

$$\begin{array}{r|l}
 s^4 & 1 \quad 0 \quad -1 \\
 s^3 & 1 \quad -1 \quad 0 \\
 s^2 & 1 \quad -1 \quad 0 \\
 s & \varepsilon \quad 0 \\
 s^0 & -1 \quad 0
 \end{array}$$

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon}{\varepsilon} = -1$$

Por lo tanto el sistema es inestable.

Sin embargo el cálculo de la tabla no era necesario ya que la ecuación característica posee dos coeficientes negativos y hay uno ausente, se podría concluir directamente que el sistema es inestable.

Ejemplo 9.

Determinar la estabilidad del siguiente sistema:

$$s \quad 2s \quad 3s \quad 6s \quad 5s \quad 3 \quad 0$$

Le tabla de Routh es:

$$\begin{array}{r}
 s \ 1 \ 3 \ 5 \\
 s \ 2 \ 6 \ 3 \\
 s \ 0 \rightarrow \varepsilon \ 7/2 \ 0 \\
 s \ \infty \ 3 \ 0 \\
 s \ 7/2 \ 0 \\
 s \ 3 \ 0
 \end{array}$$

Le sistema es inestable.

Criterio de estabilidad de Hurwitz

Este criterio es otro método para determinar si todas las raíces de una ecuación característica tienen partes reales negativas.

Este criterio se aplica por medio del uso de determinantes formados con los coeficientes de la ecuación característica.

Estos determinantes Δ_i (con $i = 1, 2, \dots, n-1$) se forman con los menores principales del determinante siguiente:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
 a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
 a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ par} \end{pmatrix} & \dots & 0 \\
 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{pmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ par} \\ a_1 \text{ si } n \text{ impar} \end{pmatrix} & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & & \\
 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \ddots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_0
 \end{vmatrix}$$

Más específicamente los determinantes se forman de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a Δ_n donde n es el orden de la ecuación característica del sistema.

El criterio de Hurwitz dice que dice que todas las raíces de la ecuación característica serán negativas o con parte real negativa si los determinantes son positivos ($\Delta_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$).

Por supuesto al igual que para el criterio de Routh si existe algún coeficiente ausente o negativo en la ecuación característica se puede concluir que el sistema es inestable y no es necesario aplicar el método.

Ejemplo 10. Determinar la estabilidad del sistema siguiente usando el criterio de Hurwitz:

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4^{to} orden:

$$\Delta_1 = a_3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 (a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2)$$

Por lo tanto el sistema será estable si:

$$a_3 > 0$$

$$a_3a_2 - a_4a_1 > 0$$

$$a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0$$

$$a_0 (a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2) > 0$$

Ejemplo 11. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 3 por ser el sistema de 3^{er} orden:

$$\Delta_1 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112$$

Como todos los determinantes son positivos entonces el sistema es estable.

Ejemplo 12. Determinar si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o inestable:

$$8s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$$

Obtenemos entonces los determinantes de Hurwitz, que en este caso serán 4 por ser el sistema de 4^{to} orden:

$$\Delta_1 = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -107$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 5\Delta_3 = -535$$

El sistema es inestable por tener determinantes de Hurwitz negativos.

Análisis de estabilidad de sistemas en Espacio de Estado

En un sistema expresado en forma de espacio de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

La estabilidad depende de los "Valores Propios" de la matriz A por elementos. Esto ya que es la matriz la que representa el sistema en sí, por lo tanto donde se encuentra la información de la ecuación característica.

- Si todos los valores propios son negativos o con parte real negativa entonces el sistema será estable
- Si existe un par de valores propios imaginarios puros el sistema tendrá estabilidad limitada
- Si existe algún valor propio positivo o con parte real positiva el sistema será inestable

Determinación de los valores propios de una matriz

Los valores propios de una matriz son las raíces de la ecuación característica representada por esta matriz. Por lo tanto para obtener los valores propios de una matriz se deben obtener primero la ecuación característica que se puede obtener con la expresión:

$$|sI - A| = 0$$

Y obtener luego las raíces de ésta ecuación que serán sus valores propios.

Par determinar la estabilidad del sistema se podrán aplicar entonces los criterios de Routh o Hurwitz a esta ecuación característica.

Por ejemplo:

Si se tiene un sistema lineal cuya matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica del sistema será:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios de la matriz A serán:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = -3$$

Lo cual indica que este sistema es estable.

Ejercicios

1. Determinar si los siguientes sistemas son estables (utilice los dos criterios):

a. $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$

b. $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

c. $s^3 + 7s^2 + 7s + 46 = 0$

d. $s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 9s + 12 = 0$

e. $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = 0$

f. $D^6x + 2D^5x + 4D^4x + 6D^3x + 8D^2x + 4Dx + 5x = u$

2. Citar razonablemente toda la información suministrada por las siguientes primeras columnas de Routh:

	2	2	1	1	2
	3	3	2	2	3
	4	4	3	-3	4
a.	5	5	4	d. -4	e. 5
	0	b. 0	c. 0	5	6
	6	6	5	6	7
	-7	7	0	7	
	0	0	6		
		0	-8		

3. Hallar el valor o el rango de valores de K para que los siguientes sistemas sean estables (utilice los dos criterios):

- a. $3s^3 + 3s^2 + s + K + 2 = 0$
- b. $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$
- c. $s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$
- d. $3s^4 + 2s^3 + Ks^2 + s^2 + s + 2 + K = 0$
- e. $s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + Ks^3 + s + K = 0$

4. Determine la estabilidad de los sistemas representados por las siguientes matrices de estado:

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ -2 & & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

5. Obtenga la representación canónica de Jordan para los sistemas anteriores.

6. Determine el valor de K para que los siguientes sistemas sean estables

$$\text{d. } A = \begin{bmatrix} K+2 & 0 & 0 \\ 0 & K+1 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{e. } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{(K+2)}{3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(4+K) & -6 & -8(2+K) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

Tema 7. Análisis de la respuesta en frecuencia

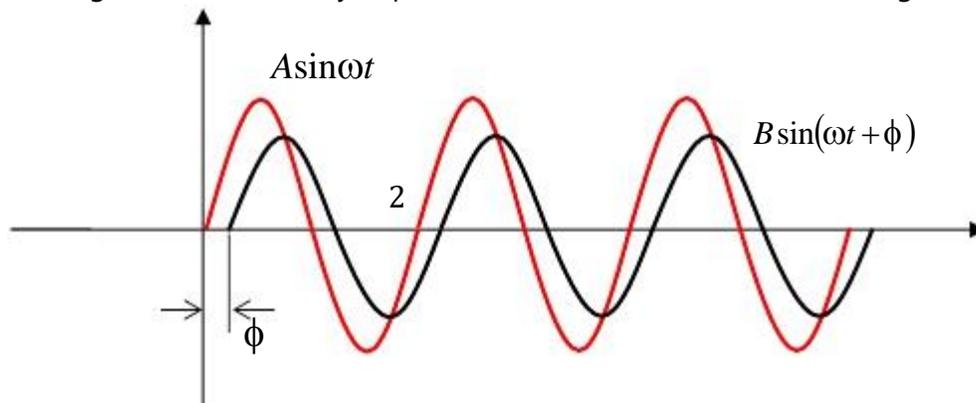
Introducción

Se denomina respuesta en frecuencia a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal sinusoidal de amplitud () fija pero a una frecuencia () variable en cierto rango.



La respuesta en estado estable a una entrada de este tipo será de la forma: $B \sin(\omega t + \phi)$

La representación gráfica de la entrada y respuesta en estado estable está dada en la siguiente figura.



En la práctica raras veces los sistemas de control están sometidos a señales sinusoidales, pero la información que se obtiene por el análisis sinusoidal se puede usar para establecer la naturaleza de la respuesta a una gran variedad de señales. Además el análisis es conveniente para el manejo analítico y experimental.

Calculo de la respuesta en frecuencia

Se puede demostrar que cuando un sistema se somete a una entrada sinusoidal ($A \sin \omega t$) la respuesta en estado estable se puede calcular sustituyendo a por en la función de transferencia: $G(s) \rightarrow G(j\omega)$.

Luego la respuesta en estado estable, de la forma ($B \sin(\omega t + \phi)$), se puede obtener a partir de un valor complejo que se puede expresar como:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right)$$

Donde:

Im : parte imaginaria de $G(j\omega)$

Re : parte real de $G(j\omega)$

$M(\omega) = \frac{B}{A}$ se le conoce como relación de amplitud

$\phi(\omega)$ se le conoce como ángulo de fase.

La respuesta en estado estable del sistema será de la forma: $M(\omega)A \sin(\omega t + \phi(\omega))$

Ejemplo 1. Si se tiene un sistema de primer orden cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

La respuesta en estado estable para una entrada sinusoidal de la forma $\sin(\omega t)$ se puede hallar sustituyendo a s por $j\omega$ como sigue:

$$G(s) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}$$

Si se multiplica y divide por el conjugado para no tener términos imaginarios en el denominador:

$$G(s) = \frac{1\tau}{\tau j\omega + 1\tau} \times \frac{j\omega - 1}{-j\omega - 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

En este caso la relación de amplitud $M(\omega)$ y el ángulo de fase $\phi(\omega)$ serán:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}{\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}\right) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

La respuesta en estado estable (respuesta en frecuencia) será:

$$y(t)_{EE} = \frac{H}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau)t)$$

Procedimiento para la obtención de la respuesta en frecuencia

1. Se obtiene la función de transferencia para el elemento o sistema. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque no afectan la respuesta en estado estable.
2. Se sustituye s por $j\omega$ en la función de transferencia
3. Para varios valores de frecuencia ω se encuentra la relación de amplitud $M(\omega)$ y el ángulo de fase $\phi(\omega)$
4. Se grafican los resultados obtenidos en el punto anterior ya sea en coordenada rectangulares (Diagramas de Bode) o en coordenadas polares (Diagramas de Nyquist)

Diagramas de BODE

Los diagramas de Bode son una forma de representar la respuesta en frecuencia de un sistema de control en coordenadas rectangulares, este consiste de dos gráficos:

1. Diagrama de amplitud o atenuación: en donde se grafica la relación de amplitud $M(\omega)$ de $\sin(\omega t)$ en decibelios (db) contra el logaritmo de la frecuencia.

El valor M_{db} expresado en decibelios se obtiene como: $M_{db} = 20 \log_{10} M(\omega)$

2. Diagrama de fase: en donde se grafica el ángulo de fase de $G(j\omega)$ contra el logaritmo de la frecuencia.

Los diagramas de Bode tienen las siguientes características:

- Como se grafica el logaritmo de $M(\omega)$, los factores producto y cociente de $G(s)$ se convierten en sumas de rectas.
- Los ángulos de fase también se suman y restan en forma natural.

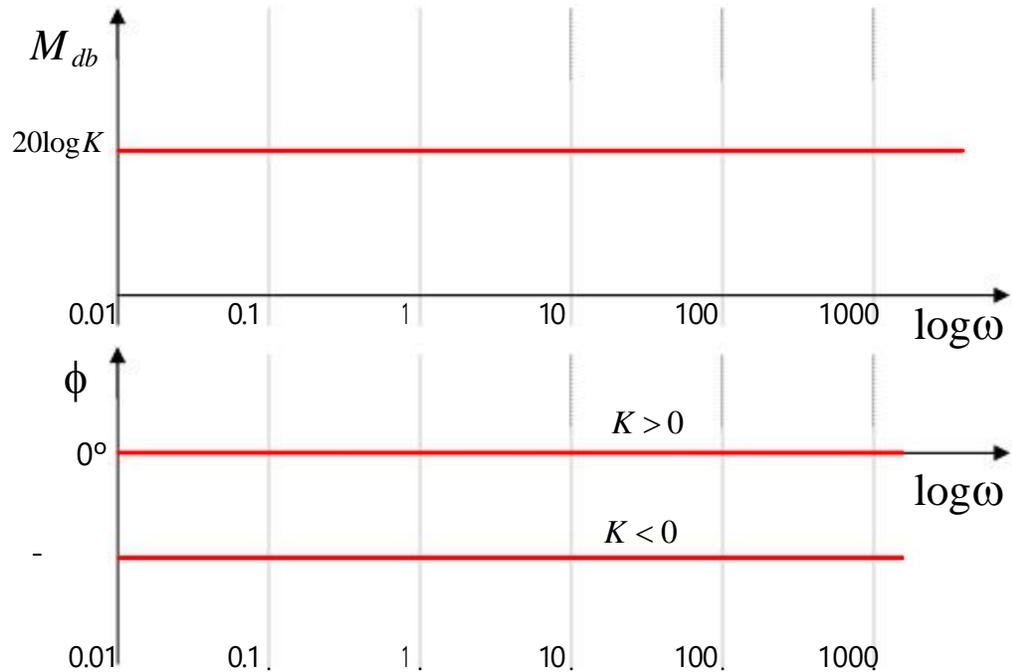
- El diagrama de Bode en la mayoría de los casos se puede aproximar mediante segmentos de recta lo cual simplifica la construcción.

Diagramas de Bode de Funciones comunes

Ganancia ($G(s) = K$)

Amplitud: $M_{db} = 20 \log K = cte$

Fase: $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{K} = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ -180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$



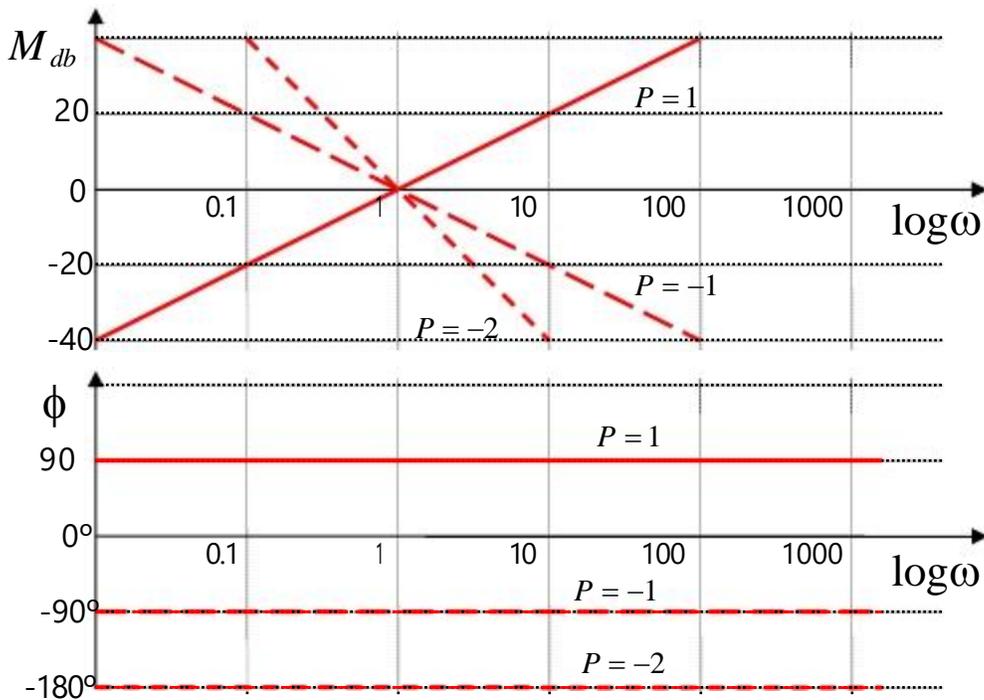
Polos y ceros en el origen ($G(s) = s^{\pm P}$)

También conocidos como factor integral y derivativo. Al sustituir a s por $j\omega$ se obtiene: $G(j\omega) = j\omega^{\pm P}$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log |j\omega^{\pm P}| = \pm 20 \log \omega$

Fase: $\phi = \tan^{-1}(j\omega^{\pm P}) = \pm 90^\circ P$

La amplitud en este caso es una recta con pendiente ± 20 y pasa por 0 para $\omega = 1$. Es así como la pendiente será de 20 db por década de frecuencia. Es decir cambia de 20 db cada vez que el valor de la frecuencia es multiplicado por 10 . El ángulo de fase es una recta horizontal que pasa por $\pm 90^\circ P$.



Factores de primer orden ($G(s) = (1 + s\tau)^{-1}$)

En el caso del polo simple al sustituir s por $j\omega$ se obtiene: $G(j\omega) = \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$

- Si $\omega \ll 1/\tau$ se puede aproximar a $20 \log 1 = 0$ línea recta horizontal
- Si $\omega \gg 1/\tau$ se puede aproximar a $20 \log \frac{1}{\omega\tau}$ línea recta con pendiente 20db/década

Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud exacto, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. En donde el valor de frecuencia en el punto donde se encuentran las dos rectas se denomina frecuencia de corte y se encuentra en $1/\tau$.

Fase: $\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1}\omega\tau$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90^\circ$

En el caso del cero simple al sustituir s por $j\omega$ se obtiene: $1 + j\omega\tau$

Amplitud: $M_{db} = 20 \log |1 + j\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$

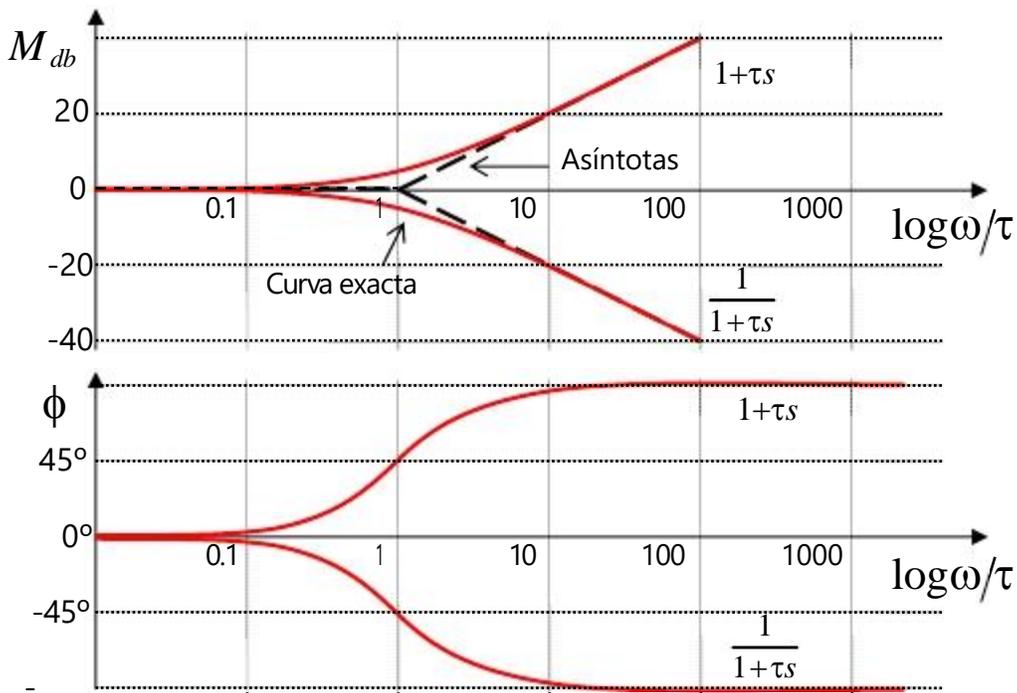
Fase: $\phi = \tan^{-1}(\omega\tau)$

Se obtienen en este caso curvas idénticas pero con signo invertido

Si se requiere el valor exacto del diagrama de Bode basta con corregir el valor de la amplitud y esto se hace calculando el error en algunos puntos.

El error máximo se produce a la frecuencia de cruce y es aproximadamente igual a 3db ya que:

$$E_{\max} = -20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log = -10 \log 2 = -3.03 \text{db}$$



Factores de cuadráticos ($G(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right)^{\pm 1}$)

En el caso de la función de transferencia de segundo orden al sustituir s por $j\omega$ se obtiene:

$$G(j\omega) = \left(\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right)^{\pm 1} = \left(\frac{1}{\omega^2/\omega_n^2 + 2\xi j\omega/\omega_n + 1} \right)^{\pm 1}$$

Se estudiará aquí el caso en que $\xi < 1$, ya que en los otros casos puede descomponerse en el producto de polos simples.

Amplitud: $M_{db} = -20 \log \sqrt{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 4\xi^2 (\omega/\omega_n)^2}$

- Si $\omega \ll \omega_n$ se puede aproximar a 0 línea recta horizontal
- Si $\omega \gg \omega_n$ se puede aproximar a $-40 \log \omega/\omega_n$ línea recta con pendiente -40db/década

Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. La frecuencia de corte se encuentra en $\omega = \omega_n$.

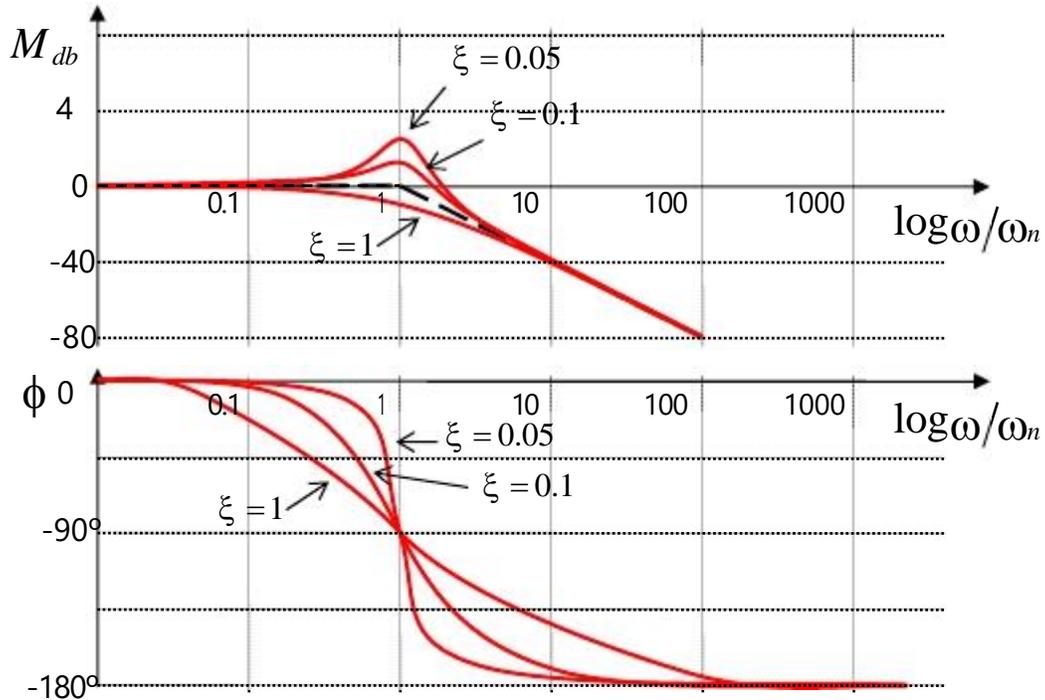
En este caso en la curva real cerca de la frecuencia de corte se produce un pico de resonancia el cual depende del valor de ξ y tiende a crecer cuando ξ decrece.

Fase: $\phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$

- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$

La curva del ángulo de fase es antisimétrica respecto al punto de inflexión y también depende del valor de ξ .



El diagrama de Bode para $G(s) = \left| \left(\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n} \right) \right|$ se puede obtener invirtiendo las curvas anteriores.

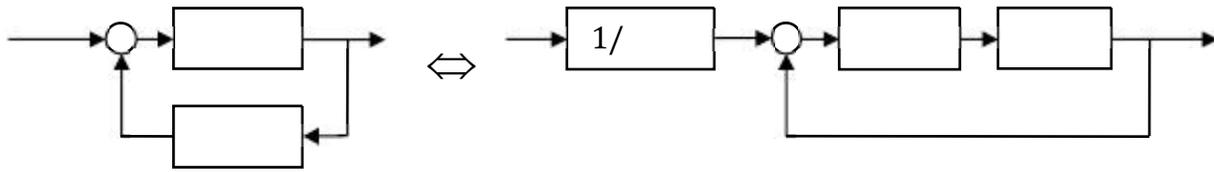
Procedimiento general para trazar diagramas de Bode

- En primer lugar se describe la función de transferencia sinusoidal como un producto de los factores básicos analizados anteriormente
- Luego se identifican las frecuencias de cruce asociadas con cada uno de esos factores
- Se trazan las curvas asintóticas del logaritmo de la magnitud con las pendientes adecuadas entre las frecuencias de cruce. Esto se hace sumando algebraicamente los aportes de cada uno de los factores. Si se requiere una curva exacta se puede obtener agregando las correcciones apropiadas.
- Las curvas de ángulo de fase se pueden obtener sumando las curvas de ángulo de fase de cada factor.

Análisis de estabilidad utilizando los diagramas de Bode

Esto se hace utilizando los conceptos de margen de ganancia y margen de fase que se definen a continuación.

El método permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del sistema de lazo abierto.



Margen de ganancia ()

Es una medida de la estabilidad relativa, se define como la magnitud del recíproco de la función de transferencia de lazo abierto y se calcula a la frecuencia a la cual el ángulo de fase es de -180° .

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = 20\log 1 - 20\log |G(j\omega_c)|$$

Donde:

$$\phi(j\omega_c) = -180^\circ = -\pi_{rad}$$

ω_c : frecuencia de cruce de fase o frecuencia crítica.

Margen de fase ()

Es una medida de la estabilidad relativa y se define como la suma de 180° al ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto y ganancia unidad.

$$m_\phi = (180^\circ + \phi(j\omega_g))_{grados}$$

Donde:

$$|G(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow 20\log |G(j\omega_g)| = 0$$

ω_g se denomina frecuencia de cruce de ganancia.

Estabilidad relativa

Los conceptos de margen de ganancia y margen permiten determinar la estabilidad de un sistema según el siguiente criterio:

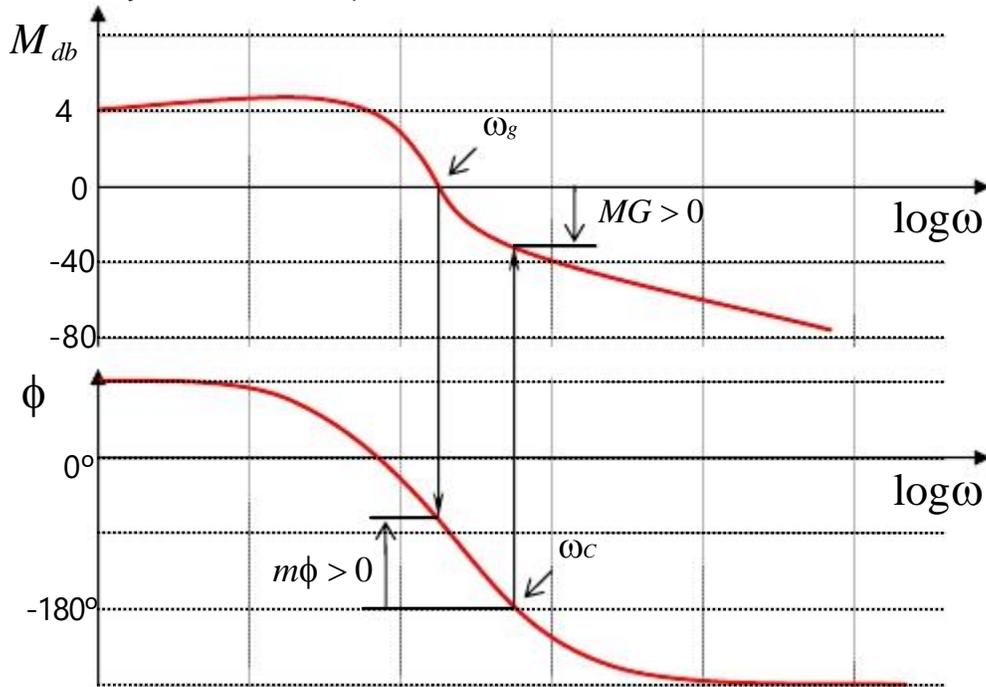
Un sistema es estable si $MG > 0$ y $m_\phi > 0$

Nótese aquí que estos conceptos no solo indican la estabilidad en términos absolutos sino que permiten dar un margen de que tan lejos está un sistema de la estabilidad o inestabilidad, esto ya que entre más pequeños se hagan los valores del margen de ganancia y de fase más tenderá el sistema hacia la inestabilidad y viceversa.

Procedimiento para determinar la estabilidad utilizando los diagramas de BODE

1. Se determina la frecuencia crítica () trazando para ello una horizontal que pase por -180° hasta cortar el diagrama de fase luego se traza una vertical hasta el eje de las frecuencias.
2. Se traza una vertical que pase por y que corte el diagrama de amplitud. La diferencia entre el punto de corte con 0db da el margen de ganancia ().

3. Se determina la frecuencia de ganancia crítica (ω_g), trazando para ello una horizontal que pase por 0db hasta cortar el diagrama de amplitud luego se baja verticalmente hasta el eje de las frecuencias.
4. Se traza una vertical que pasa por ω_g y corte el diagrama de fase. La diferencia entre -180° y el punto de corte da el margen de fase.
5. Si $m\phi > 0$ y $MG > 0$ se dice que el sistema es estable.



Comentarios sobre los márgenes de fase y ganancia

Los márgenes de fase y ganancia adecuados permiten tener una cierta seguridad en cuanto a la estabilidad del sistema cuando ocurre una variación en algún parámetro de este. Para tener un comportamiento satisfactorio el margen de fase debe estar entre 30° y 60° y el margen de ganancia debe ser superior a 6db. Esto significa que la pendiente de la curva del logaritmo de la magnitud a la frecuencia de cruce debe ser más suave que -40 db/década.

Ejemplo 2. Hacer el diagrama de Bode y analizar la estabilidad de:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

Se sustituye a s por $j\omega$ y se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)(j\omega^2+j\omega+2)}$$

Por comodidad para el trazado de las graficas se reescribe la ecuación en la forma normalizada con los términos independientes iguales a 1:

$$G(s) = \frac{(10)(3)(j\omega/3+1)}{j\omega(2)(j\omega/2+1)(j\omega)^2/2+j\omega/2+1} = \frac{7.5(j\omega/3+1)}{j\omega(j\omega/2+1)(j\omega)^2/2+j\omega/2+1}$$

Esta función se descompone en factores conocidos, que son en este caso:

- Si $\omega \ll \sqrt{2}$ se puede aproximar a $M_{db} = 20 \log 1 = 0$ línea recta horizontal
- Si $\omega \gg \sqrt{2}$ se puede aproximar a $M_{db} = -20 \log \sqrt{\frac{\omega^4}{2}} = -40 \log \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ línea recta con pendiente -40db/década

Fase:
$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi \omega / \sqrt{2}}{1 - (\omega / \sqrt{2})^2}$$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$

$\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$

Grafica exacta

Para la gráfica exacta se debe calcular el valor exacto de la curva de magnitud y fase en algunos puntos adicionales, los puntos mínimos necesarios son en general los correspondientes a las frecuencias de cruce.

Magnitud

En $\omega = \sqrt{2}$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{\sqrt{2}^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{2 + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$M_{db} = 16.61$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{2^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{3} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{3}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

En $\omega = 3$

$$M_{db} = -20 \log 7.5 - 20 \log \sqrt{3} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{3}{3}\right)^2} - 20 \log \sqrt{2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$M_{db} = -5.75$

Fase

En $\omega = 2$

$$\frac{-1}{1} \quad | \quad \frac{2}{2}$$

En $\omega = 2$

$$\phi = \tan^{-1} \left| \frac{-1}{7.5} \right| - \tan^{-1} \left| \frac{2}{0} \right| + \tan^{-1} \left| \frac{2}{1} \right| - \tan^{-1} \left| \frac{2}{1} \right| - \tan^{-1} \left| \frac{2}{1-2} \right| = -143$$

Jean-François DULHOSTE

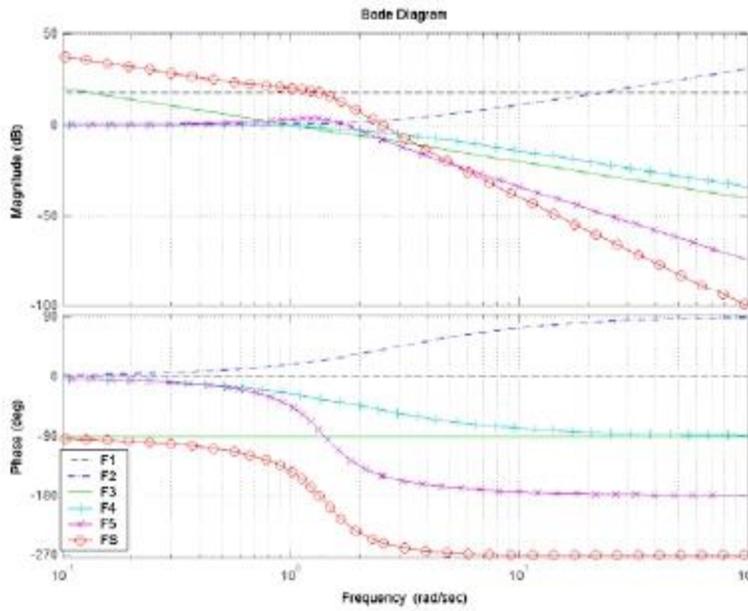
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{0}{7.5} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2}{0} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2}{1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2}{1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{2}{1-2} \right) = -190^\circ$$

$$\left(\frac{0}{7.5} \right) \quad -1 \left(\frac{2}{0} \right) \quad -1 \left(\frac{2}{1} \right) \quad -1 \left(\frac{2}{1} \right) \quad -1 \left(\frac{2}{1-2} \right)$$

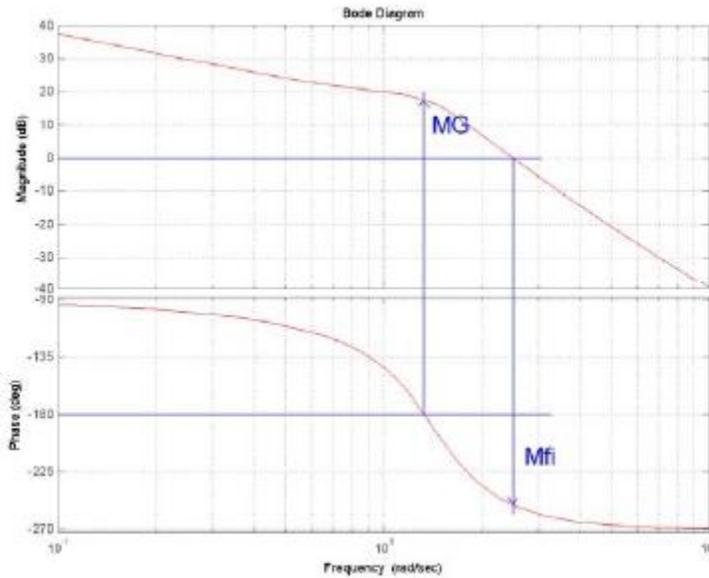
En $\omega = 3$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1-3^2/2}\right) = -258.11^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1-3^2/2}\right)$$

Diagrama de Bode



Estabilidad en diagrama de Bode



Análisis de estabilidad

$$MG \cong -18$$

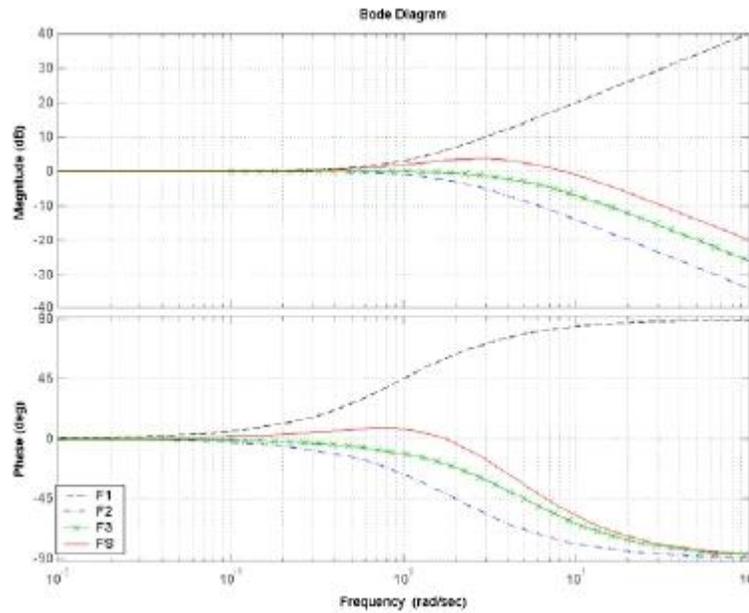
$$m\phi \cong -50^\circ$$

Por tanto el sistema es inestable

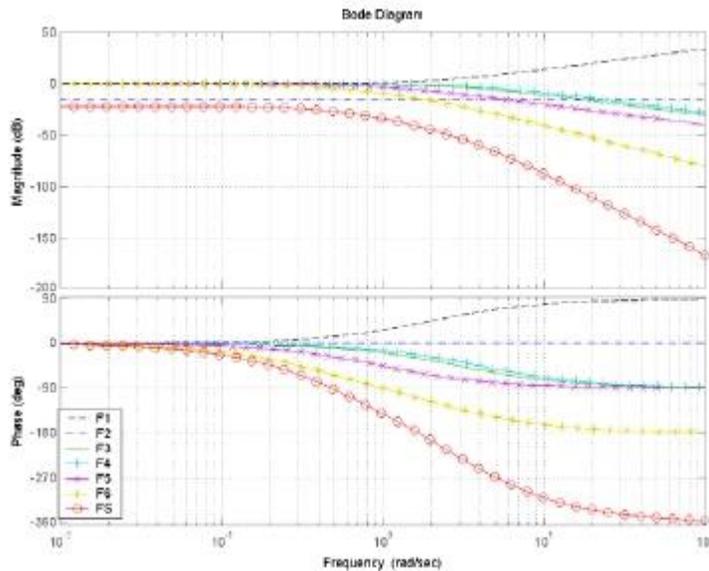
Ejercicios

Hacer el diagrama de Bode de las siguientes funciones:

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} = \frac{10s+10}{s^2+7s+10}$$



$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} \cdot \frac{s+2}{s^2+11s+44s^3+77s^2+55s+12}$$



Determine la estabilidad e las siguientes funciones mediante los diagramas de Bode.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} = \frac{s+2}{s^5+11s^4+44s^3+77s^2+55s+12}$$

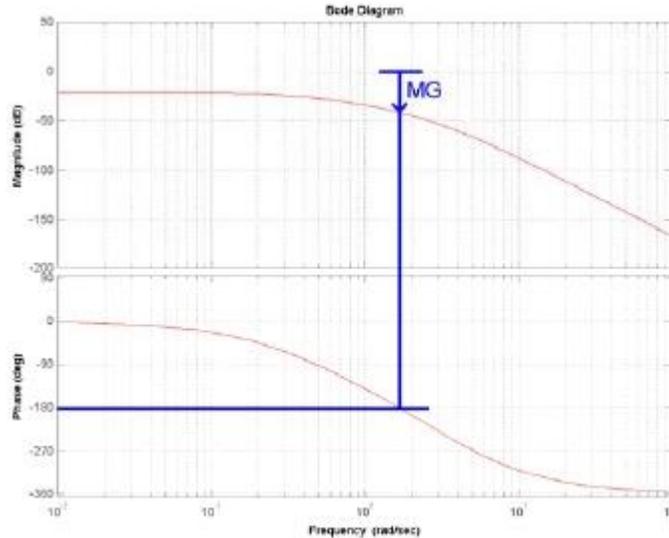


Diagrama de Nyquist

El diagrama polar comúnmente denominado diagrama de Nyquist de una función de transferencia sinusoidal

es un diagrama de la magnitud o módulo de $|G(j\omega)|$ en función del ángulo de fase de $\angle G(j\omega)$ en coordenadas polares al variar el valor de ω de menos infinito a infinito. Entonces, el diagrama polar es el lugar de los vectores $|G(j\omega)| \angle \angle G(j\omega)$ cuando ω varía de 0 a ∞ .

La figura presenta un ejemplo de este diagrama. Cada punto en el diagrama polar de $G(j\omega)$ representa el extremo terminal de un vector para un valor determinado de ω .

Para construir el diagrama polar se calcula directamente la magnitud $|G(j\omega)|$ y el ángulo de fase $\angle G(j\omega)$ para cada frecuencia ω .

Los datos también se pueden obtener a partir del diagrama de Bode.

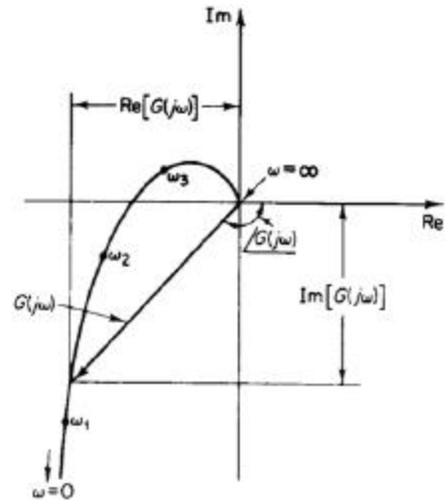
Si se requiere la multiplicación de dos funciones de transferencia sinusoidales, se puede obtener multiplicando, para cada frecuencia, las funciones de transferencia sinusoidales individuales por medio de una multiplicación algebraica compleja. Es decir:

Si $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$

Entonces

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$



En general, si se desea el diagrama polar de $G(j\omega)$, es conveniente trazar primero el diagrama logarítmico de $|G(j\omega)|$ y luego convertirlo en un diagrama polar, en lugar de dibujar los diagramas

polares de $G_1(j\omega)$ y $G_2(j\omega)$ y multiplicar ambos en el plano complejo para obtener el diagrama polar de $G(j\omega)$.

Una ventaja al utilizar un diagrama polar es que presenta las características de respuesta en frecuencia de un sistema en todo el rango de frecuencias, en un solo diagrama, la desventaja es que el diagrama no indica claramente las contribuciones de cada factor individual de la función de transferencia.

Diagramas de Nyquist de Funciones comunes

Factores integral y derivativo $G(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$

El diagrama polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$ es el eje imaginario negativo ya que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

El diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ es el eje real positivo.

Factores de primer orden $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$

Para la función de transferencia sinusoidal

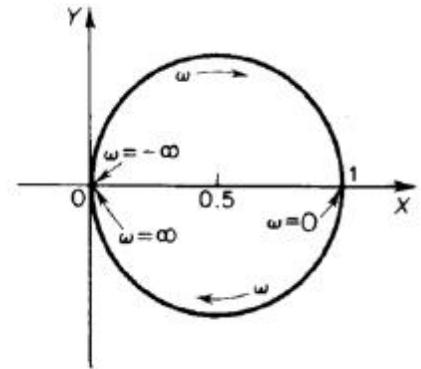
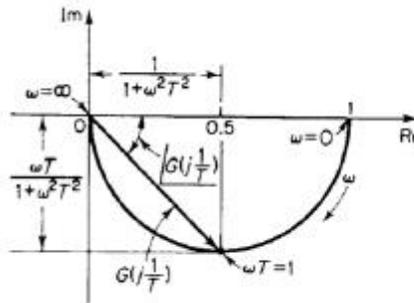
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

Para $\omega = 0$: $G(j0) = 1 \angle 0^\circ$

$\omega = 1/T$:

$$G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

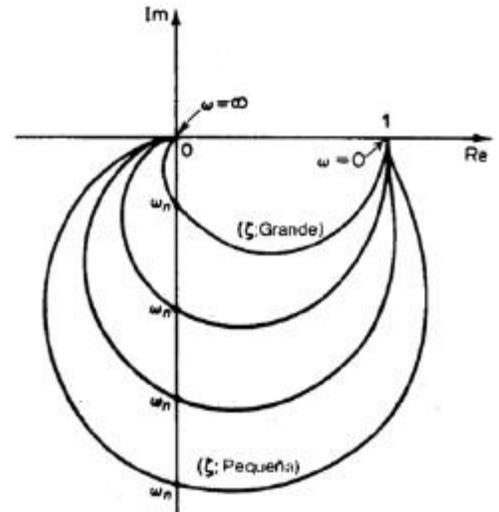
Si ω tiende a infinito, la magnitud de $G(j\omega)$ tiende a cero y el ángulo de fase tiende a -90° . El diagrama polar de esta función de transferencia es un semicírculo, con centro en 0.5 sobre el eje real y radio igual a 0.5, cuando la frecuencia



varía de cero a infinito, como se puede ver en la figura.

El diagrama polar de la función de transferencia $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

es simplemente la mitad superior de la recta que pasa por el punto (1, 0) en el plano complejo, y es paralela al eje imaginario. El diagrama polar de $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ es totalmente diferente al de $G(j\omega) = 1/j + j\omega T$.



Las partes de alta y baja frecuencia del diagrama polar de la función de transferencia sinusoidal:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega\omega_n) + (j\omega\omega_n)^2} \text{ para } \xi > 0$$

Están dadas respectivamente por:

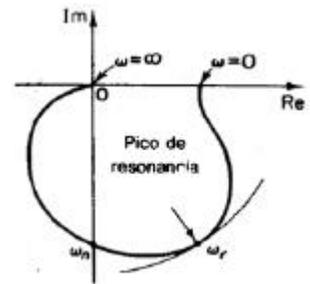
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

El diagrama polar de esta función de transferencia sinusoidal comienza en $1/0^\circ$ y finaliza en $0/180^\circ$ al aumentar de cero a infinito. Esto indica que la porción de alta frecuencia de $G(j\omega)$ es tangente al eje real negativo.

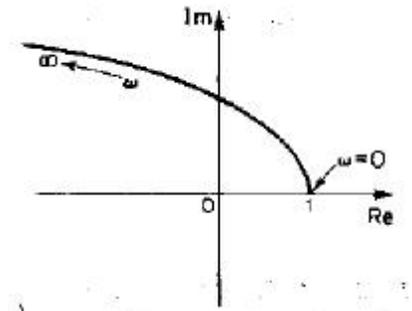
La figura presenta ejemplos de diagramas polares de esta función de transferencia. La forma exacta del diagrama polar depende del valor de la relación de amortiguamiento ξ , pero la forma general es la misma, tanto para el caso subamortiguado ($\xi < 1$) como para el sobreamortiguado ($\xi > 1$).

Para el caso subamortiguado en $\xi < 1$ se tiene que el ángulo de fase es -90° . Por tanto, se puede ver que la frecuencia a la cual el diagrama corta al eje imaginario, es la frecuencia natural.

El punto del diagrama polar cuya distancia al origen es máxima, corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r .



Para el caso sobreamortiguado, al incrementar ξ más allá de la unidad, el lugar de $G(j\omega)$ tiende a ser un semicírculo, lo que resulta del hecho de que para un sistema fuertemente amortiguado las raíces características son reales, y una de ellas es mucho más pequeña que la otra. Como para un valor de ξ suficientemente alto la raíz más grande de la respuesta se hace muy pequeña, el sistema se comporta como uno de primer orden.



Para la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right) \right)^{-1}$$

La porción de baja frecuencia de la curva es: $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

La porción de alta frecuencia es: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ$

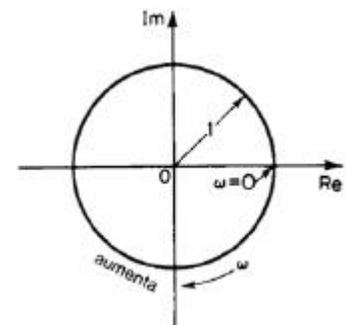
Como la parte imaginaria de $G(j\omega)$ es positiva y crece en forma monótona para $\omega < \omega_n$, y la parte real de $G(j\omega)$ decrece en forma monótona a partir de la unidad, la forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$ es como aparece en la figura. El ángulo de fase está entre 0° y 180° .

Retardo de transporte.

El retardo de transporte, o tiempo muerto $G(j\omega) = e^{-j\omega T}$, se puede escribir como:

$$G(j\omega) = 1 \angle \cos\omega T - j \sin\omega T$$

Como la magnitud de $G(j\omega)$ es siempre la unidad, y el ángulo de fase varía linealmente con ω el diagrama polar del retardo de transporte es un círculo unitario, como se puede ver en la figura.



Formas generales de los diagramas polares

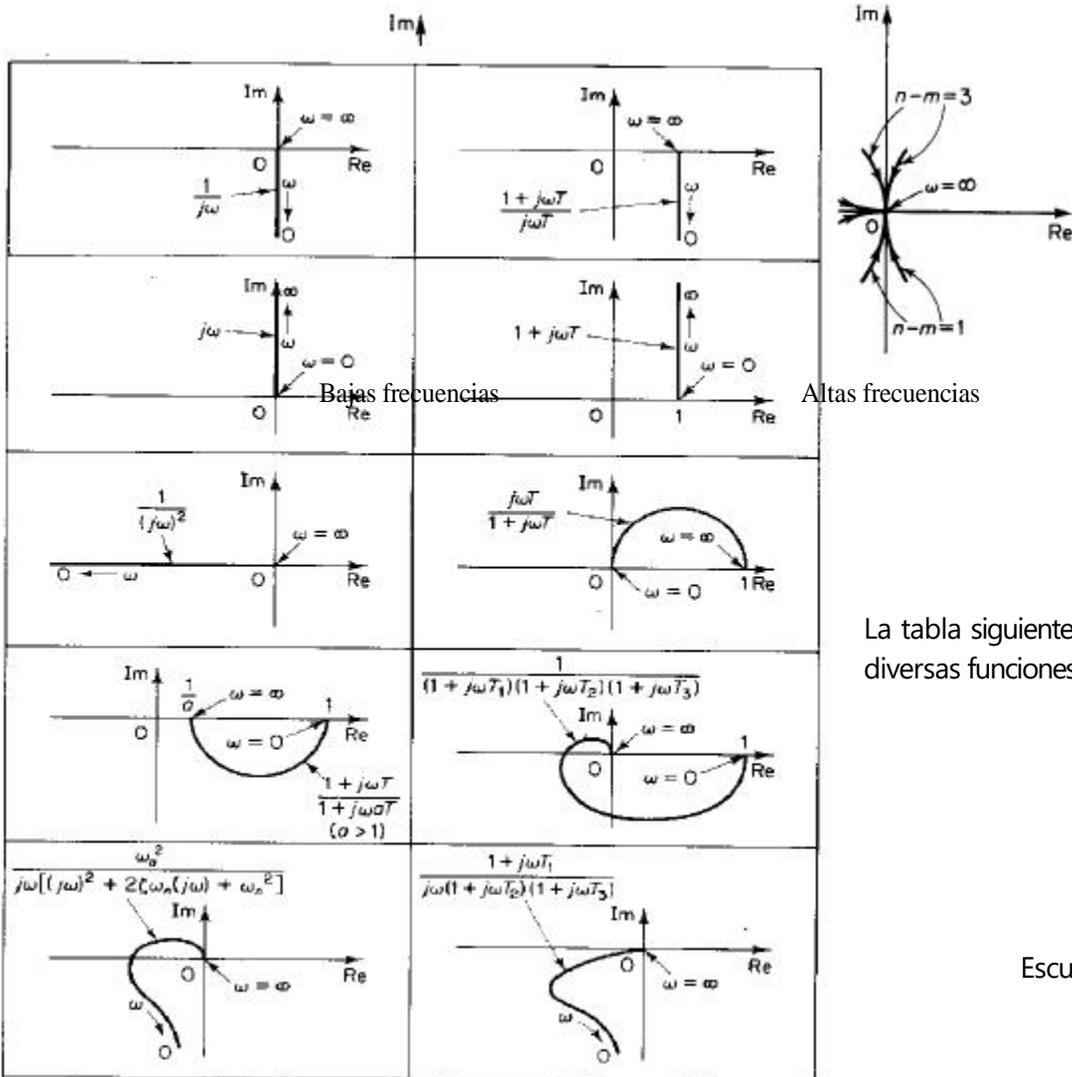
Los diagramas polares de una función de transferencia de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega^m) + b_1(j\omega^{m-1}) + \dots}{a_0(j\omega^n) + a_1(j\omega^{n-1}) + \dots} = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_a)\dots}{(j\omega^s)(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\dots}$$

Donde s o el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador, tendrán las siguientes formas generales:

1. Para $s = 0$ o sistemas tipo 0: el punto de inicio del diagrama polar (que corresponde a $\omega = 0$) es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente al diagrama polar en $\omega = 0$ es perpendicular al eje real. El punto terminal, que corresponde a $\omega = \infty$, está en el origen y la curva es tangente a uno de los ejes.
2. Para $s = 1$ o sistemas de tipo 1: el término $j\omega T$ en el denominador contribuye con -90° al ángulo de fase total de $\omega = 0$ para $\omega = \infty$. Para $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos 90° . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje imaginario negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud es cero, la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes.
3. Para $s = 2$ o sistemas de tipo 2: el término $(j\omega)^2$ en el denominador contribuye con -180° al ángulo de fase total de $\omega = 0$ para $\omega = \infty$. En $\omega = 0$ la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos 180° . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje real negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se hace cero, y la curva es tangente a uno de los ejes.

En la figura se pueden ver las formas generales de las porciones de baja frecuencia de los diagramas polares



de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

Nótese que si el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador, los lugares de convergen hacia el origen en sentido horario. En $\omega = \infty$, los lugares son tangentes a uno de los ejes, como se ve en la figura para altas frecuencias.

La tabla siguiente muestra diagramas polares de diversas funciones de transferencia comunes.

Ejemplos

1. Considere la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Trace el diagrama polar para esta función de transferencia.

Como la función de transferencia sinusoidal se puede escribir como

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \angle -90^\circ$$

La porción de baja frecuencia del diagrama polar es:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 0 - j0 = 0 \angle -180^\circ$$

La porción de alta frecuencia es:

$$\omega \rightarrow \infty$$

En la figura aparece la forma general del diagrama polar de . Este es asintótico a la línea vertical que pasa por el punto , 0 . Como esta función de transferencia incluye un integrador 1/ , la forma general del diagrama polar difiere de las funciones de transferencia de segundo orden que no tienen un integrador.

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

2. Obtenga el diagrama polar de la función de transferencia siguiente:

La magnitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

y

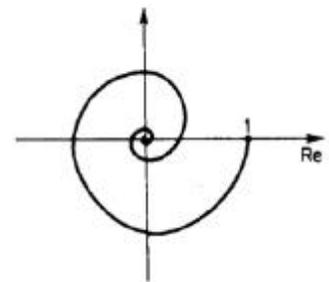
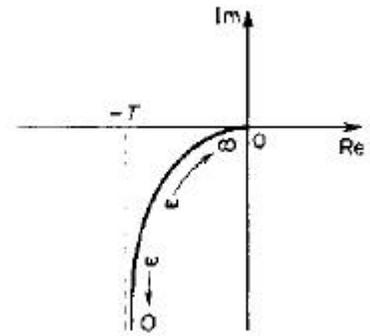
$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

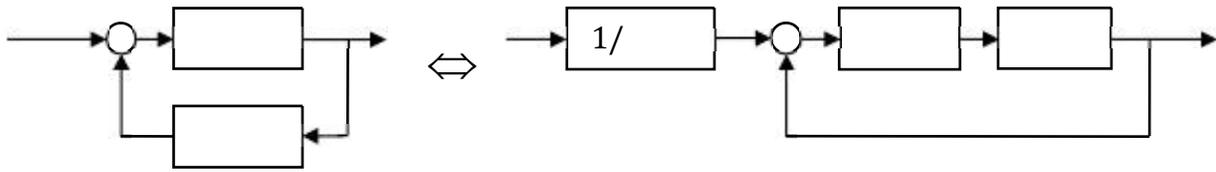
Como la magnitud decrece en forma monótona a partir de la unidad y el ángulo de fase también decrece monótona e indefinidamente, el diagrama polar de la función de transferencia dada es una espiral, como aparece en la figura.

Nótese que en los ejemplos mostrados anteriormente se desarrollo el diagrama polar para una frecuencia ω entre 0 e infinito. El diagrama polar para una frecuencia entre menos infinito y cero será la imagen espejo respecto al eje real del diagrama para frecuencias de cero a infinito. Y el diagrama entre infinito y menos infinito será siempre el origen de coordenadas.

Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del diagrama de Nyquist del sistema de lazo abierto

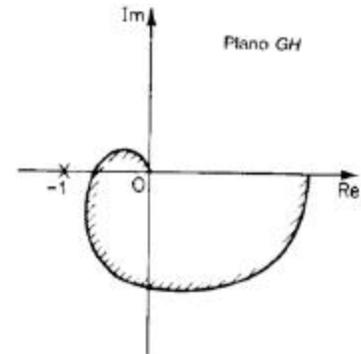




Criterio de estabilidad de Nyquist

(Para un caso especial en que $G(s)$ no tiene polos ni ceros sobre el eje real)

En el sistema que aparece en la figura, si la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ tiene polos en el semiplano derecho del plano s y $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$, entonces para que haya estabilidad, la gráfica de $G(s)$ al variar ω de 0 a ∞ debe rodear $2P$ veces al punto -1 en sentido anti horario.



Observaciones sobre el criterio de estabilidad de Nyquist

- Este criterio se puede expresar como

Donde:

- N = cantidad de rodeos alrededor del punto -1 en sentido horario
- P = cantidad de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s

Si $N - P$ no es cero, para que un sistema de control sea estable, se debe tener $N - P = 0$, o $N = P$, lo que significa que hay que tener P rodeos antihorarios alrededor del punto -1 .

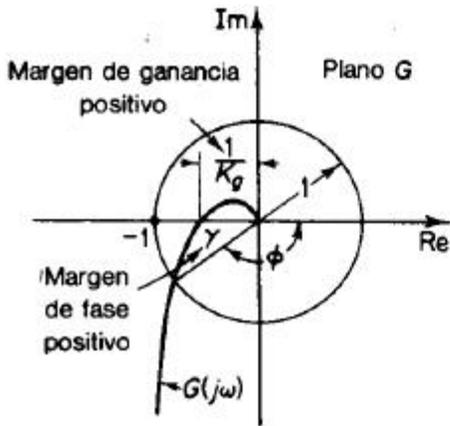
Si $G(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s , entonces $P = 0$. Por lo tanto, para que haya estabilidad, no debe haber rodeos alrededor del punto -1 por parte de la gráfica $G(s)$. En este caso no es necesario considerar la gráfica para el eje ω completo, pues basta solamente con la porción de frecuencia positiva. La estabilidad de tal sistema se puede determinar viendo si el punto -1 queda rodeado por el diagrama de Nyquist de $G(s)$. En la figura se puede ver la región encerrada por el diagrama de Nyquist. Para que haya estabilidad, el punto -1 debe quedar fuera de la región sombreada.

- Se debe tener mucho cuidado al verificar la estabilidad de sistemas con lazos múltiples, ya que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano s . (Nótese que aunque un lazo interior sea inestable, se puede hacer que todo el sistema de lazo cerrado sea estable con un diseño adecuado). Para determinar la inestabilidad de sistemas con lazos múltiples no basta la simple inspección de los rodeos alrededor del punto -1 por la gráfica $G(s)$. En esos casos, sin embargo, se puede determinar fácilmente si hay o no algún polo de 1 en el semiplano derecho del plano s , al aplicar el criterio de estabilidad de Routh al denominador de $G(s)$.
- Si el lugar de $G(s)$ pasa por el punto -1 , hay ceros de la ecuación característica o polos de lazo cerrado, ubicados sobre el eje $s = 0$. Esto no es deseable para sistemas de control prácticos. En un sistema de control de lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe quedar sobre el eje $s = 0$.

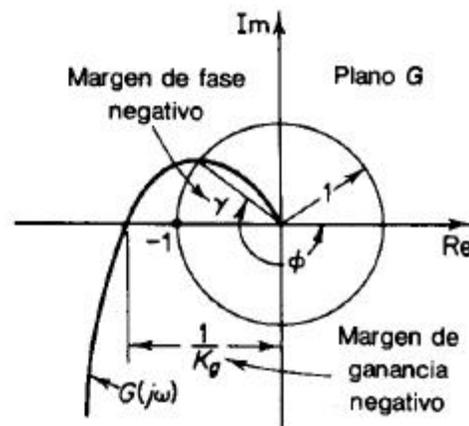
En los diagramas de Nyquist se puede obtener también en forma gráfica los valores del margen de ganancia y del margen de fase definidos para los diagramas de Bode, la obtención de estos valores se muestra en la figura siguiente.

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, se pueden presentar tres posibilidades:

1. No hay rodeo del punto $-1 + j0$. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; en caso contrario, el sistema es inestable.
2. Hay un rodeo en sentido anti horario o rodeos del punto $-1 + j0$. En este caso el sistema es estable si la cantidad de rodeos antihorarios es la misma que la cantidad de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; en caso contrario, el sistema es inestable.
3. Hay un rodeo o rodeos del punto $-1 + j0$ en sentido horario. En este caso, el sistema es inestable.



Sistema Estable



Sistema Inestable

Ejemplos

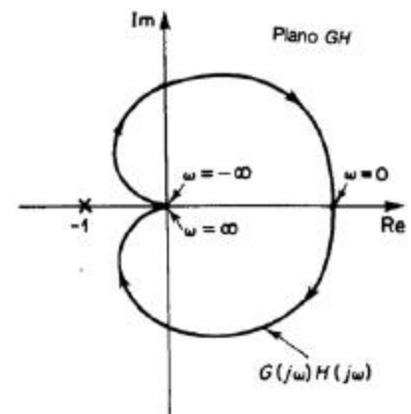
En los ejemplos siguientes, se supone que los valores de la ganancia K y de las constantes de tiempo (como T_1, T_2, y) son todos positivos.

1. Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto está dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Examine la estabilidad del sistema.

La figura muestra un diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. Como $G(s)H(s)$ no tiene ningún polo en el semiplano derecho del plano s , y el punto $-1 + j0$ no está rodeado por el lugar de $G(j\omega)H(j\omega)$, este sistema es estable para cualquier valor positivo de $K, T_1, y T_2$.



2. Considere el sistema con la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

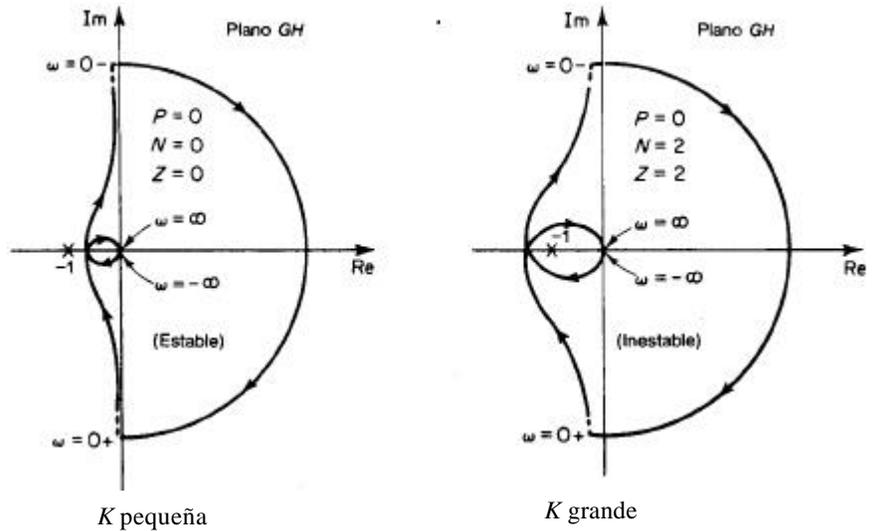
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema para dos casos:
 (1) la ganancia es pequeña,
 (2) K es grande.

En la figura aparecen los diagramas de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto con un valor pequeño de K y un valor grande de K .

La cantidad de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s es cero.

Por lo tanto, para que este sistema sea estable, es necesario que $N = 0$ o que el lugar de N no rodee al punto $-1 + j0$.



Para valores pequeños de K , no hay rodeo al punto $-1 + j0$. Por lo tanto, el sistema es estable.

Para valores grandes de K , el lugar de N rodea al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido horario, lo que indica dos polos en el semiplano derecho del plano s y el sistema es inestable.

Para lograr buena exactitud, K debe ser grande. Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad un valor elevado de K brinda estabilidad pobre, incluso inestabilidad. Se debe hallar una solución de compromiso entre exactitud y estabilidad.

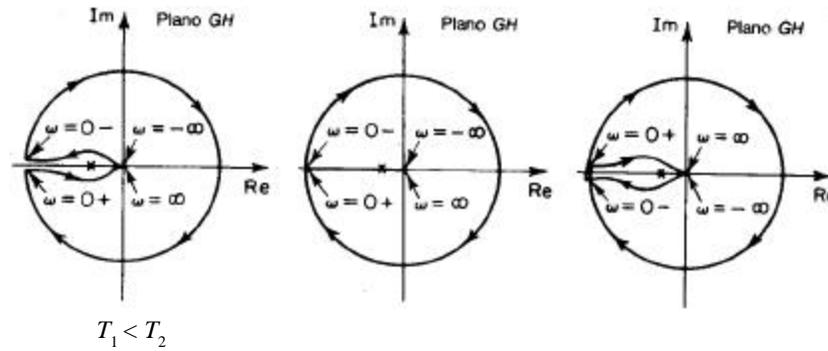
3. La estabilidad de un sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

depende de las magnitudes relativas de T_1 y T_2 .

Trace los diagramas de Nyquist y determine la estabilidad del sistema.

En la figura se muestran diagramas de N para tres casos, $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$, y $T_1 > T_2$.



Para $T_1 < T_2$, el lugar de polos no rodea al punto -1 , y el sistema de lazo cerrado es estable.
 Para $T_1 = T_2$, el lugar de polos pasa por el punto -1 , lo que indica que los polos de lazo cerrado están ubicados sobre el eje imaginario.
 Para $T_1 > T_2$, el lugar de polos rodea al punto -1 dos veces en sentido horario. Entonces, el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s , el sistema es inestable.

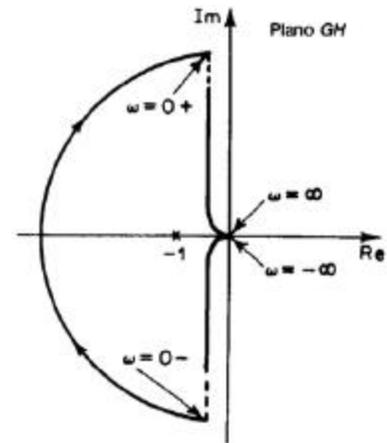
4. Considere el sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema.

La función $G(s)H(s)$ tiene un polo ($1/T$) en el semiplano derecho del plano s . Por tanto, $N = 1$.

El diagrama de Nyquist de la figura indica que el punto -1 es rodeado una vez en sentido horario por la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$. Entonces $Z = 2$. Como $P = 1$, resulta que $N = 2$.



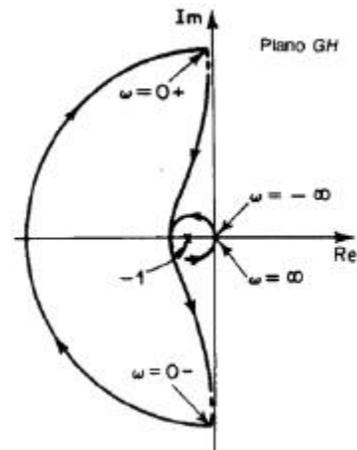
Esto significa que el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y es inestable.

5. Determine la estabilidad de un sistema de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

La función de transferencia de lazo abierto tiene un polo (1) en el semiplano derecho del plano s , o sea $P = 1$. El sistema de lazo abierto es inestable.

El diagrama de Nyquist que se ve en la figura indica que el punto -1 es rodeado por la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ una vez en sentido



trazar los diagramas de Nyquist de $G(s)$ para diversos valores de K , se dibuja el diagrama de Nyquist de $G(s)/K$. En la figura se puede ver un diagrama de Nyquist o diagrama polar de $G(s)/K$.

Como $G(s)$ tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s , se tiene que $N = 2$. Como $P = 2$, para la estabilidad se requiere que $Z = 0$ o $Z = 2$.

Es decir, el diagrama de Nyquist de $G(s)/K$ debe rodear al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido anti horario. De la figura se ve que, si el punto crítico queda entre 0 y 0.5, entonces el diagrama de $G(s)/K$ rodea al punto crítico dos veces en sentido antihorario. Por lo tanto, se requiere que $0.5 < K < 1$.

Entonces el rango de ganancia de K por condición de estabilidad es $0.5 < K < 1$.

Tema 8. Controlabilidad y Observabilidad

La controlabilidad y la observabilidad son dos conceptos desarrollados para la representación de sistemas en espacio de estado, estos permiten caracterizar respectivamente la capacidad del control para ejercer una influencia sobre alguno sus estados y la posibilidad de extraer una información de alguno de sus estados mediante un observador. Sin embargo estos conceptos se pueden extender a otras representaciones.

Los métodos para la determinación de estas características de los sistemas varían según el tipo de sistema. En este se estudia solo lo correspondiente a los Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo (LTI).

Controlabilidad

La controlabilidad es una característica de un sistema, generalmente representado por un modelo en espacio de estado, que nos indica si la evolución de una o varias de sus dinámicas (estados) pueden ser modificadas por las entradas del sistema (control).

Definición

Un estado x_0 es controlable en t_1 siempre que se pueda determinar una entrada $u(t)$ que conduzca todo estado inicial $x(0) = x_0$ hacia 0 en un tiempo t_1 .
Si esta propiedad se cumple $\forall x_0$ y $\forall t_1 > 0$, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Notas:

- Si un sistema no es completamente controlable entonces para algunas condiciones iniciales no existe ninguna entrada capaz de llevar el sistema al origen.
-
- La controlabilidad es una noción de suma importancia puesto que nos permite determinar si es posible controlar un sistema para modificar su comportamiento (estabilización de un sistema inestable, modificación de las dinámicas propias del sistema). Y es por ello que es fundamental en la teoría de la síntesis de controladores en espacio de estado.

Criterio de Controlabilidad (Kalman)

Este es un criterio que permite definir si los estados de un sistema LTI son controlables, considerando para ello las matrices A y B del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación de estado,

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad
$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 tiene rango n ,

Nota. La controlabilidad de un sistema de matrices características A y B se denominara controlabilidad del par (A, B) .

Rango de una matriz.

El rango de una matriz se define como el número máximo de vectores líneas (o columnas) linealmente independientes. Este se puede calcular mediante la dimensión del más grande de los menores principales no nulos de la matriz.

Ejemplo 1. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 6 del tema 3:

Con:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{R_1 C_C} & \frac{1}{R_2 C_C} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{R_2 C_C} \end{bmatrix}$$

Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{R_2 C_C} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 2$$

Y como 2, entonces esta representación de estado del sistema es controlable.

Ejemplo 2. Para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 8 del tema 3:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_C} - \frac{1}{R_2 C_C} & \frac{1}{R_2 C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_V} & -\frac{1}{R_2 C_V} - \frac{1}{R_3 C_V} & \frac{1}{R_3 C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_{H_g}} & -\frac{1}{R_3 C_{H_g}} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Y considerando los valores siguientes:

$$R_1 = 1; \quad R_2 = 1; \quad R_3 = 1$$

Obtenemos las matrices siguientes para el cálculo de la matriz de controlabilidad:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

La matriz de controlabilidad será entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 3 \text{ entonces esta representación de estado del sistema es controlable.}$$

Ejemplo 3. : Para el sistema representado por las matrices y siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos las matrices que permiten determinar la matriz de controlabilidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

La matriz de controlabilidad es entonces:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

La matriz de controlabilidad tiene rango 2, puesto que las dos últimas líneas son idénticas, y por tanto solo se pueden determinar menores principales diferentes de cero de dimensión 2. Por lo tanto esta representación de estado No es Controlable.

Nota: No se requiere la construcción de la matriz de controlabilidad más allá de la dimensión .

Observabilidad

La observabilidad es una característica estructural complementaria de una representación de estado de un sistema, o del sistema en sí mismo, que nos indica la capacidad de poder estimar los valores históricos de un estado partiendo del conocimiento de las variables de salida y entrada del sistema.

Definición

Un estado x_i es observable en t_0 siempre que sea posible determinar $x_i(t_0)$ conociendo a t_0 las salidas $y(t)$ y las entradas $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Si esta propiedad se cumple $\forall x_i$ y $\forall t_0 \geq 1$, entonces el sistema es completamente observable.

Nota: La noción de observabilidad es crucial para los sistemas donde es imposible medir la totalidad del vector de estado, y en consecuencia se requiere de la estimación de este a partir de las variables de salida.

Criterio de Observabilidad (Kalman)

La determinación de la observabilidad de un sistema LTI depende de las matrices A y C del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación dinámica de estado y la ecuación de salida:

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, es observable si y solo si la matriz de observabilidad tiene rango n :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ rango } O = n$$

Ejemplo 4. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 1, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad es:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|O| = 1 \neq 0$ el rango de O es 2 por lo tanto el sistema es observable.

Ejemplo 5: para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 2, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan las matrices necesarias para la determinación de la matriz de observabilidad:

Dependiendo de si se utiliza la función de transferencia simplificada o no, se pueden obtener las cuatros realizaciones siguientes para .

- No observable y no controlable:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Observable y no controlable:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Controlable y no observable :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Observable y controlable:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que la cuarta realización es mínima mientras que las otras tres no lo son.

El ejemplo muestra que por un lado las representaciones de estado no son equivalentes entre sí, y por otro lado que la simplificación de un polo con un cero está estrechamente a las propiedades de observabilidad y controlabilidad de la realización obtenida.

De esto se deduce que: Una realización de estado (, , ,) de es mínima si y solo si esta es observable y controlable.

Formas canónicas de representación de estado

El hecho de disponer de diferentes representaciones de estado para un mismo sistema, dado que el vector de estado no es único (ver no unicidad del conjunto de variables de estado en tema 3), es una ventaja sustancial de la representación de estado pues permite utilizar formas particulares de la misma, denominadas formas canónicas, cada una de las cuales presentan ciertas ventajas.

Mencionaremos aquí tres de las forma canónicas conocidas:

- La forma diagonal o cuasi-diagonal de Jordan.
- La forma de controlabilidad.
- La forma de observabilidad.

Forma Modal o Diagonal de Jordan.

En el caso de una función de transferencia de orden , estrictamente propia, que posee polos , , , reales y diferentes (matriz ∈ con valores propios distintos), se puede descomponer la función de transferencia en fracciones parciales:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} + \dots$$

$$\frac{\dots}{\Pi}$$

Y en este caso se puede obtener una realización, donde la matriz tenga una forma diagonal:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el caso particular de polos reales conjugados, se puede realizar la siguiente transformación para obtener una matriz de términos reales:

$$\begin{matrix} & & 0 & 1/2 & -1/2 & & 1 & 1 \\ & & & 1/2 & 1/2 & & & & \end{matrix}$$

Forma cuasi-diagonal de Jordan

En el caso que la función de transferencia del sistema posea polos reales repetidos ($1/(s - p)^k$), la realización es irreducible a un esquema paralelo, puesto que la descomposición de la función de transferencia en fracciones parciales es:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_k}{s - p_k} + \dots$$

Se puede por lo tanto obtener una realización con la matriz de la forma denominada cuasi-diagonal de Jordan:

$$\begin{matrix} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\ & 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0 & \vdots \\ & 0 & 0 & & 0 & & \vdots & 1 \\ & & & & & & \vdots & 1 \\ & \vdots & & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & & 1 \\ & & & \dots & \dots & & & \end{matrix}$$

Forma canónica de controlabilidad

En el caso de una función de transferencia estrictamente propia de orden n :

$$\frac{N(s)}{D(s)}$$

Se puede obtener una representación de estado denominada de controlabilidad de la forma:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & 1 \\ & & & \dots & \dots & & \end{matrix}$$

Para obtener esta representación multiplicamos y dividimos la función de transferencia por una variable intermedia s :

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s} \cdot \frac{s}{D(s)}$$

Estas operaciones no modifican las relaciones en el sistema, podemos escribir entonces las dos relaciones:

...

La transformada inversa de Laplace de las dos relaciones es:

$$\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix}$$

Si seleccionamos como variables de estado a:

$$\vdots$$

Obtenemos entonces las ecuaciones de estado:

$$\begin{matrix} \vdots \\ \dots \end{matrix}$$

Y la ecuación de salida:

$$\dots$$

Forma canónica de observabilidad

En el caso de una función e transferencia de orden n , estrictamente propia:

$$\frac{\dots}{\dots}$$

Se puede obtener una representación de estado llamada forma canónica de observabilidad de la forma:

$$\begin{matrix} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}$$

Para obtener esta realización se considera la ecuación diferencial original del sistema:

$$\dots \quad \dots$$

La cual reorganizamos de la forma siguiente:

$$\dots$$

Seleccionamos como variables de estado a:

$$\vdots$$

Y obtenemos una representación de estado de la forma:

$$\begin{matrix} \vdots \\ \dots \end{matrix}$$

Con la ecuación de salida:

También se puede obtener una forma canónica a partir de una realización cualquiera realizando un cambio de variable lineal.

Ejemplo 7: Obtener las realizaciones en las tres formas canónicas para el sistema representado por la ecuación diferencial siguiente:

$$6 \ddot{y} + 11 \dot{y} + 6y = 6u$$

La función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+6)}$$

Donde $\frac{6}{(s+1)(s+6)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+6}$:

$$A = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5}; \quad B = \frac{6}{1-6} = -\frac{6}{5}$$

La representación de estado en la forma canónica de Jordan es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

La representación de estado en la forma canónica de controlabilidad es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La representación de estado en la forma canónica de observabilidad es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Ejercicios

Para las siguientes funciones de transferencia obtener las realizaciones, determinar la observabilidad y controlabilidad de las mismas y presentar las realizaciones en las tres formas canónicas estudiadas.

1. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$
2. $G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2}$
3. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$
4. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$
5. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$
6. $G(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$

Tema 9. Acciones de Control

Introducción

Un controlador tiene como tarea la de mantener la variable controlada en correspondencia muy próxima con la señal de referencia, eliminando la influencia de las perturbaciones que tienden a cambiar el valor de la variable controlada.

La acción de control de un controlador se define como la relación entre el error en la señal de salida () y la señal actuante (). En otras palabras es la función de transferencia del controlador:

$$F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} \quad \text{ó en el dominio del tiempo} \quad f(t) = \frac{m(t)}{e(t)}$$

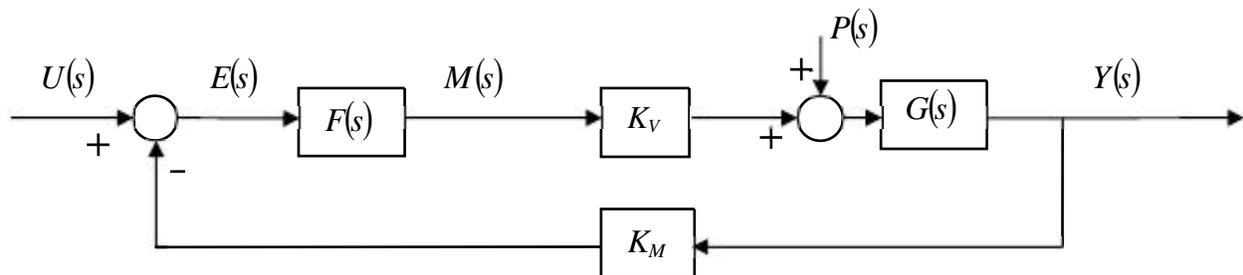


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

Tipos de acción de control

Existen múltiples formas de acción de control, cuyo tipo depende de la forma de obtención de la ley de control. Sin embargo existen unos tipos básicos de acción de control que se usan comúnmente en procesos industriales y que son:

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF).
2. Acción de control proporcional.
3. Acción de control derivativa.
4. Acción de control integral.

En la práctica los controles integral y derivativo no se pueden usar solos, por lo tanto estos se suelen usar en combinación con otras, y se obtienen las siguientes acciones de control posibles:

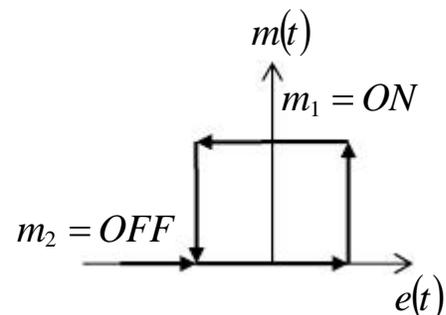
5. Acción de control proporcional más derivativa.
6. Acción de control proporcional más integral.
7. Acción de control proporcional más integral más derivativa.

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF)

En este tipo de acción de control el controlador adopta solo dos posiciones, que por lo general es abierto y cerrado (conectado o desconectado). Dicho de otra forma la señal actuante del controlador () se mueve entre dos límites requeridos para que la variable controlada oscile entre dos valores dados.

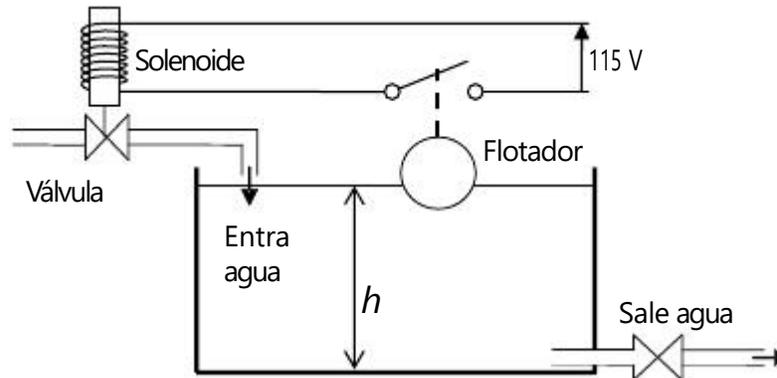
$$m(t) = m_1 \quad \text{para } e(t) > 0$$

$$m(t) = m_2 \quad \text{para } e(t) < 0$$

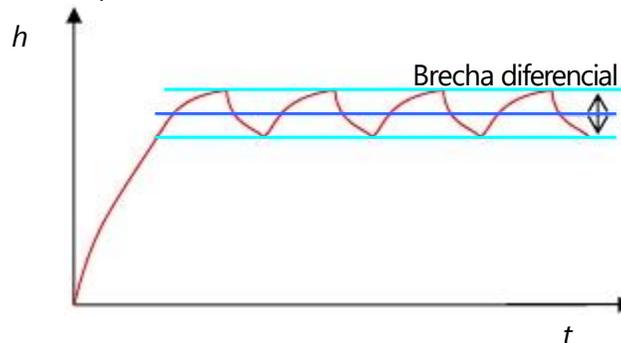


En la práctica un controlador discontinuo debe tener una zona muerta o histéresis (brecha diferencial). Esta zona muerta se debe minimizar para mantener el error pequeño pero debe estar para evitar que se produzcan oscilaciones.

Por ejemplo un control de nivel eléctrico:



La presencia de la brecha diferencial produce un error entre el valor deseado (nivel deseado en el ejemplo) y el valor real de la variable (nivel real en el ejemplo). Pero esta es necesaria para evitar conexiones y desconexiones muy cercanas en tiempo.



Es por esto que a brecha diferencial se debe ajustar dependiendo de la exactitud deseada, de la frecuencia de conexión y desconexión del elemento final de control (válvula solenoide) y de los valores a obtener.

2. Acción de control proporcional (P)

Un control proporcional tiene una salida que es proporcional al error:

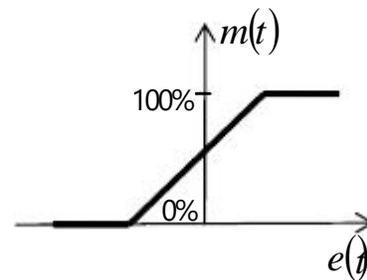
$$m(t) = K_p e(t) \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

Donde K_p es la ganancia del controlador proporcional.

Este es esencialmente un amplificador de ganancia y se usa cuando se quiere un control lineal en una región del error.

Para errores negativos grandes la salida del controlador es cero (0%) o un valor mínimo y para errores positivos la salida será el valor máximo (100%), y en la mayoría de los controladores estos valores máximos y mínimos son ajustables.

En cierta forma es similar al controlador ON-OFF solo que en vez de una zona muerta posee una región de respuesta lineal.



Banda Proporcional

La acción de control proporcional se puede expresar mediante el concepto de banda proporcional, la cual se define como el inverso de K_P expresado en porcentaje:

$$B_P = \frac{100}{K_P}$$

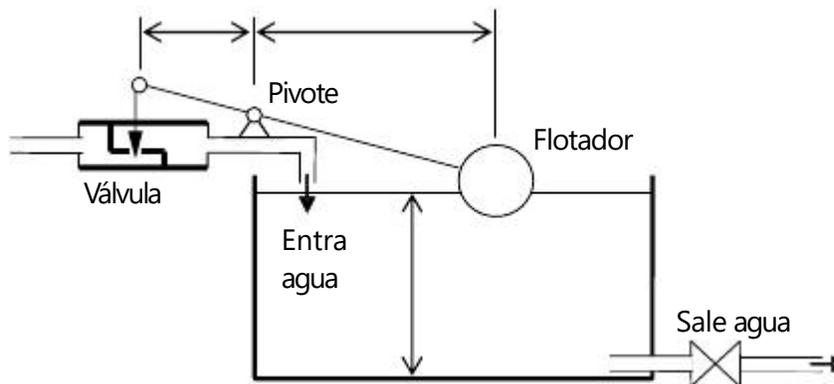
Esta se puede entender como el cambio necesario en el error (expresado en porcentaje del valor máximo de la variable controlada) para que se produzca un cambio del 100% en la salida del controlador. Para que la salida del controlador pase de su valor mínimo (totalmente cerrado) a su valor máximo (totalmente abierto).

La banda proporcional deseada es de 100%, si esta es menor (ganancia grande) entonces el instrumento se hace muy sensible lo que produce que el sistema entre en ciclaje (similar a un sistema ON-OFF con una zona muerta pequeña). Si la banda proporcional es muy grande entonces el sistema es muy lento.

Características de la acción proporcional

- La conexión física directa entre el error y la acción de control produce una respuesta rápida y estable.
- Los sistemas con acción de control proporcional al introducirles una perturbación sostenida (rampa) nunca llevan la variable controlada al valor deseado, se produce un error en estado estable (OFF-SET)

Por ejemplo un control de nivel mecánico:



3. Acción de control derivativa (D)

La salida de un controlador con acción de control derivativa es proporcional a la rata de cambio del error:

$$m(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_D s$$

Donde K_D es la constante de acción derivativa.

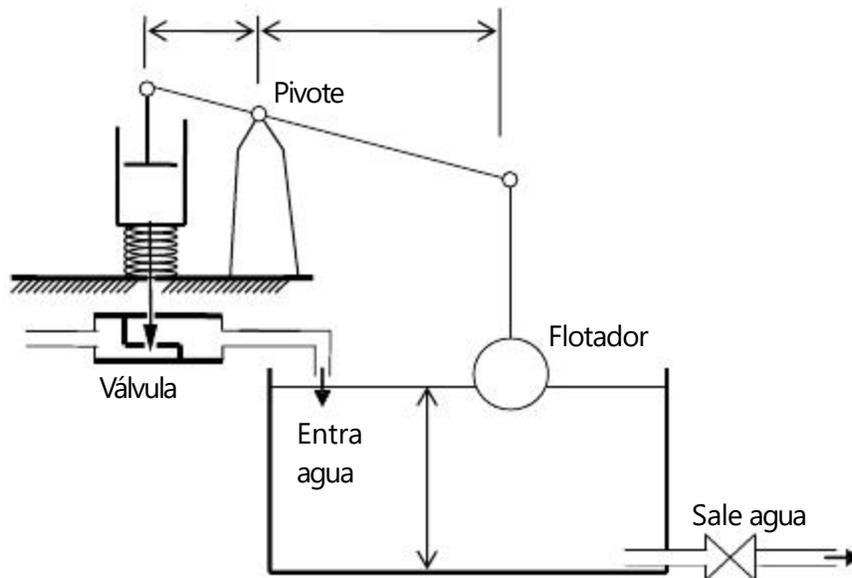
En otras palabras la salida del controlador varía en proporción a la velocidad de cambio del error, si el error es constante no se produce ninguna acción de control.

Características de la acción de control derivativa

- No tiene noción alguna del error de la variable en estado estable. Si el error no cambia no hay acción de control. Por lo tanto no se puede usar sola.

- Se produce un adelanto de la acción de control, si la variable controlada cambia rápidamente la acción correctora es rápida y de gran amplitud, por lo que el sistema de control actúa rápidamente antes de que el error sea grande. Por supuesto la acción de control no puede anticipar a un error que aún no se ha producido.
- Amplifica las señales de ruido.
- Produce un efecto de saturación en el actuador.

Por ejemplo un control de nivel mecánico con amortiguador



4. Acción de control integral (I)

El controlador integral tiene una salida que es proporcional a la integral del error:

$$m(t) = K_I \int_0^t e(t) dt \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

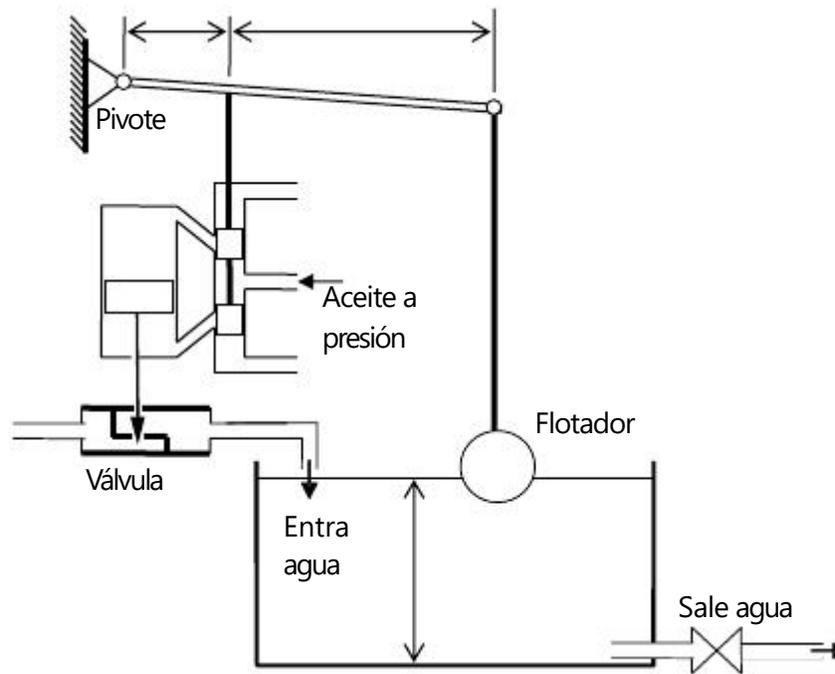
Donde K_I es la constante de acción integral.

En otras palabras la velocidad de la salida del controlador es proporcional al error o la tasa de cambio de la salida del controlador es proporcional al error. Por lo cual la tendencia es a minimizar el error.

Características de la acción integral

- Es relativamente lenta debido a la conexión elástica entre los elementos de control. Por lo cual no se usa solo.
- No permite error en estado estable.
- Tiende a sobre corregir el error, por lo cual es posible que vuelva oscilatorio al sistema. De hecho aumenta el orden del mismo.

Por ejemplo un control de nivel hidráulico



5. Control proporcional más derivativa (PD)

La salida del controlador es proporcional al error y a su derivada:

$$m(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + K_D s$$

Este combina las ventajas del control proporcional más el derivativo, pero se usa poco por no ser capaz de eliminar el error en estado estable.

Tiempo de acción derivativa

La ecuación de este control se puede escribir también como:

$$m(t) = K_P \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Donde $T_D = \frac{K_D}{K_P}$ es el tiempo de acción derivativa.

Esta se define como el cambio lineal en el error, cuando la respuesta proporcional iguale a la derivativa.

Se acostumbra expresar la acción derivativa en minutos de adelanto, que representa el tiempo en minutos con que la acción derivativa se anticipa al efecto de acción proporcional.

La principal ventaja de este control es que produce señales de adelanto que actúan rápidamente cuando la variable controlada cambia bruscamente.

6. Control proporcional más integral (PI)

En un controlador proporcional integral la salida es proporcional al error y a la integral del error:

$$m(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Este es un esfuerzo para combinar las ventajas del controlador proporcional más el controlador integral, es decir tiene una buena respuesta transitoria por el efecto proporcional y corrige el error en estado estable por el efecto integral.

Tiempo de acción integral

$$m(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt \right)$$

Donde $T_I = \frac{K_p}{K_I}$ es el tiempo de acción integral.

Esta se define como el tiempo necesario para que la respuesta integral iguale a la proporcional después de un cambio en escalón del error.

7. Control proporcional más integral más derivativo (PID)

La salida del controlador es proporcional al error, a su derivada y a su integral:

$$m(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{ó} \quad F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

O expresado en función del tiempo de acción integral y derivativa:

$$m(t) = \frac{100}{BP} \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Este controlador ofrece rápida respuesta proporcional al error, mientras que tiene un reajuste automático desde la parte integral que elimina el error en estado estable. La acción derivativa permite que el controlador responda rápidamente a cambios en el error.

Generalmente en los controladores PID se puede ajustar:

- en % de la banda proporcional
- en minutos de acción integral
- en minutos de acción derivativa

Resumen

Control	Función de transferencia	Velocidad de respuesta	Error en estado estable	Uso solo	Costo
Proporcional (P)	K_p	Media	Existe	Si	Bajo
Derivativo (D)	$K_D s$	Alta	Existe	No	Medio
Integral (I)	$\frac{K_I}{s}$	Baja	No hay	No	Medio
PI	$K_p + \frac{K_I}{s}$	Media	No hay	Si	Alto
PD	$K_p + K_D s$	Alta	Existe	Poco	Alto

PID	$K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	Alta	No hay	Si	Alto
-----	-------------------------------	------	--------	----	------

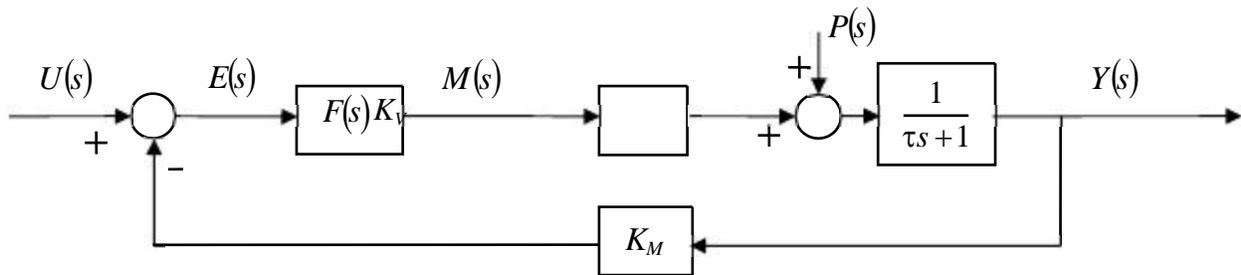
Ejemplo de estudio del efecto de una acción de control en un sistema

Se tiene un proceso que responde a una ecuación de primer orden:

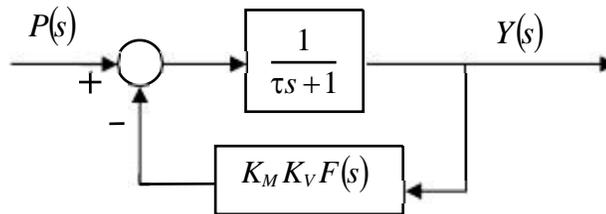
$$\tau Dy + y = u$$

Donde la función de transferencia es:

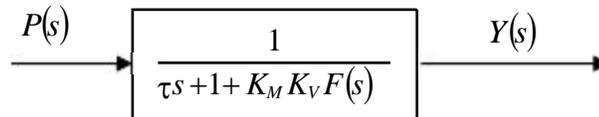
$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \text{ o en el dominio del tiempo } g(t) = \frac{1}{\tau D + 1}$$



Si se supone la referencia es constante, el elemento que puede afectar al sistema es la perturbación. Por tanto por comodidad podemos tomar 0, esto implica que la respuesta del sistema debe tender a cero para cualquier perturbación en el transcurso del tiempo. En estas condiciones puedo transformar el diagrama de bloque del sistema completo en:



Reduciendo el diagrama de bloques obtenemos:



Si el controlador es proporcional

$$F(s) = K_P$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_P}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_P + 1 = K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau s + K = 0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s = -\frac{K}{\tau}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

Para este estudio utilizaremos un concepto de las transformadas de Laplace denominado teorema del valor final que dice:

$$VF = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

El valor en estado estable es por definición el valor que se obtendría cuando la parte transitoria de la respuesta se hace despreciable, es decir el valor de la respuesta para un tiempo suficientemente grande cercano al infinito. Por esto el valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sP(s)}{\tau s + K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sH}{(\tau s + K)s} = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a $\frac{H}{K}$.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau Dy + Ky = H \quad \text{dividiendo por } K \text{ obtenemos } \frac{\tau}{K} Dy + y = \frac{H}{K}$$

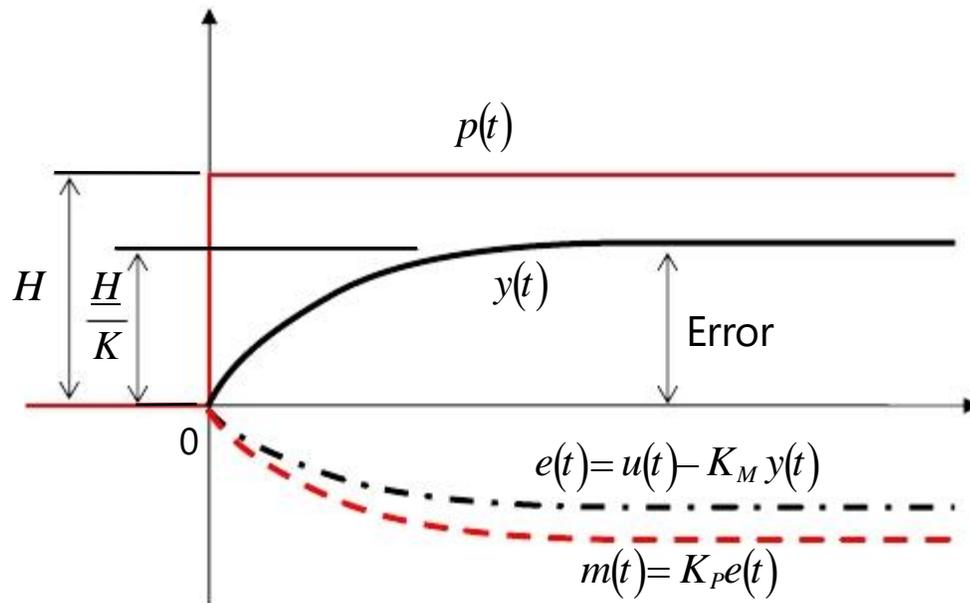
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema será de la forma:

$$y = -\frac{H}{K} e^{(-K/\tau)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será:



Si el controlador es proporcional más derivativo

$$F(s) = K_P + K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V (K_P + K_D s)} = \frac{1}{(\tau + K_M K_V K_D) s + 1 + K_M K_V K_P}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_P + 1 = K$ y $\tau + K_M K_V K_D = \tau_K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau_K s + K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau_K s + K = 0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s = -\frac{K}{\tau_K}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s P(s)}{\tau_K s + K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \Leftrightarrow P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{sH}{(\tau_K s + K)s} \right) = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a $\frac{H}{K}$.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau_K Dy + Ky = H \text{ dividiendo por } K \text{ obtenemos } \frac{\tau_K}{K} Dy + y = \frac{H}{K}$$

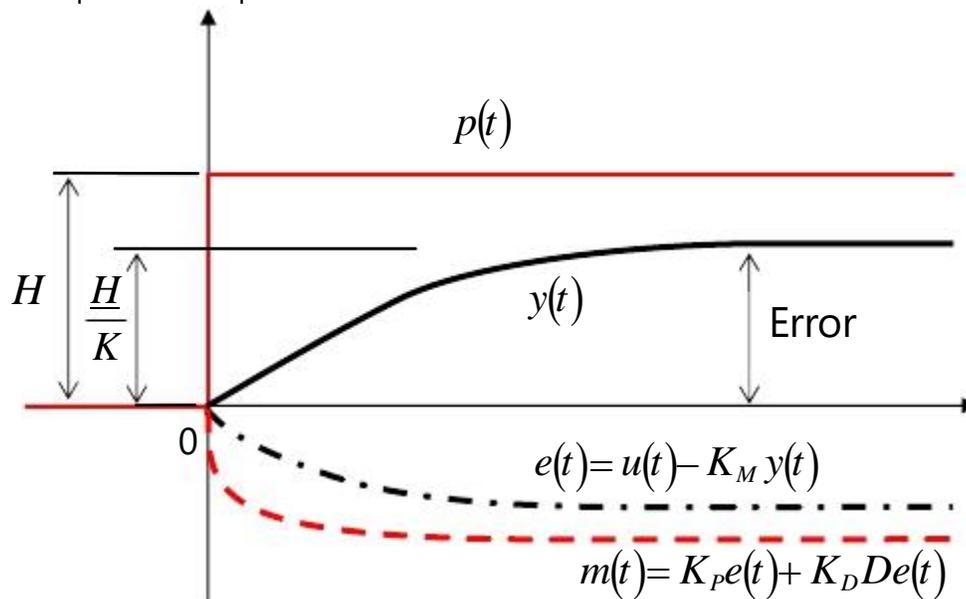
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema será de la forma:

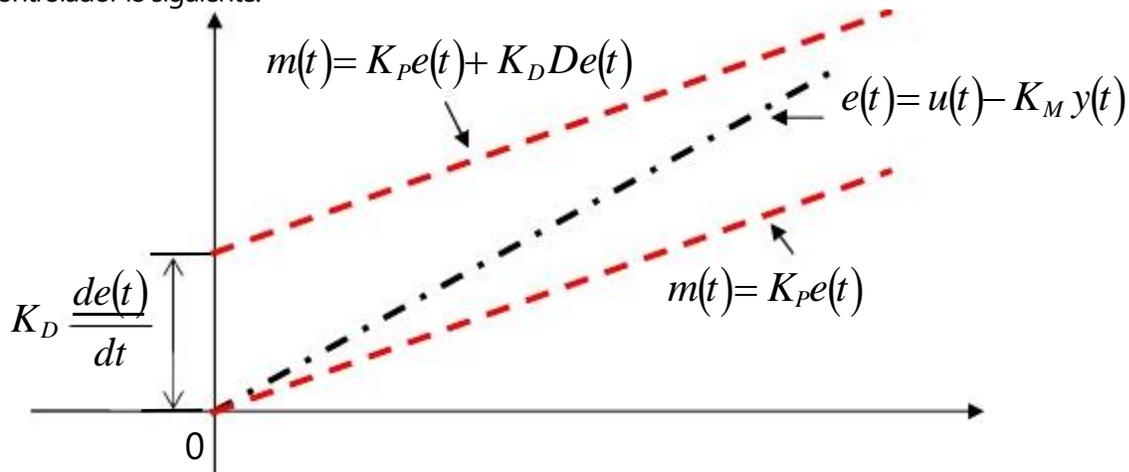
$$y = -\frac{H}{K} e^{(-K/\tau_K)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será casi idéntica al control proporcional, solo cambiara la duración de la etapa transitoria, que será más larga, en función del nuevo valor de la constante de tiempo, que en este caso depende del tiempo de acción derivativa.



La diferencia entre una acción de control proporcional y una proporcional derivativa, se puede apreciar más claramente si suponemos que el error varía en forma de rampa (esta suposición es meramente ilustrativa ya que en un caso real es muy difícil obtener un error variando de esta forma, en todo caso no corresponde a

una perturbación variando en forma de rampa). Podemos observar si graficamos el error y la salida del controlador lo siguiente:



Si el controlador es proporcional más integral

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_P + \frac{K_M K_V K_I}{s}}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{s}{\tau s^2 + (1 + K_M K_V K_P) s + K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{\tau s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n = \frac{(1 + K_M K_V K_P)}{\tau}; \omega_n^2 = \frac{K_M K_V K_I}{\tau}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ .

Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional y derivativo es que el sistema completo es de un orden superior al proceso, luego es posible que este se vuelva oscilatorio.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} \quad P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\tau s}{s^2 + 2\xi\omega} P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau s^2}{s^2 + 2\xi\omega} \frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \tau D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^2} D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p'$$

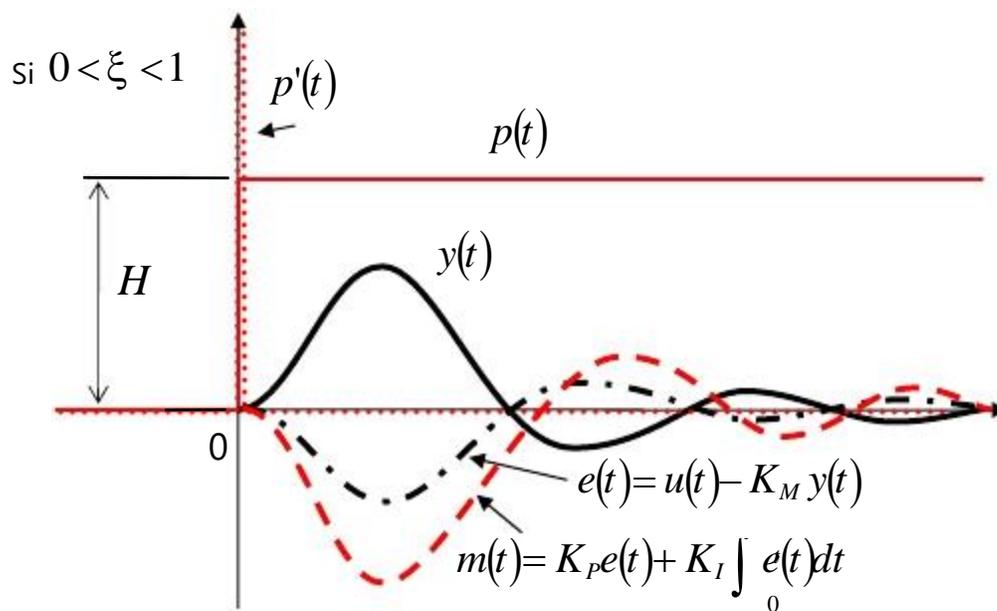
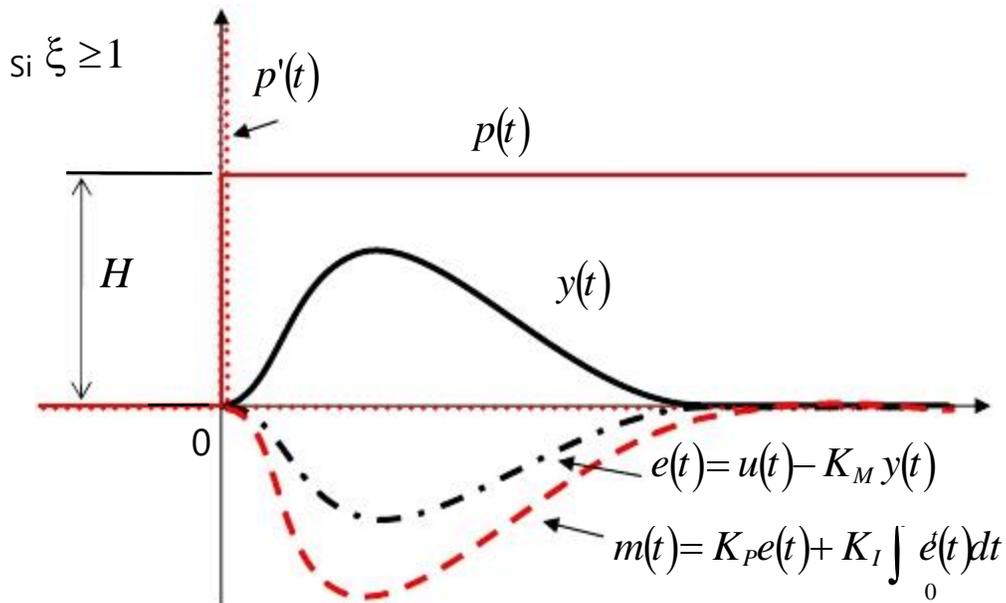
Donde: $p' = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^4} D p$

Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación () en escalón:



Si el controlador es proporcional más integral más derivativo

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_P + \frac{K_M K_V K_I}{s} + K_M K_V K_D s}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{s}{(\tau + K_M K_V K_D)s^2 + (1 + K_M K_V K_P)s + K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n = \frac{(1 + K_M K_V K_P)}{(\tau + K_M K_V K_D)}; \omega_n^2 = \frac{K_M K_V K_I}{(\tau + K_M K_V K_D)}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ .

Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional más integral es que el radio de amortiguamiento y la frecuencia natural son diferentes, por lo cual la parte transitoria será probablemente más corta y la respuesta estará más cerca del valor deseado.

Sin embargo al afectar el valor del radio de amortiguamiento esta acción podría hacer tender al sistema hacia la inestabilidad si este valor se acerca mucho a cero, por lo cual se debe tener cuidado con la calibración del tiempo de acción integral.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{P(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = (\tau + K_M K_V K_D) D p$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n D y + \omega_n^2 y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^2} D p$$

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p'$$

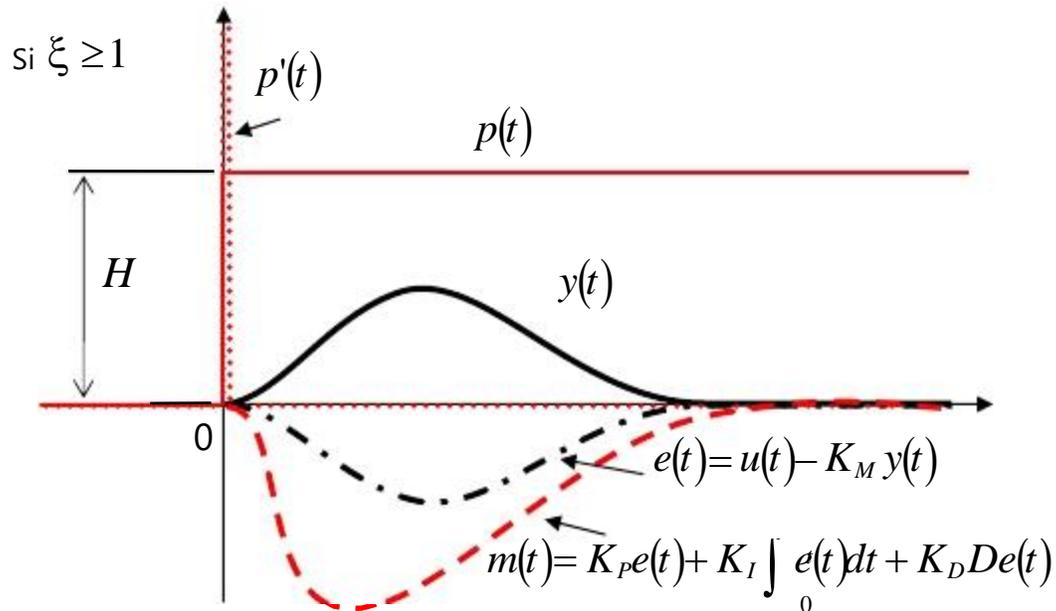
Donde: $p' = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^4} Dp$

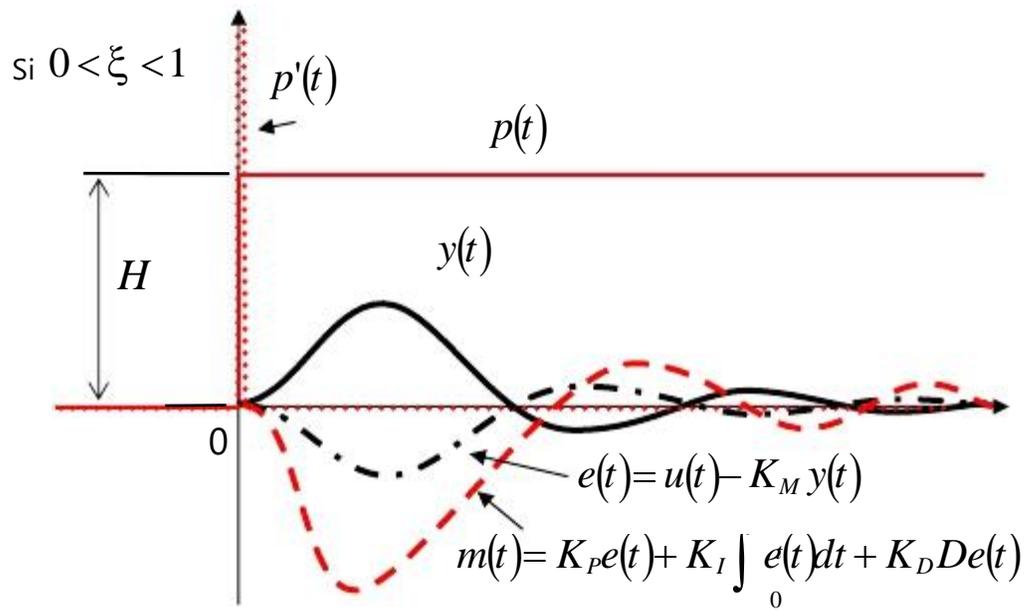
Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \rightarrow Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación () en escalón:





Tema 10. Ajuste de Controladores PID

Introducción

En este tema se describen algunos métodos de determinación los valores de los parámetros de un controlador PID que son la ganancia proporcional (K_p), el tiempo de acción derivativo (T_d) o el tiempo de acción integral (T_i). A este proceso de selección de los parámetros del controlador, para que cumpla las especificaciones de operación, se le conoce como ajuste o entonación del controlador. Este ajuste se hace con el objetivo que el sistema controlado cumpla con las especificaciones de respuesta transitoria y de estado estacionario que se requieran.

Existen diversos métodos para ajuste de controladores que difieren en función al conocimiento que se requieren sobre la dinámica del proceso a controlar.

Cuando se conoce un modelo matemático del proceso, entonces se pueden aplicar métodos analíticos para determinar los parámetros del controlador.

Pero si el proceso es muy complejo, suele ser difícil la obtención de un modelo matemático, en cuyo caso no es posible la utilización de un método analítico de cálculo de los parámetros del controlador PID y se debe recurrir a procedimientos experimentales para el ajuste.

Los procedimientos convencionales analíticos, por lo general están restringidos a proceso que se comportan como sistemas lineales, de una entrada y una salida, e invariantes en el tiempo.

Métodos de Ziegler - Nichols

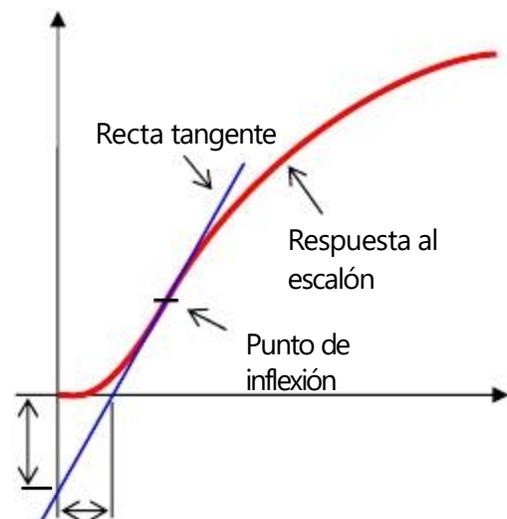
Ziegler y Nichols sugirieron dos procedimientos para sintonizar controladores PID basándose respectivamente en la respuesta experimental a un escalón de entrada, o en base al valor de ω_{cu} que produce una estabilidad marginal mediante el sólo uso de la acción de control proporcional. Los procedimientos de Ziegler-Nichols, que se presentan a continuación, son muy convenientes cuando no se conoce un modelo matemático de la planta; naturalmente, estos procedimientos también se pueden aplicar al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.

Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta al escalón.

El primer método propuesto por Ziegler y Nichols está basado en las características de la respuesta transitoria de una planta ante una entrada escalón unitario en lazo abierto.

Esta respuesta se puede caracterizar por dos parámetros (τ y θ), como se muestra en la figura. Para obtener el valor de estos parámetros primero se determina el punto donde la pendiente de la respuesta escalón tiene su valor máximo (punto de inflexión), y luego se dibuja la tangente en este punto. En la intersección entre esta tangente y la coordenada de abscisa obtenemos el parámetro θ , y de la intersección con la ordenada obtenemos el parámetro τ .

La función de transferencia de un proceso con una respuesta del tipo mostrado en la figura se puede aproximar por la función:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a e^{-Ls}}{Ls}$$

Partiendo de esta aproximación Ziegler y Nichols sugirieron expresar los parámetros K_c , T_i y T_d del controlador PID, directamente en función de los parámetros a y L , de acuerdo con los valores que aparecen en la tabla siguiente.

Parámetros de controladores PID según método de la respuesta al escalón de Ziegler - Nichols			
Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$3.4L$

Estos valores son para los parámetros

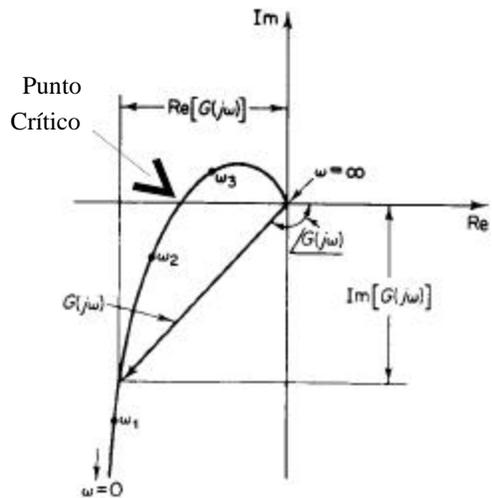
metros del controlador permiten obtener un control que regula en forma estable y con una buena velocidad de respuesta al proceso a controlar. Sin embargo como estos valores se obtienen partiendo de la aproximación antes mencionada y el proceso real no corresponde exactamente a ese modelo entonces generalmente es conveniente realizar luego un ajuste fino. Con esto se busca mejorar la estabilidad relativa que se traduce en el aumento del margen de fase y ganancia.

Método de Ziegler - Nichols basado en la respuesta frecuencial.

Este método se basa también en una caracterización muy simple de la dinámica del proceso. El diseño está basado en el conocimiento de un punto del lugar de transferencia de la planta, el punto donde el lugar de transferencia se intersecta con el eje real negativo. Este punto es caracterizado por dos parámetros: la ganancia crítica (K_c) y el periodo crítico (T_c).

El procedimiento para obtener los parámetros K_c y T_c es el siguiente:

- Se anulan las ganancias de la parte integral y derivativa del controlador ($T_i = \infty, T_d = 0$).
- Se somete al sistema a la frecuencia que produce una respuesta en lazo abierto con un ángulo de fase de 180° , esta frecuencia será la frecuencia crítica ω_c que es el inverso del periodo crítico T_c .
- Se incrementa la ganancia proporcional K_c del controlador desde cero hasta el valor crítico K_c , para el cual la salida empieza a exhibir oscilaciones sostenidas. Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas cual sea el valor de K_c , entonces no se puede aplicar este método.



El método diseñado por Ziegler y Nichols conduce a fórmulas simples para obtener los parámetros del controlador, en términos de la ganancia crítica y el periodo crítico, como se puede ver en la tabla siguiente. La tabla también muestra una estimación del periodo de la dinámica dominante (T_c) del sistema en lazo cerrado.

Parámetros de controladores PID según método de la respuesta frecuencial de Ziegler - Nichols				
Controlador				
P	0.5	-	-	
PI	0.4	0.8	-	1.4
PID	0.5	0.5	0.12	0.85

Métodos por asignación de Polos Dominantes

Los métodos de Ziegler y Nichols discutidos en la sección anterior están basados en el conocimiento de un solo punto sobre el lugar de transferencia del proceso en lazo abierto.

Esta sección presenta un método de cálculo que usa dos puntos o más sobre el lugar de transferencia. El método está basado en una simple asignación de los polos dominantes de un sistema en lazo cerrado a partir de la función de transferencia en lazo abierto.

Polos Dominantes

Considere el sistema mostrado en la figura, donde $G(s)$ es la función de transferencia del proceso y $H(s)$ es la función de transferencia del controlador.

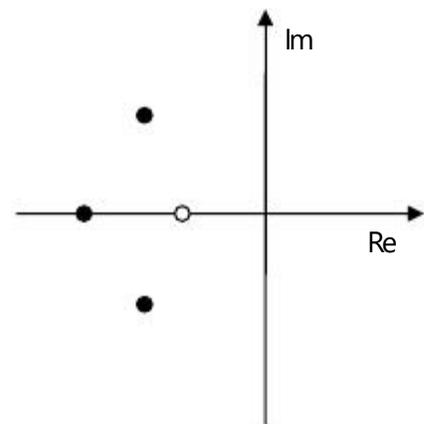
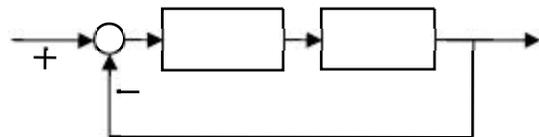
La función de transferencia del sistema en lazo cerrado ($G_c(s)$) está dada por:

$$G_c(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Muchas de las propiedades de los sistemas en lazo cerrado pueden ser deducidas a partir de los polos y ceros de $G_c(s)$, estos últimos son también los ceros de $1 + G(s)H(s)$. Los polos en lazo cerrado se pueden obtener a partir de la raíz de la siguiente ecuación:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

La ubicación en el plano imaginario de los polos y ceros de un sistema en lazo cerrado puede variar considerablemente con respecto al lazo abierto. Muchos lazos de retroalimentación simple, tendrán una configuración del tipo mostrado en la figura siguiente, donde las principales características de la respuesta están dadas por un par de polos complejos, $\sigma \pm j\omega_d$, denominados polos dominantes. La respuesta es también influenciada por los otros polos y los ceros σ_3 y σ_4 , respectivamente. También pueden existir otros polos y ceros alejados del origen. Los polos y ceros cuyas partes reales son mucho más pequeñas que la parte real de los polos dominantes, tienen pequeña influencia en la respuesta transitoria, por lo cual este efecto puede despreciarse.



Control PI

El método de diseño por asignación de polos dominantes será aplicado primero a un control PI. Dos polos en lazo cerrado se pueden especificar en este caso, ya que un controlador PI tiene dos parámetros ajustables. Con el controlador PI dado por la ecuación:

$$H(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Donde K_p es la ganancia proporcional y K_i es la ganancia integral. Los parámetros σ y ω serán determinados de tal forma que el sistema en lazo cerrado tenga los polos dominantes en σ y ω , tendremos entonces:

$$P_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma + i\omega$$

$$P_2 = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma - i\omega$$

Esto implica que:

$$\begin{cases} 1 + \left(K_p + \frac{K_i}{P} \right) G(P_1) = 0 \\ 1 + \left(K_p + \frac{K_i}{P_2} \right) G(P_2) = 0 \end{cases}$$

La ecuación anterior es lineal en K_p y K_i . Esta tiene una solución si $\Delta \neq 0$ y la solución en este caso es:

$$K_p(\omega_0) = \frac{\sqrt{1-\xi^2} A(\omega_0) + \xi B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

$$K_i(\omega_0) = \frac{\omega_0 B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} A(\omega_0)}$$

Donde:

$$A(\omega_0) = \operatorname{Re}(G(P))$$

$$B(\omega_0) = \operatorname{Im}(G(P))$$

El parámetro ξ puede ser visto como un parámetro que permite determinar la velocidad de respuesta del sistema de lazo cerrado obtenido. Para valores pequeños de ξ se obtiene un sistema lento, y para valores altos se obtiene un sistema rápido.

- Si la dinámica de un proceso es de primer orden, el sistema en lazo cerrado tiene solamente dos polos y por lo tanto el parámetro ξ puede ser elegido arbitrariamente.
- Para sistemas de orden elevado, en lazo cerrado se tendrá un número elevado de polos, pero se escogerán de tal forma que dos sean dominantes.
- Para obtener un sistema estable con polos no dominantes sobre el eje real, estos polos deberán ser de parte real más pequeños que $-\sigma$. La condición para obtener dos polos dominantes es que ξ debe ser escogido suficientemente pequeño. El límite superior de ξ puede ser determinado usando la condición de que el polo más alejado sobre el eje real se encuentre en el plano imaginario en σ .
- Para un proceso estable, la función $G(P)$ es positiva y ω_0 es pequeño para un ξ pequeño. Entonces resulta que la ganancia proporcional K_p es negativa para un ξ pequeño. Y como es normalmente deseable obtener las ganancias del controlador positivas, un límite inferior para el parámetro de diseño se puede obtener de la condición $K_p > 0$. El valor de ξ corresponde en este caso a un control integral puro. Una alternativa para elegir a ξ , basado en los polos dominantes, es seleccionar un ω_0 que genere el valor máximo de la ganancia integral. Los valores obtenidos en este caso serán muy cercanos a los obtenidos para la condición de polos dominantes.

Control PD

El método de diseño por asignación de polos dominantes puede ser aplicado al control PD. La función de transferencia de este controlador es:

$$H(s) = K_p + K_d s$$

Y de igual forma que para el caso del control PI se requiere que el sistema en lazo cerrado tenga polos en σ y $\pm j\omega$. Con cálculos análogos al caso del controlador PI los parámetros del controlador se pueden obtener mediante las expresiones:

$$K_p(\omega_0) = \frac{-\sqrt{1-\xi^2} A(\omega_0) + \xi B(\omega_0)}{\sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

$$K_d(\omega_0) = \frac{B(\omega_0)}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} (A(\omega_0)^2 + B(\omega_0)^2)}$$

El valor del parámetro de diseño ξ debe ser aquí aún mayor que para el controlador PI. Pudiéndose estimar su valor inferior mediante la expresión $\xi = \frac{1}{2}$. El valor de ω_0 corresponde en este caso a un control derivativo puro. Un valor razonable para este parámetro es escoger el que proporciona el mayor valor para la ganancia proporcional.

Control PID

Con un control PID, es posible posicionar tres polos en lazo cerrado. Dada la función de transferencia del controlador PID como:

$$H(s) = K'_p + \frac{K'_i}{s} + K'_d s$$

Donde K'_p es la ganancia proporcional, K'_i es la ganancia para el término integral, y K'_d es la ganancia para el término derivativo. Dos polos en lazo cerrado serán posicionados de acuerdo a la ecuación obtenida para el control PI. Y se asume que con esto el problema de diseño del controlador PI está resuelto, es decir, que se conocen los valores de σ y ω . El valor de la función de transferencia del controlador $H(s)$ en $s = -\sigma + j\omega$ es:

$$H(-\sigma + j\omega) = K'_p + \frac{K'_i}{-\sigma + j\omega} + K'_d (-\sigma + j\omega)$$

$$= K'_p - \frac{\sigma K'_i - \omega K'_d + j(\omega K'_i + \sigma K'_d)}{\omega^2 + \sigma^2}$$

Suponiendo que la función de transferencia tiene el mismo valor que la función de transferencia para el controlador PI, se tiene:

$$K'_p - \frac{\sigma K'_i - \omega K'_d}{\omega^2 + \sigma^2} = K_p - \frac{\sigma K_i}{\omega^2}$$

$$-\frac{\omega K'_i + \sigma K'_d}{\omega^2 + \sigma^2} = -\frac{\omega K_i}{\omega^2}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$K'_p(\omega_0) = K_p(\omega_0) + 2\xi\omega_0 K'_d$$

$$K'_i(\omega_0) = K_i(\omega_0) + \omega_0^2 K'_d$$

Así, se obtiene una familia de ganancias, con dos parámetros ξ y ω_0 , para un controlador PID, lo cual genera un sistema de lazo cerrado con polos en $-\sigma$ y $\pm i\omega_0$. El parámetro σ será ahora determinado de manera que el sistema de lazo cerrado también tenga un polo en $-\omega_0$. Con esto se obtiene:

$$1 + \left(K_p + \frac{K_i}{\omega_0} + K_d \omega_0 \right) |G(-\omega_0)| = 0$$

Introduciendo las expresiones de K_p y K_d se obtiene:

$$1 + \left(K_p - \frac{K_i}{\omega_0} + 2\xi K_d - 2\omega_0 \right) |G(-\omega_0)| = 0$$

De aquí, si $\omega_0 = \omega_0$, se obtiene:

$$K_d(\omega_0) = \frac{1 + \left(K_p(\omega_0) - \frac{K_i(\omega_0)}{\omega_0} \right) |G(\omega_0)|}{2\omega_0(1-\xi)G(-\omega_0)}$$

Con esta ecuación queda definida una familia de controladores PID con un parámetro de diseño (ξ), con los cuales se obtiene un sistema de lazo cerrado con tres polos dominantes ubicados en $-\sigma$, $-\omega_0$ y $\pm i\omega_0$. Valores pequeños de ξ producen un sistema con velocidad de respuesta lenta y valores grandes de ξ producen un sistema con velocidad de respuesta rápida.

Método aproximado para designar polos dominantes

El siguiente método estima los polos dominantes a partir del conocimiento de algunos puntos del lugar de transferencia del sistema de lazo abierto. Los polos en lazo cerrado están dados por la siguiente ecuación característica:

$$1 + GH(s) = 0$$

Se realiza un desarrollo de Taylor alrededor de $s = -\sigma$.

$$0 = 1 + GH(-\sigma + i\omega) = 1 + GH(i\omega) + i\sigma GH'(i\omega) + \dots$$

Donde:

$$GH'(i\omega) = \frac{dGH(i\omega)}{d\omega}$$

Despreciando los términos de orden mayor o igual a dos en σ :

$$1 + GH(i\omega) + i\sigma GH'(i\omega) = 0$$

$$\sigma = i \frac{1 + GH(i\omega)}{GH'(i\omega)}$$

Con esto los parámetros σ y ω_0 de los polos dominantes quedan establecidos.

Si la derivada es aproximada por una diferencia finita entre dos puntos cercanos en la curva de Nyquist se puede obtener la siguiente expresión para determinar el valor del parámetro σ :

$$\frac{GH(i\omega_2) - GH(i\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} = i \frac{1 + GH(i\omega)}{\sigma}$$

A continuación, se supone que la frecuencia deseada (ω_1) de los polos dominantes es ω_1 y se obtiene la siguiente relación:

$$\sigma = i \frac{1 + GH(i\omega_2)}{GH(i\omega_2) - GH(i\omega_1)} (\omega_2 - \omega_1)$$

Introduciendo un controlador en el lazo, los polos dominantes pueden ser movidos a las posiciones deseadas. El correspondiente problema de diseño puede ser expresado en términos de la frecuencia (ω) y el coeficiente de amortiguamiento (ζ) de los polos dominantes.

Para realizar el diseño, se asume que los valores de la función de transferencia en lazo abierto para dos frecuencias próximas, ω_1 y ω_2 , son conocidos, esto es:

$$G(i\omega_1) = a_1 + ib_1$$

$$G(i\omega_2) = a_2 + ib_2$$

También se asume que las frecuencias ω_1 y ω_2 son cercanas a la frecuencia de cruce con el eje real. El diseño no está restringido a una estructura del controlador en particular, y cualquier controlador con al menos dos parámetros ajustables puede ser entonado.

Para el caso de un controlador PID la función de transferencia es:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Se asume que existe una relación entre el tiempo de acción integral (T_i) y el tiempo de acción derivativo (T_d):

$$T_d = \alpha T_i \hat{=} T$$

Por lo cual la expresión para la función de transferencia del controlador se puede expresar como:

$$H(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \alpha \frac{T_i}{s^2} \right)$$

Este controlador tiene dos parámetros ajustables: la ganancia K_p , la cual mueve el lugar de transferencia (curva de Nyquist) en forma radial con respecto al origen, y la constante de tiempo T_i , provoca la torsión de este mismo lugar.

El problema de diseño es ahora determinar un controlador tal que la función de transferencia del sistema compensado tenga valores preestablecidos en las dos frecuencias escogidas ω_1 y ω_2 , es decir:

$$GH(i\omega_1) = G(i\omega_1)H(i\omega_1) = c_1 + id_1$$

$$GH(i\omega_2) = G(i\omega_2)H(i\omega_2) = c_2 + id_2$$

Sustituyendo los valores de a_1, b_1 y a_2, b_2 para cada una de las frecuencias se obtiene:

$$GH(i\omega_1) = (a_1 + ib_1) K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \omega_1} + \alpha \frac{T_i \omega_1}{1} \right) = c_1 + id_1$$

$$GH(i\omega_2) = (a_2 + ib_2) K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \omega_2} + \alpha \frac{T_i \omega_2}{1} \right) = c_2 + id_2$$

$$c_1 + id_1 = K_p \left(\left(a_1 + \frac{a_1}{T_i \omega_1} + a_1 \alpha \frac{T_i \omega_1}{1} \right) + i \left(b_1 + \frac{ib_1}{T_i \omega_1} + ib_1 \alpha \frac{T_i \omega_1}{1} \right) \right)$$

$$c_2 + id_2 = K_p \left(\left(a_2 + \frac{a_2}{T_i \omega_2} + a_2 \alpha \frac{T_i \omega_2}{1} \right) + i \left(b_2 + \frac{ib_2}{T_i \omega_2} + ib_2 \alpha \frac{T_i \omega_2}{1} \right) \right)$$

$$c_1 + id_1 = K_p \left(\left(a_1 + \frac{b_1}{T_i \omega_1} - b_1 \alpha \frac{T_i \omega_1}{1} \right) + i \left(\frac{a_1}{T_i \omega_1} - a_1 \alpha \frac{T_i \omega_1}{1} - b_1 \right) \right)$$

$$c_2 + id_2 = K_p \left(\left(a_2 + \frac{b_2}{T_i \omega_2} - b_2 \alpha \frac{T_i \omega_2}{1} \right) + i \left(\frac{a_2}{T_i \omega_2} - a_2 \alpha \frac{T_i \omega_2}{1} - b_2 \right) \right)$$

((

(b_2)

)

$T\omega_2$

$\left(a_2 \right)$
 $\left. \right)$

El coeficiente de amortiguamiento está dado por:

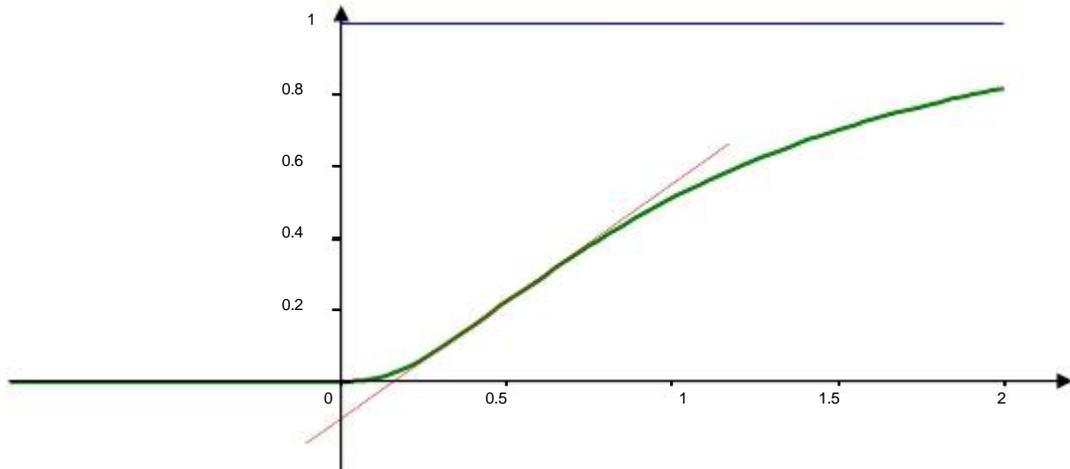
Escuela de Ingeniería Mecánica - ULA

Determine los valores requeridos para controlar el sistema con un controlador PI y PID utilizando los métodos de Ziegler y Nichols.

Método de Ziegler Nichols basado en la respuesta al escalón

La respuesta del sistema ante un escalón unitario puede verse en la figura:

Jean-François DULHOSTE



En esta figura se pueden medir los valores siguientes:

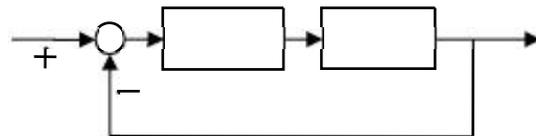
0.11 y 0.16

Con estos valores el método dice que se deben escoger los valores de ganancia del controlador según la tabla, y estos valores son:

- Para un controlador PI:
8.2 y 0.48
- Para un controlador PID:
10.9, 0.32 y 0.08

Método de Ziegler Nichols basado en la respuesta frecuencial

Se debe en este caso obtener el valor de ω_c y del sistema de lazo abierto que se muestra en la figura.



Y para ello se toma:

$$H(s) = K_p$$

Luego el sistema de lazo abierto en este caso será:

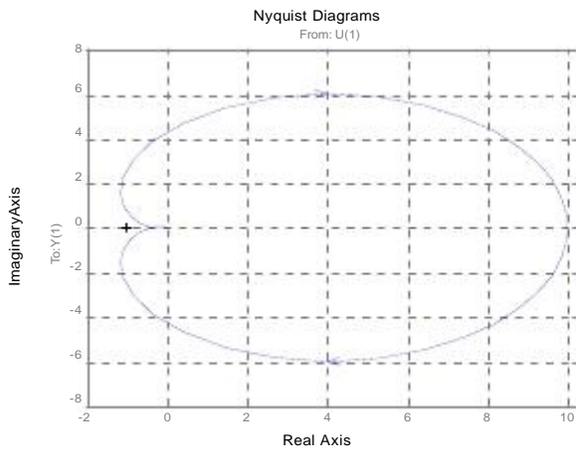
$$G(s)H(s) = \frac{K_p}{(1+s)(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.01s)}$$

La figura siguiente muestra los diagramas de Nyquist para el sistema con una ganancia proporcional igual a 10 y a 25.

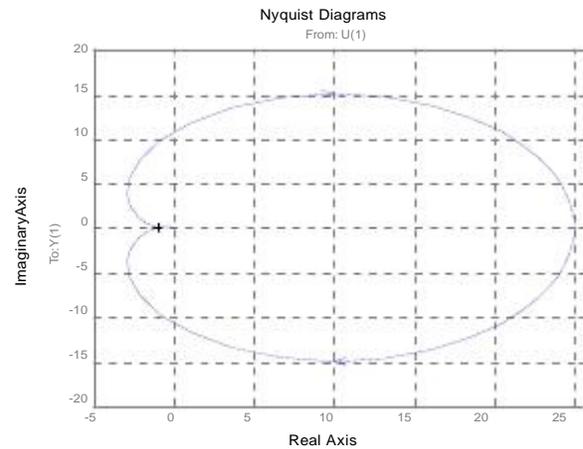
Las figuras muestran que:

- La ganancia crítica esta alrededor de 25
- Esta se obtiene para una frecuencia crítica 10 con lo cual $t_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 0.63$

Nota: en un caso práctico por lo general no se tienen los diagramas de Nyquist analíticos, sin embargo el valor de la ganancia crítica se obtiene aumentando el valor de K_p hasta que el sistema comience a presentar oscilaciones sostenidas, tal como se expone en la parte teórica del método. Los dos procedimientos son en este caso equivalentes.



Para 10



Para 25

Con estos valores se busca en la tabla los valores para las ganancias del controlador obteniéndose los siguientes:

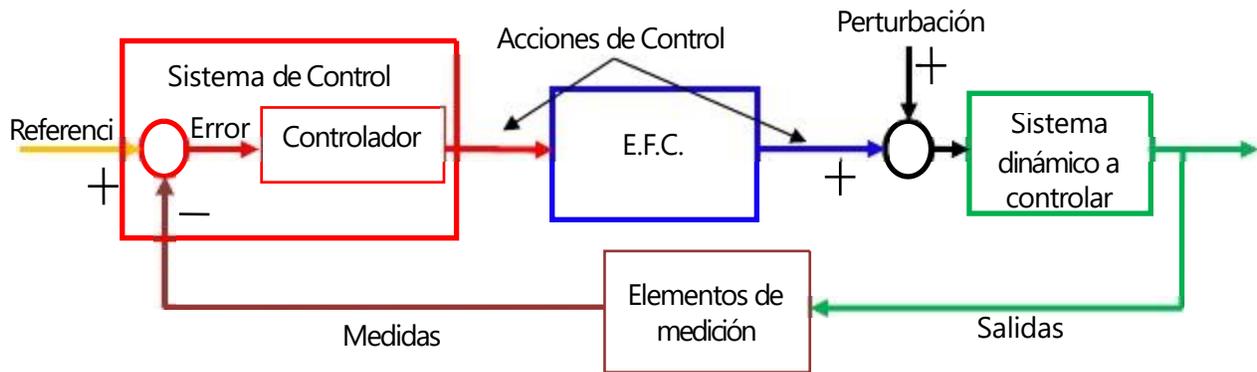
- Para un controlador PI:
10 y 0.5
- Para un controlador PID
15, 0.31 y 0.08

Obsérvese que los valores no son idénticos en los dos métodos, esto es debido a que son fruto de aproximaciones distintas, y se trata en todo caso de una aproximación en donde se puede realizar posteriormente un ajuste más fino. Sin embargo la magnitud de los valores es relativamente próxima en los dos casos.

Tema 11. Control por Retorno de Estado

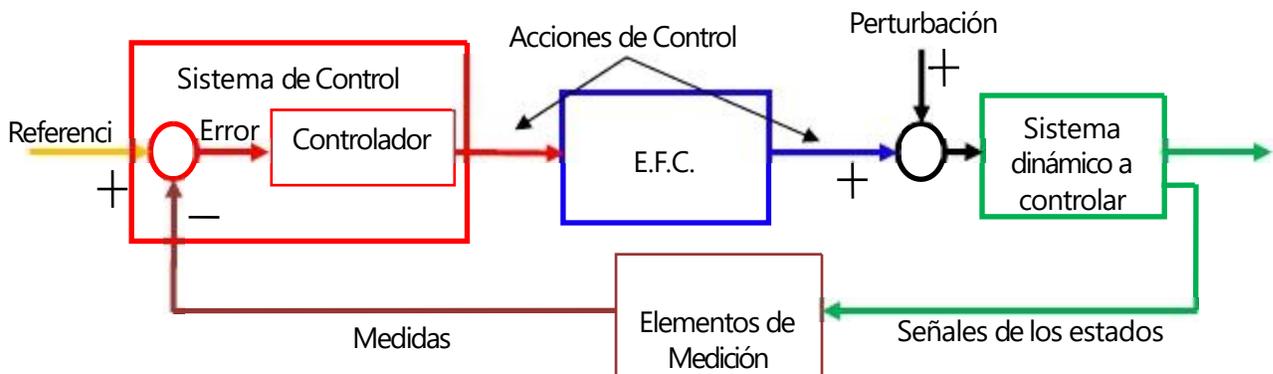
Retorno de estado lineal.

El principio básico del control en lazo cerrado clásico se muestra en la siguiente figura:



En este las acciones de control son calculadas por la medición de las salidas (variables controladas), este tipo de control suele denominarse control por retorno de salida.

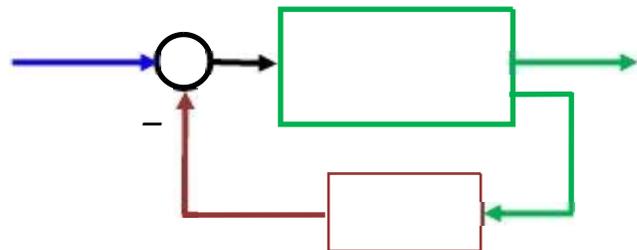
Mientras que por su lado el principio básico del control por retorno de estado se basa en realizar las acciones de control en función de los valores medidos de los estados. Este se puede apreciar en la siguiente figura:



Este esquema se puede simplificar tal como aparece en la figura siguiente:

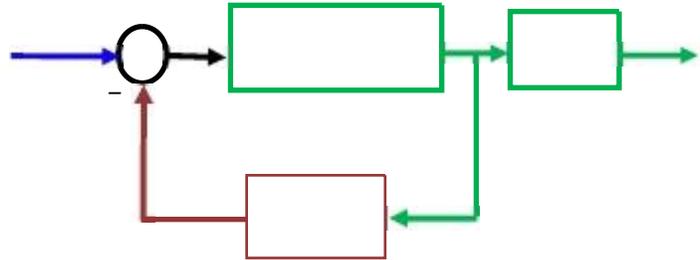
Donde \mathbf{u} es una matriz (vector) línea \mathbf{y} es una entrada nueva.

El objetivo es determinar la acción de control \mathbf{u} , de manera que los polos de la función de transferencia del sistema, en lazo cerrado, se ubiquen de forma conveniente en el plano complejo, para satisfacer estabilidad y especificaciones de amortiguamiento, velocidad, etc.



Como ya estudiamos anteriormente, en un sistema expresado en espacio de estado, los polos de la función de transferencia son los valores propios de la matriz de estado, por lo tanto una retroalimentación sobre los estados con una matriz, es equivalente a realizar una modificación de la matriz de estado del sistema, tal como se explica a continuación.

Consideremos el sistema representado en la figura y descrito por la ecuación de estado siguiente:



El retorno de estado introduce una modificación sobre la entrada del sistema de la forma:

Las ecuaciones del sistema en lazo cerrado se escriben como:

En consecuencia la matriz de estado del sistema en lazo cerrado es:

La dinámica del sistema en lazo cerrado estará determinada entonces por de los valores propios de la matriz ()

Estos valores propios como bien sabemos son las raíces de la ecuación característica, que se obtienen con:

$$|sI - A| = 0$$

El control modal

También denominado control por ubicación de polos. Este se puede realizar en espacio de estado, o en forma algebraica con las funciones de transferencia.

Se denomina control modal al control que consiste en determinar una matriz de retroalimentación de estado tal que los valores propios de la matriz se ubiquen en posiciones prefijadas arbitrariamente (, , ...,) (valores reales o complejos conjugados). La existencia de una solución depende de la controlabilidad del sistema y de la posibilidad de acceder a los estados del mismo.

Cálculo de la matriz, caso de un sistema en forma cualquiera

En el caso que el sistema este representado por una forma cualquiera, el retorno de estado puede modificar de forma importante la matriz de estado del sistema en lazo cerrado respecto de su forma en lazo abierto. Las etapas para el cálculo del control (matriz) son las siguientes:

- Cálculo de la matriz (A BK)
- Cálculo del polinomio característico de A. Que se determina con $sI - A$.
- Resolución de la ecuación polinomial:

$$|sI - A| = 0 \quad \dots$$

Donde (p_1, p_2, \dots, p_n) son los polos que se quieren imponer al sistema en lazo cerrado.

Otra forma de calcular la matriz K consiste en efectuar un cambio de variable lineal al sistema para obtener una forma canónica de controlabilidad.

Notas:

- Para que el control se pueda realizar físicamente se deben escoger valores propios reales o complejos conjugados por pares, lo cual garantiza una función de transferencia de coeficientes reales.
- Como la estabilidad es la primera característica que se debe asegurar estos coeficientes deben tener su parte real estrictamente negativa.

Ejemplo 1:

Consideremos el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Queremos realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en $-1, -1 \pm 2j, -1 \pm 2j$.

Esto es equivalente a obtener un sistema cuya ecuación característica sea:

$$s^4 + 1s^3 + 12s^2 + 12s + 5 = 0$$

La ecuación para la ubicación de los polos es:

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & s & 0 & 6 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & s & 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} s & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$s^6 + 2s^5 + 3s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 21s + 129 = 0$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 25 & 21 & 10 & 29 & 7 \\ 41 & 72 & 71 & 129 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 25 & 21 & 10 & 7 & 29 \\ 41 & 72 & 71 & 5 & 129 \end{bmatrix}$$

$$1.4227 \quad 0.9416 \quad 2.0206$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 129 & 29 & -5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 41 & 25 & 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se quiere un control por retorno de estado para que el sistema en lazo cerrado tenga los polos en -1 , $-1 \pm 2j$, $-1 \pm 2j$; lo cual es equivalente a tener un sistema cuya ecuación característica sea:

Por lo tanto la matriz K se obtiene con:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 129 & 29 & -5 & 5 & 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculo de la matriz K con la ecuación de Ackermann

Se puede determinar los valores del control por retorno de estado utilizando una ecuación matricial denominada ecuación de Ackermann la cual expresa lo siguiente.

Para un control donde:

Et si se quiere imponer al sistema en lazo cerrado la ecuación característica de la forma:

...

La matriz de la ganancia del controlador (K) se puede calcular con la ecuación:

$$[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]$$

Donde \mathcal{C} es la matriz de controlabilidad del sistema, y:

...

Nota: la presencia de la inversa de la matriz de controlabilidad implica que el sistema debe ser controlable.

Ejemplo 3:

Para el sistema de segundo orden siguiente:

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Se quiere obtener mediante un control por ubicación de polos, un sistema en lazo cerrado cuyos polos se encuentren en:

$$-1 \pm 2j, \text{ es decir que su ecuación característica sea: } s^2 + 2s + 5$$

Se puede obtener una representación de estado del sistema escogiendo como estados a x_1 y x_2 , con los cuales obtenemos para la representación de estado las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es:

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y su inversa:

$$\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La matriz de la ganancia del controlador () se puede calcular entonces con la ecuación de Ackermann:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este puede calcularse con la función Acker de Matlab.

Control de salidas con valor constante no nulo

En el caso estudiado en la primera sección el sistema no tiene ninguna perturbación exterior, además el control estudiado solo permite hacer que el sistema vaya hacia un nuevo punto de equilibrio el cual no necesariamente corresponde con el valor deseado. Vemos entonces que el control por ubicación de polos simplemente permite satisfacer las dinámicas impuestas al sistema. Cuando se requiere imponer un valor específico a la salida del sistema o repeler perturbaciones se requieren aportes adicionales al controlador.

Inserción de un pre-compensador

Cuando el objetivo de control es obtener: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$ donde r es el valor de la referencia (consigna o valor deseado), que supondremos constante en el tiempo (Escalón). Se requiere calcular el valor de la entrada necesaria para obtener como salida ese valor deseado.

Consideremos el sistema en lazo cerrado descrito por la siguiente ecuación de estado:

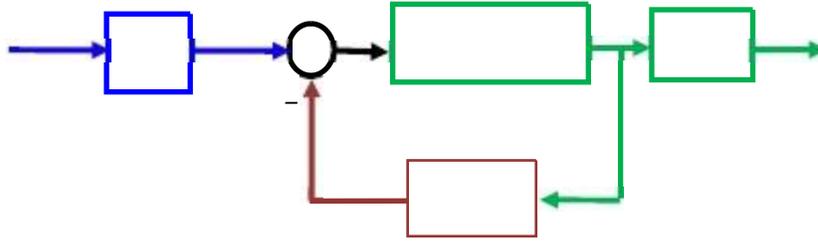
En régimen estacionario estas ecuaciones son:

De la primera ecuación obtenemos una relación para u :

La cual sustituimos en la ecuación de salida del sistema obteniendo:

Por lo tanto requerimos aplicar la siguiente entrada al sistema:

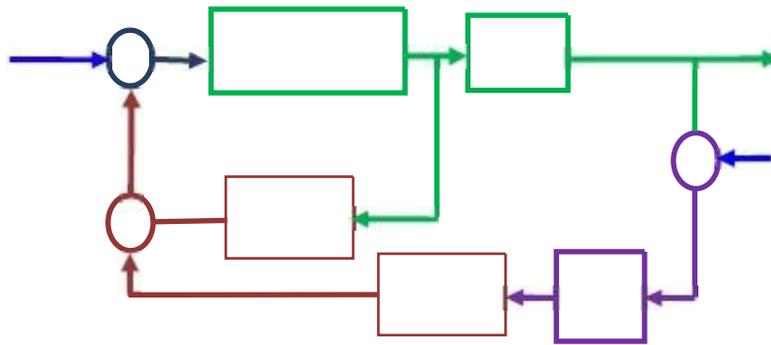
Este resultado nos muestra que solo requerimos de agregar un bloque con una matriz que multiplique a la entrada real del sistema, es decir simplemente una corrección estática como la mostrada en la siguiente figura:



Solo requerimos entonces el cálculo de la pre-compensación :

Control con acción Integral

Cuando existen perturbaciones que afectan la evolución del sistema requerimos, además del retorno de estado simple, una acción integral. La cual, al igual que en el caso de un control clásico, permite limitar el efecto de la influencia de las perturbaciones en las salidas del sistema. Se puede incluir en el lazo de retorno de estado un corrector integral cuya función es corregir el error estático de una respuesta al escalón. Para hacer esto se modifica el esquema del control a la forma presentada en la siguiente figura.



En este caso el objetivo es obtener: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$ donde r es el valor de referencia considerado constante en este caso, y $w(t)$ se comporta como una perturbación.

Utilizamos la notación \mathbf{x} . Como queremos que $\mathbf{x} = 0$ en régimen estacionario, es decir cuando $t \rightarrow \infty$.

Considerando el estado del sistema aumentado con el estado \mathbf{x} :

Las ecuaciones de estado del este sistema aumentado son:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} w$$

Y en régimen estacionario se convierten en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Lo que se busca es un control u que anule el error estático de la salida del sistema.

El sistema en lazo cerrado en régimen estacionario será:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema aumentado tienda a un estado de equilibrio es suficiente y necesario que la matriz del sistema en lazo cerrado sea estable. Razonamiento que es válido para toda entrada.

Nota: En la práctica el control integral requiere la determinación de la ganancia de un retorno de estado sobre el estado añadido lo que es equivalente a un polo adicional para el sistema en lazo cerrado. Este polo se escoge de tal manera que no afecte la dinámica del sistema principal, es decir que el subsistema correspondiente a la parte integral debe converger mucho más rápido que el sistema principal.

Exemple 4:

Sea el sistema LTI definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se quiere realizar un control por retorno de estado para obtener un sistema en lazo cerrado cuyos polos se ubiquen en: $-1, -1 \pm 2j, -1 \pm 2j$.

La matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & & 2 & & 5 & & \\ 1 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que esta matriz sea estable es necesario y suficiente con escoger los tales que los valores propios de la matriz sean negativos o con parte real negativa, tres de estos valores propios están definidos por el enunciado del problema:

$$\begin{bmatrix} | & | & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & & 3 & 7 & 5 \\ & & | & & 3 & & 7 & 3 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Si por ejemplo escogemos como cuarto valor propio (el correspondiente a la parte integral) -4 :

$$\begin{bmatrix} | & | & 7 & 19 & 33 & 20 \end{bmatrix}$$

Donde tendremos entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & & 2 & & 5 & & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos entonces los valores correspondientes:

$$1.2084 \ 0.2479 \ 1.1607 ; \quad 1.4878$$

Esto puede hacerse con la función Acker de Matlab para el sistema ampliado:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Control Parcial

Consideremos ahora un sistema que es solo parcialmente controlable, es decir rango $r < n$. En este caso r designa el grado de controlabilidad del sistema, es decir el número de estados controlables que este posee. Para el sistema:

Seleccionamos como vector de estado x_1 un vector propio del sistema. Y separamos el vector de estado en dos partes: la parte controlable con r variables de estado: x_1 y la parte no controlable con $(n - r)$ variables de estado: x_2 .

Podemos entonces escribir la ecuación dinámica del sistema como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (modos del sistema) son los valores propios de A_{11} junto a los valores propios de A_{22} .

El control por ubicación de polos se escribe:

Cuya ecuación en lazo cerrado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Notas:

- Obsérvese que el control no tiene ningún efecto sobre la evolución de la parte no controlable del sistema pues:

$$\dot{x}_2 = A_{22} x_2$$

Para un sistema con partes no controlables, solo los modos de la parte controlable (A_{11}) se pueden modificar mediante un control por retorno de estado.

- La parte K_2 de la matriz K se determina de una forma distinta. Se pueden considerar para ello criterios adicionales como por ejemplo el hecho de hacer que la salida del sistema sea independiente de la parte no controlable x_2 .

Ejercicios:

Para los siguientes sistemas determine el control por retorno de estado requerido para estabilizarlos, un control directo para anular el error estático y un control integral.

$$1. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

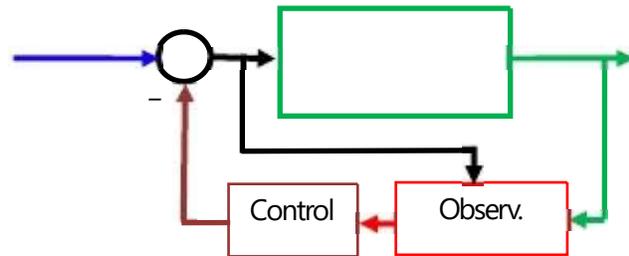
$$2. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Observadores

En algunos casos no es posible acceder a la totalidad de los estados, ya sea porque es imposible realizar una medición física de los mismos o porque colocar medidores para cada estado haría muy costoso o complejo el sistema. En este caso la implementación del control $u = -Kx$ no se puede realizar directamente. Y como la matriz C no es invertible en la mayoría de los casos, la ecuación de salida $y = Cx$ no permite determinar el valor de x .

Se requiere en este caso la reconstrucción de los estados a partir de la información disponibles para la entrada u y la salida y para ello se utiliza un observador, el cual está constituido por un sistema dinámico que permite obtener una estimación aproximada \hat{x} de x . Este observador suele también denominarse reconstructor, estimador o filtro.

El esquema de control en este caso debe modificarse como se muestra en la figura siguiente.



Síntesis del Observador

Se denomina observador de un sistema a un operador que genera una aproximación z de la variable $z = Tx$ de la forma:

$$\dot{z} = Fz - Ly + Ju$$

Donde u es el control o entrada e y es la salida.

- Si z y x tienen la misma dimensión, entonces se dice que el observador es completo (se estima todo el vector de estado). En ese caso $T = I$; por tanto $z = x$ y $\dot{z} = \dot{x}$.
- Si $\dim z < \dim x$, entonces se dice que el observador es de orden reducido.

Un observador debe satisfacer al menos las dos condiciones siguientes:

- Un observador debe ser estable.
- Un observador debe garantizar la convergencia de z hacia x (estimación sin desvío): $\lim_{t \rightarrow \infty} (z - x) = 0$

Donde $e = z - x$ es el denominado error de reconstrucción.

Observador Identidad

Un observador identidad es un observador completo sin desvío ($z(t) \rightarrow x(t)$ si $t \rightarrow \infty$) donde $z = x$. Con este observador obtenemos las ecuaciones de la pareja sistema-observador siguientes:

Si consideramos la derivada del error de estimación:

$$\dot{e} = (A - LC - F)x + (B - J)u - Fe$$

Donde $x = x - \hat{x}$

$$\dot{e} = (A - LC - F)x + (B - J)u - Fe$$

Para una estimación sin desvío es necesario que $e = 0$ y que $\dot{e} = 0 \forall x, \forall u$ y para ello se requiere satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} A - LC &= F & 0 &= F & A - LC \\ B - J &= 0 & \Rightarrow & J &= B \\ F &\text{ estable} & & & A - LC &\text{ estable} \end{aligned}$$

La ecuación del observador será en este caso:

$$\dot{x} = A - LC x + Ly + Bu$$

Esta puede reorganizarse de la forma, conocido bajo el nombre de observador de Luenberger:

$$\dot{x} = Ax + Bu - L y + Cx$$

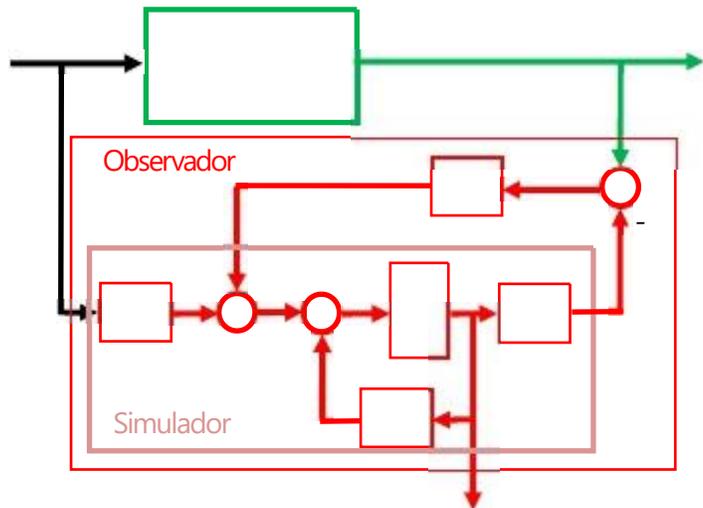
Si escribimos $y = Cx$ la ecuación de este observador se convierte en:

$$\dot{x} = Ax + Bu - L y + y$$

Esta relación que caracteriza al observador puede representarse por el siguiente diagrama de bloques:

El observador está constituido de dos partes:

- Un simulador del sistema real, caracterizado por las matrices (A, B, C), cuyas entradas son u e y y cuya salida es y.
- Un corrector que realiza una retroalimentación función de la diferencia entre la salida y y su valor estimado y-hat. Este corrector garantiza la convergencia de la estimación del estado x hacia el estado x-hat. En el corrector L se conoce bajo el nombre de ganancia del observador. Se dice que el observador converge si e tiende a cero, y esto ocurre siempre que (A - LC) sea estable. Por lo tanto $|\lambda_i(A - LC)| < 0$ debe tener raíces negativas o con parte real negativa.



El cálculo de un observador para un sistema LTI consiste entonces en calcular la matriz L, para obtener unos valores propios del sistema retroalimentado (observador) en una posición seleccionada arbitrariamente. Se dice entonces que se trata de un problema de control modal del sistema dual.

Ejemplo 5:

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$ definido por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que solo la salida $y = x_1$ puede medirse, requerimos de un observador para determinar el estado no medible x_2 . En este caso aunque solo requerimos determinar uno de los dos estados, vamos a construir un observador que permite determinar todos los estados, es decir un observador completo. Sería

posible sin embargo la construcción de un observador reducido, sin embargo con frecuencia es preferible construir un observador completo y utilizar los estados redundantes para corregir eventuales defectos de estimación causados por ruido u otras perturbaciones. Un ejemplo de esto sería el filtro de Kalman (observador óptimo de tiempo variable) el cual permite la resolución de problemas de observación con ruido en la medición.

Lo primero que se debe hacer es determinar si el sistema es observable, pues de no serlo no podríamos construir el observador completo.

$$\text{rango } C \quad \text{rango } CA \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix} \quad 2 \quad n$$

por lo tanto el sistema es observable, y podemos entonces construir un observador para determinar los estados del sistema.

Para la construcción del observador vamos a seleccionar una dinámica tal que el comportamiento de éste sea equivalente a un sistema de segundo orden cuya ecuación característica sea:

$$p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$

Donde: $\xi = 0.8$ y $\omega = 10$.

Estos valores nos permiten obtener un tiempo de estabilización del observador de $T = 0.5$ s

Repaso: El tiempo de estabilización es el tiempo necesario para que la salida de un sistema sea igual al 98% del valor de la respuesta en estado estable (2% de error) después de un cambio en escalón de la entrada, este se puede calcular para un sistema de primer orden con: $T = 4\tau$ y para un sistema de segundo orden con: $T = \dots$.

La ecuación característica del observador será:

$$p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 = | \lambda I - A - LC | = \lambda^2 + \lambda + 0 = \lambda^2 + \lambda + 0$$

Por lo tanto:

$$p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 = \lambda^2 + \lambda + 0 = \lambda^2 + \lambda + 0$$

Y podemos calcular la matriz de ganancia del observador L con las ecuaciones:

$$\begin{matrix} L_1 & 6 & 16 \\ 4L_2 & 3L_2 & 11 & 100 \end{matrix}$$

La matriz L es:

$$L = \begin{matrix} L_1 & 22 \\ L_2 & 59 \end{matrix}$$

En conclusión el observador para nuestro sistema lineal es:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ly \quad \dot{y} = Cx + 2u + 59y + 10x$$

Ganancia del Observador con la ecuación de Ackermann

Se puede utilizar la ecuación de Ackermann para determinar la ganancia del observador, para ello se procede como sigue. Para que la dinámica del observador se comporte según una ecuación característica seleccionada arbitrariamente de la forma:

$$p^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 = 0$$

Donde los coeficientes β se seleccionan para obtener especificaciones deseadas en el observador.

La matriz de ganancia del observador:

$$L \quad L \quad L \quad \dots \quad L$$

Se puede calcular con la expresión:

$$L \quad p \quad A \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1$$

Donde es la matriz de observabilidad del sistema y:

$$p \quad A \quad A \quad \beta \quad A \quad \dots \quad \beta \quad A \quad \beta \quad A \quad \beta \quad I$$

Ejemplo 6.

Para el sistema presentado en el ejemplo 5:

$$\begin{matrix} A & 2 & 3 \\ C & 1 & 0 \end{matrix} \quad B \quad \emptyset$$

Y seleccionando la misma ecuación característica deseada para la dinámica del observador:

$$p \quad \lambda \quad \lambda \quad 16\lambda \quad 100$$

Obtenemos:

$$p \quad A \quad A \quad 16A \quad 100I \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ 16 & 2 & 3 \\ 100 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 133 & 177 \\ 22 & 177 \end{matrix}$$

Siendo la matriz de observabilidad:

$$\begin{matrix} C & 1 & 0 & 0 \\ CA & & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{matrix}$$

La ganancia del observador será entonces:

$$L \quad p \quad A \quad 0 \quad 1 \quad \begin{matrix} 133 & 66 & 1 & 0 & 0 & 22 \\ 22 & 177 & 2/3 & 1/3 & 1 & 59 \end{matrix}$$

Control por retorno de salida

La puesta en práctica de un control por retroalimentación en espacio de estado en sistemas LTI, cuando todas las variables de estado no pueden medirse, supone la hipótesis que el sistema es controlable y observable.

Cuando el sistema no es totalmente controlable u observable, se debe dejar de lado las partes no controlables o no observables del sistema, es decir no tomarlas en cuenta. Pero se debe verificar para que el sistema de control pueda funcionar, aún en estas condiciones, que los estados no controlables sean estables y que los no observables no sean indispensables para el control. El problema de control se resuelve seguidamente en tres grandes etapas:

- Control por retorno de estado. Se calcula la ganancia del controlador suponiendo que todo el vector de estado x puede medirse. El control lineal es de la forma $u = -Kx$, donde K se determina imponiendo los polos que se quieren obtener en lazo cerrado.
- Reconstrucción de los estados. Si solo es posible medir y , se necesita determinar un observador, es decir se necesita calcular la ganancia L que asegure la estabilidad del observador y una observación sin desvío.
- Control por retorno de salida. El control del sistema se realiza finalmente a partir del estado estimado \hat{x} $u = -K\hat{x}$.

A pesar de que la ganancia se calcula para garantizar la estabilidad y rendimiento del sistema, y para ello se escogieron de forma que las raíces de la ecuación característica $\det(sI - A - BK - LC) = 0$ sean negativas o con parte real negativa. Y por lo tanto $\lim_{v \rightarrow 0} u \rightarrow 0$ cuando $\lim_{v \rightarrow \infty} x \rightarrow 0$. Es necesario verificar que ésta condición se garantiza aún con los estados estimados.

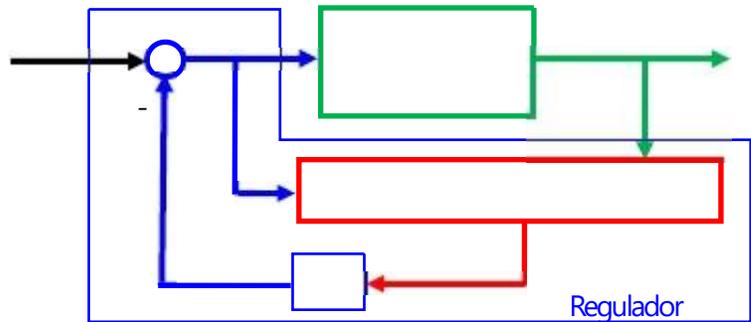
Estructura del control

En esta nueva configuración el control toma la forma del diagrama de bloques siguiente:

El control en este caso será:

$$u = v - Kx$$

Supongamos en primer lugar que $v = 0$.



En este caso: $u = -Kx$

Y la ecuación del observador es: $\dot{x} = Ax - LCx + Ly + Bu$

Para mostrar la estabilidad del sistema vamos a estudiar las dinámicas del error del sistema que se introduce con la sustitución de \hat{x} por x en el cálculo del control.

Si reemplazamos el valor de la entrada u en la ecuación del observador obtenemos un sistema con entrada y y con salida u :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - LCx + BKx + Ly \\ u &= -Kx \end{aligned}$$

Podemos calcular la dinámica del error de la estimación $e = x - \hat{x}$ con la expresión:

$$\dot{e} = Ax - Bu - ALCx + Ly - Bu$$

Lo que se traduce en:

$$\dot{e} = Ax - xL - Cx + y - Ax - xLC + xA - LCe$$

Esta expresión muestra que la dinámica del error no depende de la entrada.

Por otro lado si volvemos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ y se substituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax + BKx$$

Como queremos estudiar la dinámica del error se substituye $x = \hat{x} + e$:

$$\dot{x} = A(\hat{x} + e) + BK(\hat{x} + e) = A\hat{x} + BK\hat{x} + Ae + BKe$$

Podemos ahora representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A + BK x + BKe \\ \dot{e} &= A - LC e \end{aligned}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A + BK BK x \\ \dot{e} &= 0 A - LC e \end{aligned}$$

Lo valores propios de la nueva matriz dinámica del sistema son por lo tanto las raíces de:

$$|\lambda I - A - BK| |\lambda I - A - LC| = 0$$

Por lo tanto:

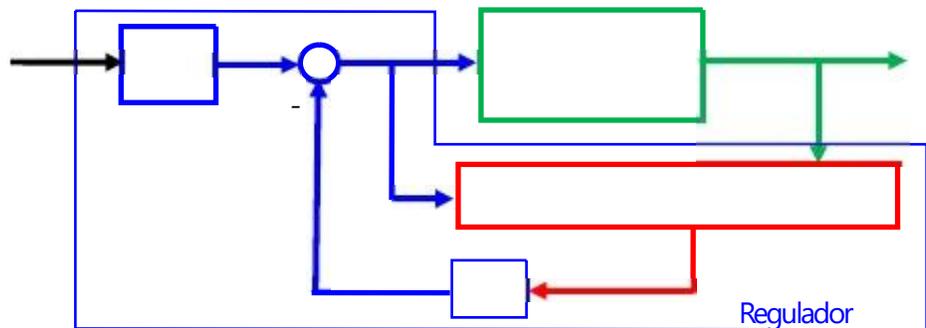
- si las raíces de $|\lambda I - A - BK| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues se calculó el control para garantizar esa condición,
- y las raíces de $|\lambda I - A - LC| = 0$ son negativas o con parte real negativa, lo cual está garantizado pues el observador fue calculado para garantizar esa condición,
- entonces los valores propios de la matriz dinámica serán negativos o con parte reales negativas.

En conclusión los valores propios del sistema en lazo cerrado son los valores propios de $(A - BK)$, es decir las relativas al control del sistema, mas los valores propios de $(A - LC)$, es decir las del observador, y en consecuencia se observa que la sustitución de x por \hat{x} no modifica los valores propios obtenidos en el cálculo del control. Solamente se superponen valores propios adicionales que provienen del observador. La estabilidad del sistema en lazo cerrado no es modificada por la presencia del observador, siempre que este sea estable y no tenga desvío. Esto es conocido bajo el nombre de principio de separación el cual se satisface para todos los sistemas lineales.

Para que el comportamiento del sistema en lazo cerrado no sea modificado de manera notable por la presencia del observador, es necesario que la reconstrucción del estado sea rápida respecto de la dinámica del sistema de lazo cerrado (polos de $(A - LC)$ de gran modulo respecto de $(A - BK)$).

Inserción de un pre-compensador

De igual forma que para el control por retorno de estado, el control por retorno de salida no garantiza que el vector de la señal de referencia v sea nulo. El estado del sistema x va a converger hacia 0 con una dinámica determinada por los polos ya ubicados. Cuando v ya no sea nulo, el estado converge hacia un valor que no es necesariamente nulo. Un pre-compensador es en este caso una matriz cuadrada, que se ubica justo después del vector de la referencia, tal como se observa en la figura.



Este pre-compensador no cambia los polos del sistema en lazo cerrado. Simplemente permite hacer corresponder ciertos componentes de la referencia con ciertas variables de estado previamente seleccionadas.

En este caso el control es:

$$u = v - Kx$$

Y la ecuación del sistema que tiene como entrada y y como salida u :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A - LC x + Ly + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Podemos calcular la dinámica del error de estimación $e = x - \hat{x}$ como:

$$\dot{e} = Ax - Bu - ALCx - Ly + Bu$$

Lo cual es equivalente a:

$$\dot{e} = (A - LC)x - Ly + (B - Bu)$$

Por otro lado si vamos al sistema que queremos controlar $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ y se sustituye la ley de control en la ecuación dinámica obtenemos:

$$\dot{x} = Ax + Bv - BKx$$

Como lo que queremos es estudiar la dinámica del error sustituimos $x = \hat{x} + e$:

$$\dot{x} = Ax + BKx + BKe - Bv + ALCx - Ly + Bv$$

Se puede entonces representar el sistema en lazo cerrado por las dinámicas de x y e :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + BKe - Bv \\ \dot{e} &= (A - LC)e \\ y &= Cx \end{aligned}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & B \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Si v es constante, una vez que se alcance el régimen estacionario, para que el valor de y tienda a y_r tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & A - BK & B \\ 0 & 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B \\ 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Como $|A - LC| \neq 0$ pues la matriz L fue seleccionada para que el observador sea estable, es decir con polos estrictamente inferiores a cero, entonces obligatoriamente $e = 0$ (error de observación nulo en régimen estacionario).

La ecuación se convierte en: $(A - BK)x + Bv = 0$

Y por lo tanto:

$$x = -(A - BK)^{-1} Bv$$

La cual al ser sustituida en la ecuación de salida obtenemos:

$$y = y_r - C(A - BK)^{-1} Bv$$

Por tanto finalmente:

$$v = C(A - BK)^{-1} B y_r + Ny$$

La cual es idéntica a la ecuación de control por retorno de estado directo. Por lo tanto la salida y tiende hacia la referencia y_r si calculamos la matriz N con la expresión:

$$N = C(A - BK)^{-1} B$$

Ejemplo 7:

Para el sistema presentado en el ejemplo 6, representado por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quiere realizar un control por retorno de salida, ya que el estado x no se puede medir físicamente, con el objetivo de obtener un sistema en lazo cerrado con polos en $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Para este sistema en el ejercicio 6 fue calculada la ganancia de un observador que recordamos aquí:

$$L = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Para el control por retorno de salida se requiere calcular la ganancia del controlador, igual como si fuese un retorno de estado simple:

$$|sI - A - BK| = \begin{vmatrix} s - 1 & 0 \\ 2 & s - 3 \end{vmatrix} = (s - 1)(s - 3) - 2 = s^2 - 4s + 3 - 2 = s^2 - 4s + 1$$

Lo cual se traduce en dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1 - 4k_2 + 1 = 0 \\ 3k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} k_1 = 10/3 \\ k_2 = 8 \end{matrix} \rightarrow K = \begin{bmatrix} 10/3 & 8 \end{bmatrix}$$

Para realizar el control por retorno de salida es suficiente con realizar un retorno de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx + Ly \end{cases}$$

Donde K y L fueron calculados en los pasos anteriores.

Si adicionalmente requerimos que la salida tienda hacia un valor deseado $y = Nv$ (consigna) se requiere agregar un pre-compensador, el cual se calcula independientemente del observador:

$$N = \begin{bmatrix} C & A & BK & B \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.6 & 0 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 \\ 0.8667 \\ 0.8667 \\ 0.8667 \end{bmatrix}$$

Ejercicios.

Para los siguientes sistemas calcular un observador para la estimación de los estados que se suponen no medidos, y determinar un control por retorno de salida para estabilizar los sistemas, agregando adicionalmente un pre-compensador para anular el error.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 0 & & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & B & 0 \\ & & 2 & 7 & 4 & & 1 \\ C & 0 & 1 & 2 & & & \end{array};$$

Tema 12. Introducción a los Sistemas Digitales

Introducción

Cada vez más el control de sistemas reales tiende a la utilización de Computadores Digitales, debido a su eficiencia y bajo costo.

- Computadores cada vez más rápidos, crecimiento exponencial los últimos 30 años.
- Tamaño y precio de los equipos cada vez menor.
- La eficiencia de los sistemas digitales se acerca mucho en la actualidad a la de los sistemas continuos equivalentes.
- Posibilidad de trabajar muchas variables al mismo tiempo, lo que implica mayor facilidad para el tratamiento de sistemas multivariables.

Entre los campos de aplicación de los sistemas digitales encontramos:

- Control de máquinas herramientas (tornos, fresadoras, etc.)
- Procesos químicos complejos.
- Aeronáutica.
- Automóvil, etc.

Algunas ventajas de los sistemas digitales:

- Mejoras en la sensibilidad de las medidas.
- Utilización de sensores, transductores y calculadores digitales.
- Disminución de la sensibilidad al ruido.
- Facilidad para la reconfiguración de los algoritmos de de cálculo del control o supervisión.
- Posibilidad de utilizar algoritmos más complejos y eficientes.

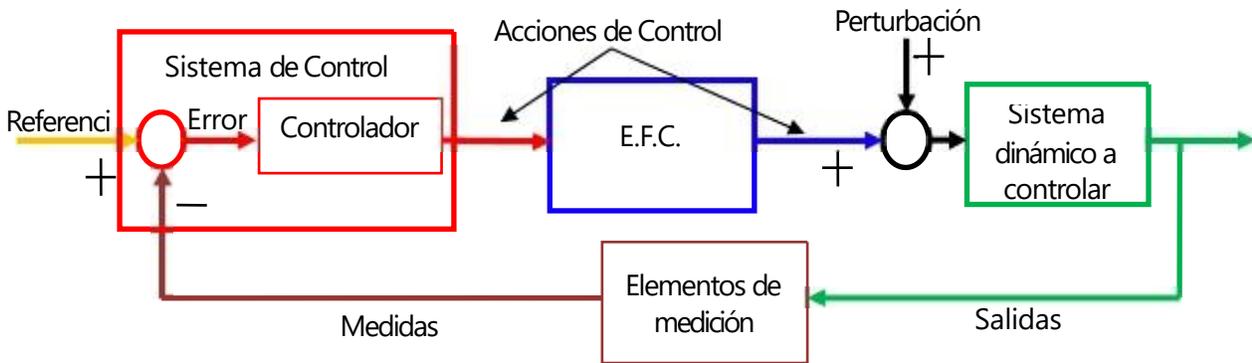
El control mediante un computador digital requiere de elementos adicionales en el sistema de control que modifican parcialmente el lazo de control y requieren de conocimientos adicionales tradicionalmente ligados al tratamiento de señales.

Algunos de estos conocimientos adicionales son:

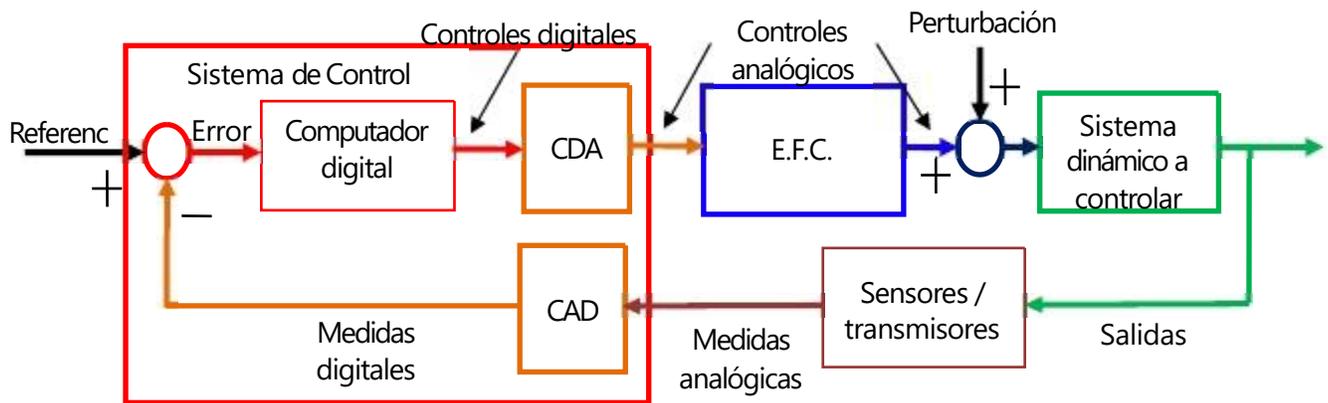
- Lazo de control de sistemas digitales (discretizados, numéricos, digitales).
- Convertidores análogo digital CAD y digital análogo CDA.
- Sistemas discretos.
- Ecuaciones de diferencias.
- La transformada en Z.
- La retroalimentación de estado digital.
- Estabilidad de los sistemas discretos
- El rendimiento de los sistemas discretos.

Lazo de control de sistemas continuos y digitales.

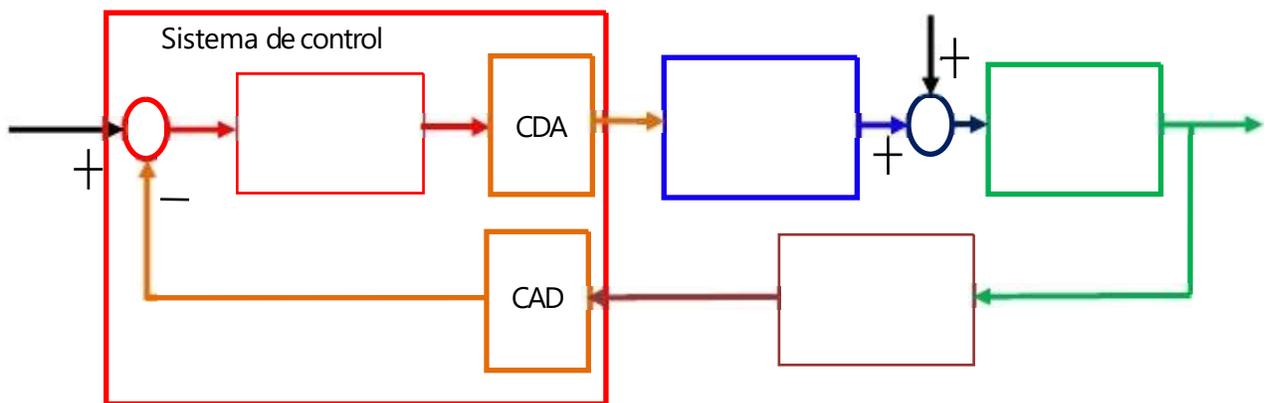
Las siguientes dos figuras muestran los diagramas de bloque típicos de sistemas de control Continuos y Digitales.



Control Retroalimentado Continuo



Control Retroalimentado Digital



Variables de Control Retroalimentado Digital

El sistema de control digital completo se puede considerar dividido en dos partes:

- Una parte analógica, que contiene las leyes físicas del sistema en sí, pues la mayor parte de los sistemas reales funcionan de forma analógica. A este comúnmente se le agregan los sensores y actuadores.
- Una parte digital en la que encontramos las leyes de control. Estas leyes deben tratarse por tanto como un sistema discreto.
- Una interfaz análogo-digital que permite la comunicación de las dos partes.

Convertidores Análogo-digital y digital-análogo

Convertidor Análogo-Digital

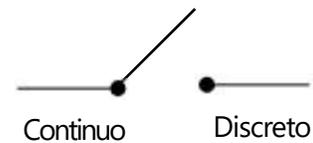
Un convertidor análogo digital realiza principalmente dos operaciones:

- El muestreo de la señal, es decir su discretización temporal, con un período fijo que se denota generalmente como T .

Una señal discreta es una señal que posee un valor solo a unos instantes precisos. Estos instantes de tiempo están definidos por el período de muestreo, que es un valor de tiempo constante que separa dos de estos instantes.

Un discretizador ideal se puede ver como un interruptor que se conecta cada segundos, durante un instante muy corto de tiempo y esta desconectado el resto del tiempo. Si consideramos como variable de entrada del discretizador a $x(t)$ y como salida a $y(t)$ tendremos como función que los relaciona a

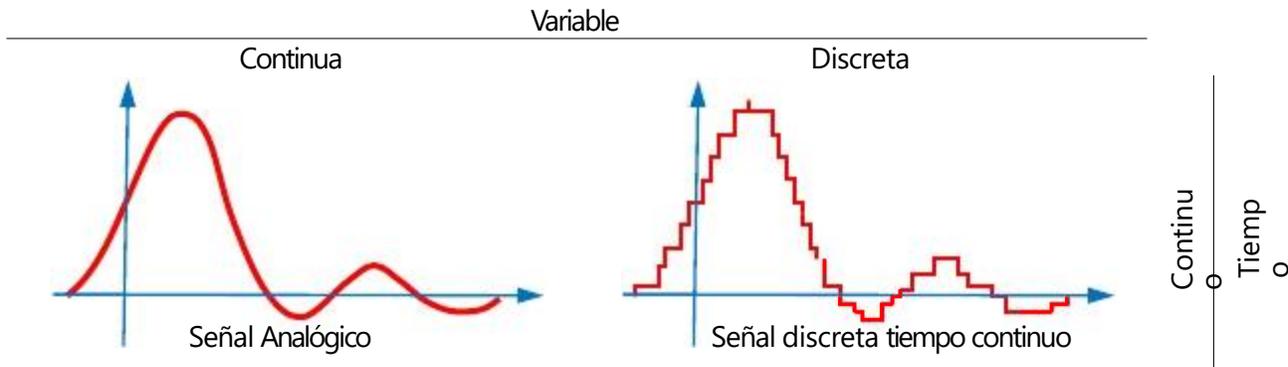
$y(t) = \sum x(t) \delta(t - nT)$ que no es más que la función impulso o delta de Dirac. A cada paso de discretización

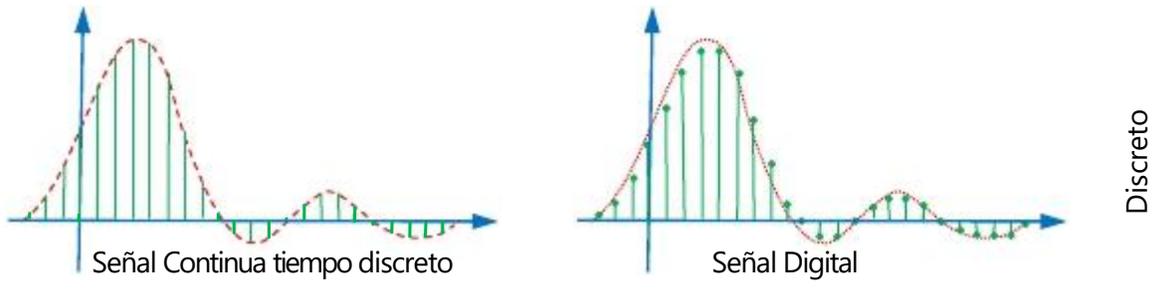


- La cuantificación de la señal, es decir la discretización de los valores que puede utilizar para que la señal sea compatible con el formato de representación de los computadores.

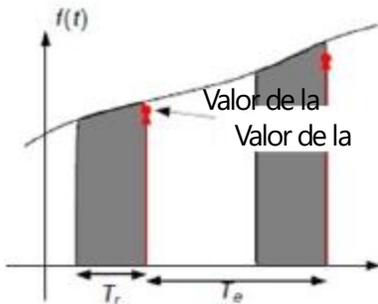
Por ejemplo, un computador que trabaja con 8 bits puede tratar solo 256 valores distintos. Las informaciones que entran y salen de este serán sucesiones de números de tipo: 123, 135, 34, 0, 255, etc.

En automatización se debe considerar principalmente el efecto de la discretización.





En la práctica un convertidor análogo digital no puede adquirir la señal de forma instantánea, por lo cual se produce una diferencia entre la discretización ideal y la real, puesto que el segundo se produce generalmente haciendo un promedio del valor de la señal en un tiempo dado. Esta diferencia produce una distorsión en la señal discretizada, la cual se demuestra a continuación. Consideremos el siguiente



ejemplo:
sin

La señal discretizada ideal correspondiente es:
sin

La señal discretizada real, suponiendo que esta se produce por el promedio en un tiempo es:

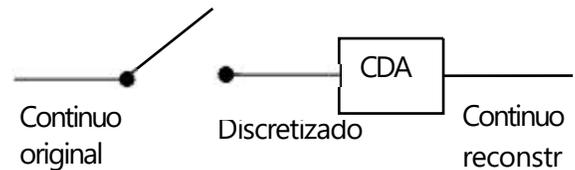
$$\sin \frac{\sin \frac{1}{2} \sin}{2}$$

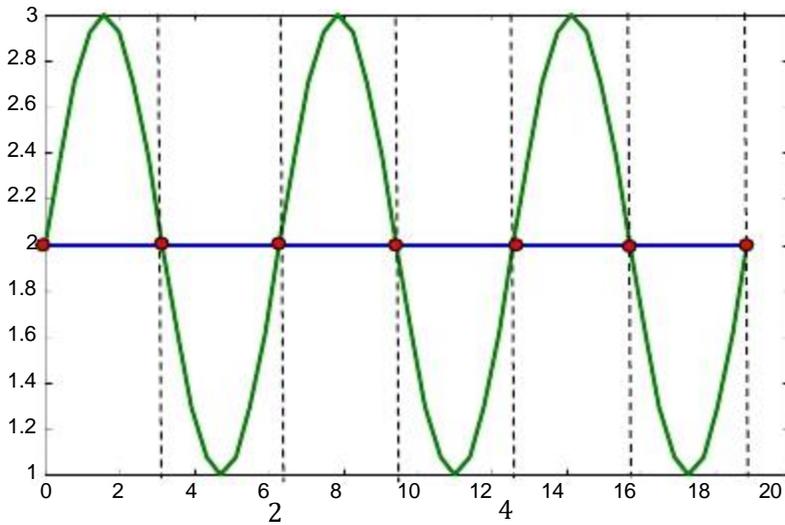
La amplitud de la señal discretizada es atenuada en $\frac{1}{2}$, y esta señal es retrasada de $\frac{1}{2}$. Entre mayor es el valor de $\frac{1}{2}$ mayor será la atenuación de la señal y el retraso de adquisición de esta señal. Es por lo tanto importante el uso de convertidores análogo-digitales cuyo tiempo de integración sea el menor posible. En general si $\frac{1}{2} \ll$ se puede considerar que la discretización es cercana a la ideal.

Convertidor DigitalAnálogo

Un convertidor digital-análogo por su parte tiene como objetivo obtener de nuevo la señal analógica previamente discretizada equivalente de forma exacta para todo tiempo, es decir \forall .

En el caso general, la reconstrucción perfecta de la señal analógica es imposible, pues funciones diferentes en el tiempo pueden tener el mismo valor discreto, por ejemplo y \sin para 2 . En la figura se muestra y para 2 . En ese caso es imposible determinar y solo con la información de y para los tiempos de discretización.





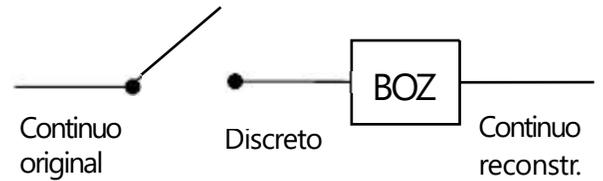
Se requiere en este caso una condición adicional, conocida bajo el nombre de condición de Shannon:

Sea la señal continua $x_c(t)$, cuyo espectro se conoce en el intervalo de frecuencia $[-f_m, f_m]$, discretizado a la frecuencia f_s . Para poder reconstruir la señal a partir de las muestras $x[n]$, sin perder información, se requiere que $f_s \geq 2f_m$.

En el ejemplo para $f_m = 1$ es necesario que $f_s \geq 2$.

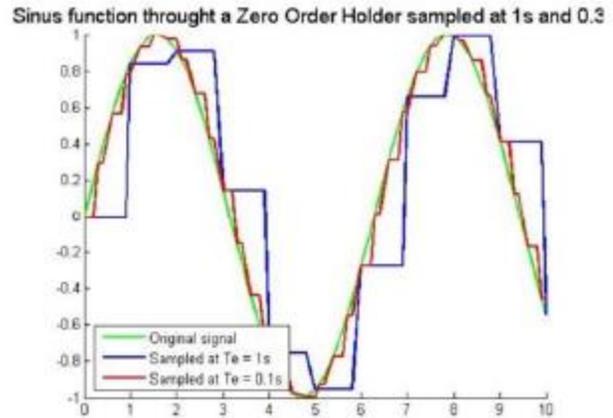
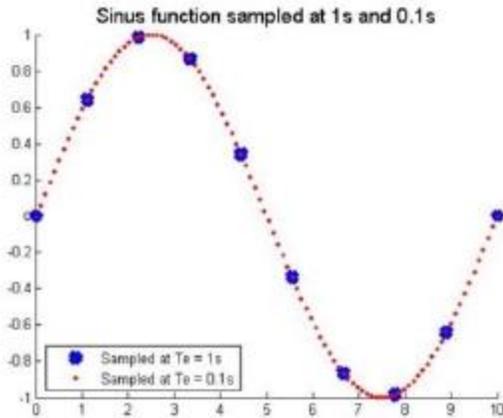
Bloqueador de orden cero (BOZ)

En la práctica, los convertidores digital-análogos realizan simplemente un bloqueo del valor discreto durante un período de muestreo.



pour 0

La respuesta al impulso de este tipo de sistema es una función rectángulo unitario de ancho T_s .



Se habla de "bloqueador de orden cero" (BOZ), pues de hecho realiza una interpolación de orden cero de los valores de la señal discreta (el único orden posible que sea causal, en consecuencia el único posible de realizar en tiempo real).

La función de transferencia de un bloqueador de orden cero es:

$$\frac{1}{s} \frac{1}{s} \frac{1}{s}$$

Etc.

Esto es equivalente a la expresión:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

Es de notar que la solución de esta ecuación recurrente depende de las condiciones iniciales.

La transformada en Z

Los sistemas analógicos lineales se pueden representar mediante la función de transferencia, que no es más sino la transformada de Laplace de su respuesta al impulso.

La ventaja de la transformada de Laplace es la de transformar la ecuación diferencial, que relaciona la salida y la entrada del sistema analógico lineal, en una ecuación polinomial que se puede resolver manualmente. Con el objeto de manipular los sistemas digitales de una manera similar a los sistemas continuos, se define una transformación matemática denominada transformada en Z.

Para un sistema discreto la transformada de Laplace (monolateral) se determina con:

Mediante algunas consideraciones y operaciones matemáticas, así como propiedades de la función impulso obtenemos la siguiente expresión:

La transformada en Z de la señal discreta causal se define como la transformada de Laplace (monolateral) de la señal, a la cual se le efectúa el cambio de variable .

Propiedades de la transformada en Z

Consideremos dos señales discretas y . Notamos y las transformadas en Z respectivas, y números reales cualesquiera.

Linealidad:

Retraso:

$$\forall \epsilon$$

Avance:

$$\forall \epsilon$$

Multiplicación por una rampa / derivación:

$$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

Multiplicación por una exponencial:

Teorema del valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Nota: Este teorema solo es válido si $f(t)$ converge.

Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

Convolución:

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(s) \cdot G(s)$$

Ejemplos de cálculo de transformada en Z.

1. Transformada en Z de una función escalón:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

La transformada es:

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

2. Transformada de una rampa:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Como la transformada es:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z})}$$

Tabla de Transformadas de Laplace y Transformada en Z de algunas funciones comunes.

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ impulso	1		1
$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$			

Γt Escalón	$\frac{1}{\Gamma}$	Γ	1
Γ	$\frac{1}{\Gamma}$	Γ	1
$\frac{1}{2} \Gamma$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \Gamma$	1
Γ	1	Γ	2
Γ	1	Γ	1
1Γ		1Γ	1
$\sin \Gamma$		$\sin \Gamma$	$\frac{\sin}{2} \cos$
$\cos \Gamma$		$\cos \Gamma$	$\frac{1}{2} \cos$
$\sin \Gamma$		$\sin \Gamma$	$\frac{2}{2} \cos$
$\cos \Gamma$		$\cos \Gamma$	$\frac{\cos}{2} \cos$

Ejemplo 2:

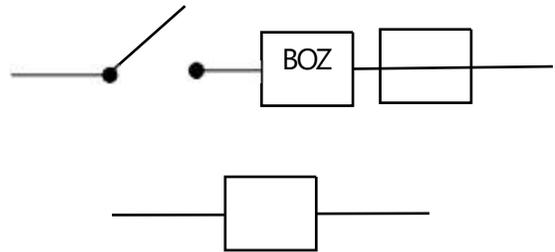
Queremos obtener la representación discreta del sistema

$$\frac{1}{1}$$

Tomando en cuenta para ello que en la discretización se debe agregar un bloqueador de orden cero, con el cual el sistema se convierte en:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$1 \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$



Utilizando las propiedades de la transformada en Z y la tabla de transformadas tenemos:

$$1 \quad * \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$1$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$1$$

Si el período de muestreo es de 1 segundos:

$$\frac{1 \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad 1 \quad \quad 1}{1} \quad \frac{1 \quad 2}{1}$$

$$\frac{0.3679 \quad 0.2642}{1 \quad 1.3679 \quad 0.3679}$$

Relación con las ecuaciones recurrentes

Para volver a determinar las ecuaciones recurrentes a partir de una función de transferencia expresada en transformada en Z, se debe proceder como sigue. Partiendo de:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma}$$

Por lo tanto:

Como la función de transferencia se define para condiciones iniciales iguales a cero, entonces con el teorema del retraso obtenemos:

Ejemplo 3:

$$\frac{1}{1 \quad 2 \quad 1 \quad 2}$$

También se puede obtener una relación equivalente con una función de transferencia discreta de la forma:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma}$$

De forma idéntica con el teorema de adelanto obtenemos:

Ejemplo 4. Se tiene:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma}$$

2

1

1

Transformada inversa de Z

Existen 4 métodos que permiten determinar la inversa de una transformada en Z.

~~Fórmula de Inversión.~~ Esta fórmula matemática es:

$$\frac{1}{2}$$

Donde Γ es un contorno cerrado del plano complejo que contiene todas las singularidades de $X(z)$. Esta técnica de inversión se utiliza raramente en casos prácticos, pero permite de poner en evidencia que existe una relación única entre la señal discreta y su transformada en Z.

Se debe recordar sin embargo que la transformada en Z inversa solo proporciona información de la señal temporal en los instantes de muestreo, por lo cual se requiere que las condiciones de Shannon hayan sido respetadas en la discretización para poder obtener la señal temporal.

~~Tablas de transformadas.~~

Estas tablas son un repertorio de transformadas en Z y transformadas de Laplace de diversas funciones, donde la transformada en Z se coloca en general bajo la forma de una función racional:

Este método no puede aplicarse directamente a funciones complejas.

~~Descomposición en Fracciones Parciales.~~

Se descompone la fracción racional $\frac{X(z)}{D(z)}$ en fracciones parciales, para poder determinar la transformada de cada elemento más fácilmente con las tablas. Se requiere en este caso obtener fracciones parciales de la forma:

Para ello se descompone la fracción $\frac{X(z)}{D(z)}$ en lugar de descomponer directamente $\frac{X(z)}{D(z)}$ pues esta última produciría términos de la forma $\frac{A}{z - p}$ que no existen en las tablas. Obtenemos entonces:

Con $\frac{1}{z - p_1}$ ou $\frac{1}{z - p_2}$.

Basta entonces con utilizar las tablas para obtener la inversa de la transformada de cada uno de los términos, obteniéndose entonces la señal temporal completa.

Este suele ser el método más utilizado.

~~División polinomial.~~

Esta técnica se basa en la definición de la transformada en Z de una señal, que es un polinomio de grado infinito en z^{-1} . La idea es obtener el polinomio término a término a partir de la fracción racional $\frac{Y(z)}{X(z)}$. Se comienza por escribir a $Y(z)$ bajo la forma de una fracción racional en z^{-1} :

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}}$$

Se calcula a continuación el resultado de la división polinomial de $\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$ entre $\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$ siguiendo los términos crecientes de z^{-1} . Obtenemos de esta manera a $Y(z)$ bajo la forma de un polinomio de orden infinito:

$$\dots + \dots$$

Haciendo una identificación polinomial con la definición de la transformada en Z, reconocemos a:

$$0, 1, 2, \dots$$

Este método no permite determinar la expresión general ni obtener el n -ésimo término de la secuencia temporal. Pero es útil para una programación utilizando una computadora o para la verificación de los primeros términos obtenidos mediante algún otro método de cálculo.

Ejemplo 5.

Cálculo de la transformada inversa de:

$$\frac{1 \quad 2}{1} \quad \frac{0.3679 \quad 0.2642}{1 \quad 1.3679 \quad 0.3679}$$

Utilizando la descomposición en fracciones parciales, descomponemos:

$$\frac{1 \quad 2}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1;$$

Por lo tanto se escribe:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1}$$

Con la tabla de transformadas y las propiedades de linealidad de la transformada en Z tenemos:

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1/}{1} \quad \frac{1}{1}$$

Nota: No obtenemos exactamente la forma original del sistema ya que el modelo en Z fue simplificado.

Por otro lado, utilizando la división polinomial.

Se factoriza en función del orden más elevado para obtener una función de potencias decrecientes de z^{-1} , y

$$\frac{1 \quad 2}{1 \quad 1} \quad \frac{0.3679 \quad 0.2642}{1 \quad 1.3679 \quad 0.3679}$$

0.3679	0.2642			1	1.3679	0.3679		
0.3679	0.5033	0.1354		0.3679	0.7675	0.9145	...	
0	0.7675	0.1354						
	0.7675	1.0499	0.2824					
	0	0.9145	0.2824					

La solución de la división es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con la cual se obtiene directamente la solución temporal de x^n , por lo tanto, como $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$:

0	0
1	0.3679
2	0.7675
3	0.9145, etc

Nota: la factorización en función del orden más elevado no es indispensable, puesto que la división con la función original produce el mismo resultado.

Solución de las ecuaciones recurrentes

Uno de los usos de la transformada en Z es la de permitir la obtención de la solución sistemática de las ecuaciones recurrentes.

Para una ecuación recurrente de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}$

Donde x^n es conocido, y denotamos x^n y $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, y además según el teorema del retraso para condiciones iniciales nulas:

La transformada de cada término es:

Obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ bajo la forma de una fracción racional:

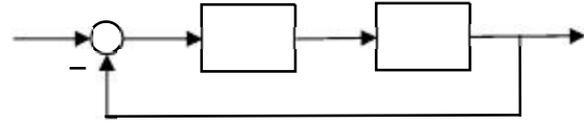
$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

Donde $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es un polinomio en x de orden \max ,

Para determinar la secuencia de la solución x^n , basta con calcular la transformada en Z inversa de $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$. Obteniéndose una ecuación polinomial que puede resolverse manualmente.

Sistemas Digitales en Lazo Cerrado

Una retroalimentación de estado discreta se puede representar con la figura contigua, donde toma en cuenta la función de transferencia del sistema a la cual se le agrega un bloqueador de orden cero, y es un controlador digital, en este caso la función de transferencia discreta será:



$$\frac{1}{1}$$

Ejemplo 6.

Si tomamos la función de transferencia del ejemplo 5, la cual ya considera un bloqueador de orden cero (BOZ):

$$\frac{0.3679 \ 0.2642}{1.3679 \ 0.3679}$$

Si consideramos una retroalimentación unitaria

$$\frac{1}{1} \quad \frac{0.3679 \ 0.2642}{0.6321}$$

La retroalimentación de estado continua para este mismo sistema es:

$$\frac{1}{1}$$

Para una entrada en escalón unitario.

$$\frac{1}{1}$$

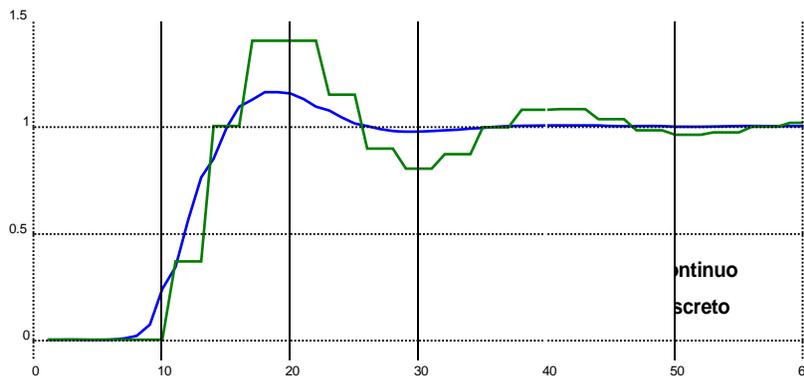
La salida del sistema se puede calcular como:

$$\frac{0.3679 \ 0.2642}{1 \ 0.6321} \quad \frac{0.3679 \ 0.2642}{2 \ 1.6321 \ 0.6321}$$

Por división polinomial obtenemos:

$$0.3679 \quad 1.4 \quad 1.4 \quad 1.147$$

La figura muestra la relación entre el modelo continuo y el discreto para el mismo sistema



Nótese aquí que:

- un sobreimpulso más importante para el sistema digital (40% en lugar de 16%).
- un tiempo de estabilización dos veces mayor para el sistema digital.
- Estos valores por supuesto dependen del período de muestreo utilizado. La

diferencia será más pequeña entre más pequeño sea este tiempo.

La representación de Estado Digital

Al igual que para los sistemas continuos los sistemas digitales se pueden representar bajo la forma de una representación de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Para la cual se utiliza con frecuencia la notación:

Donde A , B , C et D son las matrices discretas del sistema lineal, y T es el período de muestreo. De igual forma que para los sistemas continuos el modelo se representa mediante una serie de ecuaciones de primer orden, en este caso en adelante.

La relación entre la representación de estado y la función de transferencia discreta se puede determinar con la relación:

Donde z^{-1} es un operador de desfasaje, es decir:

Estabilidad de los Sistemas Digitales

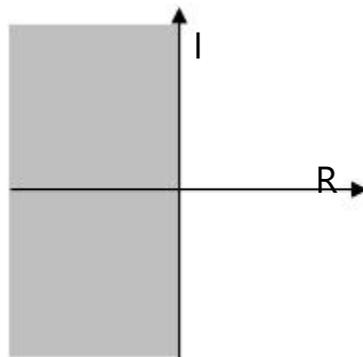
Un sistema continuo es estable si sus polos son negativos o con parte real negativa, es decir ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo. Para determinar la estabilidad de un sistema digital se requiere estudiar la relación entre la variable z (función de transferencia discreta) y la variable s (función de transferencia continua).

La magnitud y el ángulo de fase del sistema discreto se pueden representar con:

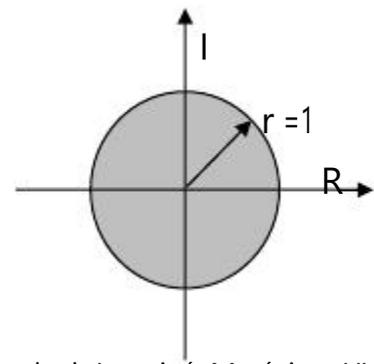
$$|G(z)| e^{j\angle G(z)}$$

En el semiplano izquierdo del plano complejo $\sigma < 0$ (parte real del polo), por lo tanto la magnitud de $|G(z)|$ no existe influencia del ángulo de fase.

En consecuencia: Un sistema digital será estable si los polos de $G(z)$ están dentro del círculo unidad del plano complejo, es decir si su magnitud es estrictamente inferior a 1.



Sistema Continuo



Escuela de Ingeniería Mecánica - ULA
Sistema Digital

Ejemplo 7.

Para el sistema cuya función de transferencia continua es:

$$\frac{1}{s}$$

La función de transferencia discreta, con un período de muestreo $T = 1$ es:

$$\frac{0.3679 \quad 0.2642}{s^2 + 1.3679s + 0.3679}$$

Si se somete el sistema a una retroalimentación de estado unitaria las funciones de transferencia se convierten en:

$$\frac{1}{s^2 + 1.3679s + 0.3679} \quad \frac{0.2642}{s^2 + 1.3679s + 0.3679}$$

La estabilidad del sistema en lazo cerrado depende de las raíces de los polinomios:

$$s^2 + 1.3679s + 0.3679 = 0$$

Para el sistema continuo la estabilidad depende de:

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4}}{2} = 0$$

- El sistema es estable para todo $T > 0$.

Para el sistema digital la estabilidad depende de:

$$z^2 - 1.3679z + 0.3679 = 0$$

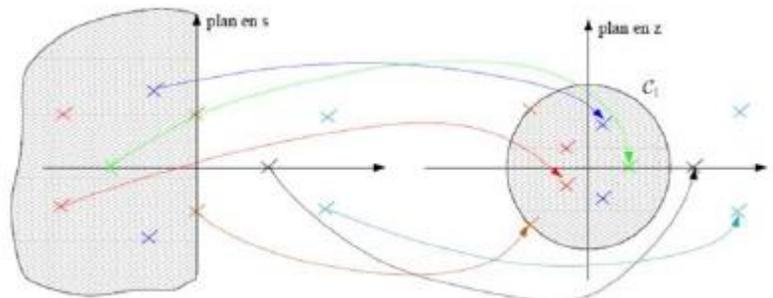
- El sistema es estable si se cumple la condición: $0 < T < 2.39$.

Observamos que la digitalización puede modificar la estabilidad del sistema.

Correspondencia entre los polos en Z y en s.

A partir de la relación entre los polos para un sistema digital y continuo observamos que:

- los polos reales estables en s ($\sigma < 0$) se convierten en polos reales positivos inferiores a 1.
- los polos reales inestables se convierten en polos reales positivos superiores a 1.
- los polos complejos conjugados estables se convierten en polos complejos con norma inferior a 1.
- los polos complejos conjugados inestables se convierten en polos complejos conjugados de norma superior a 1.



- los polos en el eje imaginario se convierten en polos complejos en el círculo unidad.
- Los polos simples reales negativos en Z no tienen equivalente en s .

Respuesta temporal de los sistemas digitales

Los modos propios asociados a los polos en Z se pueden resumir como sigue:

Polo simple real: —

- Si $|p| < 1$ el modo es divergente.
- Si $|p| > 1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $-1 < p < 0$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $0 < p < 1$ el modo es amortiguado.
- Si $p = 1$ el modo es permanente.
- Si $p = -1$ el modo es oscilatorio permanente.

Polo real múltiple: ———

- Si $|p| < 1$ el modo es divergente.
- Si $|p| > 1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $-1 < p < 0$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $0 < p < 1$ el modo es amortiguado.
- Si $p = 1$ el modo es divergente.
- Si $p = -1$ el modo es oscilatorio divergente.

Se nota que un polo doble en 1 conduce a un modo divergente mientras que un polo simple en 1 es convergente.

Par de polos complejos conjugados: *

En el caso de un par de polos complejos conjugados, los coeficientes de los términos simples correspondientes a los dos polos complejos de la pareja son también complejos conjugados, sea:

$$\frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2}$$

- Si $|p| < 1$ el modo es oscilatorio divergente.
- Si $|p| > 1$ el modo es oscilatorio amortiguado.
- Si $|p| = 1$ el modo es oscilatorio permanente.

El conjunto de estos resultados se pueden resumir como sigue:

- polos simples sobre el círculo unitario \rightarrow modos permanentes.
- polos múltiples sobre el círculo unitario \rightarrow modos divergentes.
- Polos en el interior del círculo unitario \rightarrow modos amortiguados sin importar la multiplicidad.
- Polos en el exterior del círculo unitario \rightarrow modos divergentes.
- 2 fuentes de oscilaciones: polos complejos conjugados y polos reales negativos (sin equivalente en sistemas continuos)
- Respuesta del sistema: suma ponderada de los modos propios y modos forzados.

Además, se constata que la convergencia de los modos hacia cero es más rápida mientras el módulo del polo sea más cercano a cero. Se deduce entonces que los polos más rápidos del sistema digital son los polos más cercanos a punto 0.

Caso Particular de los Sistemas de Orden 1 y 2

– Sistemas de orden 1



– Sistemas de orden 2, con 2 polos reales



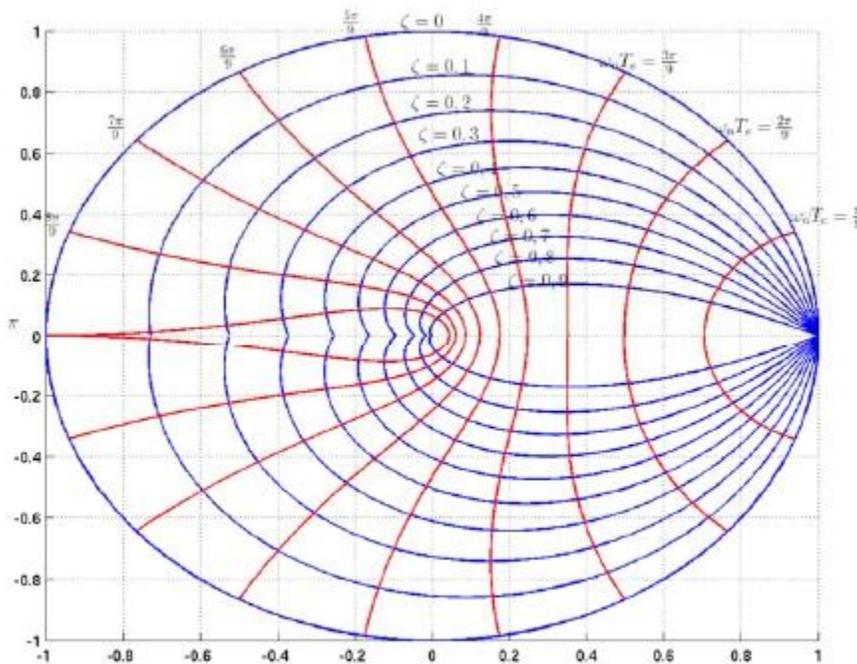
– Sistemas de orden 2, con 2 polos complejos conjugados



Con: $\frac{1}{s} \rightarrow 1$ y $\frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$

Nota: Un sistema continuo sin ceros puede producir un sistema discreto con ceros. No existe una relación directa entre los ceros del modelo continuo y los ceros del modelo digital.

La siguiente figura muestra las curvas de isoamortiguamiento (azul) y de isopulsación (rojo) para sistemas numéricos de orden 2.



Criterio algebraico de Jury

Este es un criterio que permite determinar si los polos del sistema en Z están o no en interior del círculo unitario, sin necesidad de calcular el valor de estos polos. Es el equivalente a los criterios de Routh o Hurwitz en sistemas continuos.

Para una función de transferencia en Z de la forma:

Con la ecuación característica:

Se construye la tabla del criterio de Jury siguiente:

1			
2				...		
3				
4				
5				...		
6		...				
⋮	⋮	⋮	⋮			
2	3					

Donde:

La tercera fila será por ejemplo:

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad \dots, \quad b_n - a_n$$

El criterio de Jury establece que la ecuación $P(z) = 0$ tiene sus polos en el interior del círculo unitario si y solo si se cumplen todas las desigualdades siguientes:

1. $|a_n| < |a_0|$
2. $|b_{n-1}| < |b_0|$
3. $|c_{n-2}| < |c_0|$
4. $|d_{n-3}| < |d_0|, \forall k \in \{1, 2, \dots, n-3\}$

Nota:

- La condición 1 implica que $a_n \neq 0$
- La condición 4, que debe verificarse para sistemas de orden 3 o superior, se cumple si para cada línea impar de la tabla, a excepción de la primera, el coeficiente de la primera columna tiene un valor absoluto mayor que el de la última columna no nula.

$$|b_{n-1}| > |b_0|, \quad |c_{n-2}| > |c_0|, \quad \dots, \quad |d_{n-3}| > |d_0|$$

- Para un sistema de orden 3, la cuarta condición puede simplificarse como sigue:

$$|b_1| > |b_2|$$

Ejemplo 8.

Determinar la estabilidad del sistema representado por su ecuación característica discreta, en función de la ganancia K del controlador, utilizando el criterio de Jury:

$$z^2 - 0.5z + 0.01 - 0.005K = 0$$

Solución:

- Se determina el controlador digital adaptado utilizando para ello técnicas de análisis y concepción digitales.
- Se realiza un análisis del comportamiento del sistema en lazo cerrado con las ecuaciones discretas.

Método de transposición:

- Se determina el modelo continuo del sistema.
- Se determina un controlador en tiempo continuo para el sistema.
- Se realiza una conversión del controlador en tiempo continuo en un controlador en tiempo discreto por transposición (esto se puede realizar con la función `c2d` de Matlab).
- Se analiza el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

El método directo se utiliza menos en la práctica, puesto que requiere de herramientas digitales con frecuencia poco dominadas por los ingenieros, pero los resultados obtenidos son más precisos que los que se obtienen por transposición, debido a que no se realizan aproximaciones del comportamiento continuo de los controladores digitales.

El método de Transposición

Una de las dificultades que presenta la síntesis de controladores por transposición es la selección del método de transposición adecuado en cada caso. El objetivo de la transposición es el de determinar un controlador digital para el cual el comportamiento del control digital se aproxime lo más posible al comportamiento del control analógico.

Es imposible obtener un comportamiento idéntico debido al efecto del muestreo y de la cuantificación.

El control digital obtenido será en el mejor de los casos equivalente al control analógico pero en ningún caso mejor.

Existen varias técnicas de transposición bien conocidas. Cada una de ellas presenta sus ventajas e inconvenientes y por tanto se adaptan más o menos a cada problema en particular, ninguna de ellas puede considerarse mejor que las otras de forma general.

Podemos citar entre los métodos existentes a los siguientes:

- Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero.
- Transposición por aproximación bilineal.
- Transposición por aproximación de Euler.
- Transposición por conservación de polos y ceros.
- Transposición por muestreo – bloqueo de orden uno (argumento 'foh' de la función `c2d` de Matlab).

A continuación estudiaremos de forma somera dos de estas técnicas.

Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero

Este método de transposición consiste simplemente en reemplazar el controlador continuo por un sistema digital compuesto de un controlador continuo al cual precede un muestreo y un bloqueo de orden cero.

La función de transferencia del controlador digital equivalente se obtienen calculando la transformada en Z del controlador analógico precedido de un bloqueo de orden cero (con Matlab función: $Cz = c2d(C, Te, 'zoh')$).

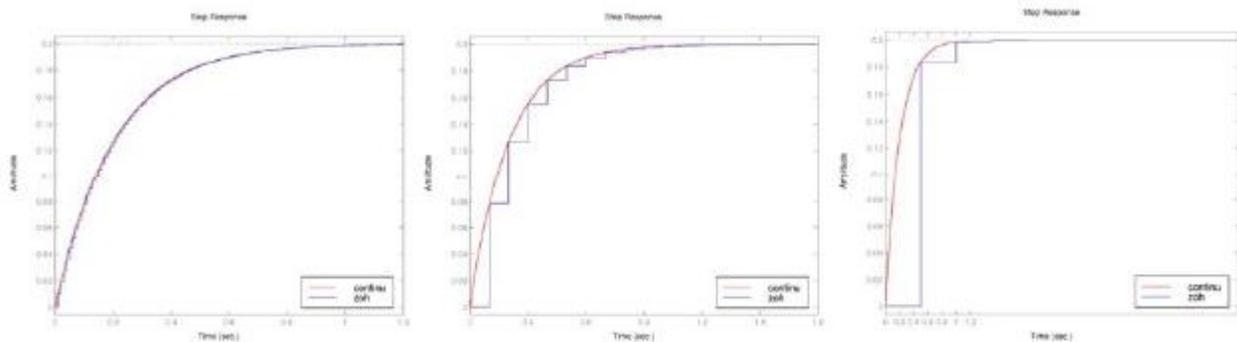
Algunas propiedades de la Transposición por muestreo – bloqueo de orden cero son:

- Los polos del controlador C en z se ubican en $z = e^{sT}$ donde p son los polos del controlador analógico C en s . Se dice que se conservan los polos.

- Si el controlador C_s es estable, entonces el controlador C_z obtenido también será estable. Se debe sin embargo tener presente que no existe ninguna garantía en cuanto al sistema en lazo cerrado.
- Los ceros del controlador no se conservan. Si C_s no posee ceros, entonces C_z puede presentar ceros o viceversa.
- La ganancia estática del controlador se conserva.

Con este método de transposición la salida del controlador digital es igual a la salida del controlador analógico en los instantes de muestreo, y este valor se mantiene durante todo el período de muestreo. La salida digital presentará siempre un retraso respecto a la señal analógica.

La siguiente figura muestra el efecto del período de muestreo para este método



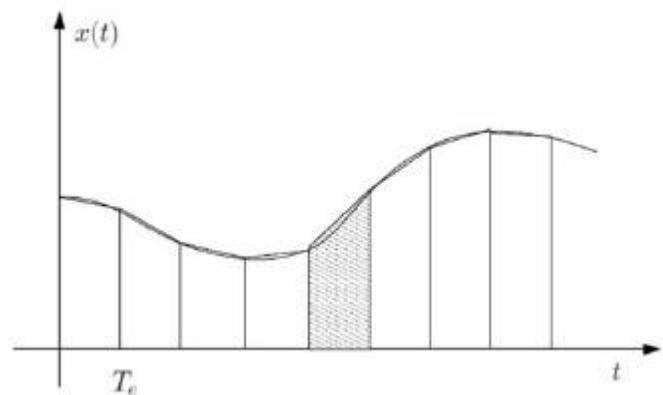
En la práctica con esta técnica de transposición se obtienen buenos resultados solamente si el período de muestreo es muy pequeño en relación al tiempo de respuesta de los sistemas controlados.

Si no se puede realizar un muestreo muy rápido, se recomienda el uso de alguna otra técnica de transposición menos sensible al período de muestreo.

Transposición por aproximación bilineal

La transposición por muestreo – bloqueo de orden cero es con frecuencia muy brusca. Se requiere por lo tanto de algunos métodos más complejos, con frecuencia basados en aproximaciones de las ecuaciones diferenciales que rigen los sistemas continuos.

El método de transposición por aproximación bilineal se basa en la aproximación de la integración de funciones con el método de los trapecios, la cual se muestra de forma gráfica en la figura. También se le conoce con el nombre de aproximación homográfica y “Tustin approximation” en inglés.



Si denotamos a $\bar{X}(z)$ como la integral de la señal $x[n]$. Con esta aproximación tendremos lo siguiente:

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Utilizando la transformada en Z, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Sabiendo que para los sistemas continuos la integración es equivalente a una multiplicación por $1/s$ en el dominio de la frecuencia, se quiere hacer una aproximación de $1/s$ con la función de transferencia digital:

$\frac{1}{s} \approx \frac{1}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$. Esto es equivalente a hacer el cambio de variable:

$$\rightarrow \frac{2}{1+z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

En la función de transferencia a transponer o lo que es equivalente imponer la igualdad $\frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$.

Algunas propiedades de la transformación bilineal son:

- Se conserva la estabilidad del controlador. En efecto los polos p de $C(s)$ se transforman en polos en $z = \frac{1+pT/2}{1-pT/2}$. Los polos con parte real negativa se llevan por lo tanto al interior del círculo unitario. La imagen del eje imaginario obtenido por la transformación bilineal es el círculo unitario.
- Esta transposición conserva la integración ya que un polo analógico en $s = 0$ se convierte en un polo digital en $z = 1$.
- La ganancia estática del controlador y por ende del lazo cerrado se mantiene. En efecto como tenemos a $s = 0$ cuando $z = 1$ entonces $\lim_{s \rightarrow 0} C(s) = \lim_{z \rightarrow 1} C(z)$.

Efecto en dominio de la frecuencia. A diferencia de la transposición por muestreo – bloqueo de orden cero, la transformación bilineal no introduce retraso. El comportamiento de la fase será mejor en términos globales. En cuanto a la amplitud, se observa que el filtrado introduce una distorsión muy importante para frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist.

Efecto sobre un control integral o derivativo. La amplificación de las frecuencias cercanas a la frecuencia de Nyquist conduce a la amplificación de los ruidos a alta frecuencia, lo que no es para nada deseable, y menos aún para una acción de control derivativa. Por el contrario el efecto sobre el integrador es beneficioso, debido a que las frecuencias altas se atenúan.

Efecto del período de muestreo. Para el mismo período de muestreo la aproximación bilineal es mejor que el bloqueo de orden cero.

Corrección de la distorsión. Para corregir la distorsión que introduce la aproximación bilineal, se puede añadir un término de deformación previa "prewarping", el cual permite corregir la distorsión para una frecuencia específica ω_c . Para ello modificamos el cambio de variable como sigue:

$$\rightarrow \frac{1 - \cos(\omega_c T)}{1 + \cos(\omega_c T)} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

El comportamiento del controlador digital se vuelve en este caso casi idéntico al del controlador analógico, pero solo a la frecuencia específica .

Conclusión

La aproximación bilineal permite la transposición de forma eficaz de los controladores de tipo paso bajo. Asociados a un *prewarping*, se vuelve también eficaz para filtros selectivos. Su buen comportamiento en ángulo de fase la convierte en la primera opción para controladores de tipo adelanto o atraso.

Por el contrario no está adaptada para filtros con un banda pasante ancha debido a la amplificación muy importante que produce a altas frecuencias. Se deberá entonces tener mucho cuidado en la transposición de controladores de tipo PD o PID cuando los polos del controlador trabajan a altas frecuencias.

A pesar de esto, como la mayoría de los controladores suelen ser de tipo paso bajo o pasa banda, con frecuencia es la opción por defecto.

En Matlab se obtiene con la función: $Cz = c2d(C, Te, 'tustin')$

O con un *prewarping* a la frecuencia : $Cz = c2d(C, Te, 'prewarp', w0)$

Implementación del Control Digital

Período de muestreo

En la práctica el período de muestreo () depende del tipo de proceso (químico, térmico, mecánico, etc.) y debe seleccionarse pequeño en relación con el tiempo de respuesta () del sistema en lazo cerrado. Un valor práctico es que se debe realizar al menos 4 a 10 muestras durante el tiempo de respuesta / 4~10.

Un período de muestreo muy grande (submuestreo) tiene como consecuencia:

- Disminución del rendimiento, debido a que el control se mantiene bloqueado mucho tiempo, y no reacciona cuando se presenta una perturbación.
- Si la salida presenta ruido es conveniente añadir un filtro para mitigar el ruido antes del muestreo (antialiasing filter). Este filtro va a introducir un retraso en el lazo de control.

Un período de muestreo muy pequeño (sobremuestreo) tiene como consecuencia:

- El control se acerca más al de tiempo continuo, pero se requieren mucho más cálculos.
- Se pueden presentar problemas numéricos de cálculo fuera de línea, así como en la recurrencia de la programación de la función de transferencia en Z.
- Se presentan dificultades intrínsecas a los métodos de cálculo del control, los cuales pueden perder robustez cuando $T \rightarrow 0$ puesto que es posible que la señal de control tienda a infinito.

Retraso

El retraso en los sistemas de control digital debe siempre tomarse en cuenta, pues agrega una dificultad al sistema. Este retraso puede tener varios orígenes a saber:

- Muestreo.
- Filtros y retrasos de comunicación.
- Tiempo de ejecución de los códigos.
- Interrupciones.
- Dependencia de datos.
- Preeminencia de procesos de orden superior.

El retraso introduce un desfase en las señales, el cual puede producir una inestabilidad en el sistema.

Según Bode el mayor retraso admisible puede calcularse como la siguiente expresión:

Donde:

$$\frac{180}{\omega_c} - \phi_m$$

: Margen de fase

: Frecuencia de cruce con $|G(j\omega)| = 1$

Bibliografía:

- Katsuhito OGATA. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall.
- Benjamín Kuo. *Sistemas de Control Automático*. Pearson Education.
- Smith y Corripio. *Control Automático de Procesos*. Limusa.
- Distéfano, Stubberud y Williams. *Retroalimentación y sistemas de Control*. Serie Shaum. Mc Graw Hill.
- Richard C. Dorf & Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Pearson, 11ava Edición, 2008.
- Philippe de Laminart. *Automatique, Commande de systèmes linéaires*. Hermes 1993.
- Florent Nageotte. *Analyse et Commande des Systèmes Numériques*. https://siit-cnrs.unistra.fr/avr-fr/index.php/Page_personnelle_de_Florent_Nageotte.
- Yves Brière. *Commande des systèmes par calculateur*. <http://personnel.isae.fr/yves-briere/?lang=fr>