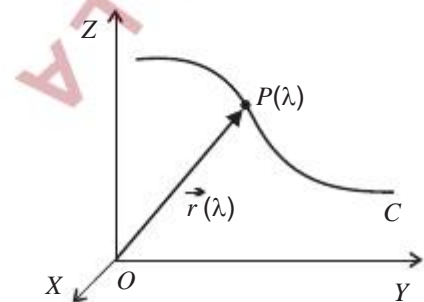
y, eliminando en estas últimas el parámetro  $\lambda$ , se llega a las **ecuaciones implícitas**:  
respectivamente, a sendas superficies en  $E_3$  cuya intersección es la curva  $C$ .

Por otra parte,  $\lambda$  no es el único parámetro posible para describir la curva  $C$  (existen infinitos). Así, por ejemplo, la definición de un nuevo parámetro  $\mu$  mediante el cambio:

$$\lambda = \lambda(\mu)$$

permitiría la siguiente **reparametrización** de  $C$ :

$$r = r[\lambda(\mu)] = r(\mu)$$



$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad \text{las cuales corresponden,}$$

Ejemplo:

\* La circunferencia de ecuación vectorial:

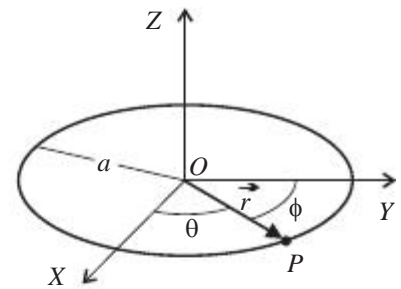
$$r = r(\theta) = [a \cos(\theta), a \sin(\theta), 0]$$

y de ecuaciones paramétricas cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = a \sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases}$$

se puede reparametrizar mediante el cambio  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , resultando la nueva ecuación vectorial:

$$r = r(\varphi) = [a \sin(\varphi), a \cos(\varphi), 0]$$



corresponden a una superficie cilíndrica y a un plano cuya intersección es la circunferencia.  $z=0$ , que

## 2.2. Longitud de una curva.

Se denomina **parámetro natural** o **parámetro arco**,  $s$ , de una curva,  $C$ , a la longitud del segmento de curva (arco) comprendido entre un punto de elección arbitraria,  $P_0$  (origen de arcos), y un punto genérico,  $P$ .

Suponiendo que la curva  $C$  está parametrizada inicialmente en  $\lambda$ , y diferenciando su ecuación vectorial, se obtiene el vector desplazamiento elemental,  $dr$ , como:

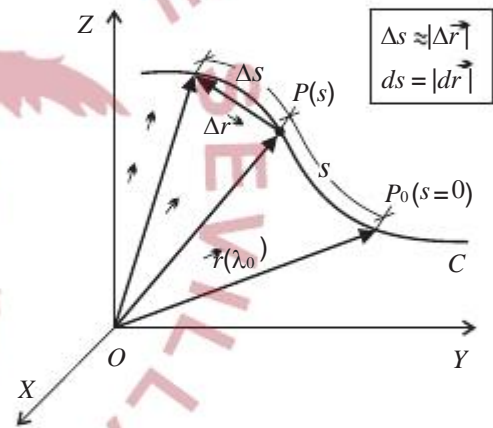
$$dr = \frac{dr}{d\lambda} d\lambda = \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} d\lambda$$

Pero el elemento de arco,  $ds$ , y el módulo del vector desplazamiento elemental,  $|dr|$ , son *infinitesimos equivalentes*, es decir:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{|\Delta s|} = 1$$

Por tanto:

$$ds = |dr| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2} d\lambda$$



e, integrando esta ecuación entre los puntos  $P_0$  y  $P$ , se obtiene una relación finita entre los parámetros  $s$  y  $\lambda$ :

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2} d\lambda$$

Mediante la reparametrización  $\lambda = \lambda(s)$ , y separando en componentes cartesianas, se llega a las *ecuaciones paramétricas naturales* de la curva  $C$ :

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

Ejemplo:

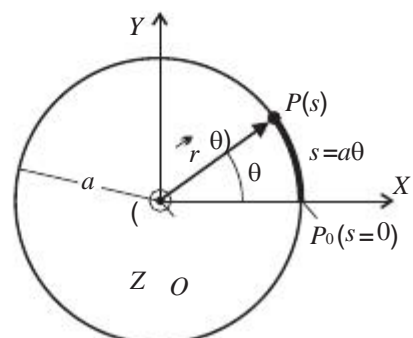
\* Para la circunferencia de ecuación vectorial:

$$r = r(\theta) = [a \cos(\theta), a \sin(\theta), 0]$$

se deduce fácilmente que  $s = a\theta$  ( eligiendo el origen de arcos,  $P_0$ , en  $\theta = 0$ ); y, por tanto, la reparametrización natural conduce

a:

$$r = r(s) = [a \cos(s/a), a \sin(s/a), 0]$$

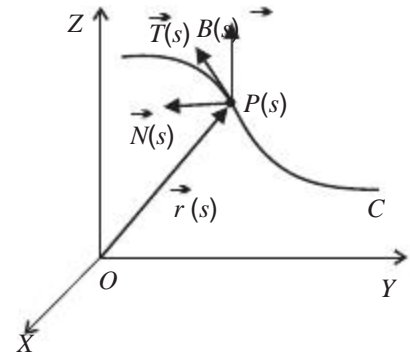


**2.3. Triedro intrínseco o de Frenet.**

En cada punto,  $P$ , de una curva,  $C$ , de ecuación vectorial  $r = r(s)$ , se define el **triedro intrínseco o triedro de Frenet**,  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ , constituido por:

$$\vec{T} = \frac{dr}{ds} \quad (\text{vector tangente unitario})$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2} \quad (\text{vector normal principal})$$



Para las derivadas respecto al parámetro arco, se usa habitualmente la notación  $d(\ )/ds$ . Por ello, las definiciones de  $T$  y  $N$  se pueden abreviar del siguiente modo:

$$\vec{T} = \frac{dr}{|r|}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Como **características fundamentales** del triedro de Frenet, cabe señalar que es:

- a) **local**, ya que se define en cada punto de la curva, y la dirección de sus vectores varía en general de un punto a otro;
- b) **intrínseco**, ya que es característico de la geometría local de la curva, e independiente del sistema de coordenadas con el que se la describe;
- c) **ortonormal**, ya que los tres vectores que lo constituyen son unitarios y ortogonales entre sí:

$$|\vec{T}| = 1 \quad \text{Por tanto, } |\vec{N}| = |\frac{d\vec{T}}{ds}| = 1$$

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1 \quad \Rightarrow \quad d(\vec{T} \cdot \vec{T}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T} \perp \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}$$

$$|\vec{B}| = |\vec{T} \wedge \vec{N}| = |\vec{T}| |\vec{N}| \sin(\pi/2) = 1 \quad \text{Por tanto, } |\vec{B}| = 1$$

- como su propio nombre indica, el vector  $\vec{T}$  es tangente a la curva en cada punto:

En cuanto a las **direcciones y sentidos** de los vectores del triedro de Frenet, obsérvese que:

$$dr = \vec{T} ds \quad (\text{dirección de la tangente})$$

y su sentido es el que corresponde a valores crecientes del parámetro arco,  $s$ ;

- debido a su propia definición, el vector  $\vec{N}$  apunta en la dirección y sentido en los que tuerce la curva en cada punto (es decir, hacia donde gira su recta tangente):

$$d\vec{T} = \vec{N} ds$$

- la dirección y el sentido del vector  $\vec{B}$  se deducen directamente, aplicando su definición, de los de  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$ . Cabe señalar, no obstante, que la dirección de  $\vec{B}$  se mantiene constante a lo largo de una curva si, y sólo si, esta es plana.





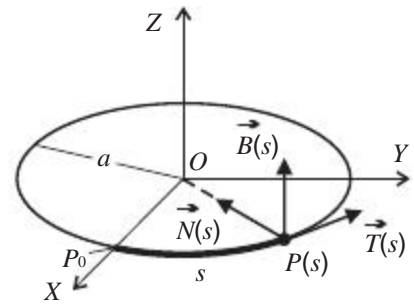
Ejemplo:

\* Para la circunferencia que venimos considerando, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= [a \cos(s/a), a \sin(s/a), 0] \\ \vec{r}'(s) &= [-\sin(s/a), \cos(s/a), 0] \\ \vec{r}''(s) &= [-\cos(s/a)/a, -\sin(s/a)/a, 0] \end{aligned}$$

calculándose el siguiente triedro de Frenet:

$$\begin{cases} \vec{T}(s) = [-\sin(s/a), \cos(s/a), 0] \\ \vec{N}(s) = [-\cos(s/a), -\sin(s/a), 0] \\ \vec{B}(s) = [0, 0, 1] \end{cases}$$



### 2.4. Curvatura y radio de curvatura.

Se define la **curvatura**,  $\kappa$ , de una curva,  $C$ , en un punto,  $P$ , como el módulo de la derivada de su vector tangente unitario respecto al parámetro arco:

$$\kappa = \frac{d\vec{T}}{ds} = |\vec{T}'| = |\vec{r}''|$$

Por tanto, si se conocen las ecuaciones paramétricas **cartesianas** de la curva, se puede calcular su curvatura mediante la expresión:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}{\left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right)^{3/2}}$$

El vector normal principal,  $\vec{N}$ , se puede redefinir entonces como:

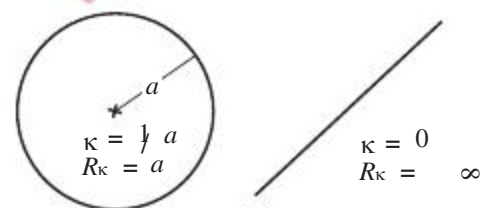
$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\kappa} \quad \vec{T}' = \kappa \vec{N} \quad (1^a \text{ ecuación de Frenet})$$

El **radio de curvatura**,  $R_\kappa$ , de una curva,  $C$ , en un punto,  $P$ , es la inversa de su curvatura en dicho punto:

$$R_\kappa = \frac{1}{\kappa}$$

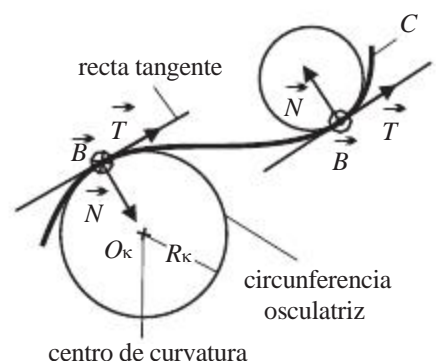
Ejemplos:

- \* En una circunferencia -de radio  $a$ -, la curvatura tiene valor constante ( $\kappa = 1/a$ ) y, por consiguiente, también es constante el radio de curvatura ( $R_\kappa = a$ ). Nótese, además, que su radio de curvatura coincide con su radio geométrico.
- \* En una recta, el vector  $\vec{T}$  es constante, y, por tanto, la curvatura es nula ( $\kappa = 0$ ) y el radio de curvatura es infinito ( $R_\kappa = \infty$ ). Obsérvese, además, que es imposible definir los vectores  $\vec{N}$  y  $\vec{B}$ .



Como **características** de  $\kappa$  y  $R_\kappa$ , cabe señalar que:

- son propiedades locales de una curva, es decir, sus valores varían en general de un punto a otro;
- son siempre mayores o iguales que cero (por definición);
- cuanto más “cerrada” es una curva en un punto, tanto mayor es su curvatura,  $\kappa$ , y tanto menor es su radio de curvatura,  $R_\kappa$ . De hecho,  $R_\kappa$  puede interpretarse como el radio de una circunferencia que aproxima, hasta la derivada de segundo orden, el comportamiento local de la curva (**circunferencia oscultriz**).



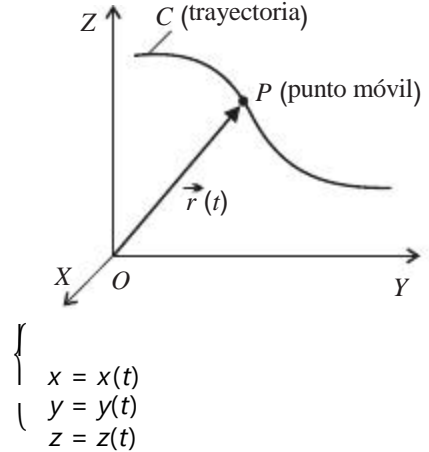
### 3. Cinemática del punto. Generalidades.-

El movimiento de un punto,  $P$ , con respecto a un sistema de ejes cartesianos,  $OXYZ$ , queda completamente determinado si se conoce su vector de posición en función del tiempo  $t$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{OP}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

Pero  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  es la ecuación vectorial de la curva (**trayectoria**) que describe el punto a lo largo de su movimiento, ya que el tiempo  $t$ , aparte de su evidente significado físico, es un parámetro de los infinitos posibles para describir una curva.

Las ecuaciones  $t$ -paramétricas de la trayectoria se denominan **ecuaciones horarias**:



Si la trayectoria viene descrita mediante otro parámetro que no sea el tiempo  $t$  (por ejemplo,  $\lambda$ ), se denomina **ley horaria** al cambio de parámetro  $\lambda = \lambda(t)$ , aunque dicha denominación se reserva por defecto para  $s = s(t)$ .

La **velocidad instantánea**,  $v$ , y la **aceleración instantánea**,  $a$ , del punto  $P$  se definen, respectivamente, como:

$$v = \frac{dr}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2(\ )}{dt^2} = \left( \dot{\ } \right), \frac{d^2(\ )}{dt^2} = \left( \ddot{\ } \right). \text{ Por ejemplo, en}$$

componentes cartesianas:  $\vec{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ ;  $\vec{a} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]$ .

### 4. Componentes intrínsecas de la velocidad y la aceleración.-

Se denominan **componentes intrínsecas** de la velocidad y la aceleración a sus respectivas componentes vectoriales en la base ortonormal que forman los vectores del triedro intrínseco:

$$\vec{v} = v_T \vec{T} + v_N \vec{N} + v_B \vec{B}$$

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N} + a_B \vec{B}$$

Las componentes intrínsecas de la velocidad se deducen a partir de la definición de velocidad instantánea, y utilizando la regla de la cadena de la derivación:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \vec{T} \qquad \begin{cases} v_T = \dot{s} \\ v_N = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

Se denomina **velocidad escalar**,  $v$ , al módulo del vector velocidad, que coincide con la componente tangencial  $v_T$  (si  $s \geq 0$ ), al ser ésta la única componente intrínseca no nula:

$$v = |\vec{v}| = v_T = \dot{s}$$

Se comprueba, por tanto, que la velocidad,  $v$ , de un punto en movimiento es siempre tangente a su trayectoria:

$$\vec{v} = v_T \vec{T}$$

Conocida la velocidad escalar en función del tiempo  $v(t)$ , se puede deducir la ley horaria mediante integración:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \implies ds = v(t) dt \implies s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración se deducen derivando respecto al tiempo la velocidad expresada en componentes intrínsecas (y usando la regla de la cadena de la derivación y la primera ecuación de Frenet):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (v_T \vec{T}) = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} + v_T \frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{v}_T \vec{T} + \frac{v^2}{R_\kappa} \vec{N} \implies \begin{cases} a_T = \dot{v} = \dot{\dot{s}} \text{ (tangencial)} \\ a_N = \frac{v^2}{R_\kappa} = \frac{\dot{s}^2}{R_\kappa} \text{ (normal)} \end{cases}$$



Se comprueba, por tanto, que la aceleración,  $a$ , de un punto en movimiento está siempre contenida en el **plano osculador** de la trayectoria (denominación que recibe el plano definido en cada punto por  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$ ):

$$a = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

Por último, es interesante comparar las componentes tangencial,  $a_T$ , y normal,  $a_N$ , de la aceleración en cuanto a la información que contienen, sus signos posibles y las circunstancias en que se anulan de forma permanente:

	$a_T$	$a_N$
información	variación temporal del módulo de $v$	variación temporal de la dirección de $v$
signo	positivo (movto. acelerado) o negativo (movto. retardado)	siempre positivo
nulidad permanente	en el movimiento uniforme	en el movimiento rectilíneo

### 5. Determinación cinemática de elementos geométricos de la trayectoria.-

Conocidos los vectores velocidad,  $v$ , y aceleración,  $a$ , de un punto, se pueden determinar directamente a partir de ellos sus componentes intrínsecas, así como algunos elementos geométricos de la trayectoria (radio de curvatura y triedro de Frenet):

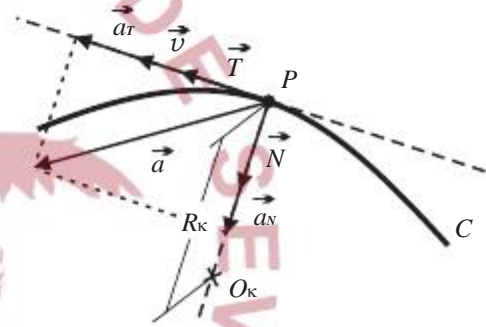
$$v_T = v = |v| \quad (\text{supuesto que } \dot{s} \geq 0)$$

$$a_T = \text{proy}_v [a] = \frac{v \cdot a}{v}$$

$$a_N = \text{proy}_{\perp v} [a] = \frac{|v \wedge a|}{v}$$

$$R_\kappa = \frac{v^2}{|v \wedge a|}$$

$$\vec{T} = \frac{v}{v} \quad \vec{N} = \frac{a - a_T \vec{T}}{|a - a_T \vec{T}|} \quad \vec{B} = \frac{v \wedge a}{|v \wedge a|}$$



### 6. Movimientos elementales.-

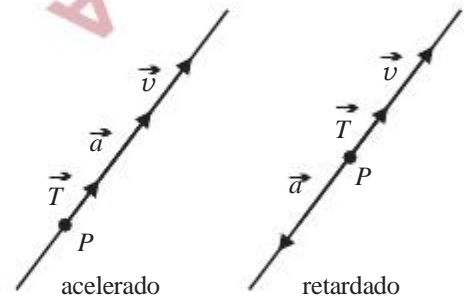
#### 6.1. Movimiento rectilíneo.

a) **Definición:** movimiento de un punto cuya trayectoria es una recta o segmento rectilíneo.

$$\vec{T} = \text{cte} \implies \kappa = 0 (\text{cte}) \implies R_\kappa = \infty$$

b) **Propiedades:**

$$a_N = 0 \implies a \parallel v$$



c) **Ley horaria:**

$$\text{general} \implies \boxed{s = s(t)} \implies v(t) = \dot{s}(t) \implies a_T(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

$$\text{m.r.u.} \implies a_T(t) = 0 \implies v(t) = v(\text{cte}) \implies \boxed{s(t) = s(0) + vt}$$

$$\text{m.r.u.a.} \implies a_T(t) = a (\text{cte} \neq 0) \implies v(t) = v(0) + at \implies \boxed{s(t) = s(0) + v(0)t + at^2/2}$$

Nota: Las siglas m.r.u. corresponden al *movimiento rectilíneo uniforme*; y las siglas m.r.u.a., al *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*.

**6.2. Movimiento circular.**

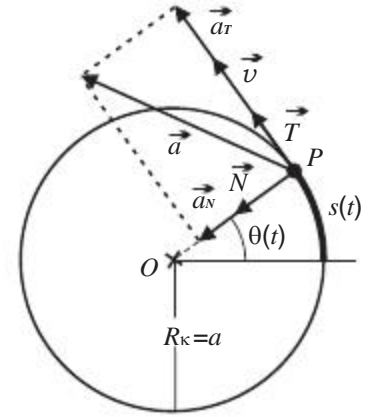
a) **Definición:** movimiento de un punto cuya trayectoria es una circunferencia -de radio  $a$ - o un arco de circunferencia.

curva plana con  $\kappa = 1/a$  (cte)  $\implies R_\kappa = a$  (cte)

b) **Ley horaria:**

general  $\implies$   $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dot{\theta} = \omega(t)} \implies \omega(t) = \dot{\theta}(t) \implies \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) \\ \boxed{s(t) = a\theta(t)} \implies v(t) = \dot{s}(t) = a\dot{\theta}(t) = a\omega(t) \implies \\ a_T(t) = \dot{v}(t) = \dot{s}''(t) = \dot{d}\theta(t) = a\dot{\omega}(t) = a\alpha(t), \\ a_N(t) = [v(t)]^2/a = a[\omega(t)]^2 \end{array} \right.$

m.c.u.  $\implies$   $\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = 0 \implies \omega(t) = \omega(\text{cte}) \implies \boxed{\theta(t) = \theta(0) + \omega t} \\ \boxed{s(t) = a[\theta(0) + \omega t]} \implies v(t) = a\omega(\text{cte}) \implies a_T(t) = 0, a_N(t) = v^2/a = a\omega^2(\text{cte}) \end{array} \right.$



Nota: Las siglas m.c.u. corresponden al movimiento circular uniforme.

c) **Periodicidad del caso uniforme:**

El movimiento de un punto  $P$  (respecto a un sistema de referencia de origen  $O$ ) es **periódico**, de período finito  $T$ , si su vector de posición  $r(t) = \vec{OP}(t)$  satisface la ecuación:

$$r(t + T) = r(t); \quad (\text{para } \forall t)$$

Se puede comprobar que el movimiento circular uniforme (m.c.u.) es periódico con:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{período}) \quad \implies \quad \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frecuencia natural})$$

d) **Descripción vectorial del movimiento circular:**

Definimos el **vector velocidad angular**,  $\omega$ , como un vector deslizante que tiene:

- módulo:  $|\omega| = |\dot{\theta}|$ ;
- recta soporte: el eje de giro;
- sentido: según la *regla del tornillo* (el sentido de avance de un tornillo que gire en el mismo sentido que  $P$ );

y definimos el **vector aceleración angular**,  $\alpha$ , como:

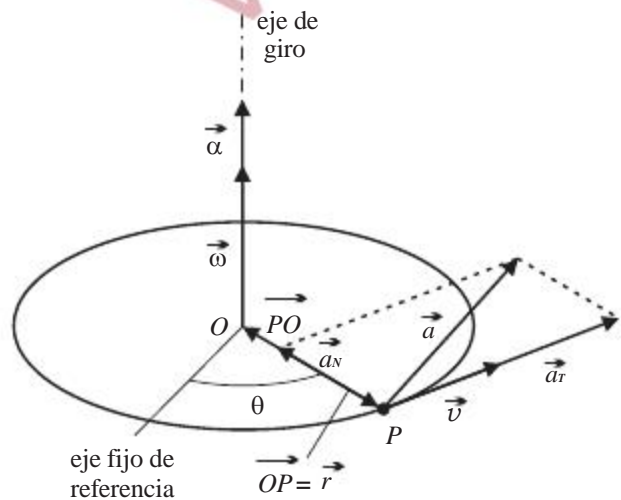
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{colineal con } \omega)$$

Se puede comprobar que:

$$v = \vec{PO} \wedge \omega = \omega \wedge \vec{OP} = \omega \wedge r$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \alpha \wedge r + \omega \wedge v = \alpha \wedge r + \omega \wedge (\omega \wedge r)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{a_T} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{a_N}$



**Nota:** El punto  $O$  en la figura es el centro de la circunferencia descrita por el punto  $P$ , pero en realidad la expresión  $v = \vec{PO} \wedge \omega$  se mantiene válida con tal de que el punto  $O$  pertenezca al eje de giro (precisamente por eso, se dice que  $\omega$  es un vector deslizante).



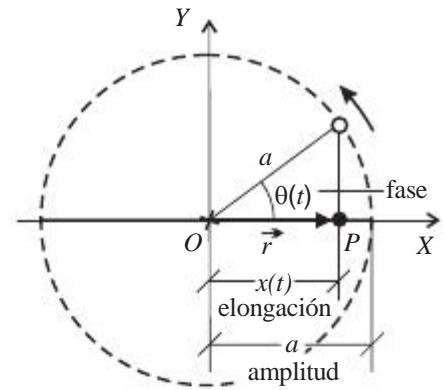
### 6.3. Movimiento armónico simple (m.a.s.).

a) **Definición:** movimiento rectilíneo y periódico que se obtiene al proyectar un movimiento circular uniforme (m.c.u.) sobre un diámetro cualquiera de la trayectoria.

b) **Ecuación horaria:**

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t, \text{ donde } \omega = \text{cte, y } \theta_0 = \theta(0)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\theta_0 + \omega t) & \Rightarrow & r(t) = x(t) \cdot i \\ \dot{x}(t) &= -a\omega \sin(\theta_0 + \omega t) & \Rightarrow & v(t) = \dot{x}(t) \cdot i \\ \ddot{x}(t) &= -a\omega^2 \cos(\theta_0 + \omega t) & \Rightarrow & a(t) = \ddot{x}(t) \cdot i \end{aligned}$$



c) **Terminología específica:**

- |                     |   |                               |
|---------------------|---|-------------------------------|
| $x(t)$ : elongación | $a$ : amplitud (máxima elongación)        | $\theta_0$ : fase inicial     |
| $\theta(t)$ : fase  | $\omega$ : frecuencia angular o pulsación | $T (= 2\pi/\omega)$ : período |

d) **Ecuación diferencial:**  $\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow x + \omega^2 x = 0$

### 6.4. Movimiento helicoidal uniforme (m.h.u.).

a) **Definiciones:**

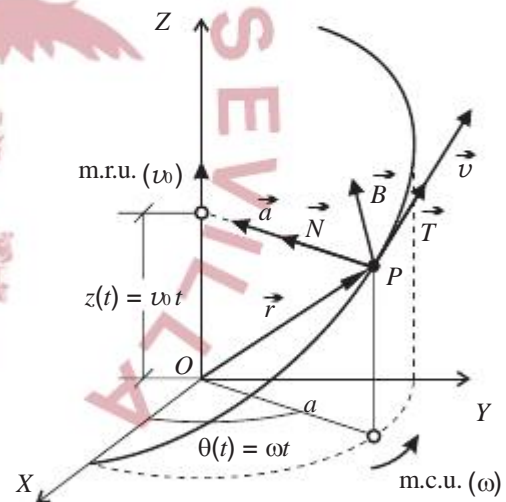
- movimiento de un punto que recorre una hélice con velocidad de módulo constante;
- movimiento que resulta de la superposición de un movimiento circular uniforme (m.c.u.) en un plano y de un movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.) a lo largo de una recta normal a dicho plano.

b) **Ecuaciones cartesianas horarias:**

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = a \sin(\omega t) \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$

c) **Caracterización:** se propone como ejercicio el cálculo de:

- geometría de la trayectoria  $\rightarrow s, T, N, B, \kappa, R\kappa$ ;
- cinemática del m.h.u.  $\rightarrow v, a, v, a_T, a_N$ .

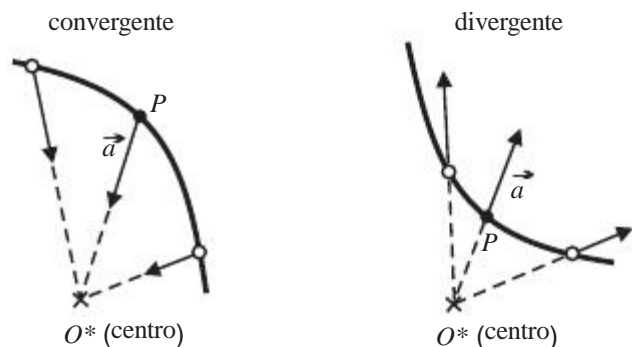


### 6.5. Movimiento central.

Se dice que el movimiento de un punto P es un **movimiento central** si existe un punto fijo O\* (**centro del movimiento**), tal que la recta soporte del vector aceleración, a, del punto P pasa en todo instante por dicho punto O\*.

Matemáticamente, si llamamos r\* al vector de posición relativa de P respecto a O\*, la **condición de movimiento central** viene dada por:

$$\vec{O^*P} = r^* \cdot \vec{a} \Rightarrow r^* \wedge a = 0$$



Es importante advertir que el centro del movimiento,  $O^*$ , no ha de coincidir necesariamente con el origen de coordenadas,  $O$ . Precisamente eso es lo que pretende subrayar el uso del asterisco en nuestra notación:

$$\vec{O^*P} = r^* = r = \vec{OP}$$

Sin embargo, con vistas a posteriores razonamientos, conviene observar que, al ser  $O^*$  un punto fijo, se verifica (cuando  $P$  se desplaza) que:

$$dr^* = dr \implies \frac{dr^*}{dt} = \frac{dr}{dt} = v$$

**6.5.1. Descripción del movimiento plano de un punto en coordenadas polares.**

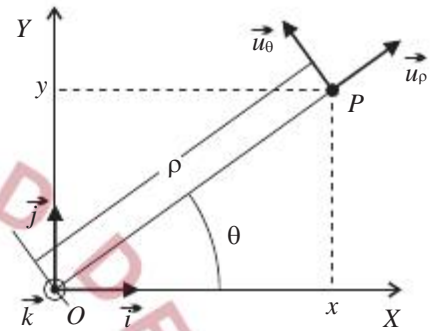
Dado el plano cartesiano  $OXY$ , se definen las coordenadas polares  $\rho$  (radial) y  $\theta$  (acimutal):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\chi \equiv \begin{cases} \rho \sin(\theta) \\ \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Asociada a las coordenadas polares, se define la siguiente base ortormal del plano:

$$\begin{aligned} u_\rho &= \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} & \rightarrow & \text{dirección radial} \\ u_\theta &= -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} & \rightarrow & \text{dirección acimutal} \end{aligned}$$



de cuya derivación temporal, se obtiene:

$$\frac{du_\rho}{dt} = \frac{du_\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} u_\theta \quad ; \quad \frac{du_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{d\theta} \dot{\theta} = -\dot{\theta} u_\rho$$

Por tanto, la cinemática de un punto móvil,  $P$ , que realiza un movimiento plano en  $OXY$  se describe (en coordenadas polares) mediante los siguientes vectores de posición,  $r$ , velocidad,  $v$ , y aceleración,  $a$ :

$$r = \vec{O^*P} = \rho u_\rho \implies v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho} u_\rho + \rho \dot{\theta} u_\theta \implies a = \ddot{\rho} u_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta} u_\theta + \rho \ddot{\theta} u_\theta - \rho \dot{\theta}^2 u_\rho$$

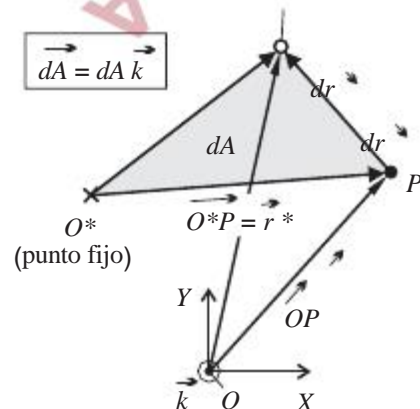
**6.5.2. Concepto de velocidad areolar.**

Sea  $P$  un punto móvil en el plano  $OXY$ , y sea  $O^*$  un punto fijo en dicho plano. El elemento de área barrido durante un intervalo infinitesimal de tiempo,  $dt$ , por el vector de posición relativa  $r^* = \vec{O^*P}$  viene dado por:

$$dA = \frac{1}{2} r^* \wedge dr = \frac{1}{2} r^* \wedge v dt$$

Notese la naturaleza vectorial del elemento de área definido: su dirección es la normal al plano (en la figura, dirección  $k$ ); y su sentido depende de la orientación del barrido.

Se denomina **velocidad areolar**,  $V_A$ , del punto  $P$  en su movimiento respecto al punto  $O^*$ , al área barrida por el vector de posición relativa  $r^* = \vec{O^*P}$  en la unidad de tiempo, con signo positivo si el sentido del barrido es antihorario, y con signo negativo en caso contrario.



Asignando a la velocidad areolar,  $V_A$ , la dirección normal al plano del movimiento, se obtiene el **vector velocidad areolar**,  $\vec{V}_A$ , cuya evaluación instantánea viene dada por la expresión:

$$\vec{V}_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^* \wedge v$$

En sentido inverso, se puede decir que la velocidad areolar,  $V_A$ , es el **módulo dotado de signo** del vector velocidad areolar,  $\vec{V}_A$ .



**6.5.3. Teorema fundamental del movimiento central.**

El movimiento de un punto  $P$  es un movimiento central (con centro en  $O^*$ ) si y sólo si es un movimiento plano (en un plano que contiene a  $O^*$ ) y con velocidad areolar constante (respecto a  $O^*$ ).

**Demostración:**

La derivada temporal del vector velocidad areolar,  $\vec{V}_A$ , del punto  $P$  en su movimiento respecto a  $O^*$ , resulta ser:

$$\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d}{dt} (r \wedge v) = \dot{r} \wedge v + r \wedge \dot{v} = \dot{r} \wedge v + r \wedge a = 0$$

Por tanto, teniendo presente la condición de movimiento central, se deduce de forma inmediata que:

$$\text{movimiento central} \iff r \wedge a = 2 \frac{d\vec{V}_A}{dt} \iff \vec{V}_A = \text{cte}$$

Pero el vector  $\vec{V}_A$  no es más que la velocidad areolar  $V_A$  dotada de la dirección del vector  $(r \wedge v)$ . En consecuencia, es obvio que el vector  $\vec{V}_A$  será constante si, y sólo si, son constantes la velocidad areolar  $V_A$  y la dirección del vector  $(r \wedge v)$ .

A su vez, es posible demostrar que la dirección del vector  $(r \wedge v)$  es constante si, y sólo si, el punto  $P$  se mueve en un plano que contiene a  $O^*$ . En efecto:

a) si el vector  $(r \wedge v)$  tiene dirección constante, entonces:

$$r \wedge v = 2\vec{V}_A = \vec{C} \text{ (cte)} \implies r \cdot (r \wedge v) = r \cdot \vec{C} = \boxed{O^*P \cdot \vec{C} = 0}$$

satisfaciendo el punto  $P$ , por tanto, la ecuación vectorial normal de un plano que pasa por  $O^*$  y es normal a  $\vec{C}$ ;

b) si el punto  $P$  se mueve en un plano que contiene a  $O^*$ , es evidente que tanto el vector de posición relativa,  $r$ , como el vector velocidad,  $v$ , están ambos contenidos en dicho plano, y que, por tanto, su producto vectorial, el vector  $(r \wedge v)$ , tendrá como dirección constante la normal al plano del movimiento.

En definitiva, la demostración del teorema fundamental del movimiento central ha quedado completa al comprobarse que:

$$\vec{V}_A = \text{cte} \iff V_A = \text{cte} \iff \text{dirección de } (r \wedge v) = \text{cte} \iff \text{movimiento plano}$$

**En coordenadas polares:**

Un ejercicio complementario interesante consiste en, supuesto que el movimiento de un punto  $P$  es plano, comprobar el teorema fundamental del movimiento central en coordenadas polares.

Eligiendo como polo  $O$  (origen de coordenadas polares) al punto  $O^*$  respecto al que se va a medir el vector velocidad areolar del punto móvil  $P$ , es decir, tomando  $r = r^*$ , se tiene:

$$\vec{V}_A = \frac{1}{r^2} (r \wedge v) = \frac{1}{r^2} (r \wedge (\dot{\rho}u_\rho + \rho\dot{\theta}u_\theta)) = \frac{1}{r^2} (\dot{\rho} \hat{k} + \rho \dot{\theta} \hat{k}) \implies V_A = \frac{\rho \dot{\theta}}{r^2}$$

y derivando la velocidad areolar,  $V_A$ , respecto al tiempo:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho \dot{\theta}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} (\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) - \frac{2\rho \dot{\theta}}{r^3} \dot{r} = \frac{\rho a_\theta}{r^2}$$

Por tanto, es obvio que:

$$V_A = \text{cte} \iff \frac{dV_A}{dt} = 0 \iff a_\theta = 0 \iff a \cdot u_\rho = r = r^* \text{ (movimiento central con centro en } O^*)$$

# VECTORES DESLIZANTES

## 1. Definición de vector deslizante. Momento.-

Un **vector deslizante** es un vector geométrico que queda caracterizado por su módulo, dirección, sentido y recta soporte; y que es invariante, por tanto, ante deslizamientos a lo largo de su recta soporte.

Simbólicamente, un vector deslizante se puede expresar como  $(a; \Delta)$ , donde  $a$  especifica el vector como si fuese libre, es decir, define su módulo, dirección y sentido; y  $\Delta$  representa la recta soporte a la que se encuentra sujeto el vector en su posible deslizamiento.

Para concretar la recta soporte  $\Delta$ , se puede expresar el vector deslizante como  $(a; P_1)$ , siendo  $P_1$  un punto cualquiera de  $\Delta$ . La ecuación vectorial de la recta soporte es entonces:

$$\Delta : \vec{OP} = \vec{OP}_1 + \lambda a \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

donde  $O$  es un punto arbitrario de referencia, y  $P$  es un punto genérico de  $\Delta$ .

El **momento de un vector deslizante**,  $(a; \Delta)$ , respecto a un punto,  $O$ , se define como:

$$\vec{M}_O(a; \Delta) = \vec{OP}_1 \wedge a \quad (\text{con } P_1 \in \Delta)$$

Señalaremos como **propiedades del momento**,  $M_O(a; \Delta)$ , que:

- a) es un vector ligado al punto  $O$ ;
- b) es perpendicular al plano  $\pi$  definido por la recta  $\Delta$  y el punto  $O$ ;
- c) su módulo es igual al producto del módulo del vector  $a$  por la distancia entre el punto  $O$  y la recta  $\Delta$ :

$$|\vec{M}_O(a; \Delta)| = |\vec{OP}_1 \wedge a| = |a| \text{proy}_{\perp a} [OP_1] = |a| d(O, \Delta);$$

- d) es independiente del punto de aplicación de  $a$  con tal de que dicho punto pertenezca a  $\Delta$ :

$$\vec{OP}_1 \wedge a = \vec{OP}_2 \wedge a = \dots = \vec{OP}_n \wedge a = 0$$

Obsérvese que, como consecuencia inmediata de la propiedad c), el momento de un vector deslizante no nulo respecto a cualquier punto de su propia recta soporte es nulo:

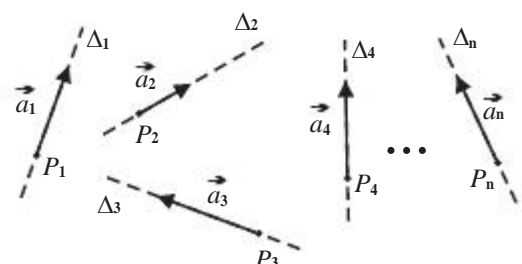
$$\text{si } a = 0 \rightarrow \vec{M}_O(a; \Delta) = 0 \iff O \in \Delta$$

## 2. Sistema de vectores deslizantes.-

Un **sistema de vectores deslizantes** (en adelante, s.v.d.) es un conjunto, finito o infinito, de vectores deslizantes.

De forma genérica, un s.v.d. de  $n$  vectores deslizantes se puede expresar como:

$$S \equiv \{(a_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$$



### 2.1. Resultante y momento resultante.

La **resultante**,  $R(S)$ , de un s.v.d.  $S$  es el vector libre que se obtiene de la suma geométrica de todos los vectores deslizantes del sistema como si fuesen libres:

$$R(S) = \sum_{i=1}^n a_i$$

El **momento resultante**,  $\vec{M}_O(S)$ , de un s.v.d.  $S$  respecto a un punto  $O$  (o en un punto  $O$ ) es el vector ligado a  $O$  que se obtiene de la suma geométrica de los momentos de cada uno de los vectores deslizantes del sistema respecto a dicho punto  $O$ :

$$\vec{M}_O(S) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(a_i; \Delta_i) = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge a_i \quad (\text{con } P_i \in \Delta_i)$$

Al conjunto  $\{R(S); \vec{M}_O(S)\}$ , se le llama **reducción** del s.v.d.  $S$  en el punto  $O$  (o sistema reducido en  $O$ ):

$$S_O^{\text{re}} \equiv \{R(S); \vec{M}_O(S)\}$$

y, por eso, al punto,  $O$ , respecto al que se calcula el momento resultante de un s.v.d., se le llama **centro de reducción**.

### 2.2. Campo de momentos: ecuación y propiedades.

Se denomina **campo de momentos** de un s.v.d.  $S$  a la aplicación que hace corresponder a cada punto del espacio ordinario,  $E_3$ , el momento resultante del sistema respecto a dicho punto:

$$f: P \in E_3 \rightarrow \vec{M}_P(S)$$

La **ecuación del campo de momentos** es aquella que permite relacionar entre sí a los momentos resultantes de un s.v.d. respecto a dos puntos distintos (cambio del centro de reducción). Dedúzcalas:

$$\vec{M}_P(S) = \sum_{i=1}^n P P_i \wedge a_i = \sum_{i=1}^n (PO + OP_i) \wedge a_i = \sum_{i=1}^n OP_i \wedge a_i + PO \wedge \sum_{i=1}^n a_i = \vec{M}_O(S) + PO \wedge R(S)$$

Abreviadamente, queda:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + PO \wedge R \quad \text{o bien} \quad \vec{M}_P = \vec{M}_O + R \wedge OP$$

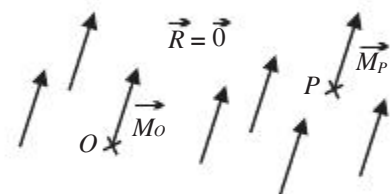
Algunas **propiedades del campo de momentos** de un s.v.d. son las siguientes:

a) El campo de momentos queda unívocamente determinado si se conocen:

- La resultante,  $R$ , y el momento resultante,  $\vec{M}_O$ , en un punto  $O$  cualquiera.
- Los momentos resultantes,  $\vec{M}_{O_1}$ ,  $\vec{M}_{O_2}$  y  $\vec{M}_{O_3}$ , en tres puntos no alineados cualesquiera,  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$ .

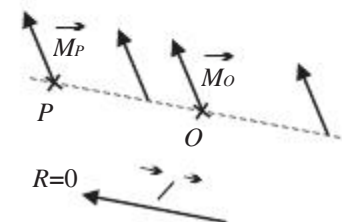
b) Si la resultante,  $R$ , es nula, entonces el campo de momentos es uniforme, es decir, toma idéntico valor en todos los puntos del espacio:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } R = 0 \text{ y} \\ \forall P, O \in E_3 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_O + R \wedge OP = \vec{M}_O = 0$$



c) Si la resultante,  $R$ , es distinta de cero, entonces los lugares geométricos definidos por los puntos de igual momento resultante son rectas paralelas a la resultante  $R$ :

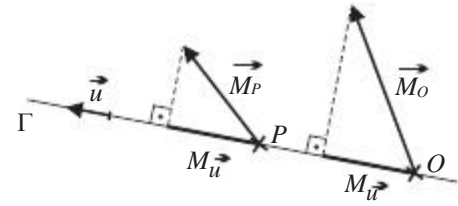
$$\left. \begin{array}{l} \text{si } R \neq 0 \\ \text{y } P = O \end{array} \right\} \rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_O + R \wedge OP$$



### 2.3. Momento axial.

El **momento axial resultante**,  $M_u(S)$ , de un s.v.d.  $S$  respecto a un eje  $\Gamma$  de direcci3n  $u$  es el escalar que resulta al proyectar sobre el eje  $\Gamma$  el momento resultante del s.v.d. respecto a cualquier punto de dicho eje:

$$M_u(S) = u \cdot \vec{M}_O(S) \quad (\text{con } |u| = 1; O \in \Gamma)$$



Para comprobar que esta definici3n es correcta, hemos de verificar que en efecto puede ser cualquiera el punto del eje  $\Gamma$  elegido para calcular y proyectar el momento resultante del s.v.d., ya que la elecci3n de dicho punto no afecta al valor del momento axial resultante:

$$\vec{OP} \dashrightarrow u \cdot \vec{M}_P = u \cdot (\vec{M}_O + R \wedge \vec{OP}) = u \cdot \vec{M}_O + u \cdot \underbrace{(R \wedge \vec{OP})}_{=0} = u \cdot \vec{M}_O$$

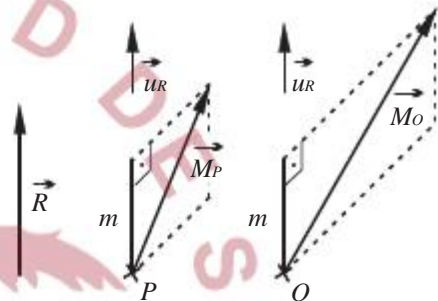
### 2.4. Invariantes.

Un **invariante** de un s.v.d. es cualquier magnitud, caracter3stica del mismo, que sea independiente del centro de reducci3n.

Aunque no son los unicos, hay dos invariantes fundamentales:

- a) La resultante,  $R$ , cuya invariancia es evidente a partir de su propia definici3n, ya que se trata de un vector libre.
- b) La proyecci3n,  $m$ , del momento resultante sobre la direcci3n de la resultante:

$$m = \frac{R \cdot \vec{M}_O}{|R|} = u_R \cdot \vec{M}_O = \text{proy}_R[\vec{M}_O]$$



cuya invariancia se demuestra a partir de la ecuaci3n del campo de momentos:

$$\forall P, O \in E_3 \dashrightarrow \frac{R \cdot \vec{M}_P}{|R|} = \frac{R \cdot (\vec{M}_O + R \wedge \vec{OP})}{|R|} = \frac{R \cdot \vec{M}_O}{|R|} + \frac{R \cdot (R \wedge \vec{OP})}{|R|} = \frac{R \cdot \vec{M}_O}{|R|} \quad (=0)$$

### 2.5. Eje central.

El **eje central**,  $\Delta_C$ , de un s.v.d. (de resultante no nula) es el lugar geom3trico de los puntos del espacio en los que el momento resultante del s.v.d. tiene m3dulo m3nimo. Es decir, llamando  $C$  a un punto gen3rico del eje central, se tiene:

$$\forall C \in \Delta_C \dashrightarrow \vec{M}_C = M^{\min}$$

Como consecuencia de la tercera propiedad del campo de momentos estudiada en el apartado 2.2 (propiedad c), el eje central ha de ser necesariamente una recta paralela a la resultante  $R$ .

Por otra parte, el momento resultante,  $\vec{M}_P$ , de un s.v.d. en un punto  $P$  arbitrario puede siempre descomponerse en la suma de dos componentes vectoriales: una, paralela a la resultante  $R$ ; y otra, perpendicular a dicha resultante:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_P^{\parallel R} + \vec{M}_P^{\perp R} = m u_R + \vec{M}_P^{\perp R}$$

donde se observa que la componente paralela a la resultante es invariante, ya que sabemos que tanto la proyecci3n  $m$ , como la direcci3n de la resultante  $u_R = R/|R|$ , son ambas invariantes de un s.v.d.

En consecuencia, el momento resultante de un s.v.d. tendr3a m3dulo m3nimo en aquellos puntos del espacio en los que sea m3nima su componente perpendicular a la resultante. Pero el valor m3nimo posible de una componente es cero. As3 que, antes que nada, procede preguntarse si existe una recta paralela a la resultante en cuyos puntos se anule la componente del momento resultante perpendicular a la resultante. Vamos a demostrar que en efecto existe dicha recta, la cual constituye obviamente el eje central,  $\Delta_C$ , del s.v.d.

$$\vec{M}_C \perp R = 0 \iff \text{proy}_{\perp R}[\vec{M}_C] = 0 \iff R \perp \vec{M}_C = 0 \implies R \perp [\vec{M}_O + R \perp \vec{OC}] = 0 \implies$$

$$R \perp \vec{M}_O + R \perp (R \perp \vec{OC}) = R \perp \vec{M}_O + (R \cdot \vec{OC}) R - |R|^2 \vec{OC} = 0 \implies \vec{OC} = \frac{R \perp \vec{M}_O}{|R|^2} + \frac{R \cdot \vec{M}_O}{|R|^2} \frac{R}{|R|}$$

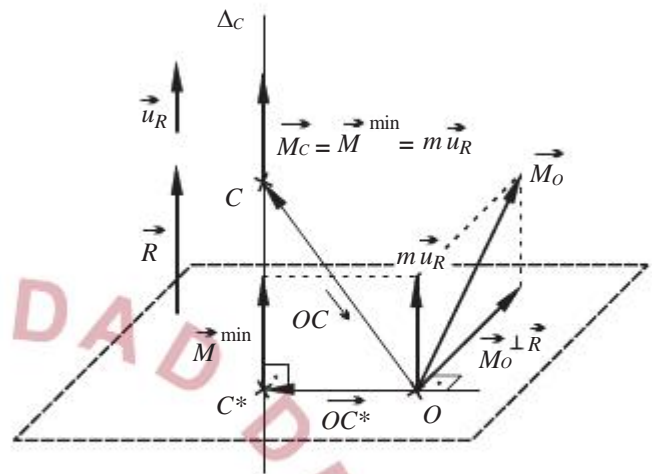
Teniendo en cuenta que C es un punto genérico de una recta, y que, por tanto, la expresión:

$$\frac{R \cdot \vec{OC}}{|R|^2} = \lambda$$

corresponde a un parámetro escalar variable, se obtienen las siguientes conclusiones:

- La **ecuación vectorial del eje central**  $\Delta_C$  viene dada por:

$$\forall C \in \Delta_C \implies \vec{OC} = \frac{R \perp \vec{M}_O}{|R|^2} + \lambda R$$



donde O es cualquier punto en el que se conozca el momento resultante,  $\vec{M}_O$ , del s.v.d.

- El valor paramétrico  $\lambda = 0$  corresponde al punto  $C^*$  que se obtiene de proyectar ortogonalmente el punto O sobre el eje central:

$$\left\{ \begin{array}{l} C^* \in \Delta_C \\ R \perp \vec{OC}^* \end{array} \right\} \implies R \cdot \vec{OC}^* = 0 \implies \lambda = 0 \implies \vec{OC}^* = \frac{R \perp \vec{M}_O}{|R|^2}$$

- En todos los puntos del eje central, el momento resultante del s.v.d., o bien es nulo (si el invariante  $m = 0$ ), o bien es paralelo a la resultante (si el invariante  $m \neq 0$ ), pudiendo expresarse en cualquier caso como:

$$\vec{M}_{C \in \Delta_C} = \vec{M}^{\min} = m \frac{R}{|R|}$$

Por último, cabe señalar que los s.v.d. de resultante nula no tienen eje central, ya que, tal como se indicó con anterioridad, su campo de momentos es uniforme.

### 3. Sistemas particulares.-

#### 3.1. Vector suelto.

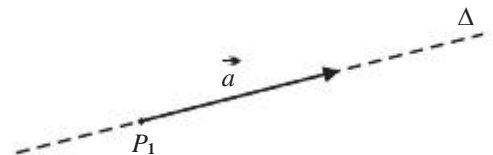
Es un s.v.d. que consta de un único vector:

$$S \equiv \{a; \Delta\}$$

Propiedades:

- $R = a$

$$m = \frac{a \cdot \vec{M}_O(a; \Delta)}{a \cdot (OP_1 \perp a)} = 0 \implies \vec{M}^{\min} = 0$$



- $\Delta_C \equiv \Delta$ , ya que el momento resultante es nulo (y, por tanto, tiene módulo mínimo) en cualquier punto de la recta soporte del vector deslizante.

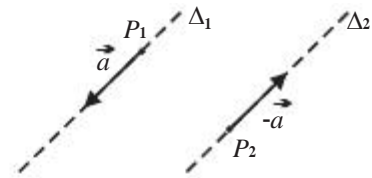




### 3.2. Par de vectores.

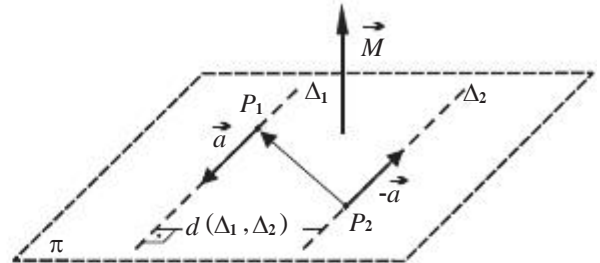
Es un s.v.d. que sólo consta de dos vectores de módulos iguales, rectas soportes paralelas y sentidos opuestos:

$$S \equiv \{a; \Delta_1, (-a; \Delta_2)\} \quad \text{con } \Delta_1 \parallel \Delta_2$$



**Propiedades:**

- $R = a + (-a) = 0$  (por tanto, campo de momentos uniforme e inexistencia de eje central).
- El momento resultante  $\vec{M}$  (independiente del centro de reducción  $O$  a consecuencia de la uniformidad del campo) es perpendicular al plano  $\pi$  definido por  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , tiene el sentido que resulta de aplicar la regla del tornillo al giro indicado por el par de vectores, y su módulo es igual al producto de  $|a|$  por el brazo del par (distancia entre las dos rectas soporte,  $d(\Delta_1, \Delta_2)$ ):



$$\vec{M} = \vec{M}_O = \vec{OP}_1 \wedge a + \vec{OP}_2 \wedge (-a) = (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2) \wedge a = \vec{P}_2\vec{P}_1 \wedge a$$

$$|\vec{M}| = |\vec{P}_2\vec{P}_1 \wedge a| = |a| \text{proy}_{\perp a} [\vec{P}_2\vec{P}_1] = |a| d(\Delta_1, \Delta_2)$$

### 3.3. Vectores concurrentes.

Es un s.v.d. tal que todas las rectas soporte tienen un punto  $A$  en común (punto de concurrencia):

$$S \equiv \{a_i; \Delta_i\}_{i=1}^n \quad \text{tal que } \exists A \in \Delta_i (\forall i)$$

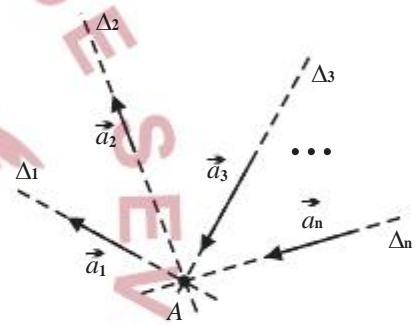
**Propiedades:**

- $\vec{M}_A = 0$
- $m = \frac{R \cdot \vec{M}_A}{|\vec{M}_A|} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\min} = 0$
- Si existe eje central  $\Delta_C$  (es decir, si  $R = 0$ ), entonces el punto de concurrencia,  $A$ , pertenece a dicho eje ( $A \in \Delta_C$ ). Por tanto, la ecuación vectorial del eje central  $\Delta_C$  admite, además de la expresión general, la siguiente expresión particular:

$$\forall C \in \Delta_C \rightarrow \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda R$$

- **Teorema de Varignon:** el momento resultante de un s.v.d. concurrentes respecto a un punto arbitrario  $O$  puede calcularse como el momento respecto a dicho punto  $O$  de la resultante,  $R$ , ubicada en el punto de concurrencia,  $A$ :

$$\forall O \in E_3 \rightarrow \vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge R = \vec{OA} \wedge R = 0$$



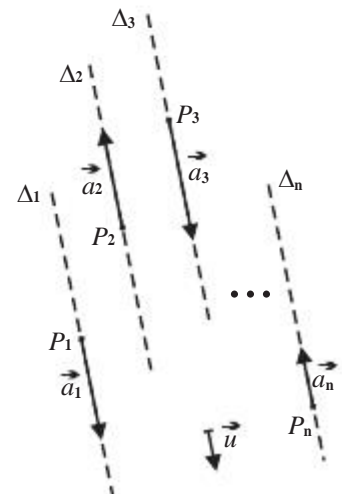
### 3.4. Vectores paralelos.

Es un s.v.d. tal que todas las rectas soporte son paralelas:

$$S \equiv \{a_i u; \Delta_i\}_{i=1}^n \quad \text{con } |u| = 1$$

**Propiedades:**

- $R = \sum_{i=1}^n a_i u = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) u = R u \Rightarrow R \perp u$  (si  $R = 0$ )
- $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge a_i u = \left( \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge a_i \right) u$
- si  $R = 0 \rightarrow m = \frac{R \cdot \vec{M}_O}{|\vec{M}_O|} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\min} = 0$



- Si existe eje central  $\Delta_C$  (es decir, si  $R = 0$ ), entonces seguro que dicho eje pasa por un punto  $G$ , llamado **centro** del s.v.d. paralelos, el cual es independiente de la dirección de  $u$  y tiene como vector de posición:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \vec{OP}_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Por tanto, la ecuación vectorial del eje central  $\Delta_C$  admite, además de la expresión general, la siguiente expresión particular:

$$\forall C \in \Delta_C \quad \vec{OC} = \vec{OG} + \lambda R$$

**Demostración:** si existe eje central ( $R = 0$ ), sabemos que  $M^{\min} = 0$ . Exijamos entonces la existencia de un punto  $G$  que pertenezca al eje central  $\Delta_C$  para  $\forall u$ :

$$\vec{M}_G = \sum_{i=1}^n a_i \vec{GP}_i \wedge u = 0 \quad (\forall u) \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \vec{GP}_i = \sum_{i=1}^n a_i (\vec{GO} + \vec{OP}_i) = 0 \Rightarrow \vec{OG} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i \vec{OP}_i$$

- **Teorema de Varignon:** el momento resultante de un s.v.d. paralelos (de resultante no nula) respecto a un punto arbitrario  $O$  puede calcularse como el momento respecto a dicho punto  $O$  de la resultante,  $R$ , ubicada en el centro,  $G$ :

$$\forall O \in E_3 \quad \vec{M}_O = \vec{M}_G + \vec{OG} \wedge R = \vec{OG} \wedge R = 0$$

#### 4. Equivalencia de sistemas de vectores deslizantes.-

Se dice que dos s.v.d.,  $S_a \equiv \{a_i; \Delta_i\}_{i=1}^n$  y  $S_b \equiv \{b_i; \Gamma_i\}_{i=1}^m$ , son **equivalentes** ( $S_a \sim S_b$ ) si verifican las dos siguientes condiciones:

- 1) tienen la misma resultante:

$$R(S_a) = R(S_b)$$

- 2) generan idénticos campos de momentos:

$$\vec{M}_P(S_a) = \vec{M}_P(S_b) \quad (\forall P \in E_3)$$

Nota: En realidad, la definición de equivalencia entre dos s.v.d. se puede reducir a la segunda condición en solitario, ya que el cumplimiento de ésta implica necesariamente el cumplimiento de la primera.

##### Teorema de equivalencia:

Es condición necesaria y suficiente de equivalencia entre dos s.v.d. que tengan igual resultante e igual momento resultante en un punto  $O$  (elegido arbitrariamente).

##### Demostración:

- Condición necesaria:

$$\vec{M}_P(S_a) = \vec{M}_P(S_b) \quad (\forall P \in E_3) \Rightarrow \vec{M}_O(S_a) = \vec{M}_O(S_b)$$

- Condición suficiente:

$$\forall P \in E_3 \quad \vec{M}_P(S_a) = \vec{M}_O(S_a) + \vec{PO} \wedge R(S_a) = \vec{M}_O(S_b) + \vec{PO} \wedge R(S_b) = \vec{M}_P(S_b)$$



### 5. Reducción de sistemas de vectores deslizantes.-

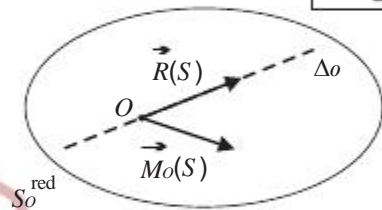
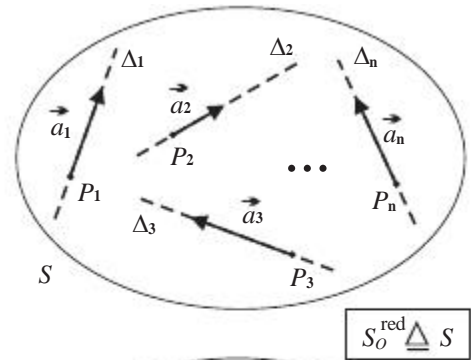
**Reducir** un s.v.d.,  $S$ , en un punto,  $O$  (centro de reducción), es hallar otro s.v.d.,  $S_O^{red}$  (sistema reducido en  $O$  o reducción en  $O$ ), el cual, estando constituido solamente por un vector suelto y/o un par de vectores, es equivalente al sistema original  $S$ .

Por otra parte, en el apartado 2.1 de este mismo tema, ya se definió como sistema reducido en  $O$  de un s.v.d.  $S$  al conjunto:

$$S_O^{red} \equiv \{R(S); \vec{M}_O(S)\}$$

¿Cuáles son entonces el vector suelto y/o el par de vectores que constituyen  $S_O^{red}$ , y que vienen simbolizados o representados por el conjunto de resultante,  $R(S)$ , y momento resultante,  $\vec{M}_O(S)$ ?

- El **vector suelto** es la propia resultante del s.v.d.  $S$  con una recta soporte,  $\Delta_O$ , que pasa por el punto  $O$ . Es decir, se trata del vector deslizante ( $R(S); \Delta_O$ ).
- El **par de vectores** es cualquiera de los infinitos pares existentes cuyo campo de momentos (uniforme) es igual a  $\vec{M}_O(S)$ .



Mediante el teorema de equivalencia, se confirma que el sistema reducido en  $O$  y el sistema original son equivalentes ( $S_O^{red} \equiv S$ ). En efecto:

- a) La resultante de un vector suelto es el propio vector, mientras que un par de vectores tiene resultante nula. Por tanto:

$$R(S_O^{red}) = R(S)$$

- b) Un vector suelto tiene momento nulo respecto a los puntos de su recta soporte, mientras que un par de vectores tiene campo de momentos uniforme. Por tanto:

$$\vec{M}_O(S_O^{red}) = \vec{M}_O(S)$$

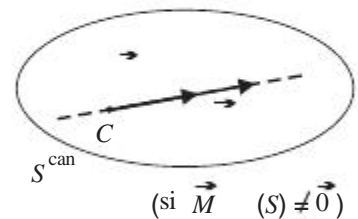
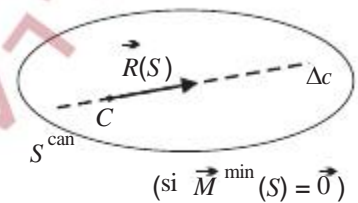
Es evidente que un s.v.d. de resultante nula tendría el mismo sistema reducido en todos los puntos del espacio: el constituido exclusivamente por un par de vectores cuyo campo de momentos (uniforme) coincide con el campo de momentos del s.v.d. original, o bien, un sistema nulo (si el campo de momentos también es nulo).

Sin embargo, un s.v.d. de resultante no nula tendría un sistema reducido distinto en cada recta de puntos paralela a la resultante. Pues bien, se denomina **reducción canónica**,  $S^{can}$ , de un s.v.d.  $S$  de resultante no nula a su sistema reducido en cualquier punto del eje central  $\Delta_C$ :

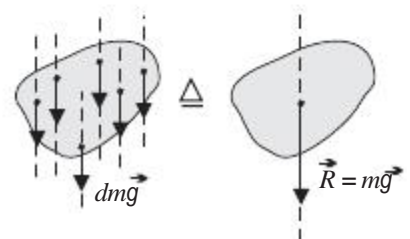
$$S^{can} = S_C^{reduced} \equiv \{R(S); \vec{M}_C(S)\}_{C \in \Delta_C} = \{R(S); \vec{M}^{min}(S)\}$$

Dependiendo de que el momento resultante de módulo mínimo,  $\vec{M}^{min}(S)$ , sea igual a cero o distinto de cero, pueden darse dos tipos de reducción canónica:

- Si  $\vec{M}^{min}(S) = 0$ ,  $S^{can}$  sólo consta de un vector suelto: la resultante deslizando por el eje central, es decir, el vector deslizante ( $R(S); \Delta_C$ ).
- Si  $\vec{M}^{min}(S) \neq 0$ ,  $S^{can}$  consta de la resultante deslizando por el eje central (vector suelto) y de un par de vectores de momento paralelo al eje central. A este sistema, se le denomina **torsor**.

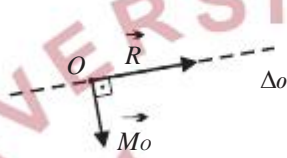
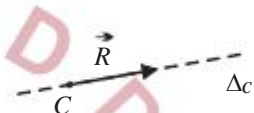
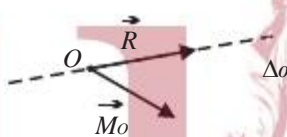
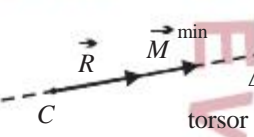


**Aplicación:** La práctica habitual -en problemas de mecánica- de ubicar el peso total de un sólido rígido en el centro de gravedad del mismo es una aplicación de lo que acabamos de ver. Bajo ciertas aproximaciones, el peso de un sólido constituye un s.v.d. paralelos de resultante no nula ( $\vec{M}^{min} = 0$ ). Por ello, la reducción canónica de dicho s.v.d. consta únicamente del peso total del sólido (resultante) deslizando por el eje central. Y se sabe además que el eje central pasa por el centro de gravedad, ya que éste es precisamente el centro del s.v.d. paralelos.



### 6. Clasificación de los sistemas de vectores deslizantes.-

La nulidad o no nulidad de  $R$  y  $M^{\min}$  permite clasificar a todos los s.v.d. en sólo cuatro categorías, cada una de las cuales tendrá una estructura característica en su campo de momentos y corresponderá, en el tema de *Cinemática del sólido*, a un estado cinemático específico:

	$\vec{M}$	Reducción en un punto $O$ (arbitrario)	Reducción canónica
$= 0$	$= 0$	sistema nulo $O$	—
$= 0$	$\neq 0$	un par de vectores $O \begin{matrix} \vec{M}_O \\ \vec{M}_O \end{matrix}$	—
$\neq 0$	$\neq 0$	un vector suelto $(R; \Delta_O)$ y un par de vectores de momento $\vec{M}_O \perp R$ 	un vector suelto $(R; \Delta_C)$ 
$\neq 0$	$\neq 0$	un vector suelto $(R; \Delta_O)$ y un par de vectores de momento $\vec{M}_O$ 	un vector suelto $(R; \Delta_C)$ y un par de vectores de momento $M^{\min} R$ torsor 

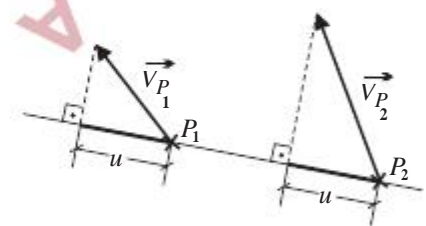
### 7. Equiproyectividad.-

Un campo vectorial,  $\vec{V}_P$ , es **equiproyectivo** si satisface la condición matemática:

$$\vec{V}_{P_1} \cdot \vec{P_1P_2} = \vec{V}_{P_2} \cdot \vec{P_1P_2} \quad (\forall P_1, P_2 \in E_3)$$

o, lo que es equivalente:

$$\text{proy}_{\vec{P_1P_2}} [\vec{V}_{P_1}] = u = \text{proy}_{\vec{P_1P_2}} [\vec{V}_{P_2}] \quad (\forall P_1, P_2 \in E_3)$$



**Teorema de equiproyectividad:** Un campo vectorial es equiproyectivo si y sólo si es el campo de momentos de un s.v.d.

**Demostración:**

a) Campo de momentos  $\Rightarrow$  Campo equiproyectivo:

$$\vec{M}_{P_1} = \vec{M}_{P_2} + \vec{P_1P_2} \wedge R \Rightarrow \vec{M}_{P_1} \cdot \vec{P_1P_2} = \vec{M}_{P_2} \cdot \vec{P_1P_2} + (\vec{P_1P_2} \wedge R) \cdot \vec{P_1P_2} \Rightarrow \vec{M}_{P_1} \cdot \vec{P_1P_2} = \vec{M}_{P_2} \cdot \vec{P_1P_2} \quad (\forall P_1, P_2 \in E_3)$$

b) Campo equiproyectivo  $\Rightarrow$  Campo de momentos: (demostración no rigurosa)

$$\vec{V}_{P_1} \cdot \vec{P_1P_2} = \vec{V}_{P_2} \cdot \vec{P_1P_2} \quad (\forall P_1, P_2 \in E_3) \Rightarrow \vec{V}_{P_1} = \vec{V}_{P_2} + D \Rightarrow \vec{V}_{P_1} = \vec{V}_{P_2} + P_1P_2 \wedge \Omega, \text{ que es la ecuación del campo de momentos de un s.v.d. de resultante } \Omega.$$

# CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

## 1. Definición de sólido rígido: condición geométrica de rigidez.-

El **sólido rígido** es un modelo matemático consistente en un sistema de puntos materiales que satisface la condición de que la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos permanece constante en el transcurso del movimiento.

Por tanto, la **condición geométrica de rigidez** se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \forall t \quad \rightarrow \quad |\vec{QP}(t)|^2 = |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)|^2 = (C_{PQ})^2 \quad (\text{cte})$$

El **número, r, de grados de libertad** de un sistema de puntos materiales es el número de parámetros independientes que son necesarios para definir su posición.

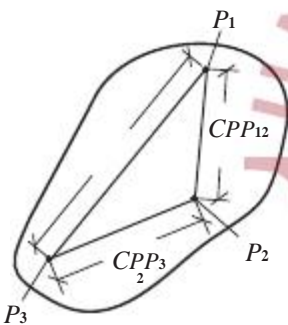
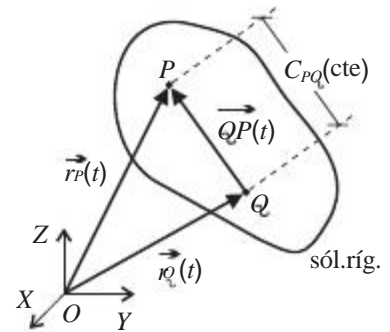
La posición de un sólido rígido (respecto a un sistema de referencia OXYZ) queda unívocamente definida cuando se fijan las coordenadas de tres de sus puntos que no estén alineados:

$$P_1(x_1, y_1, z_1); \quad P_2(x_2, y_2, z_2); \quad P_3(x_3, y_3, z_3)$$

lo cual representa un total de nueve parámetros. Sin embargo, sólo seis de ellos pueden ser independientes, ya que la condición geométrica de rigidez exige que se satisfagan las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\vec{P_2P_1}|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (C_{P_1P_2})^2 \\ |\vec{P_3P_1}|^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = (C_{P_1P_3})^2 \\ |\vec{P_3P_2}|^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = (C_{P_2P_3})^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, se puede afirmar que un sólido rígido **libre** (aquél que no se halla sometido a ninguna limitación de movimiento que no derive de su propia rigidez) posee seis grados de libertad ( $r = 6$ ).



## 2. Condición cinemática de rigidez: equiproyectividad del campo de velocidades.-

Partiendo de la condición geométrica de rigidez en su expresión:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \forall t \quad \rightarrow \quad [\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)] \cdot [\vec{r}_P(t) - \vec{r}_Q(t)] = (C_{PQ})^2 \quad (\text{cte})$$

y derivando respecto al tiempo, se obtiene la siguiente **condición cinemática de rigidez**:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \forall t \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P(t) \cdot \vec{QP}(t) = \vec{v}_Q(t) \cdot \vec{QP}(t)$$

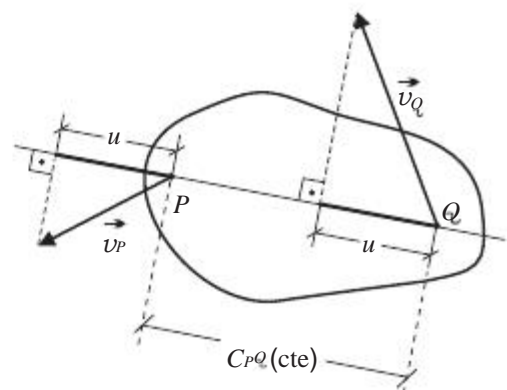
Obsérvese que, conforme a la definición de equiproyectividad de un campo vectorial, la condición cinemática de rigidez admite el siguiente enunciado: *el campo de velocidades de un sólido rígido es equiproyectivo.*

En efecto, basta pensar en el concepto de velocidad para comprender que si las velocidades de dos puntos de un sólido tuviesen proyecciones distintas a lo largo de la recta imaginaria que pasa por los mismos, la distancia relativa entre ambos puntos no permanecería constante a lo largo del tiempo y, por tanto, el sólido no sería rígido.

Entonces, de acuerdo con el teorema de equiproyectividad, el campo de velocidades de un sólido rígido ha de ser necesariamente el campo de momentos de cierto sistema de vectores deslizantes (aún desconocido), y, en consecuencia, la **ecuación del campo de velocidades** debe ser:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_R \wedge \vec{QP}$$

donde  $\vec{\omega}_R$  es la resultante del citado sistema de vectores deslizantes.



### 3. Movimiento de rotación.-

#### 3.1. Rotación de eje permanente.

Un sólido rígido experimenta una **rotación de eje permanente** si, estando el sólido en movimiento, al menos dos de sus puntos,  $I_1$  e  $I_2$ , se mantienen permanentemente en reposo:

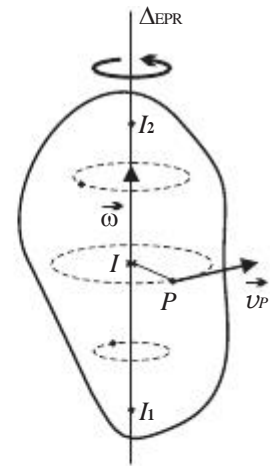
$$\forall t \quad \rightarrow \quad v_{I_1}(t) = v_{I_2}(t) = 0$$

Como resultado de la condición geométrica de rigidez, una rotación de eje permanente presenta las siguientes **propiedades**:

- a) Todos los puntos del sólido rígido colineales con  $I_1$  e  $I_2$  también permanecen fijos, constituyendo el que se conoce como **eje permanente de rotación**,  $\Delta_{EPR}$ :

$$\forall I \in \Delta_{EPR} \quad \rightarrow \quad v_I = 0$$

- b) Todos los puntos del sólido rígido externos al  $\Delta_{EPR}$  realizan movimientos circulares de idéntica velocidad angular,  $\omega$ . Sus trayectorias (circunferencias) difieren en el radio, pero todas están contenidas en planos perpendiculares al  $\Delta_{EPR}$  y tienen sus centros en el  $\Delta_{EPR}$ .



Estas propiedades del movimiento de rotación de eje permanente, unidas a la descripción vectorial del movimiento circular (apartado 6.2.d del tema *Cinemática del punto*), permiten expresar la velocidad de un punto genérico,  $P$ , del sólido rígido en rotación de eje permanente como:

$$\vec{v}_P = \vec{P} \wedge \omega \quad (\text{con } I \in \Delta_{EPR})$$

Pero entonces, de acuerdo con el concepto de momento de un vector deslizante respecto a un punto (apartado 1 del tema *Vectores deslizantes*), se puede escribir:

$$\forall P \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{M}_P(\omega; \Delta_{EPR})$$

Se concluye, pues, que el campo de velocidades de un sólido rígido sometido a una rotación de eje permanente es el campo de momentos de un s.v.d.,  $S$ , constituido por un vector suelto: el vector velocidad angular (o vector rotación) deslizando por el  $\Delta_{EPR}$ :

$$S \equiv \{(\omega; \Delta_{EPR})\}$$

#### 3.2. Rotación instantánea.

Un sólido rígido experimenta un movimiento de **rotación instantánea** en un instante dado ( $t = t_0$ ) si, estando el sólido en movimiento, las velocidades de al menos dos de sus puntos,  $I_1$  e  $I_2$ , son instantáneamente nulas:

$$v_{I_1}(t_0) = v_{I_2}(t_0) = 0$$

A la recta que pasa por  $I_1$  e  $I_2$ , cuyos puntos tendrán todos también velocidad instantánea nula, se le llama **eje instantáneo de rotación**,  $\Delta_{EIR}$ .

En el instante  $t = t_0$ , el campo de velocidades de una rotación instantánea es indistinguible del campo de velocidades de una rotación de eje permanente, ya que la observación de un único instante no permite discernir entre el carácter instantáneo o permanente del eje de rotación. Por tanto, en una rotación instantánea, se puede escribir:

$$\forall P \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P(t_0) = \vec{M}_P[\omega(t_0); \Delta_{EIR}(t_0)]$$

Sin embargo, la diferencia esencial entre una rotación de eje permanente y una rotación instantánea se pone de manifiesto en que, en esta última, el movimiento del sólido rígido después de  $t = t_0$  cambiará a su eje de rotación o incluso tal vez deje de ser una rotación. Por tanto, las trayectorias de los puntos del sólido ya no van a ser circunferencias, y es por eso que parece más adecuado denominar **vector rotación instantánea** al vector deslizante  $(\omega; \Delta_{EIR})$ , en lugar de seguir llamándole vector velocidad angular.

Se concluye, pues, que el campo de velocidades de un sólido rígido sometido a una rotación instantánea es el campo de momentos de un s.v.d. constituido por un vector suelto: el vector rotación instantánea deslizando por el  $\Delta_{EIR}$  (vector que, aunque dimensionalmente es una velocidad angular, carece de dicho significado cinemático):

$$S \equiv \{(\omega; \Delta_{EIR})\}$$



Nótese que hemos dado un importante paso, desde el punto de vista conceptual, al haber sido capaces de averiguar qué tipo de vectores deslizantes generan, como campo de momentos, el campo de velocidades instantáneas de un sólido rígido. A pesar de que el movimiento hasta ahora analizado es particular (rotación instantánea), y a pesar de que el s.v.d. también es por consiguiente particular (formado por un vector suelto), hay un aspecto del resultado obtenido que posee carácter general: el campo de velocidades instantáneas de un sólido rígido se puede obtener siempre como campo de momentos de un s.v.d. constituido por vectores rotación instantánea.

### 4. Movimiento de traslación.-

#### 4.1. Traslación instantánea.

Un sólido rígido experimenta un movimiento de **traslación instantánea** si, en un instante dado ( $t = t_0$ ), su campo de velocidades es uniforme y no nulo:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \rightarrow v_P(t_0) = v_Q(t_0) = v^{\text{tras}}(t_0) \neq 0$$

Si se trata de identificar el campo de velocidades del sólido rígido con el campo de momentos de un s.v.d. constituido por vectores rotación instantánea, resulta evidente -a la vista del apartado 3.2 del tema *Vectores deslizantes*- que la posibilidad más sencilla para generar el campo de velocidades de un sólido rígido sometido a una traslación instantánea es tomar un s.v.d. formado por un par de vectores rotación instantánea cuyo momento coincida con  $v^{\text{tras}}$ :

$$S \equiv \{(\omega; \Delta_1), (-\omega; \Delta_2)\} \quad (\text{con } \Delta_1 \perp \Delta_2 \text{ y } \vec{M} = v^{\text{tras}})$$

#### 4.2. Traslación permanente.

Un sólido rígido experimenta un movimiento de **traslación permanente** si su campo de velocidades es uniforme y no nulo para todo instante de tiempo:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \text{ y } \forall t \rightarrow v_P(t) = v_Q(t) = v^{\text{tras}}(t) \neq 0$$

Una traslación permanente presenta las siguientes **propiedades**:

- a) La recta que pasa por dos puntos cualesquiera,  $P$  y  $Q$ , del sólido rígido se conserva paralela a sí misma en el transcurso del movimiento (esta propiedad puede utilizarse también como definición).

$$\frac{d\vec{QP}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q = 0 \rightarrow \vec{QP} = \text{cte} \left\{ \begin{array}{l} |\vec{QP}| = \text{cte (rigidez)} \\ \text{dirección y sentido de } \vec{QP} = \text{ctes (traslación)} \end{array} \right.$$

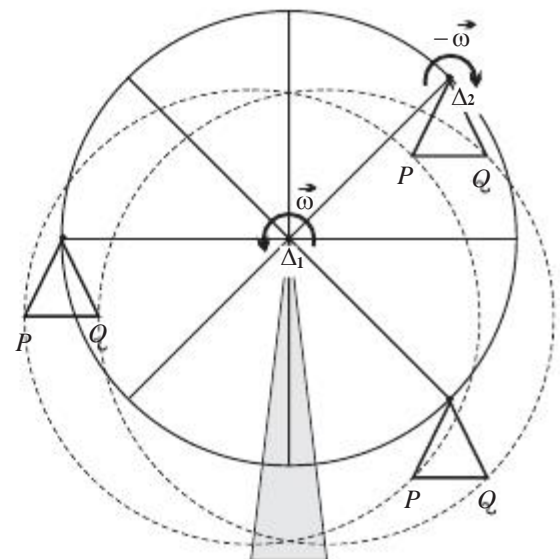
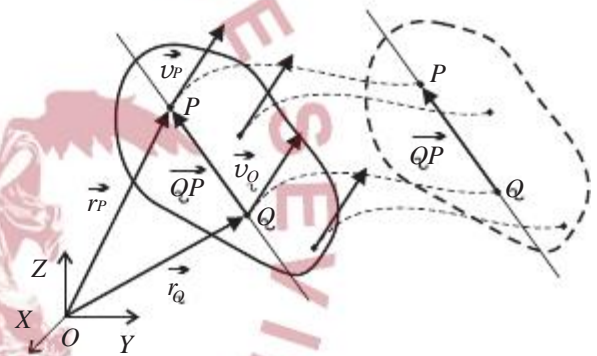
- b) Las trayectorias de todos los puntos del sólido rígido son **congruentes**.

Ejemplo:

\* En una noria de feria, la canastilla en la que se sientan los usuarios realiza un movimiento de traslación permanente. Se comprueba efectivamente que:

- la recta  $PQ$  (suelo de la canastilla) se conserva paralela a sí misma (horizontal) a lo largo del movimiento;
- las trayectorias de todos los puntos de la canastilla son congruentes (circunferencias de idéntico radio);
- la traslación de la canastilla se genera por la superposición de un par de rotaciones de ejes paralelos, velocidades angulares iguales y sentidos opuestos (la rotación de la noria alrededor de su eje motor y la rotación de la canastilla alrededor de su eje de suspensión):

$$S \equiv \{(\omega; \Delta_1), (-\omega; \Delta_2)\} \quad \text{con } \Delta_1 \parallel \Delta_2$$



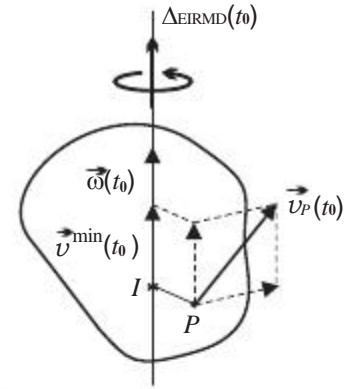
### 5. Movimiento helicoidal tangente.-

El **movimiento helicoidal tangente** (o helicoidal instantáneo) de un sólido rígido, en un instante dado ( $t = t_0$ ), consiste en la superposición de:

- a) una rotación instantánea, de vector rotación  $\omega(t_0)$ , alrededor de un eje denominado **eje instantáneo de rotación y mínimo deslizamiento**,  $\Delta_{EIRMD}(t_0)$ ; y
- b) una traslación instantánea, cuya velocidad es paralela al citado eje y se denomina **velocidad de mínimo deslizamiento**,  $v^{\min}(t_0)$ .

Sumando los resultados previamente obtenidos por separado para los movimientos instantáneos de rotación y traslación, se deduce que el s.v.d. más sencillo que permite generar, como campo de momentos, el campo de velocidades del sólido rígido sometido a un movimiento helicoidal tangente es el formado por el vector suelto  $(\omega(t_0); \Delta_{EIRMD}(t_0))$  y por cualquier par de vectores rotación instantánea de campo de momentos (uniforme) igual a  $v^{\min}(t_0) \Delta_{EIRMD}(t_0)$ . A este sistema, se le denomina **torsor cinemático**  $\{\omega(t_0); v^{\min}(t_0)\}$ .

La denominación de este movimiento como helicoidal responde a que si, en lugar de ser instantáneo, fuese permanente, es decir, si fuese superposición de una rotación de eje permanente y una traslación permanente paralela a dicho eje (movimiento de un tornillo), entonces las trayectorias de todos los puntos del sólido (excepto los pertenecientes al citado eje) serían hélices análogas a la del apartado 6.4 del tema *Cinemática del punto*.



### 6. Descripción del movimiento instantáneo de un sólido rígido: clasificación.-

Al tratar de describir el movimiento instantáneo de un sólido rígido, hemos comprobado que la equiproyectividad del campo de velocidades nos permite identificar a dicho campo como el campo de momentos de ciertos s.v.d. constituidos por vectores rotación instantánea. Hasta aquí, dicha identificación se ha llevado a cabo específicamente para los movimientos de rotación instantánea, traslación instantánea y helicoidal tangente. En el presente apartado, se pretende generalizar el estudio descriptivo.

Sin embargo, antes de continuar, es conveniente establecer la siguiente **tabla de analogías** entre conceptos de los temas *Vectores deslizantes* y *Cinemática del sólido*:

Vectores deslizantes	Cinemática del sólido
$\{(a_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$	$\{(\omega_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$ (vectores rotación instantánea)
$R = \sum_{i=1}^n a_i$	$\omega_R = \sum_{i=1}^n \omega_i$ (vector rotación total)
$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n P P_i \wedge a_i$ (con $P_i \in \Delta_i$ )	$v_P = \sum_{i=1}^n P P_i \wedge \omega_i$ (con $P_i \in \Delta_i$ )
$\vec{M}^{\min} = \frac{R \cdot \vec{M}_O}{R}$	$v^{\min} = \frac{\omega_R \cdot v_O}{\omega_R}$
$\Delta_C : \vec{OC} = \frac{R \wedge \vec{M}_O}{R}$	$\Delta_{EIRMD} \text{ o } \Delta_{EIR} : OI = \frac{ \omega_R ^2 + \lambda \omega_R}{\omega_R \wedge v_O}$
$\vec{M}_P = \vec{M}_O + R \wedge OP$	$v_P = v_O + \omega_R \wedge OP$
un vector deslizante suelto	una rotación instantánea
un par de vectores deslizantes	una traslación instantánea
un torsor	un movimiento helicoidal tangente

en la que subrayaremos el hecho de que el eje central (apartado 2.5 del tema *Vectores deslizantes*) del sistema de vectores rotación instantánea viene dado por  $\Delta_{EIR}$  y  $\Delta_{EIRMD}$  en los movimientos de rotación instantánea y helicoidal tangente, respectivamente, ya que:


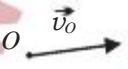
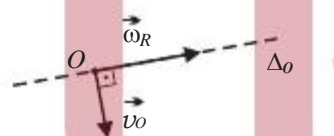
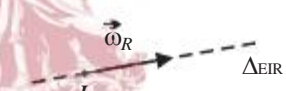
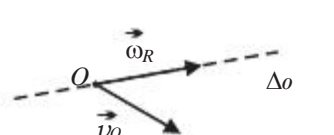
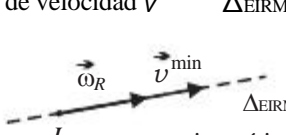
$$v \in \Delta_{EIR} = 0 \quad y \quad v \in \Delta_{EIRMD} = v^{\min} \omega_R$$

Retomando ahora nuestro objetivo de generalizar el estudio descriptivo del estado cinemático instantáneo de un sólido rígido, el primer paso consiste en admitir que, más allá de los casos particulares ya considerados (un vector suelto, un par de vectores, o la superposición de un vector suelto y un par), cualquier s.v.d. constituido por  $n$  rotaciones instantáneas:

$$S \equiv \{(\omega_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$$

puede servir para describir el movimiento instantáneo de un sólido rígido con tal de que el campo de momentos de  $S$  coincida con el campo de velocidades del sólido. Satisfecha esta condición, el s.v.d.  $S$  constituirá una descripción del movimiento como superposición de  $n$  rotaciones instantáneas simultáneas. Ahora bien, esa descripción no será la única posible, ya que cualquier otro s.v.d.  $S$  que sea equivalente a  $S$  (recuérdese que la equivalencia implica igualdad de campos de momentos) constituirá una descripción alternativa del mismo campo de velocidades y, por tanto, del mismo movimiento. Parece lógico, entonces, dar preferencia en cada movimiento a sus descripciones más sencillas, las cuales nos vendrán dadas mediante la **reducción cinemática** en un punto  $O$  arbitrario,  $S^{\text{red}}_O \equiv \{\omega_R; v_O\}$ , o, siempre que exista, mediante la **reducción canónica**,  $S^{\text{can}} \equiv \{\omega_R; v^{\text{min}}\}$ , de cualquiera de los s.v.d. que permitan describir ese movimiento.

Llegados a este punto, podemos extrapolar la clasificación de s.v.d. realizada en el apartado 6 del tema *Vectores deslizantes*, y obtendremos la siguiente **clasificación de movimientos instantáneos de un sólido rígido**:

$\omega_R$	$v^{\text{min}}$	Reducción cinemática (en $O$ arbitrario)	Reducción canónica	Movimiento instantáneo
$= 0$	$= 0$	sistema nulo 	—	reposo instantáneo
$= 0$	$\neq 0$	traslación instantánea de velocidad $v_O$ 	—	traslación instantánea
$\neq 0$	$\neq 0$	rotación instantánea $\omega_R$ alrededor del eje $\Delta_O$ más traslación instantánea de velocidad $v_O \perp \Delta_{EIR}$ 	rotación instantánea $\omega_R$ alrededor del $\Delta_{EIR}$ 	rotación instantánea
$\neq 0$	$\neq 0$	rotación instantánea $\omega_R$ alrededor del eje $\Delta_O$ más traslación instantánea de velocidad $v_O$ 	rotación instantánea $\omega_R$ alrededor del $\Delta_{EIRMD}$ más traslación instantánea de velocidad $v^{\text{min}}$ 	movimiento helicoidal tangente

Verificamos, por tanto, que aunque existan diferentes descripciones alternativas del movimiento instantáneo de un sólido rígido, el cálculo de  $\omega_R$  y  $v^{\text{min}}$  reduce todos los estados cinemáticos posibles a sólo cuatro: reposo, traslación, rotación, y helicoidal (superposición de rotación más traslación). De modo que, independientemente de cuál sea la descripción inicial de un movimiento que se nos facilite ( $n$  rotaciones instantáneas simultáneas, reducción cinemática en un punto arbitrario, velocidades de tres puntos no alineados del sólido, etc.), siempre podremos calcular  $\omega_R$  y  $v^{\text{min}}$ , y, a partir de la nulidad o no nulidad de ambos vectores, clasificar el movimiento en alguna de las cuatro categorías de la tabla anterior:

$$S \equiv \{(\omega_i; \Delta_i)\}_{i=1}^n$$

$$S^{\text{red}}_O \equiv \{\omega_R; v_O\}$$

$$v_{P_1}, v_{P_2} \text{ y } v_{P_3} \quad (P_1, P_2 \text{ y } P_3 \text{ no alineados})$$

$$\Rightarrow \text{cálculo de } \omega_R \text{ y } v^{\text{min}} \Rightarrow \text{clasificación}$$

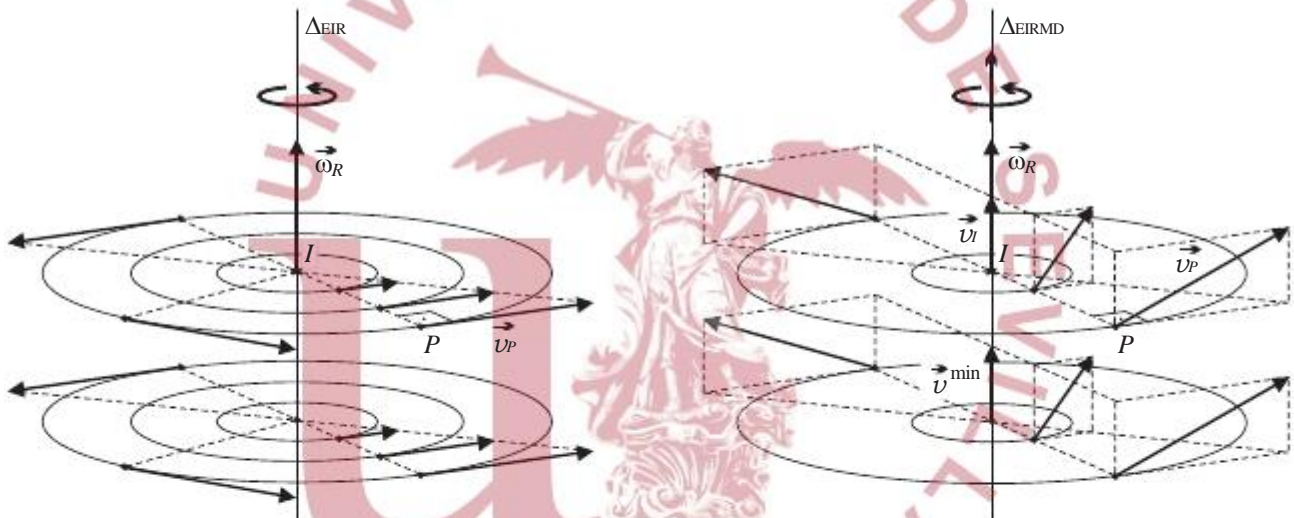
### 7. Campo de velocidades del sólido rígido.-

Puede resultar útil tener una imagen esquemática de la **distribución del campo de velocidades de un sólido rígido** en cada uno de los cuatro movimientos instantáneos posibles. Para ello, recordaremos la ecuación del campo de velocidades:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_R \wedge \vec{QP}$$

y distinguiremos los siguientes casos:

- Si  $\omega_R = 0$ , el campo de velocidades es uniforme, ya sea nulo (reposo instantáneo) o no nulo (traslación instantánea).
- Si  $\omega_R \neq 0$ , el campo de velocidades se caracteriza en su distribución espacial por las siguientes propiedades:
  - a) Simetría traslacional en la dirección de  $\omega_R$ .
  - b) Simetría rotacional alrededor del eje central,  $\Delta_{EIR}$  (rotación instantánea) o  $\Delta_{EIRMD}$  (movimiento helicoidal tangente).
  - c) En los puntos del eje central, la velocidad tiene su módulo mínimo,  $v^{\min}$ , siendo nula (rotación instantánea) o paralela a  $\omega_R$  y, por tanto, al propio eje central (movimiento helicoidal tangente).
  - d) Fuera del eje central, la velocidad de cada punto  $P$  tiene una componente paralela a  $\omega_R$ , la cual es invariante (de valor igual a  $v^{\min}$ ) y puede ser nula (rotación instantánea) o no nula (movimiento helicoidal tangente); y una componente perpendicular a  $\omega_R$ , la cual tiene dirección acimutal y es proporcional a la distancia entre  $P$  y el eje central (simetría cilíndrica de  $|v_P|$ ).



$$\text{si } I \in \Delta_{EIR} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_I + \vec{\omega}_R \wedge \vec{IP} \\ = 0 \quad \perp \omega_R$$

$$\text{si } I \in \Delta_{EIRMD} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_I + \vec{\omega}_R \wedge \vec{IP} \\ \omega_R \quad \perp \omega_R$$

### 8. Campo de aceleraciones del sólido rígido.-

Partiendo de la ecuación del campo de velocidades del sólido rígido:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_R \wedge \vec{QP}$$

y derivándola respecto al tiempo, se obtiene:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_P = \vec{a}_Q + \frac{d\vec{\omega}_R}{dt} \wedge \vec{QP} + \vec{\omega}_R \wedge (\vec{v}_P - \vec{v}_Q)$$

donde se ha definido el vector aceleración angular,  $\alpha = \frac{d\vec{\omega}_R}{dt}$ .

Utilizando ahora la ecuación del campo de velocidades para sustituir  $(\vec{v}_P - \vec{v}_Q)$  en el último término, se llega a la **ecuación del campo de aceleraciones** de un sólido rígido:

$$\forall P, Q \in \text{sólido rígido} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_P = \vec{a}_Q + \alpha \wedge \vec{QP} + \vec{\omega}_R \wedge (\vec{\omega}_R \wedge \vec{QP}) = \vec{a}_Q + \alpha \wedge \vec{QP} + (\vec{\omega}_R \cdot \vec{QP}) \vec{\omega}_R - |\vec{\omega}_R|^2 \vec{QP}$$



**Propiedad:**

A diferencia de lo que ocurre con el campo de velocidades, el campo de aceleraciones de un sólido rígido no es equiproyectivo en general (sí lo es, excepcionalmente, en las situaciones de reposo instantáneo y traslación instantánea).

**Demostración:**

Efectuando el producto escalar de la ecuación del campo de aceleraciones de un sólido rígido por el vector  $\vec{QP}$ , se obtiene:

$$a_P \cdot \vec{QP} = a_Q \cdot \vec{QP} + \underbrace{(\alpha \perp QP) \cdot QP}_{=0} + (\omega_R \cdot QP)^2 - |\omega_R|^2 |QP|^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_P \cdot \vec{QP} = a_Q \cdot \vec{QP} \text{ (en general)} \\ a_P \cdot QP = a_Q \cdot QP \quad (\text{si } \omega_R = 0) \end{cases}$$

Por último, realizaremos al margen dos observaciones de interés práctico:

- Mientras que el campo de velocidades de un sólido rígido queda definido por el conocimiento del vector rotación total,  $\omega_R$ , y de la velocidad,  $v_Q$ , de un punto cualquiera  $Q$  (reducción cinemática); su campo de aceleraciones queda definido por el conocimiento del vector rotación total,  $\omega_R$ , el vector aceleración angular,  $\alpha$ , y la aceleración,  $a_Q$ , de un punto cualquiera  $Q$ . Esto se deduce directamente por inspección de la ecuación del campo de aceleraciones de un sólido rígido.
- La aceleración,  $a_P$ , de un punto cualquiera  $P$  se puede obtener por derivación temporal de su velocidad,  $v_P$ , sólo si se conoce  $v_P(t)$  (no es suficiente conocer un valor instantáneo  $v_P(t_0)$ ).







# MOVIMIENTO RELATIVO

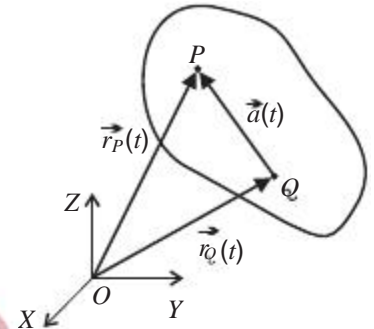
## 1. Derivación temporal en triédros móviles: fórmulas de Poisson.-

**Teorema:** La derivada temporal de un vector,  $a$ , cuyo origen y cuyo extremo son puntos pertenecientes a un sólido rígido se puede calcular como:

$$\frac{da}{dt} = \omega \wedge a$$

donde  $\omega$  es el vector rotación total\* del sólido rígido.

\* Nota: En el tema anterior, se utilizó el subíndice  $R$  para el vector rotación total  $\omega_R$ , distinguiéndolo así de las rotaciones instantáneas  $\omega_i$  que pueden concurrir simultáneamente en un mismo movimiento y cuya resultante es precisamente  $\omega_R$ . Sin embargo, a partir de ahora, dado que sólo trabajaremos en cada movimiento con dicha resultante y, además, se necesitará espacio para nuevos subíndices, prescindiremos del subíndice  $R$  al referirnos al vector rotación total de cada movimiento (al que, por cierto, también denominaremos vector velocidad angular).



**Demostración:**

$$\vec{a} = \vec{QP} = r_P - r_Q \implies \frac{da}{dt} = v_P - v_Q = \omega \wedge \vec{QP} = \omega \wedge a$$

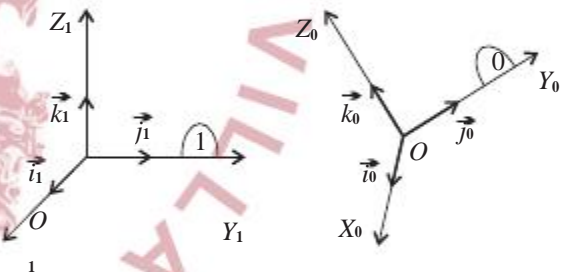
**Aplicación:**

Consideremos sendos sistemas de ejes coordenados cartesianos,  $O_1X_1Y_1Z_1$  (triédro fijo, triédro "1" o sólido "1") y  $OX_0Y_0Z_0$  (triédro móvil, triédro "0" o sólido "0"), y sus respectivas bases ortonormales asociadas,  $\{i_1, j_1, k_1\}$  y  $\{i_0, j_0, k_0\}$ .

Suponiendo que el sólido "0" se halla en movimiento relativo respecto al sólido "1" (sólido *observador*), denominando  $\omega_{01}$  al vector rotación total de dicho movimiento  $\{01\}$ , y aplicando el teorema anterior a la derivación temporal de los vectores de la base móvil  $\{i_0, j_0, k_0\}$ , se obtienen las que se conocen como

**fórmulas de Poisson:**

$$\frac{di_0}{dt} = \omega_{01} \wedge i_0 \quad \frac{dj_0}{dt} = \omega_{01} \wedge j_0 \quad \frac{dk_0}{dt} = \omega_{01} \wedge k_0$$



Consideremos ahora un vector arbitrario función del tiempo,  $A(t)$ , que se halle expresado en la base vectorial móvil  $\{i_0, j_0, k_0\}$ :

$$A(t) = A_1(t) i_0 + A_2(t) j_0 + A_3(t) k_0$$

Si se desea derivar al vector  $A(t)$  respecto al tiempo, se habrá de tener en cuenta que son variables en el tiempo tanto sus componentes,  $A_i(t)$ , como los vectores de la base móvil:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt}_1 &= \frac{dA_1}{dt}_1 i_0 + \frac{dA_2}{dt}_1 j_0 + \frac{dA_3}{dt}_1 k_0 + A_1 (\omega_{01} \wedge i_0) + A_2 (\omega_{01} \wedge j_0) + A_3 (\omega_{01} \wedge k_0) \\ &= \frac{dA}{dt}_0 + \omega_{01} \wedge A \end{aligned}$$

donde se ha introducido un subíndice asociado a las derivaciones temporales que es indicativo del *punto de vista* desde el que se realiza la derivada o, dicho de otro modo, indicativo de cuál es el sólido *derivador*, entendiendo por tal a aquél cuya base ortonormal asociada se considera constante durante la derivación temporal.

De este modo, se obtiene la denominada **fórmula general de Poisson:**

$$\forall A \quad \frac{dA}{dt}_1 = \frac{dA}{dt}_0 + \omega_{01} \wedge A$$

la cual también se puede escribir en forma operacional, y/o con subíndices generalizados:

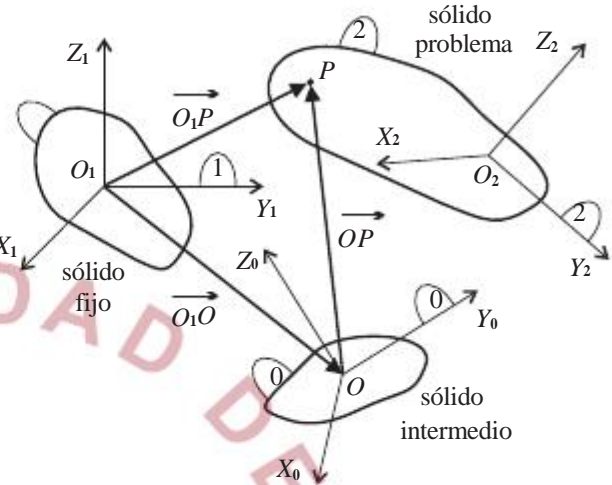
$$\frac{d}{dt} \Big|_1 = \frac{d}{dt} \Big|_0 + \omega_{01} \wedge \quad ; \quad \frac{d}{dt} \Big|_j = \frac{d}{dt} \Big|_i + \omega_{ij} \wedge$$

y cuya utilidad radica precisamente en que permite relacionar entre sí las derivaciones temporales de una misma magnitud vectorial realizadas desde distintos *puntos de vista* o, lo que es lo mismo, realizadas por distintos sólidos *derivadores*.

## 2. Notación y definiciones en el movimiento relativo.-

Para introducir la notación que nos permitirá el estudio del movimiento relativo entre sólidos rígidos, necesitamos admitir previamente las dos siguientes hipótesis:

- Cada sólido rígido es un triedro infinito, el cual puede tener o no partes materiales. En efecto, no existe impedimento alguno para asociar a un sólido material un triedro infinito que se mueva solidariamente con él. Asimismo, es posible definir triedros auxiliares que carezcan de parte material.
- Cada punto geométrico del espacio pertenece simultáneamente a todos los sólidos definidos. Dicho de otro modo, en cada punto geométrico del espacio se superponen en cada instante varios puntos: uno por cada uno de los triedros infinitos definidos.



### Notación:

$\{ij\}$  → movimiento del sólido “i” respecto al sólido observador “j”.

$\omega_{ij}$  vector de velocidad angular del sólido “i” respecto al observador “j”.

$\left\{ \begin{matrix} r_{ij}^P \\ v_{ij}^P \\ a_{ij}^P \end{matrix} \right\}$  → vector de  $\left\{ \begin{matrix} posición \\ velocidad \\ aceleración \end{matrix} \right\}$  del punto P, perteneciente al sólido “i”, respecto al observador “j”.

En el caso de que sólo haya tres sólidos, son típicas las siguientes denominaciones y definiciones:

sólido “1” → sólido fijo; sólido “0” → sólido intermedio; sólido “2” → sólido problema

$\{21\}$	mov. absoluto	$r_{21}^P$	$v_{21} = \frac{dr_{21}^P}{dt} \Big _1$	$a_{21} = \frac{dv_{21}^P}{dt} \Big _1$	$\omega_{21}$	$\alpha_{21} = \frac{d\omega_{21}}{dt} \Big _1$
$\{20\}$	mov. relativo	$r_{20}^P$	$v_{20} = \frac{dr_{20}^P}{dt} \Big _0$	$a_{20} = \frac{dv_{20}^P}{dt} \Big _0$	$\omega_{20}$	$\alpha_{20} = \frac{d\omega_{20}}{dt} \Big _0$
$\{01\}$	mov. de arrastre	$r_{01}^P$	$v_{01} = \frac{dr_{01}^P}{dt} \Big _1$	$a_{01} = \frac{dv_{01}^P}{dt} \Big _1$	$\omega_{01}$	$\alpha_{01} = \frac{d\omega_{01}}{dt} \Big _1$

En cualquier caso, generalizando:

$$\frac{d}{dt} \Big|_i = \frac{d}{dt} \Big|_j + \omega_{ji} \wedge \quad ; \quad a_{ij}^P = \frac{dv_{ij}^P}{dt} \Big|_j \quad ; \quad \alpha_{ij} = \frac{d\omega_{ij}}{dt} \Big|_j$$

donde es importante observar que, al definir una velocidad, una aceleración o una aceleración angular como derivada temporal, es imprescindible la coincidencia entre el sólido *observador* (segundos subíndices de la magnitud vectorial que se deriva y de la magnitud resultante de la derivación) y el sólido *derivador* (subíndice asociado a la derivación temporal).

También es conveniente reformular las ecuaciones de los campos de velocidades y aceleraciones asociados a un movimiento genérico  $\{ij\}$ :

$$\forall P, Q \in \text{sólido "i"} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{ij}^P = \vec{v}_{ij}^Q + \omega_{ij} \wedge \vec{QP} \\ \vec{a}_{ij}^P = \vec{a}_{ij}^Q + \alpha_{ij} \wedge \vec{QP} + \omega_{ij} \wedge (\omega_{ij} \wedge \vec{QP}) \end{cases}$$

El estudio del movimiento relativo entre dos sólidos  $\{ij\}$  se puede realizar introduciendo un tercer sólido "k", y aplicando **composición de movimientos**:

$$\{ij\} = \{ik\} + \{kj\} \quad (\text{o bien, } i/j = i/k + k/j)$$

Por ejemplo:

$$\{21\} = \{20\} + \{01\}$$

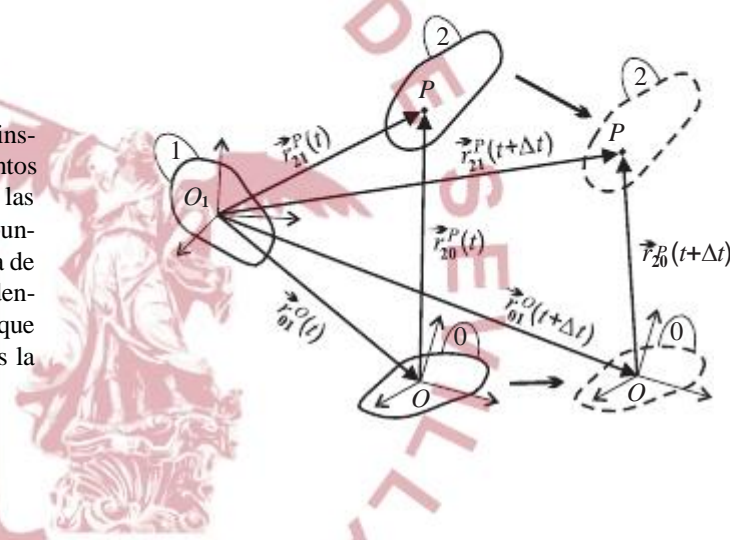
En los próximos apartados del tema, iremos deduciendo una serie de **leyes de composición**, mediante las cuales, las magnitudes cinemáticas (velocidad, aceleración, velocidad angular y aceleración angular) asociadas a un movimiento compuesto  $\{ij\}$  podrán ser calculadas a partir de sus homólogas correspondientes a los movimientos elementales  $\{ik\}$  y  $\{kj\}$ . Como punto de partida para las citadas deducciones, se requiere una relación entre vectores de posición que, de algún modo, vincule o concatene a los tres movimientos participantes en la composición, y que sea derivable respecto al tiempo.

La identidad vectorial geométrica:

$$\vec{O_1P} = \vec{O_1O} + \vec{OP}$$

es atemporal. En principio, sólo sería válida para un instante, por cuanto no especifica la pertenencia de los puntos  $O_1$ ,  $O$  y  $P$  a sólido rígido alguno. En realidad, según las hipótesis admitidas al inicio de este apartado, esos tres puntos geométricos pertenecen simultáneamente a cualquiera de los sólidos definidos, pero si deseamos convertir dicha identidad vectorial en una relación entre vectores de posición que sea *derivable respecto al tiempo*, la única posibilidad es la que sigue:

$$r_{21}^P(t) = r_{01}^O(t) + r_{20}(t)$$



### 3. Composición de velocidades.-

Derivando respecto al tiempo (desde el *punto de vista* del sólido "1") la última ecuación del apartado anterior, se obtiene:

$$\frac{dr_{21}^P(t)}{dt} \Big|_1 = \frac{dr_{01}^O(t)}{dt} \Big|_1 + \frac{dr_{20}(t)}{dt} \Big|_1$$

$$= v_{21}^P(t) = v_{01}^O(t) + v_{20}^O(t)$$

y, aplicando la fórmula general de Poisson:

$$v_{21}^P(t) = v_{01}^O(t) + \frac{dr_{20}(t)}{dt} \Big|_0 + \omega_{01}(t) \wedge r_{20}(t)$$

$$= v_{20}^O(t)$$

Reordenando términos, se obtiene la *expresión derivable respecto al tiempo* de la ley de composición de velocidades:

$$\forall t \rightarrow v_{21}^P(t) = v_{20}^O(t) + v_{01}^O(t) + \omega_{01}(t) \wedge r_{20}(t)$$

Sin embargo, renunciando a la derivabilidad temporal, es posible llegar a una expresión más sencilla de esta ley. Para ello, basta tener en cuenta que:

$$r_{20}^O(t) \stackrel{P}{=} r_{00}(t), \quad \text{pero } r_{20} = \vec{OP} = r_{00} \quad (\text{con validez instantánea})$$



y, por tanto:

$$\begin{aligned} v_{21}^{P} &= v_{20}^{P} + v_{01} + \omega_{01} \wedge r_{00} \\ &= v_{01}^{P} \end{aligned}$$

obteniéndose la *expresión no derivable respecto al tiempo* de la **ley de composición de velocidades**:

$$v_{21}^{P} = v_{20}^{P} + v_{01}^{P}$$

No obstante, debe insistirse en que esta expresión más sencilla de la ley de composición de velocidades, así como cualquier velocidad que haya sido calculada mediante su utilización, aun teniendo validez en cada instante, **no se pueden derivar respecto al tiempo**.

Finalmente, la ley de composición de velocidades se puede generalizar escribiendo:

$$v_{ij}^{P} = v_{ik}^{P} + v_{kj}^{P}$$

de donde, tomando  $i = j$ , se comprueba que las velocidades recíprocas ( $v_{ik}^{P}$  y  $v_{ki}^{P}$ ) son opuestas:

$$v_{ii}^{P} = 0 = v_{ik}^{P} + v_{ki}^{P} \quad \Rightarrow \quad v_{ik}^{P} = -v_{ki}^{P}$$

#### 4. Composición de velocidades angulares.-

Se parte de la ley de composición de velocidades en su expresión:

$$v_{21}^{P} = v_{20}^{P} + v_{01}^{P}$$

y se utilizan las ecuaciones de los campos de velocidades  $\{21\}$ ,  $\{20\}$  y  $\{01\}$  para escribir:

$$v_{21}^{O} + \omega_{21} \wedge \vec{OP} = v_{20}^{O} + \omega_{20} \wedge \vec{OP} + v_{01}^{O} + \omega_{01} \wedge \vec{OP}$$

donde  $O$  y  $P$  son dos puntos geométricos arbitrarios.

Reagrupando términos, se obtiene:

$$\underbrace{v_{21}^{O} - v_{20}^{O} - v_{01}^{O}}_{= 0} + (\omega_{21} - \omega_{20} - \omega_{01}) \wedge \vec{OP} = 0 \quad (\forall \vec{OP}) \quad \Rightarrow \quad \omega_{21} - \omega_{20} - \omega_{01} = 0$$

y, por tanto, se deduce la siguiente **ley de composición de velocidades angulares**:

$$\omega_{21} = \omega_{20} + \omega_{01}$$

que admite la generalización:

$$\omega_{ij} = \omega_{ik} + \omega_{kj}$$

de donde, tomando  $i = j$ , se comprueba que las velocidades angulares recíprocas ( $\omega_{ik}$  y  $\omega_{ki}$ ) son opuestas:

$$\omega_{ii} = 0 = \omega_{ik} + \omega_{ki} \quad \Rightarrow \quad \omega_{ik} = -\omega_{ki}$$

Es importante señalar que, la ley de composición de velocidades angulares obtenida es **derivable respecto al tiempo** (así como cualquier velocidad angular calculada mediante ella), es decir, que se puede escribir:

$$\omega_{21}(t) = \omega_{20}(t) + \omega_{01}(t)$$

y esto es así a pesar de que su deducción se ha realizado partiendo de la expresión no derivable respecto al tiempo de la ley de composición de velocidades. Esta aparente contradicción se justifica por el hecho de que, a diferencia de las velocidades, los vectores velocidad angular son invariantes, es decir, independientes de los puntos del sólido, y por ello no se ven afectados por desigualdades tales como  $r_{20}(t) = r_{00}(t)$ , que es precisamente la que impide la derivabilidad temporal de la expresión más sencilla de la ley de composición de velocidades.

**Ejercicio teórico:** Demuéstrese que

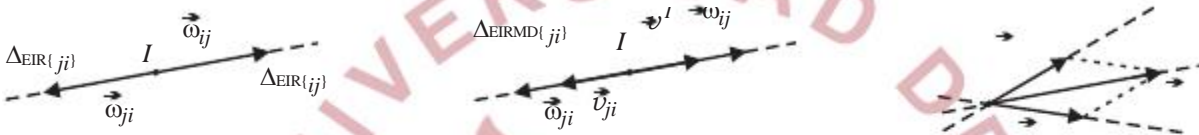
- a) la composición de dos traslaciones es otra traslación;
- b)  $\Delta_{EIRMD}\{ij\} \equiv \Delta_{EIRMD}\{ji\}$ , y  $\Delta_{EIR}\{ij\} \equiv \Delta_{EIR}\{ji\}$ ;
- c) si  $\Delta_{EIR}\{ik\}$  y  $\Delta_{EIR}\{kj\}$  son concurrentes en un punto  $O$ , entonces  $O \in \Delta_{EIR}\{ij\}$ .

**Solución:**

a)  $\{ik\}$  traslación  $\rightarrow \omega_{ik} = 0$   
 $\{kj\}$  traslación  $\rightarrow \omega_{kj} = 0$   
 $\Rightarrow \omega_{ij} = \omega_{ik} + \omega_{kj} = 0 \Rightarrow \{ij\}$  traslación (o reposo)

b)  $\forall I \in \Delta_{EIRMD}\{ij\} \rightarrow \omega_{ij} \wedge v_{ij}^I = 0 \Rightarrow \omega_{ji} \wedge v_{ji}^I = 0 \Rightarrow I \in \Delta_{EIRMD}\{ji\}$   
 $\Delta_{EIR}\{ij\}$   
 $\Delta_{EIR}\{ji\}$

c)  $O \in \Delta_{EIR}\{ik\} \rightarrow v_{ik}^O = 0 \Rightarrow O \in \Delta_{EIR}\{ij\}$   
 $\Rightarrow v_{ii}^O = v_{ik}^O + v_{ki}^O = 0$



**5. Composición de aceleraciones: teorema de Coriolis.-**

Partimos de la ley de composición de velocidades en su expresión derivable respecto al tiempo:

$$v_{21}(t) = v_{20}(t) + v_{01}(t) + \omega_{01}(t) \wedge r_{20}(t)$$

Derivándola respecto al tiempo (desde el punto de vista del sólido "1"), se obtiene:

$$\frac{d v_{21}(t)}{dt}_1 = \frac{d v_{20}(t)}{dt}_0 + \frac{d \omega_{01}(t)}{dt}_0 \wedge r_{20}(t) + \omega_{01}(t) \wedge \frac{d r_{20}(t)}{dt}_0$$

$$= a_{21}(t) = a_{20}(t) + \alpha_{01}(t) \wedge r_{20}(t) + \omega_{01}(t) \wedge v_{20}(t)$$

pero la fórmula general de Poisson establece que:

$$\frac{d v_{20}(t)}{dt}_0 = \frac{d v_{20}(t)}{dt}_0 + \omega_{01}(t) \wedge v_{20}(t) ; \quad \frac{d r_{20}(t)}{dt}_0 = \frac{d r_{20}(t)}{dt}_0 + \omega_{01}(t) \wedge r_{20}(t)$$

$$= a_{20}(t) = v_{20}(t)$$

Sustituyendo estas igualdades en la expresión anterior y reagrupando términos, se obtiene una primera expresión de la ley de composición de aceleraciones:

$$a_{21}(t) = a_{20}(t) + a_{01}(t) + \alpha_{01}(t) \wedge r_{20}(t) + \omega_{01}(t) \wedge [\omega_{01}(t) \wedge r_{20}(t)] + 2 \omega_{01}(t) \wedge v_{20}(t)$$

Sin embargo, renunciando a la derivabilidad temporal (carente de utilidad en este caso), es posible llegar a una expresión más sencilla de esta ley. Para ello, basta tener en cuenta nuevamente que:

$$r_{20}(t) = r_{00}(t) \quad \text{pero} \quad \vec{r}_{20} = \vec{OP} = r_{00} \quad (\text{con validez instantánea})$$

y, por tanto:

$$a_{21} = a_{20} + \underbrace{a_{01} + \alpha_{01} \wedge r_{00} + \omega_{01} \wedge (\omega_{01} \wedge r_{00})}_{a_{01}} + 2 \omega_{01} \wedge v_{20}$$

obteniéndose la expresión definitiva de la **ley de composición de aceleraciones**:

$$a_{21}^P = a_{20}^P + a_{01}^P + 2 \omega_{01} \wedge v_{20}^P$$

que es expresión matemática del denominado **teorema de Coriolis**: la aceleración absoluta ( $a_{21}$ ) es igual a la suma de la aceleración relativa ( $a_{20}^P$ ), la aceleración de arrastre ( $a_{01}^P$ ) y la aceleración de Coriolis ( $2 \omega_{01} \wedge v_{20}^P$ )

Finalmente, la ley de composición de aceleraciones se puede generalizar escribiendo:

$$a_{ij}^P = \hat{a}_{ik} + \hat{a}_{kj} + 2 \omega_{kj} \wedge v_{ik}^P$$

de donde, tomando  $i = j$ , se comprueba que en general las aceleraciones recíprocas ( $a_{ik}$  y  $a_{ki}$ ) no guardan entre sí una relación sencilla:

$$a_{ii}^P = 0 = \hat{a}_{ik} + \hat{a}_{ki} + 2 \omega_{ki} \wedge v_{ik}^P \Rightarrow a_{ik}^P = -a_{ki} + 2 \omega_{ki} \wedge v_{ki}^P \Rightarrow a_{ik}^P = -a_{ki}$$

**Cuestión:** ¿Bajo qué condiciones particulares son opuestas las aceleraciones recíprocas?

**Solución:** Para que  $a_{ik}^P = -a_{ki}^P$ , es necesario que se anule el término  $2 \omega_{ki} \wedge v_{ki}^P$ , lo cual ocurriría si, y sólo si, se verifica alguno de los siguientes supuestos:

- $\omega_{ki} = 0$  (es decir,  $\{ki\}$  es una traslación instantánea o un reposo instantáneo).
- $v_{ki}^P = 0$  (es decir,  $\{ki\}$  es una rotación instantánea, y  $P \in \Delta_{EIR}\{ki\}$ ).
- $v_{ki}^P \parallel \omega_{ki}$  (es decir,  $\{ki\}$  es un movimiento helicoidal tangente, y  $P \in \Delta_{EIRMD}\{ki\}$ ).

## 6. Composición de aceleraciones angulares.-

Se parte de la ley de composición de velocidades angulares:

$$\omega_{21}(t) = \omega_{20}(t) + \omega_{01}(t)$$

y derivándola respecto al tiempo (desde el punto de vista del sólido "1"), se obtiene:

$$\frac{d\omega_{21}(t)}{dt} \Big|_1 = \frac{d\omega_{20}(t)}{dt} \Big|_1 + \frac{d\omega_{01}(t)}{dt} \Big|_1$$

$$= \alpha_{21} = \alpha_{20} + \alpha_{01}$$

que, aplicando la fórmula general de Poisson, se convierte en:

$$\alpha_{21}(t) = \frac{d\omega_{20}(t)}{dt} \Big|_0 + \omega_{01}(t) \wedge \omega_{20}(t) + \alpha_{01}(t)$$

$$= \alpha_{20}(t)$$

Reordenando términos, se obtiene la **ley de composición de aceleraciones angulares**:

$$\alpha_{21} = \alpha_{20} + \alpha_{01} + \omega_{01} \wedge \omega_{20}$$

que admite la generalización:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} + \omega_{kj} \wedge \omega_{ik}$$

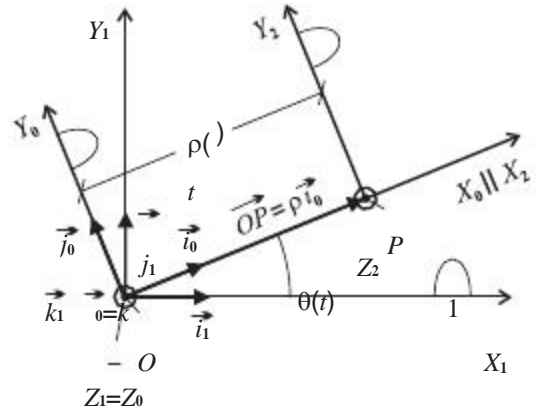
de donde, tomando  $i = j$ , se comprueba que las aceleraciones angulares recíprocas ( $\alpha_{ik}$  y  $\alpha_{ki}$ ) son opuestas:

$$\alpha_{ii} = 0 = \alpha_{ik} + \alpha_{ki} + \underbrace{\omega_{ki} \wedge \omega_{ik}}_{= 0} \Rightarrow \alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$$

**Aplicación:**

Se definen el triedro fijo  $OX_1Y_1Z_1$  (sólido "1"); el triedro intermedio  $OX_0Y_0Z_0$  (sólido "0"), tal que  $OZ_0 \equiv OZ_1$  y cuyo eje  $OX_0$  forma un ángulo  $\theta(t)$  con el eje  $OX_1$ ; y, por último, el

triedro problema  $PX_2Y_2Z_2$ , cuyo eje  $PX_2$  es colineal con el eje  $OX_0$ , y cuyos ejes  $PY_2$  y  $PZ_2$  son paralelos, respectivamente, a los ejes  $OY_0$  y  $OZ_0$ , distando de ellos  $\rho(t)$ .



Del movimiento de  $\rho(t)$  y  $\theta(t)$  se deducen las magnitudes de aceleración de los movimientos  $\{21\}$  y  $\{20\}$  mediante la composición de movimientos  $\{21\}$  y  $\{10\}$ .

**Solución:**

$\{01\}$  → rotación de eje permanente  $OZ_1$

$$\omega_{01}^O(t) \equiv \dot{\theta} k_1 = \dot{\theta} k_0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{01} &= \frac{d\omega_{01}(t)}{dt} = \ddot{\theta} k_1 = \ddot{\theta} k_0 \\ a_{01}^O &= \frac{dv_{01}(t)}{dt} = 0 \end{aligned} \right.$$

$\{20\}$  → traslación permanente paralela al eje  $OX_0$

$$v_{20}^P(t) \equiv \dot{\rho} i_0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{20} &= \frac{d\omega_{20}(t)}{dt} = 0 \\ a_{20}^P &= \frac{dv_{20}(t)}{dt} = \ddot{\rho} i_0 \end{aligned} \right.$$

$\{21\}$  →  $\{20\} + \{01\}$

$$v_{21}^P \equiv v_{20}^P + v_{01}^O = \dot{\rho} i_0 + \dot{\theta} k_0$$

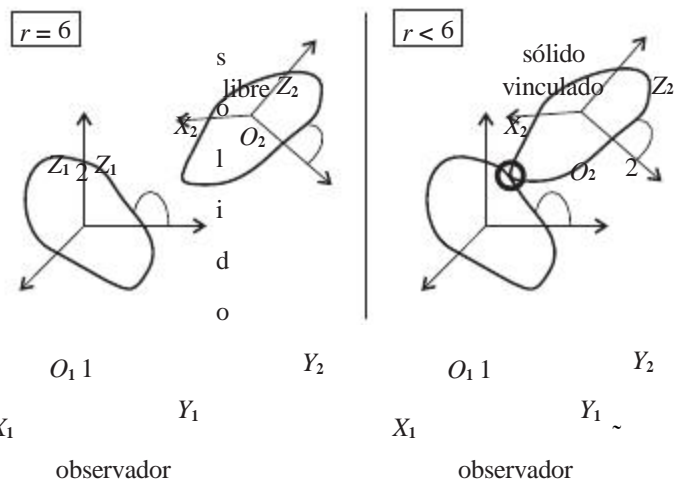
$$a_{21}^P \equiv a_{20}^P + a_{01}^O + 2\omega_{01} \wedge v_{20} = \ddot{\rho} i_0 + \ddot{\theta} k_0 + 2\dot{\theta} \omega_{01} \wedge v_{20} = (\ddot{\rho} - \dot{\theta}^2 \rho) i_0 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \ddot{\theta}\rho) j_0$$

Obs ervese que las expresiones aquí obtenidas para  $v_{21}^P$  y  $a_{21}^P$  coinciden con las del apartado 6.5.1 del tema *Cinemática del punto* (teniendo en cuenta que  $i_0 \equiv u_\rho$  y  $j_0 \equiv u_\theta$ ).

**7. Pares cinemáticos. Sólidos en contacto puntual.-**

Según vimos al inicio del tema *Cinemática del sólido rígido*, cuando un sólido "2" sea libre en su movimiento respecto a otro sólido "1", existirá la reducción cinemática  $\{21\}$  en un punto arbitrario  $O$ . En ese caso, seis será también el número de componentes

Sin embargo, cuando el sólido "2" esté *vinculado* respecto al "1" (denominaremos **vínculo** a cualquier limitación impuesta sobre el movimiento relativo de ambos sólidos), el número de grados de libertad relativa será inferior a seis ( $r < 6$ ), y, en consecuencia,  $\{21\}$  será un *reducción cinemática* de  $r$  componentes de la reducción cinemática  $\{21\}$ .

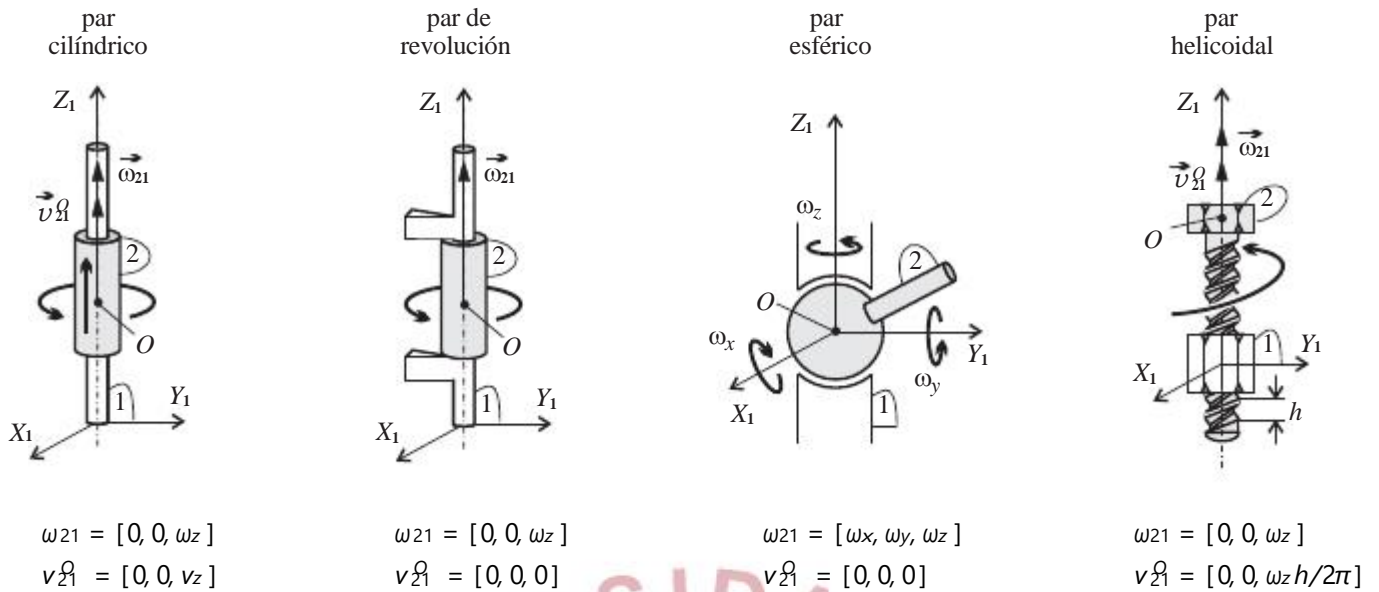


en el caso frecuente de que el vínculo prohíba las rotaciones o traslaciones relativas en ciertas direcciones, una adecuada elección del centro de reducción y de los ejes coordenados garantizará la nulidad de una o varias componentes de la reducción cinemática del movimiento vinculado.

Un par de sólidos vinculados entre sí y en movimiento relativo constituye lo que se conoce como un **par cinemático**. Existe una gran diversidad de pares cinemáticos, mostrándose en el siguiente esquema algunos de los más usuales, acompañados de

sus correspondientes reducciones cinemáticas: el par cilíndrico (cojinete de sustentación), el par de revolución (bisagra), el par esférico (rotula) y el par helicoidal (tornillo).

DPTO. FÍSICA APLICADA III

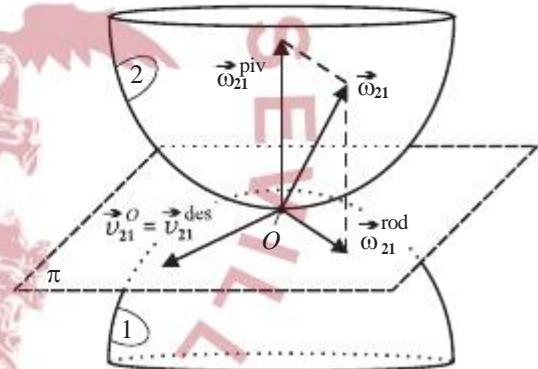


Por su carácter básico, son de especial importancia aquellos pares cinemáticos (par plano-esfera, par esfera-esfera, ...) que consisten sencillamente en que dos sólidos rígidos se mueven manteniendo sus superficies en permanente **contacto puntual**. Si ambas superficies son regulares, entonces tendrán un plano tangente común,  $\pi$ , en el punto de contacto instantáneo,  $O$ . En ese caso, o si al menos una de las dos superficies tiene definido plano tangente  $\pi$  en el punto  $O$ , la reducción cinemática del movimiento  $\{21\}$  en el punto de contacto instantáneo se descompone del siguiente modo:

$$\{ \omega_{21} = \omega_{21}^{rod} + \omega_{21}^{piv}; v_{21}^O = v_{21}^{des} + 0 \}$$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$   
 $\pi \quad \perp \pi \quad \pi \quad \perp \pi$

donde  $\omega_{21}^{rod}$  es la velocidad angular de **rodadura** (rotación alrededor de un eje paralelo al plano  $\pi$ ), que representa dos grados de libertad rotacionales dado que existen dos direcciones independientes paralelas a un plano;  $\omega_{21}^{piv}$  es la velocidad angular de **pivotamiento** (rotación alrededor de un eje perpendicular al plano  $\pi$ ), que representa un único grado de libertad rotacional dado que existe una única dirección perpendicular a un plano; y, por último,  $v_{21}^{des}$  es la velocidad de **deslizamiento** (traslación en dirección paralela al plano  $\pi$ ), que representa dos grados de libertad traslacionales.



Nótese, por tanto, que cuando dos sólidos rígidos se mueven manteniendo sus superficies en permanente contacto puntual, el vínculo consiste exclusivamente en la prohibición de la traslación relativa en la dirección perpendicular al plano tangente en el punto de contacto. El número de grados de libertad resultante es  $r = 5$ .

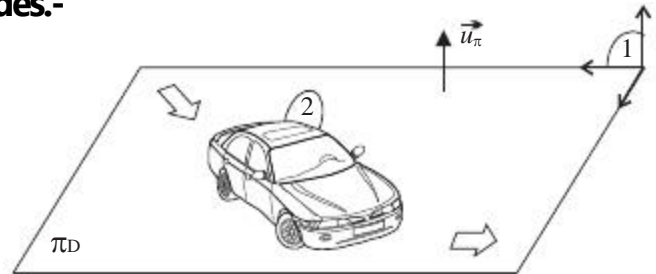


# MOVIMIENTO PLANO

## 1. Definición de movimiento plano. Propiedades.-

Se dice que un sólido rígido "2" realiza un **movimiento plano** respecto a un triedro de referencia "1" si los desplazamientos de todos sus puntos son permanentemente paralelos a un plano de dicho triedro (**plano director**,  $\pi_D$ ).

Así, por ejemplo, el movimiento que realiza el chasis de un coche, respecto a la calzada por la que éste circula, es un movimiento plano.



La *condición de movimiento plano* se puede expresar matemáticamente mediante la ecuación:

$$\forall P \in \text{sólido "2"} \text{ y } \forall t \rightarrow dr_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0$$

donde  $u_\pi$  es el vector unitario normal al plano director  $\pi_D$ .

El movimiento plano presenta las siguientes **propiedades**:

- a) *Los campos de velocidades y aceleraciones son paralelos al plano director.*

Partiendo de la condición de movimiento plano y utilizando la definición de velocidad instantánea:

$$\forall P \in \text{sólido "2"} \text{ y } \forall t \rightarrow dr_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0 \Rightarrow dt v_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0 \Rightarrow v_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0$$

Diferenciando la última ecuación (desde el *punto de vista* del triedro "1") y utilizando la definición de aceleración instantánea:

$$dv_{21}^P(t) \cdot u_\pi + v_{21}^P(t) \cdot du_\pi = 0 \Rightarrow dt a_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0 \Rightarrow a_{21}^P(t) \cdot u_\pi = 0$$

- b) *Los vectores velocidad angular y aceleración angular son perpendiculares al plano director.*

Multiplicando escalarmente por  $u_\pi$  la ecuación del campo de velocidades, y operando:

$$u_\pi \cdot [v_{21}^P(t) - v_{21}^Q(t)] = 0 = u_\pi \cdot [\omega_{21}(t) \wedge \vec{QP}(t)] \Rightarrow \vec{QP}(t) \cdot [u_\pi \wedge \omega_{21}(t)] = 0 \text{ para } \forall \vec{QP}(t)$$

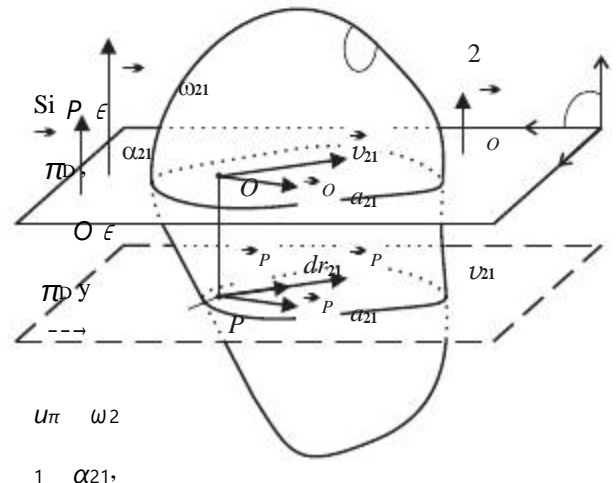
$$\Rightarrow u_\pi \wedge \omega_{21}(t) = 0 \Rightarrow \omega_{21}(t) = \omega_{21}(t) u_\pi \Rightarrow \alpha_{21}(t) = \frac{d\omega_{21}(t)}{dt} u_\pi = \alpha_{21}(t) u_\pi$$

- c) *Las distribuciones de velocidad y aceleración en cualquier plano paralelo al plano director son idénticas, respectivamente, a las distribuciones de velocidad y aceleración director.*

Si se verifica que:

$$v_{21}^P = v_{21}^O + \omega_{21} \wedge \vec{PO} = v_{21}^O + \omega_{21} \wedge \vec{PO} = v_{21}^O$$

$$a_{21}^P = a_{21}^O + \alpha_{21} \wedge \vec{PO} + \omega_{21} \wedge (\omega_{21} \wedge \vec{PO}) = a_{21}^O$$



e  
l  
p  
l  
a  
n

Como consecuencia de esta propiedad, el análisis de un movimiento plano se reduce al análisis del movimiento en el plano director (problema bidimensional).

DPTO. FÍSICA APLICADA III

d) El movimiento plano tiene tres grados de libertad, y su reducción canónica es una rotación instantánea en el caso más general.

La reducción cinemática del movimiento plano en un punto arbitrario O del plano director viene dada por:

$$\left\{ \begin{matrix} \omega_{21} = \omega_{21} k; & v_{21}^O = v_x i + v_y j \end{matrix} \right\}$$

$\perp \pi_D$                        $\pi_D$        $\pi_D$

donde  $\omega_{21}$  representa un grado de libertad de rotación, y  $v_{21}$  representa dos grados de libertad de traslación.

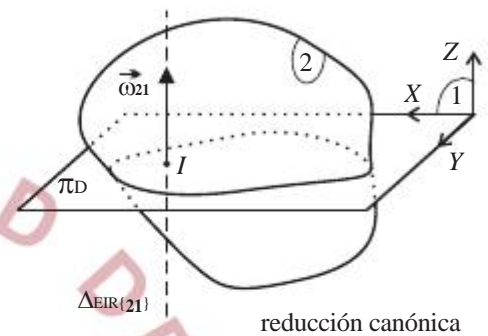
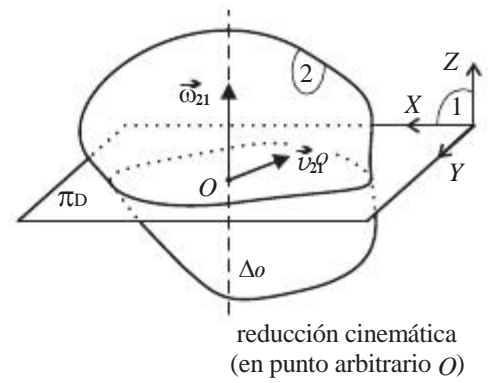
Por otra parte, la reducción canónica de un movimiento plano viene dada, en el caso más general, por:

$$\left\{ \omega_{21} = 0; \quad v_{21}^{\min} = \frac{\omega_{21} \cdot v_{21}^O}{|\omega_{21}|} = 0 \right\}$$

y se trata, por tanto, de una rotación instantánea (existe un eje instantáneo de rotación,  $\Delta_{EIR\{21\}}$ ).

No obstante, dentro del movimiento plano, pueden darse también los dos siguientes **casos particulares**:

- Si  $\omega_{21}(t) = 0$ , entonces el movimiento es una traslación permanente paralela al plano director.
- Si existe en el plano director un punto O que permanece fijo ( $v_{21}(O) = 0$ ), entonces el movimiento es una rotación de eje permanente perpendicular al plano director.

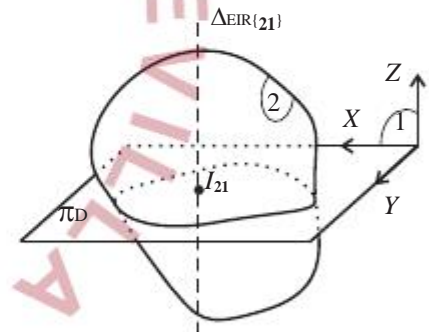


## 2. Centro instantáneo de rotación (C.I.R.) -

### 2.1. Definición del C.I.R.

En un movimiento plano  $\{21\}$ , se denomina C.I.R.  $\{21\}$  (o bien,  $I_{21}$ ) al punto de intersección del eje instantáneo de rotación,  $\Delta_{EIR\{21\}}$ , con el plano director,  $\pi_D$ .

$$I_{21} \equiv \Delta_{EIR\{21\}} \cap \pi_D$$



### 2.2. Propiedades del C.I.R.

a) El C.I.R. es el único punto en el plano director cuya velocidad instantánea es nula:

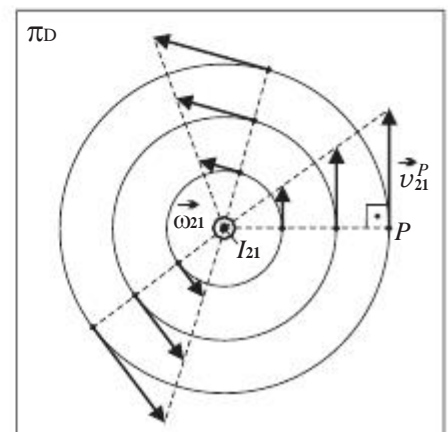
$$v_{21}^{I_{21}} = 0$$

b) El campo de velocidades en el plano director tiene simetría rotacional alrededor del C.I.R.

$$\text{Si } P \in \pi_D \quad \rightarrow \quad \boxed{v_P} = v_{21}^{I_{21}} + \omega_{21} \wedge \overrightarrow{I_{21}P} = \boxed{\omega_{21} \wedge \overrightarrow{I_{21}P}}$$

$= 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{21}^P \perp \overrightarrow{I_{21}P} \\ |v_{21}^P| = |\omega_{21}| |\overrightarrow{I_{21}P}| \end{cases}$$

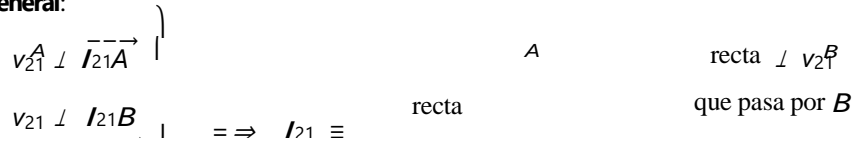


**2.3. Determinación del C.I.R.**

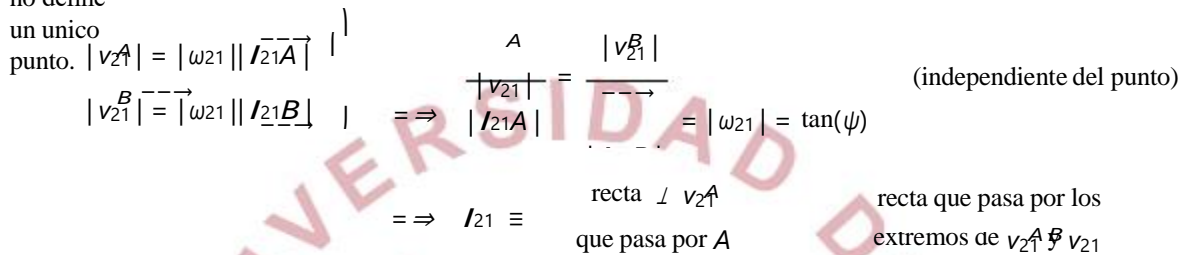
**A) DETERMINACIÓN GRÁFICA:**

Supuestas conocidas las velocidades,  $v_{21}^A$  y  $v_{21}^B$  de dos puntos  $A$  y  $B$  en el plano director, es posible determinar gráficamente la posición del C.I.R. (punto  $I_{21}$ ).

- **Procedimiento general:**

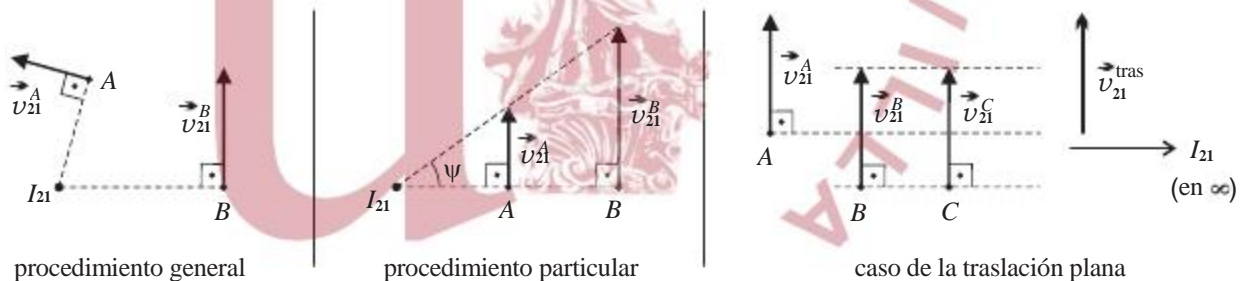


- **Procedimiento particular:** se utiliza en caso de que, al aplicar el procedimiento general, se observe que las dos rectas respectivamente perpendiculares a las velocidades son coincidentes entre sí y que, por tanto, su intersección no define



- **Caso de la traslación plana:** la aplicación de los procedimientos (general y particular) de determinación gráfica del C.I.R. al caso especial de una traslación plana conduce a un par de rectas paralelas entre sí, perpendiculares ambas a la velocidad de traslación, y cuya intersección habrá que buscar en el infinito.

Por tanto, aunque en sentido estricto una traslación plana no tiene C.I.R. (no es una rotación), se puede considerar a efectos prácticos (por ejemplo, a la hora de aplicar el teorema de los tres centros estudiado en el siguiente apartado) que dicho C.I.R. se ubica en el infinito en la dirección normal a la velocidad de traslación.



**B) DETERMINACIÓN ANALÍTICA:**

Supuestas conocidas la velocidad angular,  $\omega_{21}$ , y la velocidad,  $v_{21}$ , de un punto  $O$  en el plano director, es posible determinar analíticamente la posición del C.I.R. (punto  $I_{21}$ ) mediante la expresión:

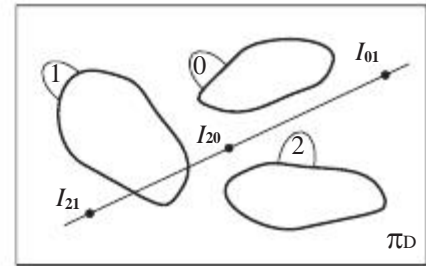
$$I_{21} = \frac{v_{21}}{\omega_{21}}$$

Una fórmula análoga a ésta (para  $\vec{OC}^*$ ) se dedujo en la sección 2.5 del tema *Vectores deslizantes*. Ahora se aplica aquí porque el centro instantáneo de rotación,  $I_{21}$ , es precisamente el punto (análogo a  $C^*$ ) que se obtiene de la proyección ortogonal de cualquier punto del plano director (en particular, el punto  $O$ ) sobre el eje instantáneo de rotación (eje central).

Obsérvese que, en el caso especial de la traslación plana, la ubicación del C.I.R. en el infinito sólo puede interpretarse, en el sentido analítico, como resultado de un proceso de paso al límite en el que una velocidad angular nula es capaz de generar velocidades finitas a distancias infinitas.

### 3. Teorema de los tres centros o de Aronhold-Kennedy.-

Si tres sólidos rígidos realizan movimientos relativos planos y paralelos entre sí, y se elige un plano director común, entonces los tres centros instantáneos de rotación están alineados.



**Demostración:**

Sean tres sólidos (“0”, “1” y “2”) que satisfacen las hipótesis del teorema, y sea A un punto arbitrario en el plano director común. Aplicando la ley de composición de velocidades en el punto A, y sustituyendo en ella las ecuaciones de los campos de velocidades correspondientes:

$$v_{21}^A = v_{20}^A + v_{01}^A \implies v_{21}^{I_{21}} + \omega_{21} \wedge \vec{I_{21}A} = v_{20}^{I_{20}} + \omega_{20} \wedge \vec{I_{20}A} + v_{01}^{I_{01}} + \omega_{01} \wedge \vec{I_{01}A}$$

$$\underset{=0}{\phantom{v_{21}^{I_{21}}}} + \underset{=0}{\phantom{\omega_{21} \wedge \vec{I_{21}A}}} = \underset{=0}{\phantom{v_{20}^{I_{20}}}} + \underset{=0}{\phantom{\omega_{20} \wedge \vec{I_{20}A}}} + \underset{=0}{\phantom{v_{01}^{I_{01}}}} + \underset{=0}{\phantom{\omega_{01} \wedge \vec{I_{01}A}}}$$

Utilizando ahora la ley de composición de velocidades angulares:

$$(\omega_{20} + \omega_{01}) \wedge \vec{I_{21}A} = \omega_{20} \wedge \vec{I_{20}A} + \omega_{01} \wedge \vec{I_{01}A} \implies \omega_{20} \wedge (\vec{I_{21}A} - \vec{I_{20}A}) = \omega_{01} \wedge (\vec{I_{01}A} - \vec{I_{21}A})$$

$$\implies \omega_{20} \wedge \vec{I_{21}I_{20}} = \omega_{01} \wedge \vec{I_{01}I_{21}}$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por I<sub>01</sub>/I<sub>21</sub>:

$$\vec{I_{01}I_{21}} \cdot (\omega_{20} \wedge \vec{I_{21}I_{20}}) = \vec{I_{01}I_{21}} \cdot (\omega_{01} \wedge \vec{I_{01}I_{21}}) = 0$$

Finalmente, aplicando la permutabilidad cíclica del producto mixto:

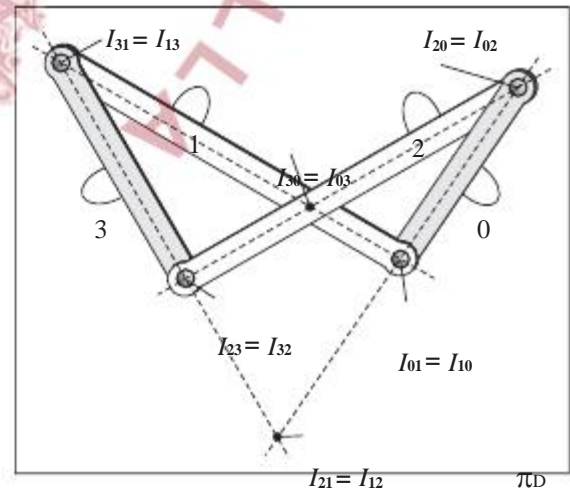
$$\vec{I_{01}I_{21}} \cdot (\omega_{20} \wedge \vec{I_{21}I_{20}}) = \omega_{20} \cdot (\vec{I_{01}I_{21}} \wedge \vec{I_{21}I_{20}}) = \omega_{20} \cdot \vec{I_{01}I_{20}}$$

$$\vec{I_{01}I_{21}} \cdot (\omega_{01} \wedge \vec{I_{01}I_{21}}) = \omega_{01} \cdot (\vec{I_{01}I_{21}} \wedge \vec{I_{01}I_{21}}) = 0$$

$\implies \omega_{20} \cdot \vec{I_{01}I_{20}} = 0 \implies \{I_{01}, I_{20}, I_{21}\} \text{ alineados}$

**Ejemplo de aplicación:**

En la figura adjunta, se muestra la posición instantánea de un sistema mecánico formado por cuatro varillas rígidas (sólidos “0”, “1”, “2” y “3”), concatenadas sucesivamente mediante articulaciones en sus extremos, y que se mueven de forma simultánea realizando movimientos relativos planos con un plano director común πD.



Obsérvese que las posiciones de los puntos I<sub>01</sub>, I<sub>31</sub>, I<sub>20</sub> e I<sub>23</sub> se determinan mediante simple inspección, ya que todos ellos son centros permanentes de rotación relativa impuestos por la presencia de articulaciones. Sin embargo, las posiciones de los centros instantáneos de rotación I<sub>21</sub> e I<sub>30</sub> se determinan, cada una de ellas, mediante doble aplicación del teorema de los tres centros.

Por otra parte, aprovechamos el ejemplo para señalar que la condición de movimiento plano entre dos sólidos rígidos es recíproca. Además, se cumple que I<sub>ij</sub> ≡ I<sub>ji</sub> porque, tal como ya sabemos, las velocidades recíprocas son opuestas y, por tanto, se anulan en el mismo punto.

**Nota final:**

Aunque no vamos a estudiar específicamente el campo de aceleraciones de un movimiento plano, conviene hacer notar, con vistas a la realización de problemas, que la ecuación del campo de aceleraciones en el plano director de un movimiento plano se simplifica ligeramente en su último término. En efecto, dados dos puntos O y P en el plano director, se tiene:

$$a_{21}^P = a_{21}^O + \alpha_{21} \wedge \vec{OP} + \omega_{21} \wedge (\omega_{21} \wedge \vec{OP}) = a_{21}^O + \alpha_{21} \wedge \vec{OP} + (\omega_{21} \cdot \vec{OP}) \omega_{21} - |\omega_{21}|^2 \vec{OP}$$

$$\implies a_{21}^P = a_{21}^O + \alpha_{21} \wedge \vec{OP} - |\omega_{21}|^2 \vec{OP}$$





# INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA

## 1. Leyes de Newton.-

La **Dinámica** es la rama de la Mecánica que se ocupa de estudiar el movimiento de los cuerpos y las propiedades del mismo en relación con las causas (fuerzas) que lo producen.

Se denomina **fuerza**,  $F$ , a toda causa capaz de modificar el estado de equilibrio o movimiento de un cuerpo, o de producir en él estados de tensión. Como magnitud física, la fuerza se representa en general mediante un vector ligado. Sin embargo, se comporta como un vector deslizante cuando actúa sobre un sólido rígido.

Todas las fuerzas presentes en la Naturaleza pueden explicarse en función de las cuatro interacciones básicas: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil. No obstante, las fuerzas cotidianamente observadas entre cuerpos macroscópicos se deben a la fuerza gravitatoria (caída libre, movimiento planetario, ...) y a la fuerza electromagnética (fenómenos electrostáticos, imanes, fuerzas de contacto, ...).

Tomando el punto material como modelo matemático inicial, la Dinámica clásica se desarrolla a partir de algunos postulados fundamentales como son las leyes de Newton y el principio de superposición:

- **Principio de inercia** (o primera ley de Newton).

*Todo punto material sobre el que no actúa fuerza neta se mantiene indefinidamente en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema de referencia inercial.*

Obsérvese que los estados de reposo permanente y de movimiento rectilíneo uniforme comparten, desde el punto de vista cinemático, el hecho de que el vector velocidad es constante y, por consiguiente, el vector aceleración es nulo. Por tanto, lo que el principio de inercia establece es que:

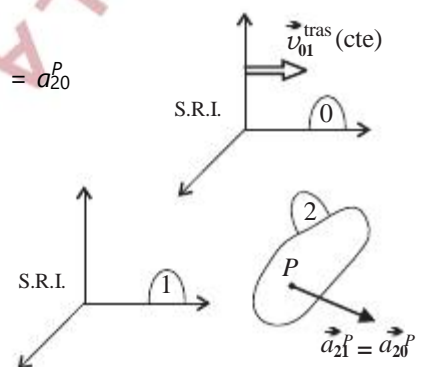
$$F = 0 \implies a = 0$$

Por otra parte, la ley de composición de aceleraciones (teorema de Coriolis) permite deducir que todos los observadores cuyos movimientos relativos consistan en traslaciones de velocidad constante medirán la misma aceleración para un punto material cualquiera.

En efecto:

$$\begin{aligned} \omega_{01}(t) = 0 \quad (\{01\} \text{ traslación}) \\ \text{tras} \qquad \qquad \qquad \text{tras} \qquad \qquad \qquad = a_{20}^P + a_{01}^P + 2 \omega_{01} \wedge v_{20}^P = a_{20}^P \\ \implies a_{21}^P = 0 = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, postulada la existencia de un primer sistema de referencia en el que se cumple el principio de inercia (así como las otras leyes de Newton), queda garantizado que éste se cumplirá también en todos los sistemas de referencia que permanezcan en reposo o se trasladen con velocidad constante respecto al primero (a todos ellos, se les denomina **sistemas de referencia inerciales**, S.R.I.).

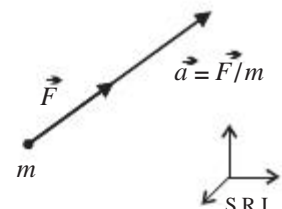


- **Segunda ley de Newton.**

*Todo punto material sometido a una fuerza experimenta una aceleración en la misma dirección y sentido en que actúa la fuerza y de módulo proporcional al módulo de la fuerza.*

La constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración es una propiedad característica de cada punto material, la cual mide su resistencia intrínseca a ser acelerado y se denomina **masa inercial**,  $m$ :

$$F = ma$$



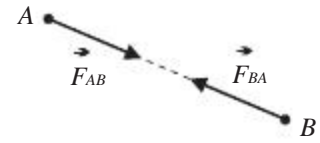
• **Principio de acción y reacción** (o tercera ley de Newton).

Si un punto material  $B$  ejerce una fuerza (acción  $F_{AB}$ ) sobre otro punto material  $A$ , entonces  $A$  responde sobre  $B$  con otra fuerza (reacción  $F_{BA}$ ) de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario.

Matemáticamente:

$$F_{BA} = -F_{AB}$$

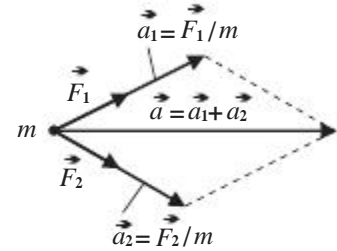
En el marco de la Mecánica clásica, a pesar de que estas dos fuerzas actúan, respectivamente, sobre dos puntos que pueden estar más o menos distantes, ambas actúan siempre de forma simultánea, por lo que parece más correcto hablar de interacción (como sinónimo de fuerza) en lugar de hablar de acción y reacción.



• **Principio de superposición.**

Si sobre un mismo punto material actúan dos fuerzas simultáneamente, la aceleración que adquiere es la suma vectorial de las aceleraciones que le comunicarían cada una de las dos fuerzas por separado.

También se conoce a este como principio de independencia de acción de las fuerzas, y se puede generalizar para un número arbitrario,  $n$ , de fuerzas.



## 2. Dinámica del punto material.-

### 2.1. Punto material libre.

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton y el principio de superposición, el estudio de la dinámica de un punto material libre (aquí el no sometido a limitaciones en su posición o movimiento, y, por tanto, con  $r = 3$  grados de libertad) se reduce, como problema matemático, a resolver una ecuación diferencial vectorial de segundo orden con condiciones iniciales:

$$\ddot{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n F_i(t, r, \dot{r}) \quad (\text{con } r(t_0) = r_0 \text{ y } \dot{r}(t_0) = v_0)$$

cuya solución permite predecir la posición del punto material en todo instante:

$$r = r(t, r_0, v_0)$$

Sobre un punto material libre, sólo actúan las denominadas **fuerzas activas**  $F_i$ , cuya dependencia del tiempo, la posición y la velocidad puede ser más o menos compleja, pero siempre conocida antes de resolver el problema mecánico. En ese sentido, podemos afirmar que las fuerzas activas son *datos* del problema.

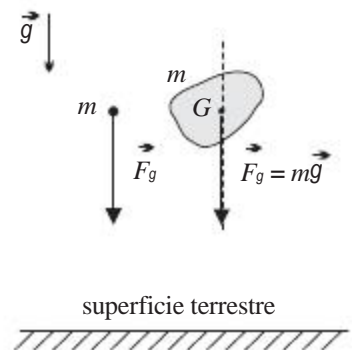
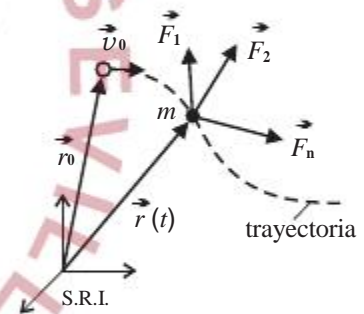
Ejemplos de fuerzas activas:

- \* Fuerza gravitatoria terrestre,  $F_g$ .

Aunque la interacción gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos (ley de gravitación universal), se admite la aproximación de que, en las inmediaciones de la superficie terrestre, el campo gravitatorio,  $g$ , es prácticamente uniforme y, en consecuencia, el peso de un cuerpo viene dado por:

$$F_g = P = mg \quad (\text{independiente de la posición})$$

siendo  $m$  en este caso la **masa gravitatoria** del cuerpo, la cual coincide experimentalmente con la masa inercial. En el caso de un sólido rígido, el peso total se aplica, a efectos mecánicos, en el centro de gravedad  $G$  (tal como se comentó al final del apartado 5 del tema *Vectores deslizantes*).



\* Fuerza elástica de Hooke,  $F_k$ .

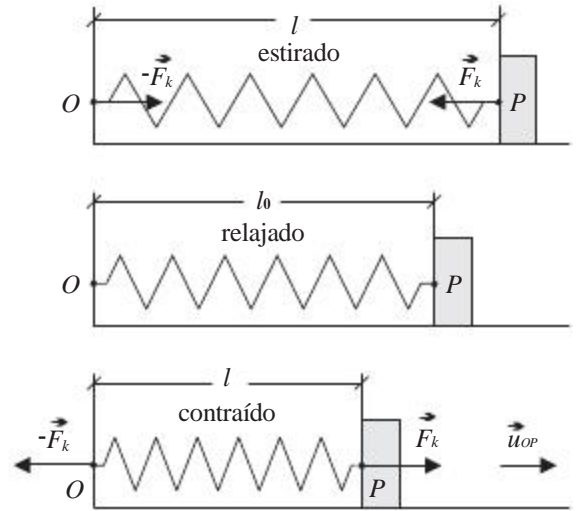
Si un resorte elástico,  $OP$ , de longitud natural  $l_0$  y constante  $k$ , se contrae o se estira una longitud moderada  $\Delta l = l - l_0$ , entonces ejerce sobre su extremo  $P$  una fuerza recuperadora (tendente a recuperar su longitud natural),  $F_k$ , que viene dada por la ley de Hooke:

$$F_k = -k \Delta l u_{OP} = -k(l - l_0) u_{OP} \quad (\text{con } |u_{OP}| = 1)$$

y, sobre su extremo  $O$ , ejerce otra fuerza,  $-F_k$ , de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto.

En el caso particular de que la longitud natural del resorte sea nula ( $l_0 = 0$ ), se tendrá:

$$F_k = -kl u_{OP} = -k \overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{PO} \quad (\text{siempre atractiva})$$



## 2.2. Punto material vinculado. Principio de liberación.

Si un punto material, además de estar sometido a fuerzas activas, está sujeto a **vínculos** (también llamados enlaces o ligaduras), es decir, si está sujeto a limitaciones en su posición o movimiento, se dice que se trata de un punto material vinculado.

La mayoría de los vínculos (los denominados *bilaterales*) se traducen matemáticamente en la obligación por parte del punto material de satisfacer una **ecuación de ligadura** del tipo:

$$f(r, \dot{r}, t) = 0$$

Atendiendo a sus características, existen diversas clasificaciones de los vínculos. Así, por ejemplo, se dice que el vínculo es *esclerónomo* cuando el tiempo no aparece explícitamente en la ecuación de ligadura (*reónomo*, en caso contrario). El vínculo es *geométrico* si no aparece explícitamente ninguna componente de velocidad en la ecuación de ligadura, es decir, si el vínculo tan sólo impone condiciones a las coordenadas posicionales (*cinemático*, en caso contrario). Por último, otra clasificación interesante es la que distingue entre vínculos *lisos* (sin rozamiento) y vínculos *rugosos* (con rozamiento).

La existencia de vínculos implica una reducción en el número,  $r$ , de grados de libertad del punto material, que pasa a ser  $r = 3 - h$ , donde  $h$  es el número de ecuaciones de ligadura. Para abordar el problema del movimiento de un punto material vinculado, se hace necesario formular el siguiente **principio de liberación**:

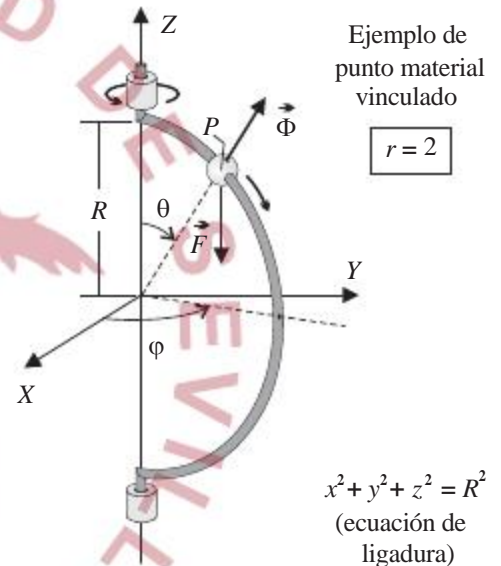
*Todo punto material o sistema de puntos materiales sometido a vínculos puede ser tratado como si estuviese libre de los mismos si se sustituyen dichos vínculos por las denominadas fuerzas de reacción vincular  $\Phi_k$ , las cuales presentan las siguientes características:*

- cumplen la misma función que los vínculos sustituidos, es decir, se oponen a cualquier estado de reposo o movimiento que sea incompatible con ellos;
- son perpendiculares a los vínculos geométricos cuando estos consisten en superficies o curvas lisas (sin rozamiento).

Por tanto, el tratamiento de la dinámica de un punto material vinculado requiere, en virtud del principio de liberación, la incorporación a las ecuaciones de las **fuerzas de reacción vincular**  $\Phi_k$  (en adelante, f.r.v.), las cuales, por ser desconocidas a priori, introducen nuevas *incógnitas* en el problema matemático:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{nm} F_i(t, r, \dot{r}) + \Phi_k \\ f_j(r, \dot{r}, t) \quad (\text{con } j = 1, \dots, h) \end{cases} \rightarrow \text{ecuaciones de ligadura}$$

No obstante, la compatibilidad de este sistema de ecuaciones exige que el número de incógnitas introducidas a través de las f.r.v. sea igual al número,  $h$ , de ecuaciones de ligadura.



### 3. Integrales primeras: teoremas de conservación.-

Una vez comprobado que las ecuaciones dinámicas de un punto material son ecuaciones diferenciales de segundo orden, un primer paso en el proceso de resolución de las mismas consiste en la búsqueda de **integrales primeras**: funciones de la posición y la velocidad del punto material que se conservan constantes a lo largo del tiempo.

A continuación, partiendo de la segunda ley de Newton, deduciremos algunos teoremas importantes en los que intervienen nuevas magnitudes (energía, cantidad de movimiento, momento cinético) que son susceptibles de constituir integrales primeras en aquellos problemas en que se den las condiciones adecuadas.

Por razones de comodidad, supondremos en adelante un punto material libre, aunque la validez de los teoremas se extiende al caso de que existan vínculos sin más que incorporar las correspondientes f.r.v. También asumiremos de forma implícita que, en tanto no se diga lo contrario, todas las magnitudes cinemáticas y dinámicas asociadas al punto material serán relativas a un sistema de referencia inercial (S.R.I.).

#### 3.1. Teorema de la energía.

El **trabajo** elemental,  $\delta W$ , realizado por una fuerza,  $F$ , que actúa sobre un punto material, cuando éste sufre un desplazamiento infinitesimal,  $dr$ , se define como:

$$\delta W = F \cdot dr$$

de donde, sustituyendo  $F$  de acuerdo con la segunda ley de Newton y operando, se obtiene:

$$\delta W = ma \cdot dr = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = mv \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt} = dT$$

siendo  $T$  la **energía cinética** del punto material:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

La igualdad entre el trabajo elemental realizado sobre el punto material y la variación infinitesimal de su energía cinética constituye la *versión elemental* del **teorema de la energía** (T.E.), el cual también recibe otras denominaciones como son *teorema de la energía cinética*, *teorema del trabajo-energía cinética* y *teorema de las fuerzas vivas*:

$$\delta W = dT$$

Por integración a lo largo de una trayectoria finita (entre dos puntos  $A$  y  $B$ ), se obtiene la *versión finita* del T.E.:

$$W_A^B = \int_A^B F \cdot dr = \frac{1}{2} m [v(t_B)]^2 - \frac{1}{2} m [v(t_A)]^2 = \Delta T$$

Introduciendo el concepto de potencia instantánea  $P_W$  (trabajo realizado por unidad de tiempo):

$$P_W = \frac{\delta W}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

se obtiene la *versión instantánea* del T.E.:

$$P_W = \frac{\delta W}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

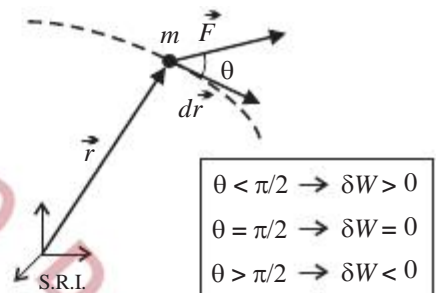
A partir del T.E., y teniendo en cuenta la naturaleza de las fuerzas presentes en cada problema, se pueden deducir algunos teoremas de conservación que facilitan la obtención de integrales primeras:

- **Teorema de conservación de la energía cinética.**

*Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula o perpendicular a la trayectoria del mismo, su energía cinética se conserva constante a lo largo del tiempo.*

Demostración:

$$\begin{aligned} &\text{si } F = 0, \\ &\text{o bien, } F \perp dr \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \delta W = F \cdot dr = 0 \quad \Rightarrow \quad dT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{cte}$$





• **Teorema de conservación de la energía mecánica.**

Se dice que una fuerza es **conservativa**,  $F^C$ , si el trabajo que realiza sobre un punto material que se desplaza depende de sus posiciones inicial y final, pero es independiente de la trayectoria concreta que sigue. Asociada a toda fuerza conservativa, se puede definir una función de la posición (denominada **energía potencial**,  $U$ ) de tal modo que el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un desplazamiento del punto material coincide con la variación -cambiada de signo- que experimenta dicha función  $U$ :

$$\delta W = F^C \cdot dr = -dU, \quad \text{e integrando} \quad \rightarrow \quad W_A^B = \int_A^B F^C \cdot dr = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

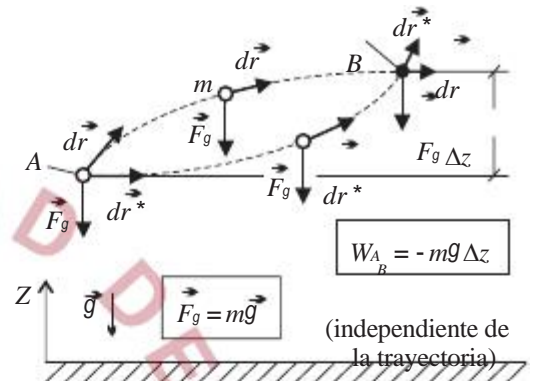
Conocida una fuerza conservativa, la obtención de su energía potencial asociada se realiza por integración, apareciendo en el proceso una constante de libre elección (origen de energía potencial).

Veamos dos ejemplos:

\* Fuerza gravitatoria terrestre,  $F_g$ .

Considerando el campo gravitatorio  $g$  en el sentido negativo del eje  $Z$ , se tiene:

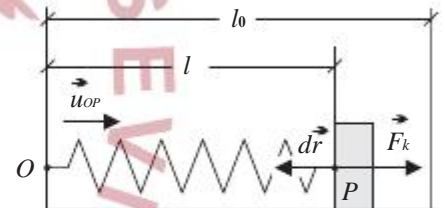
$$\begin{aligned} \delta W &= F_g \cdot dr = mg \cdot dr = -mgk \cdot (dx i + dy j + dz k) = \\ &= -mg dz = -dU \\ \Rightarrow U &= U(0) + \int_0^z mg dz = U(0) + mgz \end{aligned}$$



\* Fuerza elástica de Hooke,  $F_k$ .

Considerando fijo el extremo  $O$  del resorte, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta W &= F_k \cdot dr = -k(l - l_0) u_{OP} \cdot dl u_{OP} = -k(l - l_0) dl = -dU \\ \Rightarrow U &= U(l_0) + \int_{l_0}^l k(l - l_0) dl = U(l_0) + \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 \end{aligned}$$



El proceso inverso, es decir, la obtención de una fuerza (conservativa) a partir de su energía potencial asociada, es aun más sencillo puesto que consiste en derivar y cambiar el signo.

Una vez definido el concepto de fuerza conservativa, enunciemos el teorema de conservación de la energía mecánica:

*Si las fuerzas que realizan trabajo sobre un punto material son todas conservativas, su energía mecánica  $E$  (suma de las energías cinética y potencial) se conserva constante a lo largo del tiempo.*

Demostración:

$$\delta W = F^C \cdot dr = -dU = dT \quad \Rightarrow \quad dT + dU = 0 \quad \Rightarrow \quad d(T + U) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + U = \text{cte}$$

Por último, cabe señalar que, en el caso de que fuerzas no conservativas,  $F^{NC}$  (por ejemplo, fuerzas de rozamiento), realicen trabajo sobre un punto material, la variación de su energía mecánica coincidiría precisamente con dicho trabajo no conservativo:

$$\delta W = F^C \cdot dr + F^{NC} \cdot dr = -dU + \delta W^{NC} = dT \quad \Rightarrow \quad \delta W^{NC} = dT + dU = dE \quad \Rightarrow \quad W^{NC} = \Delta E$$

**3.2. Teorema de la cantidad de movimiento.**

Se define la **cantidad de movimiento**,  $p$ , de un punto material como el producto de su masa por su velocidad:  $p = mv$

Derivando respecto al tiempo (a masa constante) y teniendo presente la segunda ley de Newton, se obtiene:

$$\boxed{\frac{dp}{dt}} = m \frac{dv}{dt} = ma = \boxed{F}$$



Esta igualdad entre la fuerza neta que actúa sobre un punto material y la derivada temporal de su cantidad de movimiento constituye el **teorema de la cantidad de movimiento** (T.C.M.) en su *versión instantánea*.

En sus *versiones elemental y finita*, el T.C.M. recibe el nombre alternativo de teorema del **impulso mecánico**:

$$\int_{t_A}^{t_B} F dt$$

ya que es con este nombre como se conoce al producto  $F dt$  (impulso elemental) y a su integral en un intervalo de tiempo finito.

A partir del T.C.M., se puede deducir el siguiente **teorema de conservación de la cantidad de movimiento**:

*Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material es nula, su cantidad de movimiento permanece constante a lo largo del tiempo.*

Demostración:  $F = 0 \implies \frac{dp}{dt} = 0 \implies p = \text{cte}$

Proyectando este teorema de conservación vectorial sobre una dirección fija (representada por un vector unitario constante  $v$ ), se obtiene un teorema de conservación para componentes de la cantidad de movimiento:

$$F \cdot v = 0 \implies \frac{d(p \cdot v)}{dt} = 0 \implies p \cdot v = \text{cte}$$

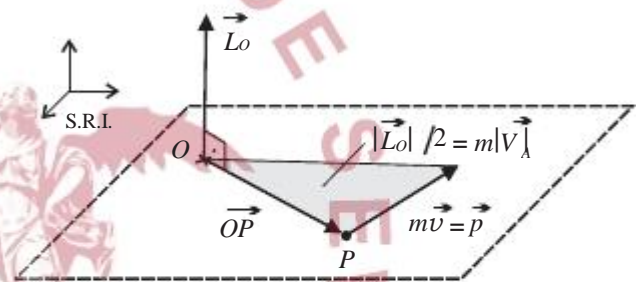
### 3.3. Teorema del momento cinético.

Se define el **momento cinético**,  $L_O$ , de un punto material  $P$  respecto a un punto geométrico  $O$  como:

$$L_O = \vec{OP} \wedge m\vec{v}$$

Derivando respecto al tiempo y teniendo presente el teorema de la cantidad de movimiento, se deduce el siguiente **teorema del momento cinético** (T.M.C.) para un punto fijo  $O$ :

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{d(\vec{OP} \wedge m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OP} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0 + \vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$



el cual establece que la derivada temporal del momento cinético de un punto material respecto a un punto fijo  $O$  es igual al momento,  $\vec{M}_O$ , respecto a dicho punto  $O$ , de la fuerza neta  $F$  que actúa sobre el punto material.

A partir del T.M.C., se puede deducir el siguiente **teorema de conservación del momento cinético**:

*Si la fuerza neta que actúa sobre un punto material  $P$  es nula o es central con centro en un punto fijo  $O$ , su momento cinético respecto al punto  $O$  permanece constante a lo largo del tiempo.*

Demostración:

si  $F = 0$ ,  
o bien,  $F = \vec{OP}$   $\implies \vec{M}_O = \vec{OP} \wedge F = 0 \implies \frac{dL_O}{dt} = 0 \implies L_O = \text{cte}$

Proyectando este teorema de conservación vectorial sobre una dirección fija (representada por un vector unitario constante  $v$ ), se obtiene un teorema de conservación para componentes del momento cinético:

$$\vec{L}_O \cdot v = \text{cte}$$

**Nota:** Obsérvese que, conforme a la segunda ley de Newton, una fuerza central produce un movimiento central (apartado 6.5 del tema *Cinemática del punto*), y que la conservación del momento cinético guarda íntima relación con el valor constante del vector velocidad areolar. En efecto:

$$F = \vec{OP} \implies L_O = 2m\vec{V}_A = \text{cte}$$

### 4. Dinámica en sistemas de referencia no inerciales.-

La ley de composición de aceleraciones (teorema de Coriolis) establece que:

$$a_{21}^P = a_{20}^P + a_{01}^P + 2\omega_{01} \wedge v_{20}^P$$

Supongamos que el sólido “1” es un sistema de referencia inercial, mientras que el sólido “0” es un sistema de referencia no inercial (es decir,  $a_{01}^P = 0$  y/o  $\omega_{01} = 0$ ). Entonces, conforme a la segunda ley de Newton (de obligado cumplimiento en sistemas de referencia inerciales), se tiene que:

$$F = ma_{21}^P = m(a_{20}^P + a_{01}^P + 2\omega_{01} \wedge v_{20}^P)$$

ecuación que permite comprobar que, en principio, la segunda ley de Newton no se cumple para el observador no inercial “0”, ya que:

$$F = ma_{20}^P$$

No obstante, despejando el término  $ma_{20}^P$ , se obtiene:

$$ma_{20}^P = F - ma_{01}^P - 2m\omega_{01} \wedge v_{20}^P = F + F_{arr} + F_{cor}$$

de donde se deduce que el observador no inercial “0” podrá aplicar las leyes de Newton siempre que considere que el punto material  $P$  se halla sometido, además de a la fuerza neta real  $F$ , a las siguientes **fuerzas de inercia**:

$$\begin{aligned} -ma_{01}^P &= F_{arr} && \text{(fuerza de arrastre)} \\ -2m\omega_{01} \wedge v_{20}^P &= F_{cor} && \text{(fuerza de Coriolis)} \end{aligned}$$

Las fuerzas de inercia presentan las siguientes características:

- Son fuerzas aparentes o ficticias (inexistentes para los observadores inerciales), pero tienen, para el observador no inercial, propiedades análogas a las de las fuerzas reales (pueden producir trabajo, pueden ser conservativas, etc.).
- Son fuerzas proporcionales a la masa inercial.
- No conllevan la introducción de nuevas incógnitas en el problema dinámico  $\{20\}$  (supuesto conocido el movimiento no inercial  $\{01\}$ ).

### 5. Aproximación a la dinámica de un rotor.-

La dinámica del sólido rígido será estudiada con carácter general en la asignatura *Mecánica Racional* (segundo curso). No obstante, realizaremos aquí una breve aproximación al problema específico del movimiento de un *rotor* (sólido que rota alrededor de un eje fijo,  $\Delta_{EPR}$ ).

Tal como ya sabemos (apartados 6.2 de *Cinemática del punto* y 3.1 de *Cinemática del sólido rígido*), si el sólido rota alrededor del  $\Delta_{EPR}$  con velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$ , cada punto  $P$  del sólido se mueve en un plano perpendicular al  $\Delta_{EPR}$ , realizando un movimiento circular de centro en el  $\Delta_{EPR}$ , radio  $r = d(P, \Delta_{EPR})$ , velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$ .

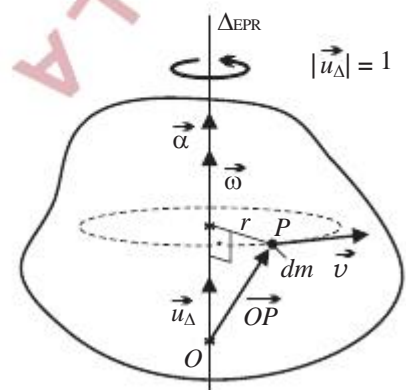
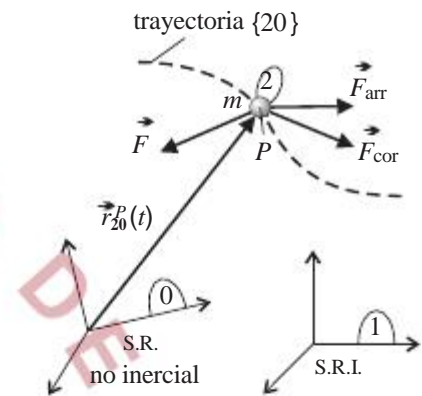
#### 5.1. Energía cinética de rotación. Momento de inercia.

La energía cinética de un sistema de puntos materiales en general (y de un sólido rígido, en particular) se define como la suma de las energías cinéticas de todos sus puntos. Así que, en el caso del rotor, asignando la masa infinitesimal  $dm$  al punto genérico  $P$ , teniendo presente que la velocidad escalar de dicho punto es  $v = r\omega$ , e integrando en toda la distribución de masa, se obtiene:

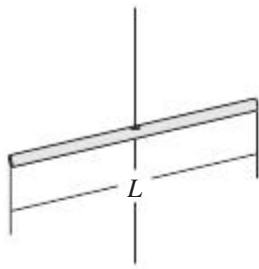
$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int r^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} I \omega^2$$

donde  $I$  es el **momento de inercia** del sólido respecto al eje de rotación:

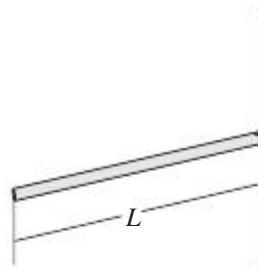
$$I = \int r^2 dm$$



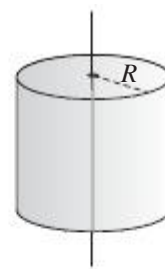
El momento de inercia es una medida de la resistencia del sólido a experimentar modificaciones en su movimiento de rotación alrededor de un eje. Es el análogo rotacional de la masa inercial. Obsérvese que el valor del momento de inercia depende del sólido (de su distribución geométrica de masa), pero también depende de la ubicación del eje de rotación.



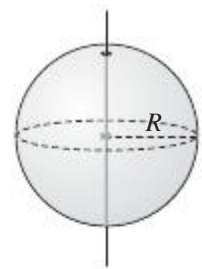
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Momento de inercia de algunos sólidos homogéneos (de masa  $M$ )

## 5.2. La segunda ley de Newton para la rotación.

Al elemento de masa situado en el punto genérico  $P$  del rotor, se le asocia el siguiente momento cinético infinitesimal respecto a un punto  $O$  del  $\Delta_{EPR}$ :

$$dL_O = \vec{OP} \wedge \vec{v} dm$$

cuya componente axial (denominando  $u_\Delta$  a un vector unitario en la dirección del  $\Delta_{EPR}$ ) viene dada por:

$$u_\Delta \cdot dL_O = u_\Delta \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{v}) dm = \vec{v} \cdot (u_\Delta \wedge \vec{OP}) dm = |\vec{v}| |u_\Delta \wedge \vec{OP}| dm = v \underbrace{\text{proy}_{\perp u_\Delta} [OP]}_{= r} dm = vr dm = \omega r^2 dm$$

Integrando  $dL_O$  en toda la distribución de masa, se obtiene lo que se conoce como momento cinético,  $L_O$ , del sólido rígido:

$$L_O = \int \vec{OP} \wedge \vec{v} dm$$

cuya componente axial viene dada por:

$$u_\Delta \cdot L_O = \int u_\Delta \cdot dL_O = \int \omega r^2 dm = \omega \int r^2 dm = I\omega$$

Derivando esta última ecuación respecto al tiempo, se obtiene:

$$u_\Delta \cdot \frac{dL_O}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Por otra parte, el T.M.C. para el sólido rígido (obtenido mediante la integración de la ecuación del T.M.C. asociado al elemento de masa que ocupa el punto genérico  $P$ ) establece que:

$$\frac{dL_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \rightarrow u_\Delta \cdot \frac{dL_O}{dt} = u_\Delta \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = M_\Delta^{\text{ext}}$$

$\rightarrow$   $u_\Delta \cdot \frac{dL_O}{dt}$  es el momento resultante (respecto a  $O$ ) de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido rígido, y  $M_\Delta^{\text{ext}}$  es la componente axial de  $\vec{M}_O^{\text{ext}}$ . El superíndice  $\text{ext}$  se debe a que los momentos de fuerzas internas que se ejercen entre sí las partículas de un sistema se anulan por pares, y, por ello, el momento resultante de fuerzas que actúa sobre el sistema coincide con el momento resultante de las fuerzas externas.

Finalmente, igualando las dos expresiones halladas para  $u_\Delta \cdot \frac{dL_O}{dt}$ , se obtiene la que algunos autores denominan *segunda ley de Newton para la rotación*:

$$M_\Delta^{\text{ext}} = I\alpha$$

# ESTÁTICA

## 1. Introducción.-

Dado un sistema de puntos materiales, una **posición de equilibrio mecánico** es una posición tal que, si el sistema es abandonado en ella en reposo inicial, entonces permanece allí por tiempo indefinido convirtiéndose el reposo en permanente.

Al igual que ocurre con el movimiento, el concepto de equilibrio es inherentemente relativo a un sistema de referencia u observador. Por simplicidad, consideraremos que el equilibrio de un sistema de puntos materiales se refiere siempre a un observador único e inercial.

La **Estática** es la rama de la Mecánica que se ocupa del estudio del equilibrio mecánico en los sistemas de puntos materiales.

Evidentemente, para que determinada posición de un sistema sea posición de equilibrio, el conjunto de fuerzas que actúa sobre el cuando la ocupa no puede ser arbitrario, sino que ha de cumplir ciertas condiciones. Aunque la justificación de las **condiciones de equilibrio mecánico** de los sistemas de puntos materiales corresponde al ámbito de la Dinámica, podemos adelantar aquí cuáles son en el caso de los dos modelos que nos interesan:

modelo	condiciones de equilibrio mecánico
punto material	nulidad de la resultante de las fuerzas
sólido rígido	nulidad de la resultante y del momento resultante de las fuerzas externas

## 2. Equilibrio del punto material.-

Desde un punto de vista cinemático, si un punto material es abandonado inicialmente en reposo (velocidad nula) en cierta posición, se quedaría allí de forma permanente si y sólo si su aceleración es nula. Ahora bien, sabemos que el comportamiento dinámico del punto material se rige mediante la segunda ley de Newton, la cual establece que el producto de masa por aceleración es igual a la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre el punto (tanto activas,  $F_i$ , como de reacción vincular,  $\Phi_k$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} ma = \sum_{i=1}^n F_i \quad \leftarrow \text{ punto libre} \\ ma = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{k=1}^m \Phi_k \quad \leftarrow \text{ punto vinculado} \end{array} \right.$$

Por tanto, es obvio que la condición necesaria y suficiente para que cierta posición de un punto material sea posición de equilibrio mecánico es la nulidad en ella de la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el punto:

punto material	nº de grados de libertad	fuerzas	condición de equilibrio mecánico
libre	$r = 3$	$\{F_i\}_{i=1}^n$	$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0$
vinculado	$r < 3$	$\{F_i\}_{i=1}^n, \{\Phi_k\}_{k=1}^m$	$R + \Phi = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{k=1}^m \Phi_k = 0$



## 2.1. Equilibrio del punto sobre una superficie lisa.

Un punto material,  $P$ , obligado a permanecer en todo instante sobre una superficie,  $S$ , lisa (sin rozamiento) es un caso particular de punto vinculado. Al estudiar el principio de liberación (apartado 2.2 del tema *Introducción a la Dinámica*, se enunció como característica de las fuerzas de reacción vincular (f.r.v.) su perpendicularidad a los vínculos geométricos lisos. Por tanto, en el caso presente, habrá de introducirse, en aplicación del principio de liberación, una f.r.v.  $\Phi$  expresable como:

$$\Phi = \lambda \vec{N}_S$$

donde  $\lambda$  (incógnita) es el módulo de la f.r.v., y  $\vec{N}_S$  (dato) es el vector unitario normal a la superficie  $S$  en el punto ocupado por la partícula  $P$ .

Recuérdese también que las f.r.v. cumplen la misma función que los vínculos sustituidos, es decir, se oponen a cualquier estado de reposo o movimiento que sea incompatible con ellos. Precisamente, en el caso que nos ocupa,  $\Phi$  es perpendicular a la superficie  $S$  porque el hecho de que ésta sea lisa conlleva que no ejerce oposición ni resistencia alguna ante movimientos tangenciales de la partícula, y sin embargo le prohíbe cualquier movimiento en su dirección normal.

Si se supone la existencia de un número arbitrario,  $n$ , de fuerzas activas  $F_i$  actuando sobre el punto material  $P$ , la condición de equilibrio mecánico viene dada en este caso por:

$$\sum_{i=1}^n F_i + \lambda \vec{N}_S = 0$$

Por último, conviene tener presente, con vistas a la resolución de problemas, que el punto vinculado a una superficie está obligado, tanto en su comportamiento dinámico como estático, a satisfacer la ecuación de la superficie (ecuación de ligadura).

## 2.2. Equilibrio del punto sobre una curva lisa.

Un punto material,  $P$ , obligado a permanecer en todo instante sobre una curva,  $C$ , lisa (sin rozamiento) es otro caso particular de punto vinculado. Al tratarse nuevamente de un vínculo geométrico liso, habrá de introducirse, en aplicación del principio de liberación, una f.r.v.  $\Phi$  perpendicular a la curva  $C$  y expresable, por tanto, como:

$$\Phi = \Phi_N \vec{N} + \Phi_B \vec{B}$$

donde  $\Phi_N$  y  $\Phi_B$  (incógnitas) son, respectivamente, las componentes intrínsecas normal y binormal de la f.r.v. en el punto de la curva ocupado por la partícula  $P$ .

Con la expresión propuesta, se garantiza que  $\Phi$  es perpendicular a la curva  $C$ , es decir, perpendicular a su dirección tangente  $\vec{T}$ :

$$\Phi \cdot \vec{T} = 0$$

Esto es consecuencia de que, dada la ausencia de rozamiento, no existe oposición ni resistencia alguna ante movimientos de la partícula tangenciales a la curva, mientras que, por el contrario, se le impide cualquier movimiento perpendicular a la misma.

Si se supone la existencia de un número arbitrario,  $n$ , de fuerzas activas  $F_i$  actuando sobre el punto material  $P$ , la condición de equilibrio mecánico viene dada en este caso por:

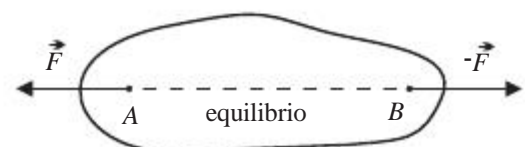
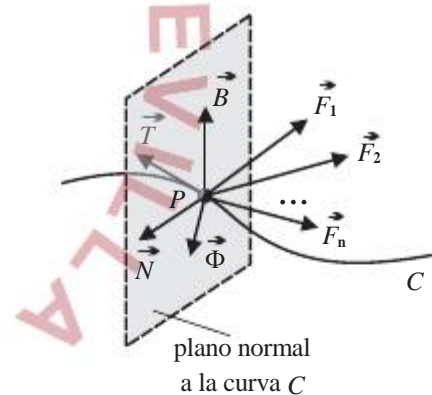
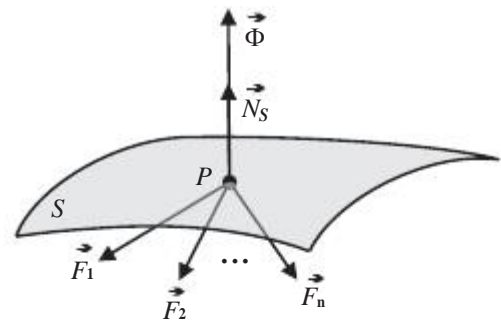
$$\sum_{i=1}^n F_i + \Phi_N \vec{N} + \Phi_B \vec{B} = 0$$

Por supuesto, el punto vinculado a una curva está obligado a satisfacer las ecuaciones de dicha curva (ecuaciones de ligadura).

## 3. Equilibrio del sólido rígido.-

### 3.1. Condición estática de rigidez. Teorema de transmisibilidad.

La **condición estática de rigidez** establece que: *si en dos puntos cualesquiera de un sólido rígido en equilibrio mecánico se aplican sendas fuerzas de módulos iguales e idéntica recta soporte, pero de sentidos opuestos, el equilibrio del sólido no se ve alterado.*



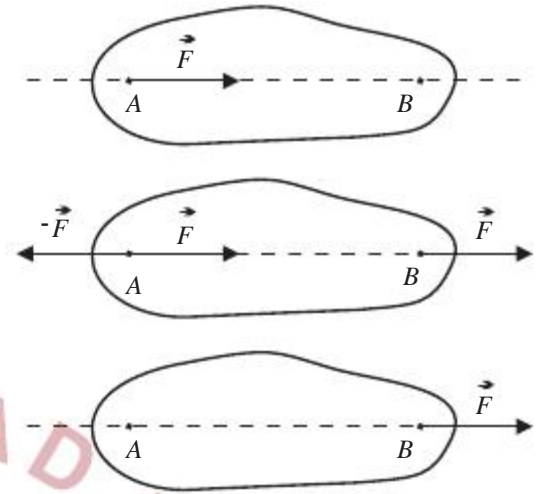


Una consecuencia de la condición estática de rigidez es el denominado **teorema de transmisibilidad**:

*Las fuerzas aplicadas sobre un sólido rígido se comportan como vectores deslizantes.*

La **deducción del teorema** de transmisibilidad a partir de la condición estática de rigidez puede realizarse a través de los siguientes pasos:

1. Sea un sólido rígido en equilibrio mecánico que soporta una fuerza  $F$  aplicada en su punto  $A$  (dado que el sólido se halla en equilibrio,  $F$  no puede ser la única fuerza aplicada sobre él).
2. Sea  $B$  otro punto del sólido perteneciente a la recta soporte de la fuerza  $F$ . En aplicación de la condición estática de rigidez, se puede garantizar que el equilibrio mecánico del sólido se mantendrá si aplicamos sendas fuerzas  $-F$  y  $F$  en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente.
3. En el punto  $A$  se produce entonces la cancelación de la fuerza original  $F$  con la recién aplicada  $-F$ . Por tanto, comparando esta situación final con la inicial, se comprueba que el equilibrio mecánico del sólido se ha conservado a pesar de que, a todos los efectos, la fuerza original  $F$  ha deslizado, a lo largo de su recta soporte, desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$ .



La **validez del teorema** de transmisibilidad se extiende:

- tanto al ámbito de la Estática (se acaba de demostrar) como al de la Dinámica (asignatura *Mecánica Racional*);
- tanto a fuerzas activas ( $F_i$ ) como a fuerzas de reacción vincular ( $\Phi_k$ ).

### 3.2. Condiciones de equilibrio del sólido.

Para que cierta posición de un sólido rígido sea posición de equilibrio mecánico es necesario y suficiente que el sistema de fuerzas externas (vectores deslizantes) aplicadas al sólido en dicha posición se pueda reducir a un sistema nulo (resultante nula y momento resultante nulo):

sólido rígido	nº de grados de libertad	fuerzas externas	condiciones de equilibrio mecánico
libre	$r = 6$	$\{(F_i; P_i)\}_{ni=1}$	$\begin{cases} R = \sum_{i=1}^n F_i = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = 0 \end{cases}$
vinculado	$r < 6$	$\{(F_i; P_i)\}_{ni=1}$ $\{(\Phi_k; Q_k)\}_{k=1}^m$	$\begin{cases} R + \Phi = 0 \\ \vec{M}_O + \vec{\Gamma} = 0 \end{cases}$

Observaciones:

- No se ha utilizado el superíndice <sup>ext</sup> a pesar de que las únicas fuerzas que es necesario tener en cuenta al exigir las condiciones de equilibrio de un sólido rígido son las fuerzas externas. No obstante, cabe señalar que la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas valen también cero, ya que, como consecuencia del principio de acción y reacción, se produce la cancelación de los términos asociados a cada par de puntos.

- Los conjuntos  $\{\vec{R}; \vec{M}_O\}$  y  $\{\Phi; \vec{\Gamma}_O\}$ , formados por la resultante y el momento resultante en un punto  $O$  de los s.v.d. constituidos por las fuerzas activas y por las fuerzas de reacción vincular, se denominan, respectivamente, **reducción mecánica** y **reducción vincular** en el punto  $O$ . Por tanto, las condiciones de equilibrio para un sólido rígido se resumen en la nulidad de la reducción total de fuerzas externas (suma de la reducción mecánica y la reducción vincular en un punto  $O$  arbitrario).
- Al formular las condiciones de equilibrio de un sólido rígido, el centro de reducción  $O$  en el que se exige la nulidad del momento resultante de las fuerzas externas es de elección arbitraria por la sencilla razón de que la nulidad de la resultante de las fuerzas externas conlleva la uniformidad del correspondiente campo de momentos.
- Exigiendo la condición de equilibrio mecánico a cada uno de los puntos materiales que constituyen el sólido rígido y teniendo en cuenta el principio de acción y reacción para las fuerzas internas, podríamos demostrar con relativa facilidad que la nulidad de la resultante y del momento resultante de las fuerzas externas es condición *necesaria* de equilibrio para un sistema de puntos materiales (incluso aunque no sea un sólido rígido). Sin embargo, la justificación de que la nulidad de dichas magnitudes es además condición *suficiente* de equilibrio en el caso específico de un sólido rígido requiere el previo estudio de las ecuaciones dinámicas de este modelo.

#### 4. Desvinculación de sólidos.-

**Desvincular** un sólido rígido vinculado consiste en aplicarle el principio de liberación, es decir, sustituir los vínculos por las fuerzas de reacción vincular (f.r.v.) capaces de provocar los mismos efectos mecánicos que ellos.

Ahora bien, una desvinculación, para ser correcta, requiere que no se introduzcan más incógnitas de reacción vincular que las estrictamente necesarias. Por ello, conviene aplicar el siguiente **procedimiento general de desvinculación**, que tiene su fundamento en el ámbito de la Dinámica del sólido rígido:

- Para prohibir u ofrecer resistencia a la traslación de un sólido en cierta dirección, es necesario introducir una fuerza (de reacción vincular) en dicha dirección.
- Para prohibir u ofrecer resistencia a la rotación de un sólido alrededor de un eje con cierta dirección, es necesario introducir un momento de fuerza (de reacción vincular) en la dirección de dicho eje.

##### 4.1. Desvinculación de un contacto puntual y liso.

En el apartado 7 del tema *Movimiento relativo*, tuvimos oportunidad de analizar cinemáticamente el par de sólidos que se mueven manteniendo sus superficies en permanente contacto puntual. Concluimos en aquel estudio que el contacto puntual permanente constituye un vínculo entre dos sólidos por cuanto prohíbe la traslación relativa perpendicular al plano tangente  $\pi$ , a pesar de que permite la traslación paralela a  $\pi$  (deslizamiento), la rotación paralela a  $\pi$  (rodadura) y la rotación perpendicular a  $\pi$  (pivotamiento).

Entonces, admitiendo que el contacto es liso (no existe rozamiento), el procedimiento general de desvinculación nos lleva a introducir en este caso una única f.r.v. normal al plano tangente  $\pi$ :

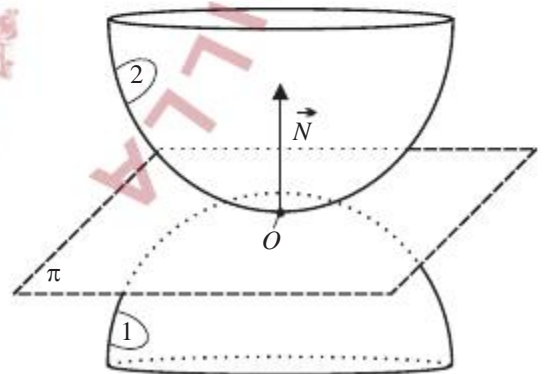
$$\text{traslación } \perp \pi \text{ prohibida} \Rightarrow \Phi_{21} = \vec{N}$$

Observación: En la notación de dos subíndices para fuerzas (análogamente para momentos de fuerza), el primer subíndice indica el sólido sobre el que se aplica la fuerza, mientras que el segundo subíndice indica el sólido que la ejerce.

##### 4.2. Desvinculación de pares de enlace usuales (lisos).

Así como un par de sólidos vinculados entre sí recibe la denominación de *par cinemático* cuando se analiza desde el punto de vista de los movimientos relativos permitidos, se prefiere sin embargo la denominación **par de enlace** cuando se trata de enfatizar el carácter restrictivo del vínculo, es decir, cuando se pretende subrayar los movimientos relativos prohibidos con miras a la desvinculación.

A pesar de su diversidad, los pares de enlace se reducen básicamente a contactos entre sólidos a través de superficies más o menos complejas en su forma (a veces también intervienen pequeños sólidos intermediarios). Teniendo esto presente, caben dos procedimientos, ambos equivalentes, para desvincular un par de enlace:



a) **Desvinculación punto a punto.**

Se basa en la equivalencia:

$$\text{par de enlace liso} \equiv \text{conjunto finito o infinito de contactos puntuales lisos}$$

Consiste en:

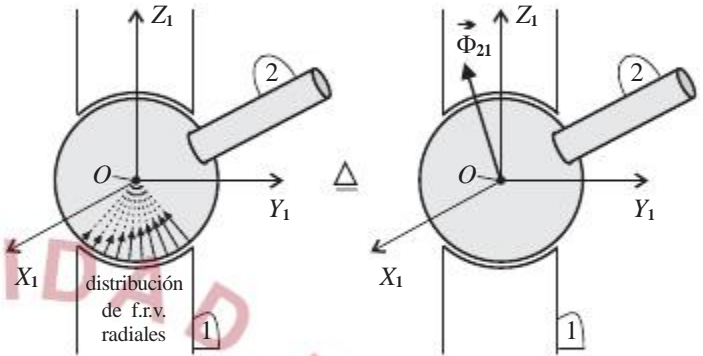
1. Desvincular todos los contactos puntuales lisos, dando lugar a una distribución de f.r.v. normales a los contactos.
2. Calcular la reducción vincular en un punto  $O$ ,  $\{\Phi; \vec{r}_O\}$ , de la citada distribución de f.r.v.

Ejemplo:

\* El par esférico (rótula).

La desvinculación punto a punto del contacto liso entre las dos superficies esféricas concéntricas genera una distribución continua de f.r.v. concurrentes, cuya reducción en el centro de concurrencia  $O$  resulta ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{21} = [\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z] \\ \vec{r}_{21}^O = [0, 0, 0] \end{array} \right.$$



b) **Desvinculación directa.**

Se basa en la equivalencia:

$$\text{par de enlace liso} \equiv \text{prohibición de ciertos movimientos relativos}$$

Consiste en aplicar el procedimiento general de desvinculación anteriormente citado:

- dirección prohibida para la traslación  $\Rightarrow$  f.r.v. en esa dirección
- dirección prohibida para eje de rotación  $\Rightarrow$  momento de f.r.v. en esa dirección

Ejemplo:

\* El par esférico (rótula).

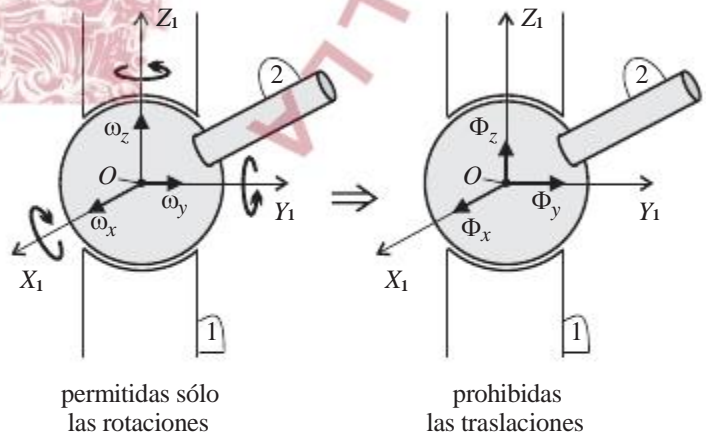
La prohibición vincular de las traslaciones en las tres direcciones independientes del espacio obliga a introducir una f.r.v. con componentes en las citadas tres direcciones. Dicho de otro modo, a la reducción cinemática (en  $O$ ):

$$\omega_{21} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$$

$$v_{21}^O = [0, 0, 0]$$

le corresponde la reducción vincular (en  $O$ ):

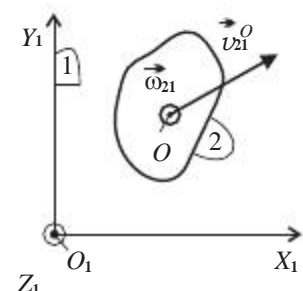
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{21} = [\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z] \\ \vec{r}_{21}^O = [0, 0, 0] \end{array} \right.$$



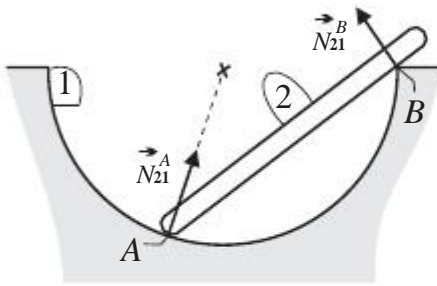
**Desvinculación de pares de enlace planos.**

La mayoría de los pares de enlace que vamos a tener que desvincular en los ejercicios prácticos propuestos en este tema corresponden a movimientos planos. Conviene por ello recordar que un sólido rígido en movimiento plano posee, como máximo, tres grados de libertad (dos de traslación paralela al plano del movimiento, y uno de rotación perpendicular a e1). La reducción cinemática (en un punto  $O$ ) de un sólido libre en el plano  $O_1X_1Y_1$  viene dada por:

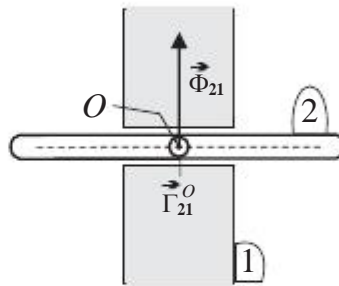
$$\omega_{21} = [0, 0, \omega_z]$$



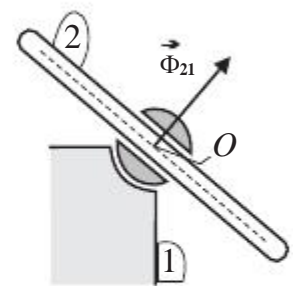
A continuación, se incluyen esquemas representativos de algunos de los tipos más usuales de pares de enlace planos (y lisos) con sus correspondientes desvinculaciones:



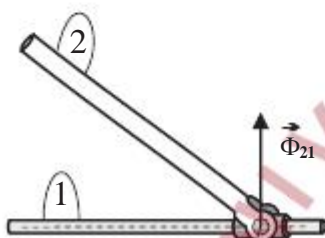
apoyos puntuales



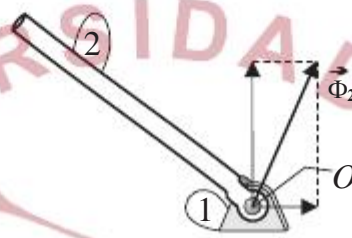
pasador fijo



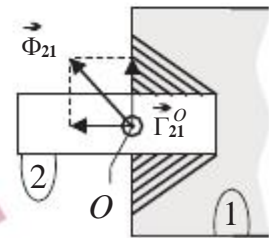
pasador giratorio



deslizadera



articulación



empotramiento

### 5. Teorema de las tres fuerzas.-

Dado un sólido rígido sometido a un sistema de tres fuerzas externas  $\{(F_A; \Delta_A), (F_B; \Delta_B), (F_C; \Delta_C)\}$  coplanarias y no paralelas, es condición necesaria (aunque no suficiente) de equilibrio mecánico que las tres fuerzas sean concurrentes.

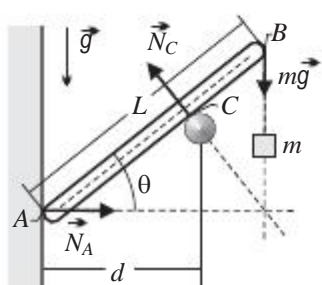
**Demostración:**



Se comprueba, por tanto, que la concurrencia de las tres fuerzas externas viene exigida por la 2ª condición de equilibrio (nulidad del momento resultante). Sin embargo, la citada concurrencia de fuerzas no es condición suficiente de equilibrio porque no garantiza la nulidad de la resultante (1ª condición de equilibrio).

Con independencia de la notación utilizada en la demostración del teorema, éste se aplica tanto para fuerzas activas como para fuerzas de reacción vincular.

**Aplicación:**



La varilla  $AB$ , de longitud  $L$  y masa despreciable, soporta un cierto peso colgado de su extremo  $B$ , mientras que descansa apoyada sin rozamiento sobre una pared vertical (en su extremo  $A$ ) y sobre un clavo (en un punto intermedio  $C$ ). La aplicación del teorema de las tres fuerzas establece como condición necesaria de equilibrio la concurrencia de las tres fuerzas externas presentes sobre la varilla ( $mg$ ,  $N_A$  y  $N_C$ ). Por tanto, analizando la geometría del problema, se puede determinar, en función de  $L$  y  $d$  (distancia entre el clavo y la pared), el único valor del ángulo  $\theta$  (entre la varilla y la horizontal) para el cual es posible el equilibrio:

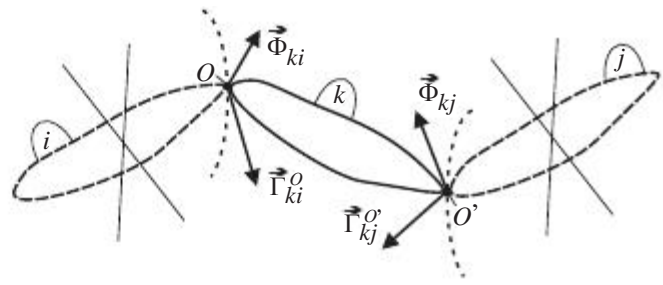
$$d = L [\cos(\theta)]^3 \implies \theta = \arccos (d/L)^{1/3}$$

No obstante, para que tal posición llegue a ser efectivamente posición de equilibrio, se requiere además que  $mg + N_A + N_C = 0$ .



### 6. Principio de fragmentación.-

Cuando se realiza una partición en un sistema de puntos materiales, cada fragmento continúa en idéntico estado de equilibrio o movimiento si se sustituye el resto del sistema por las reacciones vinculares de contacto que ejerce sobre dicho fragmento.

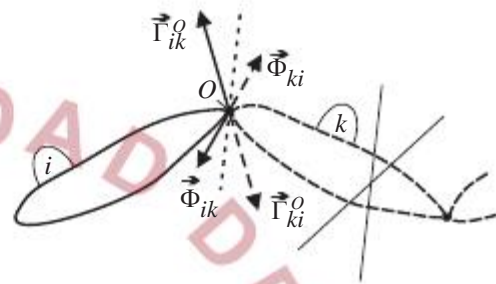


Se puede aplicar el principio de fragmentación a una **cadena de sólidos rígidos**, y entonces se tiene:

$$\{\Phi_{ki}; \Gamma_{ki}^O\} \rightarrow \text{reducción vincular del par de enlace } \{ki\} ; \quad \{\Phi_{kj}; \Gamma_{kj}^O\} \rightarrow \text{reducción vincular del par de enlace } \{kj\}$$

El principio de fragmentación guarda estrecha relación con el principio de liberación. En realidad, fragmentar una cadena equivale a liberar (desvincular) a cada uno de los sólidos que la constituyen.

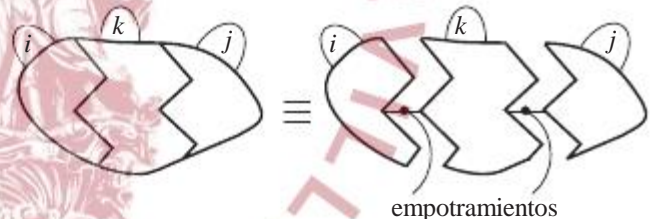
No obstante, al desvincular los fragmentos de una cadena para analizar su equilibrio o movimiento, hay que tener presente el principio de acción y reacción para no introducir incógnitas innecesarias:



$$\begin{cases} \Phi_{ik} = -\Phi_{ki} \\ \vec{\Gamma}_{ik}^O = -\vec{\Gamma}_{ki}^O \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi_{jk} = -\Phi_{kj} \\ \vec{\Gamma}_{jk}^O = -\vec{\Gamma}_{kj}^O \end{cases}$$

El equilibrio mecánico de una cadena de sólidos rígidos implica, conforme al principio de fragmentación, el equilibrio mecánico por separado de cada uno de los sólidos que la integran. Sin embargo, con frecuencia es útil aplicar también en las condiciones de equilibrio mecánico a la cadena como a un todo, es decir, exigir la nulidad de la reducción global de las fuerzas aplicadas a todos los sólidos. Esta operación, si bien no supone añadir información nueva respecto a la exigencia de equilibrio de cada sólido por separado, presenta la ventaja de provocar, en virtud del principio de acción y reacción, la desaparición de las incógnitas asociadas a las reacciones vinculares internas.

Por último, cabe señalar que, para la **fragmentación interna de un sólido rígido**, éste puede ser interpretado como una cadena de fragmentos sólidos vinculados mutuamente mediante empotramientos (vínculo que prohíbe todos los movimientos relativos posibles entre dos sólidos rígidos).

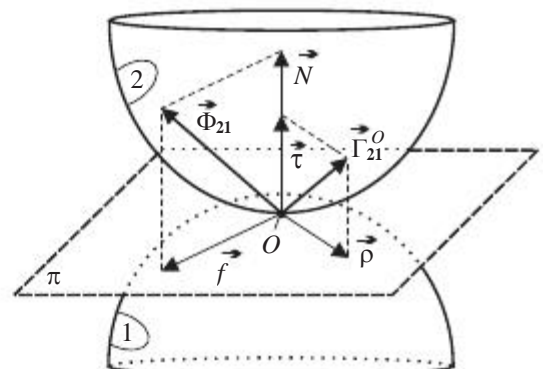


### 7. Contactos reales entre sólidos. Rozamiento seco de Coulomb.-

Hasta ahora, cuando hemos hablado de sólidos rígidos en contacto, nos hemos referido a contactos ideales que se caracterizaban por ser lisos (sin rozamiento) y puntuales (un único punto de contacto). Sin embargo, el **contacto real** entre sólidos es siempre **rugoso** (con rozamiento) y **superficial** (existe un área de contacto).

La reducción vincular en un punto O del contacto real entre sólidos viene dada por:  $\{\Phi_{21} = N + f; \Gamma_{21}^O = \tau + \rho\}$ , donde:

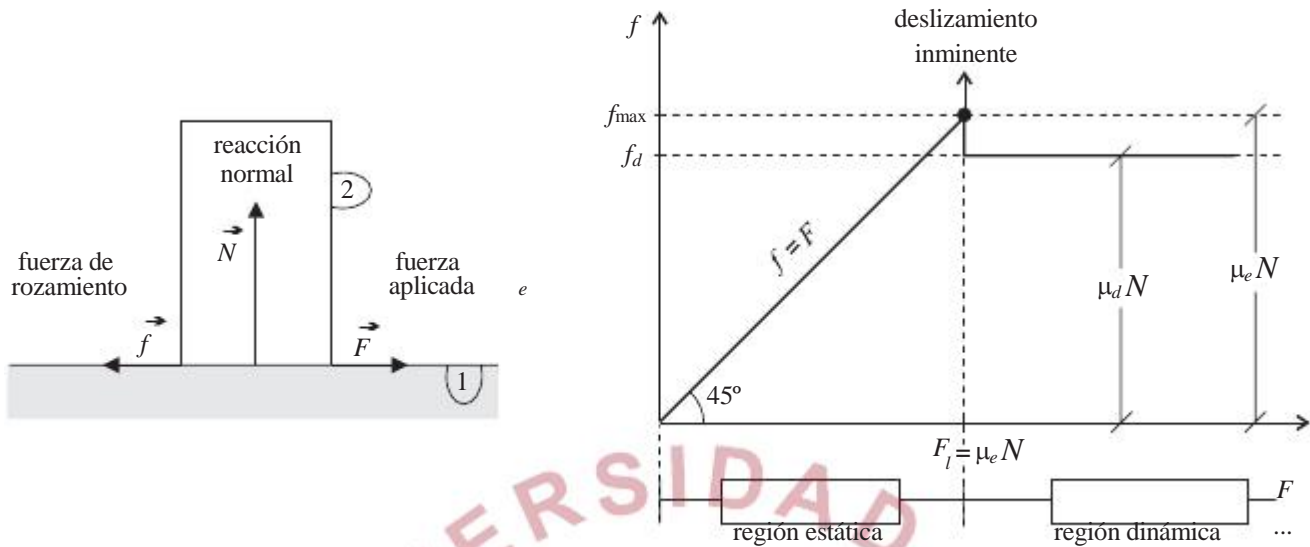
- $\vec{N} \rightarrow$  **Fuerza de reacción normal.**
- $f \rightarrow$  **Fuerza de resistencia al deslizamiento** (fuerza de rozamiento).
  - Impide el deslizamiento (traslación) o se opone a él.
  - Es paralela al plano tangente en el punto de contacto.
- $\tau \rightarrow$  **Par de resistencia al pivotamiento.**
  - Impide el pivotamiento (rotación) o se opone a él.
  - Es perpendicular al plano tangente en el punto de contacto.
- $\rho \rightarrow$  **Par de resistencia a la rodadura.**
  - Impide la rodadura (rotación) o se opone a ella.
  - Es paralela al plano tangente en el punto de contacto.





## 7.1. Estudio experimental de la fuerza de rozamiento.

Gráfica de módulos:



Modelo vectorial:

$$f = \begin{cases} -F & (\text{si } 0 \leq F \leq F_l = \mu_e N \text{ y } v_{21}^{\text{des}} = 0) \rightarrow \text{región estática} \\ -\mu_d N \frac{v_{21}^{\text{des}}}{|v_{21}^{\text{des}}|} & (\text{si } v_{21}^{\text{des}} \neq 0) \rightarrow \text{región dinámica} \end{cases}$$

Observaciones:

región estática	<ul style="list-style-type: none"> <li>– No se produce deslizamiento (v'nculo prohibitivo).</li> <li>– El rozamiento estático es la base fundamental de la locomoción por tierra.</li> </ul>
región dinámica	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Se produce deslizamiento (v'nculo resistivo).</li> <li>– Se produce disipación de energía calorífica y deterioro irreversible de las superficies de contacto.</li> <li>– El rozamiento dinámico puede ser efecto indeseado (p'erdidas energéticas y deterioro de piezas) o deliberadamente buscado (procesos de frenado, calentamiento por fricción, lijado de superficies).</li> </ul>

## 7.2. Leyes de Coulomb.

1. La fuerza de rozamiento alcanza su módulo máximo,  $f_{max}$ , cuando el deslizamiento es inminente, y dicho módulo máximo es proporcional a la reacción normal,  $N$ , que se transmite a través de la superficie de contacto:

$$f_{max} = \mu_e N \quad (\text{para } F = F_l \text{ y } v_{21}^{\text{des}} = 0)$$

donde  $\mu_e$  es el coeficiente de rozamiento estático (característico del contacto entre dos materiales).

2. El módulo máximo,  $f_{max}$ , de la fuerza de rozamiento es independiente del área de la superficie de contacto.
3. El módulo,  $f_d$ , de la fuerza de rozamiento dinámico es proporcional a la reacción normal,  $N$ , independiente de la velocidad de deslizamiento y algo menor que el módulo máximo,  $f_{max}$ , de la fuerza de rozamiento:

$$f_d = \mu_d N \quad (\text{para } v_{21}^{\text{des}} \neq 0)$$

donde  $\mu_d$  es el coeficiente de rozamiento dinámico ( $\mu_d < \mu_e$ ).

Lo característico del modelo de rozamiento seco de Coulomb es la independencia de la fuerza de rozamiento dinámico con respecto al módulo de la velocidad de deslizamiento. En otros modelos de rozamiento (fuerzas viscosas o de arrastre), la fuerza de rozamiento dinámico es proporcional al módulo de la velocidad (si está es moderada) o a su cuadrado (si la velocidad es alta).

### 7.3. Deslizamiento inminente y vuelco inminente.

Cuando se considera el módulo,  $f$ , de la fuerza de rozamiento en problemas de equilibrio mecánico (región estática del modelo de Coulomb), pueden presentarse hasta tres situaciones distintas:

- a) La **situación más general** es aquella en la que se desconoce cómo de próximo se encuentra el sistema respecto a un eventual deslizamiento. En ese caso,  $f$  es una incógnita de la que sólo se conoce a priori una cota superior, ya que la *condición de no deslizamiento* establece que:

$$f \leq \mu_e N$$

- b) Si la situación es de **deslizamiento inminente**, entonces  $f$  no es una incógnita, ya que la *condición de deslizamiento inminente* establece que:

$$f = \mu_e N$$

- c) Si la situación es de **deslizamiento imposible**, entonces  $f$  es una incógnita que en principio no tiene cota superior alguna. Cabe interpretar que esta situación corresponde a un vínculo completamente ajeno a los fenómenos de rozamiento (*vínculo cremallera o engranaje*), o bien que corresponde a un caso límite de rozamiento estático con coeficiente  $\mu_e \rightarrow \infty$ .

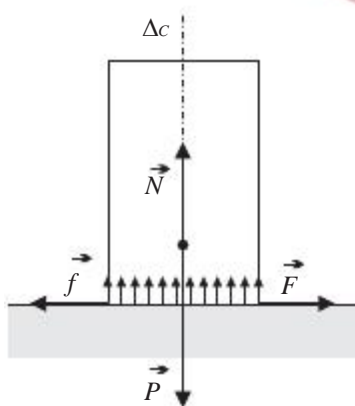
Finalmente, para completar el estudio del equilibrio mecánico del sólido rígido, conviene incorporar el riesgo de **vuelco** de este como consecuencia de la existencia de rozamiento en una superficie plana de contacto.

Observaciones:

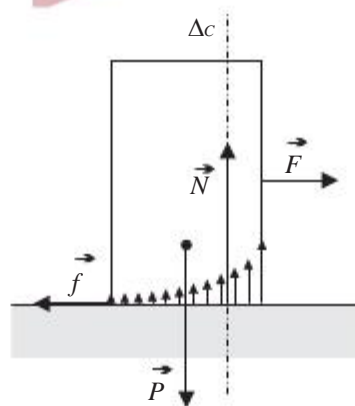
- La reacción normal que la superficie plana transmite al sólido es en realidad una fuerza distribuida (sistema de vectores deslizantes paralelos) cuya reducción canónica es  $(\vec{N}; \Delta_C)$ .
- Cuando la fuerza aplicada,  $F$ , y la fuerza de rozamiento,  $f$ , están desalineadas y crean sobre el sólido un *par de vuelco* (o momento de vuelco), éste debe ser neutralizado por un *par de anti-vuelco* (ya que el equilibrio mecánico exige momento resultante nulo). Se produce por ello una redistribución de la reacción normal que provoca un desplazamiento de su eje central  $\Delta_C$ , de tal modo que el peso,  $P$ , y la resultante de reacción normal,  $\vec{N}$ , son ahora capaces de evitar el vuelco creando el necesario par neutralizador.

La **condición de no vuelco** exige que el eje central  $\Delta_C$  de la reacción normal distribuida, aunque se haya desplazado para evitar el vuelco, quede dentro de la superficie de contacto o, al menos, situado entre los puntos extremos del contacto.

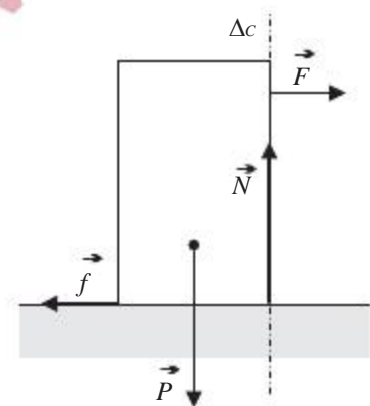
La **condición de vuelco inminente** consiste en que el eje central  $\Delta_C$  de la reacción normal redistribuida pase justamente por el borde de la superficie de contacto o por alguno de los puntos extremos del mismo.



no hay par de vuelco



condición de no vuelco



condición de vuelco inminente