AAU

AMERICAN ANDRAGOGY UNIVERSITY

educandis orbis

Tabla de Contenido

Introducción

El control de procesos, que en sus inicios estaba restringido a máquinas sofisticadas y procesos muy complejos y costosos, está hoy en día en prácticamente todas las actividades humanas. Entre estas actividades las actividades de la Ingeniería Mecánica tienen una importancia primordial, pues estas van desde las maquinarias industriales, pasando por los automóviles hasta llegar a los equipos simples de los hogares como hornos, neveras, calentadores, etc.

A la vez de si difusión en las actividades humanas las técnicas del control de procesos han evolucionado, y se ha vuelto una ciencia que para ser manejado en su globalidad requiere de estudios especiales de este dominio, sin embargo casi todos los ingenieros mecánicos se topan en su carrera con sistemas automatizados a los cuales deberán operar, mantener o incluso modificar. En vista de esto la carrera de Ingeniero mecánico incluye en su pensum dos asignaturas referidas a esta ciencia, la primera *Instrumentación* cuyo objetivo es el aprendizaje de la ciencia de las mediciones de variables y la segunda *Teoría de Control* cuyo objetivo es el aprendizaje de los fundamentos primordiales del control de procesos.

Este documento se presenta como una ayuda a la enseñanza de la asignatura Teoría de Control para la carrera de Ingeniería Mecánica, para lo cual se ha hecho un intento de presentar de una forma simple los conocimientos primordiales que debería poseer un Ingeniero Mecánico para trabajar con sistemas de control de procesos en todos sus ámbitos de trabajo, y que deben ser adquiridos en el transcurso de un semestre académico. No pretende por lo tanto ser un documento extenso sobre el tema, como lo son libros fundamentales sobre el tema.

Con este objetivo el documento se desarrolla en tres unidades que engloban estos conocimientos primordiales del control de procesos.

Una primera unidad referida a la Representación Matemática de Sistemas Lineales, la cual presenta las diversas formas de representación de sistemas lineales desde el punto de vista matemático y gráfico, útiles para las diversas técnicas existentes en el control de procesos, y además comienza con una somera introducción al control de procesos, esta se divide en cuatro temas: Tema 1 Introducción a los sistemas de control, Tema 2 Modelado Matemático, Tema 3 Formas de representación de modelos matemáticos y Tema 4 Diagramas de Bloque.

Una segunda unidad referida al Análisis de la Dinámica de los Sistemas, en la cual se presentan los principales criterios de estudio en referencia a los sistemas desde el punto de vista de sus diversas representaciones. Esta incluye los siguientes temas: Tema 5 Respuesta de sistemas, Tema 6 Estabilidad de sistemas, Tema 7 Análisis de la respuesta en frecuencia y Tema 8 Observabilidad y Controlabilidad .

Una tercera unidad referida a las Técnicas de Control, en la cual se presentan las principales técnicas de control desde el punto de vista del control clásico o del control moderno, y culmina con una introducción a los sistemas digitales. Esta unidad está organizada en los siguientes temas: Tema 9 Acciones de control, Tema 10 Ajuste de Controladores PID, Tema 11 Control por retorno de estado y Tema 12 Introducción a los Sistemas Digitales.

Tema 1. Introducción a los Sistemas de Control

Sistema de Control

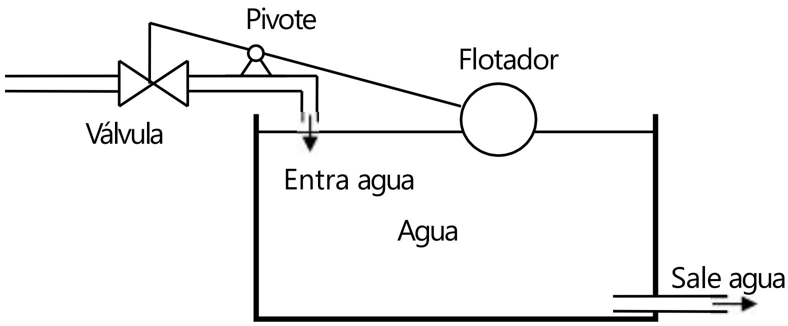
Los controles automáticos o sistemas de control constituyen una parte muy importante en los procesos industriales modernos, donde se les usa principalmente para regular variables tales como la presión, temperatura, nivel, flujo, viscosidad, densidad etc.

Definición

Una definición de un sistema de control puede ser:
"Es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera, que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular a sí mismo o a otro sistema".

Ejemplo de un Sistema de Control.

Control de nivel de un tanque de agua.



Ventajas de un control automático

Las ventajas de un control automático son principalmente económicas, ya que permite:

- Mejorar la calidad de los productos.
- Disminuir los tiempos de operación.
- Reducir la dependencia de operarios para manejar procesos.
- Reducir costos de producción.

Términos Básicos

Planta. Es un equipo o conjunto de equipos que permiten realizar una operación determinada. Cuando se tiene un conjunto de equipos interactuando para generar un producto se tiene una planta industrial.
Proceso. Está constituido por una serie de operaciones coordinadas sistemáticamente para producir un resultado final que puede ser un producto.
Sistema. Es una combinación de componentes físicos que actúan conjuntamente para cumplir un determinado objetivo.

Elementos de un Sistema de Control

Proceso a controlar. Es como su nombre lo indica el proceso que se quiere controlar o regular. En el ejemplo del tanque se trata de un proceso flujo a través de un tanque en donde se quiere un nivel dado.
Variable controlada. Es aquella que se mantiene en una condición específica deseada, es la que se quiere controlar. En el ejemplo es el nivel del líquido.

Variable manipulada. Es la señal sobre la cual se actúa o se modifica con el fin de mantener la variable controlada en su valor. Esta cambia continuamente para hacer que la variable controlada vuelva al valor deseado. En el ejemplo es el flujo de entrada del líquido o la apertura de la válvula.
Señal de referencia (set point). Es el valor en el cual se quiere mantener la variable controlada. En el ejemplo sería el nivel deseado del tanque.
Error o señal actuadora. Es la diferencia entre la señal de referencia y la variable controlada. En el ejemplo sería el error en el nivel deseado.
Perturbación. Es un agente indeseable que tiende a afectar adversamente el valor de la variable controlada. En el ejemplo podría ser un cambio en el flujo de salida, lluvia, evaporación, etc.
Elemento de medición. Es el encargado de determinar el valor de la variable controlada. En el ejemplo es el flotador.
Controlador. Es el encargado de determinar el error y determinar qué tipo de acción tomar. En el ejemplo seria el juego de barras y pivote que une el flotador con la válvula. Este si el nivel baja hace abrir la válvula, por el contrario si el nivel sube hace cerrar la válvula.
Elemento final de control. Es el encargado de realizar la acción de control modificando la variable manipulada. En el ejemplo es la válvula.
Entrada. Es el estímulo o excitación que se aplica a un sistema desde una fuente de energía externa, generalmente con el fin de producir, de parte del sistema, una respuesta específica. En el ejemplo existen dos entradas: la apertura de la válvula y la perturbación.
Salida. Es la respuesta obtenida de parte del sistema. En el ejemplo la salida es el nivel de líquido.

Clases de sistemas de control

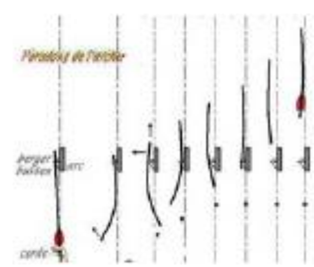
Existen diversas formas de clasificar un sistema de control entre las cuales están:

Sistema de control Pasivo, sistema de control de Lazo Abierto y sistema de control Retroalimentado.

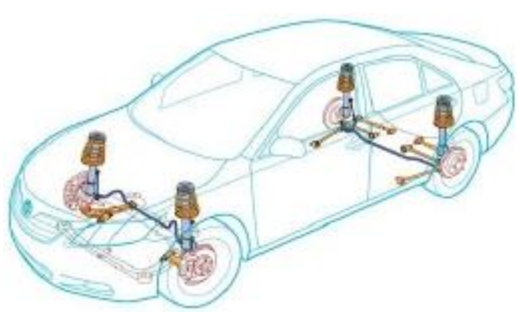
Sistema de control Pasivo

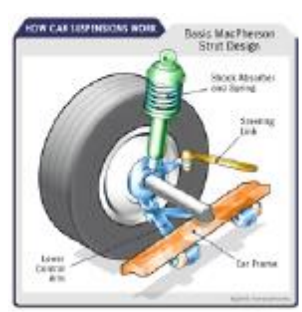
Es cuando la variable el sistema se diseña para obtener una determinada respuesta ante entradas conocidas, una vez diseñado el elemento no existe ningún elemento que realice o modifique la acción de control. No existe un sistema de que modifique la acción de control en función de las variables del sistema. Algunos ejemplos de control pasivo son:

El direccionamiento de flechas o cohetes pirotécnicos. En este caso el diseño de los elementos con una vara larga y unas plumas en la parte posterior permite direccionar las flechas o cohetes en dirección longitudinal.



Los sistemas de suspensión de vehículos. En este caso se diseña un sistema de resorte y amortiguador que permite absorber el efecto de los defectos de la vía. En algunos casos se ha





sustituido este sistema pasivo por un sistema activo.

Sistema de control de lazo abierto

Es cuando el sistema de control utiliza la información de la entrada para realizar una acción de control, sin tomar en cuenta el valor de la variable controlada.
Este se puede esquematizar en el siguiente diagrama de bloques

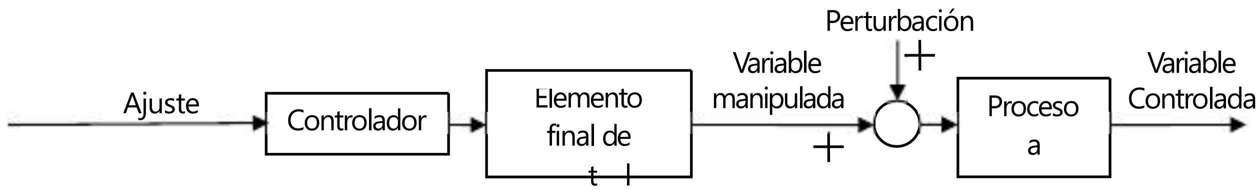
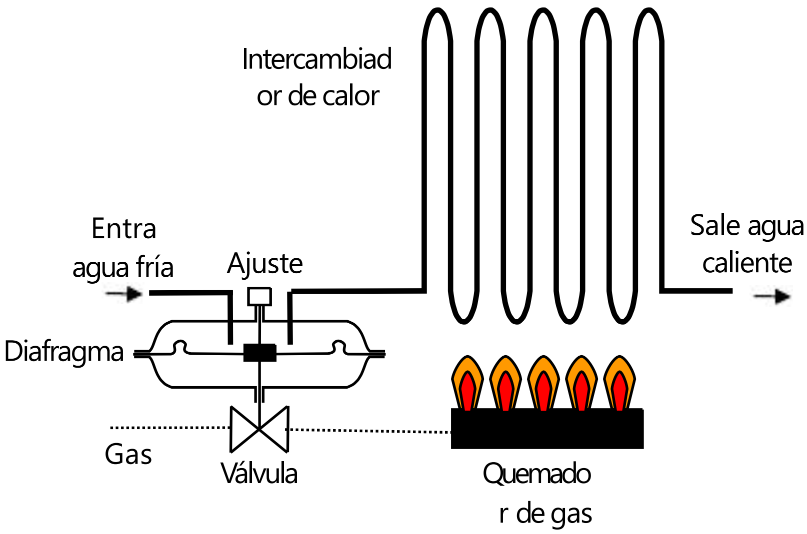


Diagrama de bloques típico de un sistema de control de lazo abierto

Un ejemplo de este tipo de control es un calentador de agua a gas.



Esquema de un calentador de agua a gas

El funcionamiento del calentador es el siguiente: Cuando se consume agua el diafragma siente una disminución de presión y se desplaza hacia arriba de manera que la válvula permite el paso de gas hacia el quemador, haciendo que este encienda, y caliente el agua. La lama será proporcional al flujo de agua que pase por el calentador según el ajuste dado previamente al tornillo de ajuste. Pero este no mide si se está llegando o no al valor de la temperatura deseada.

Otro ejemplo de este tipo de sistemas de control es por ejemplo una lavadora automática. En este caso el aparato tiene un control que permite seleccionar el tipo de programa de lavado, selección que realiza el usuario en función del tipo y condiciones de la ropa a lavar. Una vez seleccionado el programa este se ejecuta independientemente de la limpieza obtenida para la ropa.

Sistema de control retroalimentado (Activo)

Es cuando la variable controlada se compara continuamente con la señal de referencia y cualquier diferencia produce una acción que tiende a reducir la desviación existente. En otras palabras la acción de control realizada por el sistema de control depende del valor de la variable controlada en todo instante, por lo tanto también toma el nombre de control dinámico.

Esto se puede representar en forma de un diagrama de bloques que muestra la interacción lógica de los elementos que conforman un sistema de control retroalimentado.

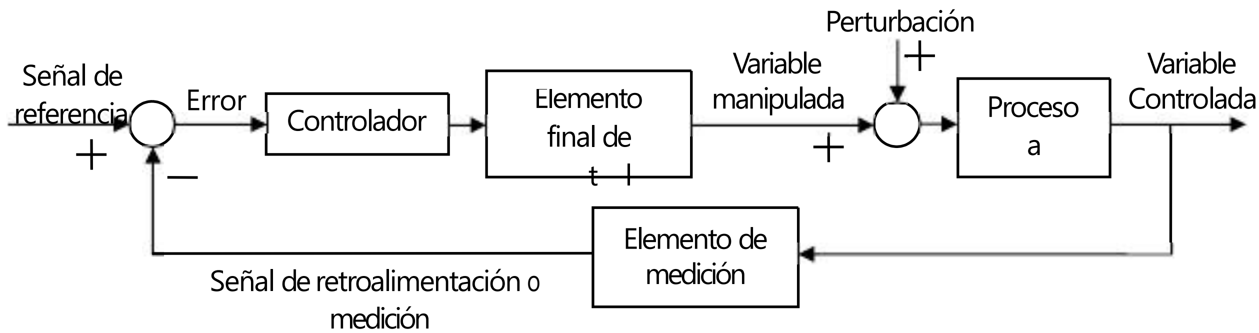
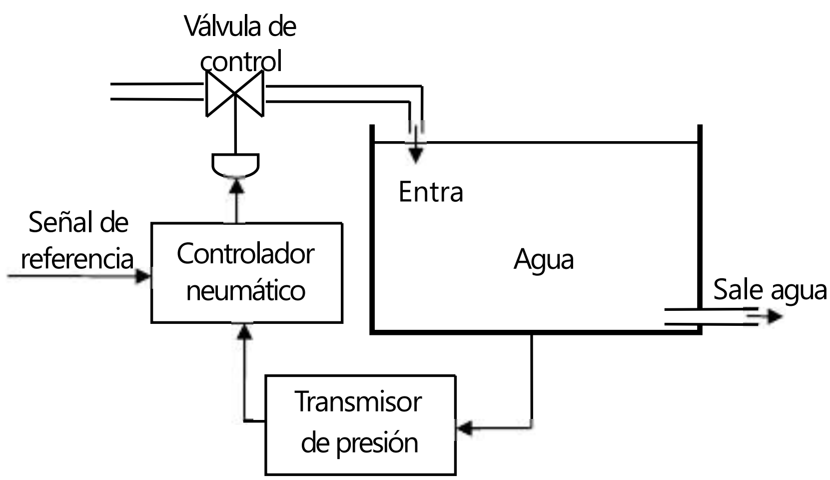


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

Un ejemplo de sistema de control retroalimentado



Sistema neumático de control de nivel

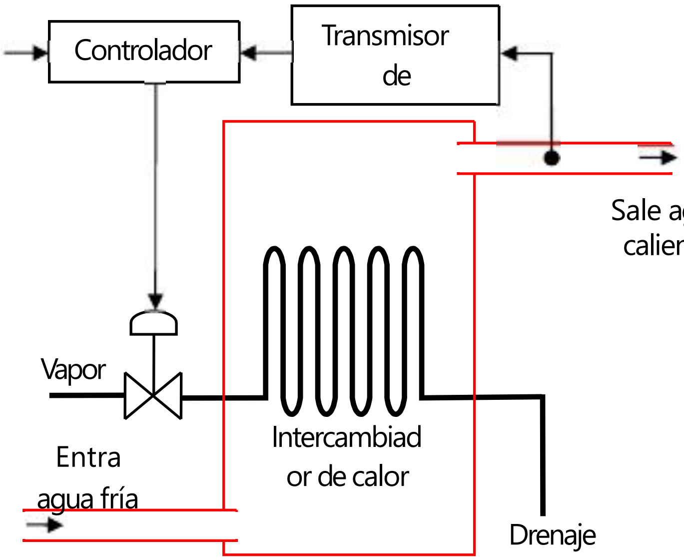
En donde:

- Proceso es el flujo de nivel a través del tanque con un nivel constante.
- Controlador es el controlador neumático.
- Elemento final de control es la válvula de control.
- La variable manipulada es el caudal de entrada.
- Perturbación puede ser un cambio en el caudal de salida, evaporación o lluvia.
- Variable controlada es el nivel.
- Elemento de medición es el transmisor de presión.
- Señal de referencia es la presión de referencia.
- Error es la diferencia entre la presión de referencia y la presión medida.

Sistema de Control Continuo vs. Sistema de Control Discontinuo

Sistema de control continuo

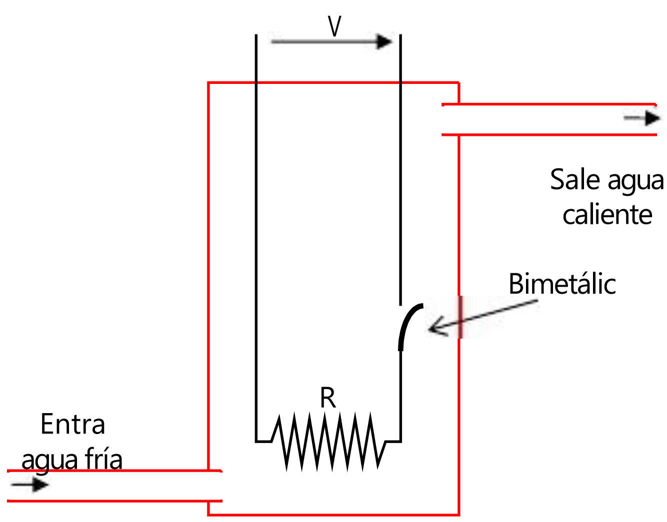
Es aquel en que la modificación de la variable manipulada se efectúa continuamente.
Por ejemplo un controlador de temperatura con vapor.
Este instrumento calienta el agua con la ayuda de un serpentín por el cual pasa un flujo de vapor. Este flujo de vapor es aumentado o disminuido por una válvula de control, la cual se abre o cierra suavemente en una cierta proporción según el mensaje enviado por el controlador, el cual trabaja con la diferencia entre una señal de referencia y el valor de la temperatura del agua de salida. La temperatura del agua es medida por un transmisor de temperatura.
Como la apertura de la válvula puede tomar una infinidad de valores entre totalmente cerrada y totalmente abierta, entonces el control es continuo.



Esquema de un calentador de agua a vapor

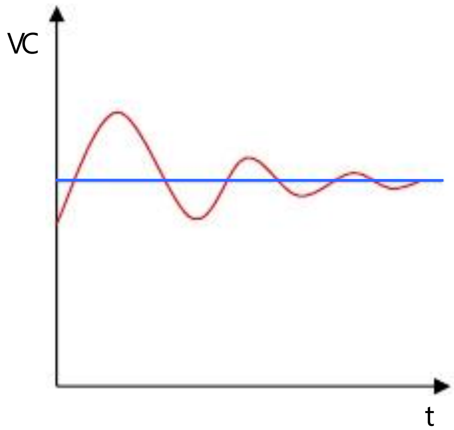
Sistema de control discontinuo (ON-OFF)

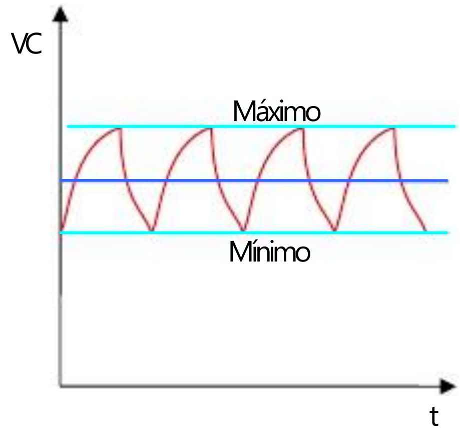
Es aquel en que la modificación de la variable manipulada no es continua sino que solo puede tomar un valor máximo o un valor mínimo. Estos pueden valores pueden ser: abierto o cerrado, conectado o desconectado, etc.
Un ejemplo de estos sistemas es el calentador de agua eléctrico.



Esquema de un calentador de agua eléctrico

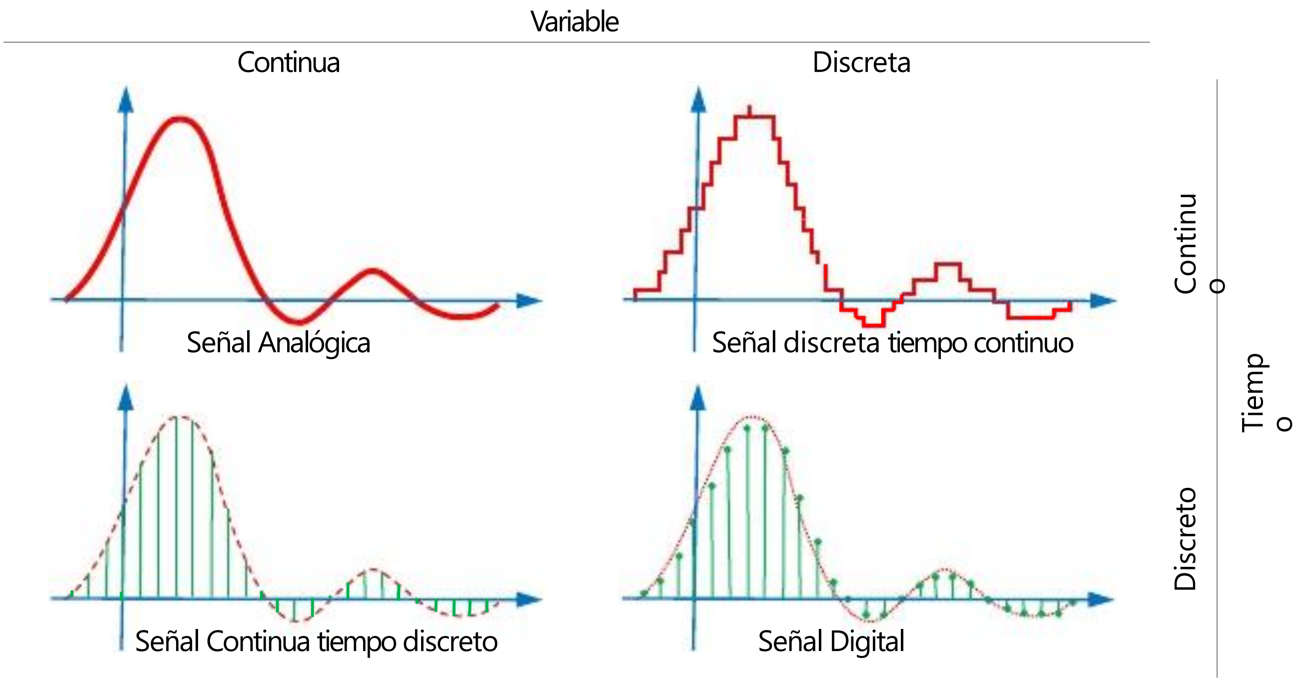
El sistema funciona calentando agua mediante una resistencia eléctrica la cual se conecta o se desconecta, según el valor de la temperatura en el recipiente, por la acción de un bimetálico (comúnmente conocido como termostato), el cual al calentarse se deforma. Este elemento sirve a la vez de instrumento de medición, controlador y elemento final de control. Ya que cuando el agua se calienta hasta el valor deseado su deformación hace que se desconecte el circuito eléctrico apagando la resistencia eléctrica y cuando el agua se enfría se vuelve a enderezar conectando de nuevo el circuito con lo cual la resistencia vuelve a calentar el agua.


VC
t
Sistema continuo


VC
Máximo
Mínimo
t
Sistema discontinuo

Sistemas de Control Analógicos vs. Sistemas de Control Digitales

Un sistema de control Analógico es aquel en que todas las variables son continuas y en función de un tiempo continuo. En cambio, en un sistema de control digital las variables son discretas, es decir solo pueden tomar valores predeterminados en función de la precisión del sistema, y estas variables se conocen solo en algunos instantes de tiempo. Los sistemas de control que usan una computadora son en esencia sistemas digitales.

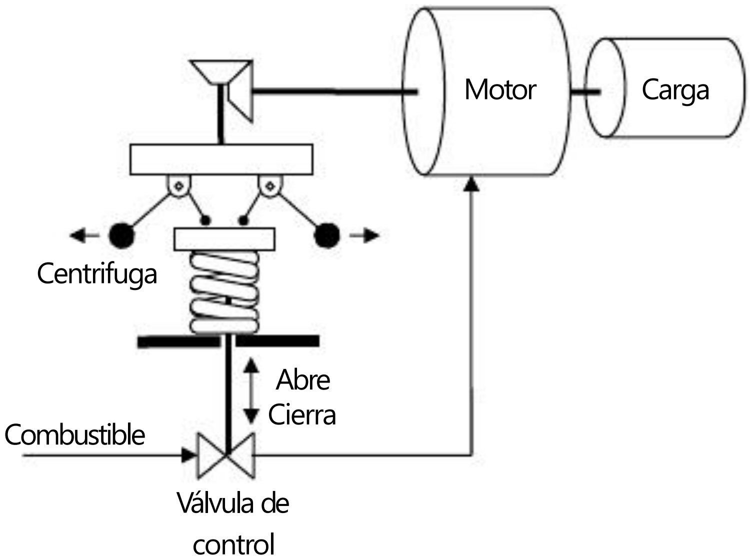


Sistemas de Control Reguladores vs. Sistemas de Control Seguidores

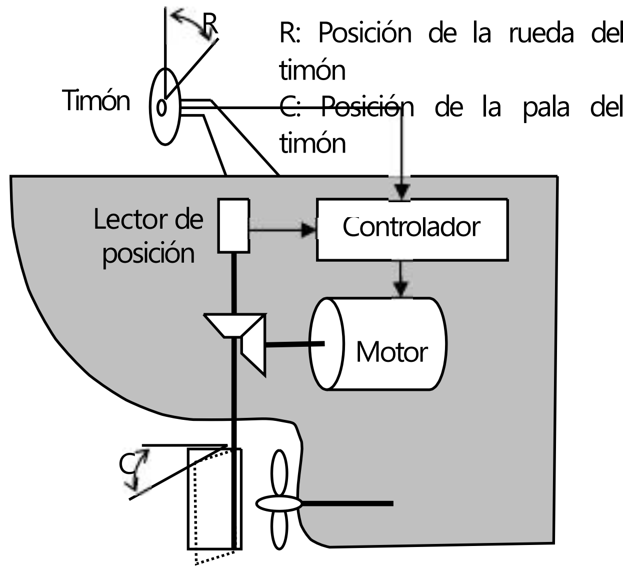
Sistema Regulador

Es aquel cuya función es mantener la variable controlada en un valor constante
Un ejemplo de este tipo de control es el regulador de Watt, que permite controlar la velocidad de motor, manteniéndola en un valor constante cualquiera sea la carga.

En este sistema el motor está conectado mecánicamente a un sistema de centrífugas. Si la velocidad del motor aumenta entonces la fuerza centrifuga ejerce una fuerza que hace cerrar la válvula de paso de combustible, esto hasta que la velocidad se estabilice nuevamente en el valor deseado. Lo contrario ocurre si



Esquema de un regulador de velocidad de Watt



Control de dirección de un barco

la velocidad del motor disminuye.

Sistema seguidor

Es cuando la señal de referencia varía constantemente y el sistema de control trata de mantener la igualdad entre la variable controlada y la señal de referencia. El control trata de seguir el punto de ajuste. Por ejemplo el control de dirección de un barco.

En un barco grande es imposible llevar el timón en forma manual. Luego el movimiento se realiza mediante un sistema hidráulico. La rueda del timón indica la posición deseada (señal de referencia que en este caso cambia continuamente) y es el motor hidráulico el que se encarga de mover la pala.

Sistemas de control invariantes en el tiempo vs. Sistemas de control variable en el tiempo

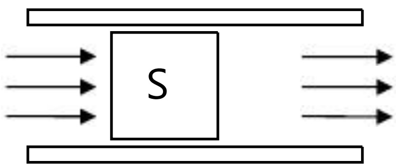
Un sistema de invariante en el tiempo (con coeficientes constantes) es aquel en que los parámetros no varían en el tiempo. En cambio para un sistema de control variable en el tiempo los parámetros varían en el tiempo. Por ejemplo en un sistema de control de vehículo espacial, en el cual la masa disminuye al consumirse el combustible durante el vuelo.

Sistema Invariante en el Tiempo

Sistema Variable en el Tiempo

Sistemas de control con parámetros concentrados vs. Sistemas de control con parámetros distribuidos

Los sistemas de control que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias son sistemas de control de parámetros concentrados. Mientras que los sistemas que requieren la utilización de ecuaciones diferenciales parciales para su representación son sistemas de control de parámetros distribuidos.



Parámetros Concentrados

Parámetros Distribuidos

Sistemas de control lineales vs. Sistemas de control no lineales

Se denomina sistema lineal aquel la relación entre la entrada y la salida puede definirse mediante una ecuación lineal.

Sistema Lineal: Sistema No lineal:

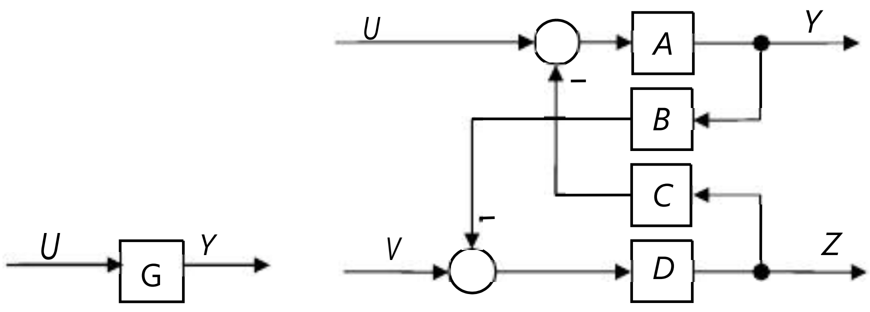
Se dice que una ecuación es lineal si a esta se le puede aplicar el principio de superposición.
El principio de superposición establece que la respuesta producida por dos funciones excitadoras distintas es la suma de las respuestas individuales.

Si $s \quad f\,e$ entonces $e \quad a \quad b \rightarrow s \quad f\,a \quad f\,b$

Es de notar que los sistemas reales son todos no lineales, sin embargo en muchos casos la extensión de la variación de las variables del sistema no es amplia y se puede linealizar el sistema dentro de un rango relativamente estrecho de valores de variables.

Sistemas de control una entrada y una salida (SISO) vs. Sistemas de control de múltiples entradas y salidas (MIMO)

Un sistema puede tener una entrada y una salida, por ejemplo los controles de temperatura vistos anteriormente. Pero existen también sistemas con múltiples entradas y salidas, por ejemplo el control de una caldera en donde las variables controladas (salidas) son la temperatura y la presión, las cuales son controladas a través de un flujo y del calentamiento.



SISO MIMO

Sistemas de control determinísticos vs. Sistemas de control estocásticos

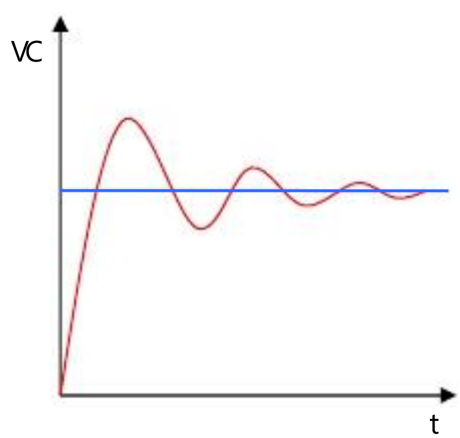
Un sistema de control es determinístico si la respuesta a la entrada es predecible y repetible. De no serlo el sistema de control es estocástico.


Sistema determinístico

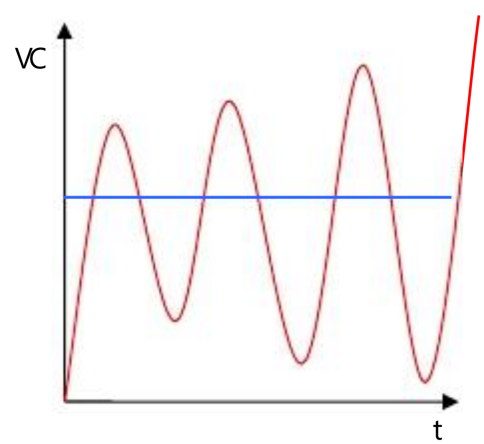

Sistema Estocástico

Características de los sistemas de control

En un sistema de control existen tres características fundamentales que son: La estabilidad, la exactitud y la velocidad de respuesta.



Estable



Inestable

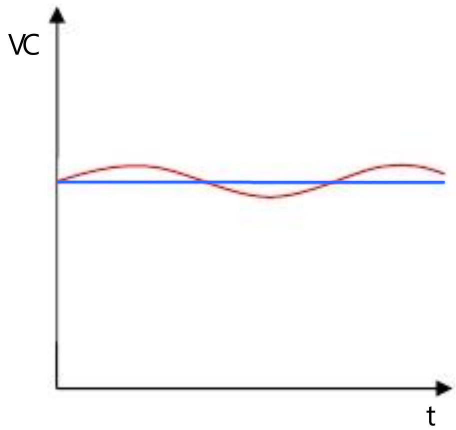
Estabilidad

Se dice que un sistema de control estable es aquel que responde en forma limitada a cambios limitados en la variable controlada.

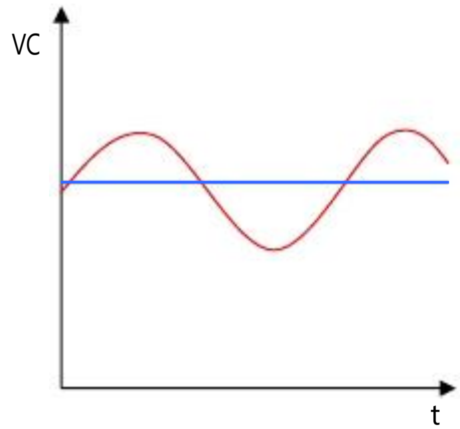
Es decir si ocurre un cambio en la señal de referencia o se produce una perturbación el sistema al principio se desviara de su valor y volverá luego a alcanzar el valor correcto.
Un sistema inestable en cambio producirá oscilaciones persistentes o de gran amplitud de la variable controlada.

Exactitud

Un sistema exacto es aquel capaz de mantener el error en un valor mínimo, o en todo caso aceptable.
En la realidad no existen sistemas absolutamente exactos debido a las pequeñas imperfecciones de sus componentes, pero se consideran sistemas exactos aquellos que satisfacen los requerimientos del sistema.



Exacto

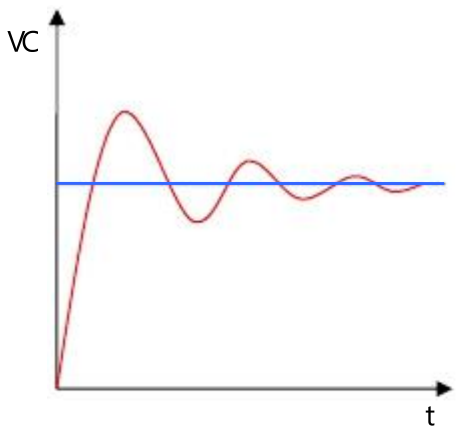


Inexacto

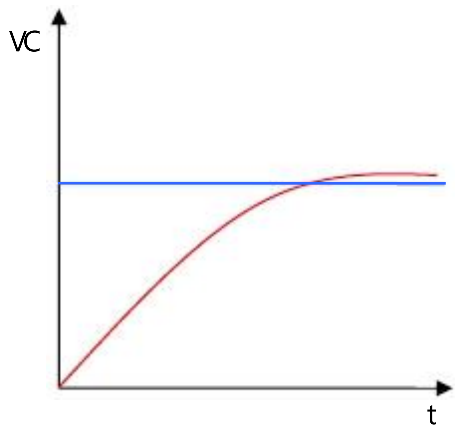
Por lo general el costo de un sistema tiende a aumentar con la exactitud.

Velocidad de Respuesta

Es la rapidez con que la variable controlada se aproxima a la señal de referencia.
Un sistema debe responder a cualquier entrada en un tiempo aceptable, ya que aunque un sistema sea estable y tenga la exactitud requerida, si este es demasiado lento no tiene ningún valor.



Alta velocidad de t



Baja velocidad de t

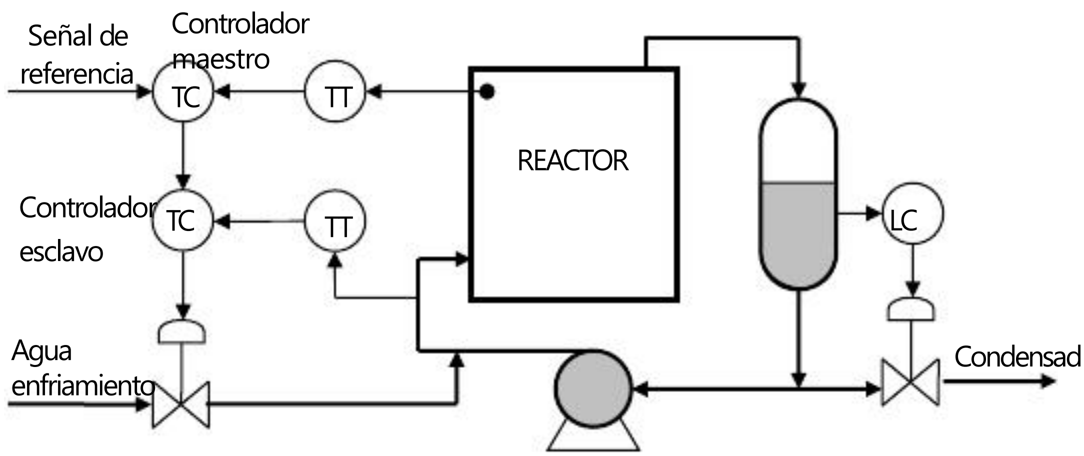
Por lo general la estabilidad y la velocidad de respuesta son características que se contraponen, es decir mientras más rápido sea un sistema mayor será la tendencia a la inestabilidad y viceversa.

Lazos de control comúnmente utilizados en procesos industriales

Existen disposiciones de los sistemas de control diferentes a la básica, en donde pueden por ejemplo coexistir varios controladores, elementos de medición u algún otro componente. Estas disposiciones o comúnmente llamados lazos de control permiten controlar sistemas más complejos de una manera práctica.
Los lazos más comunes son.

Control en cascada

Es aquel en el cual un controlador primario (maestro) manipula el punto de ajuste (señal de referencia) de un controlador secundario (esclavo).
Por ejemplo el control de temperatura de un control isotérmico

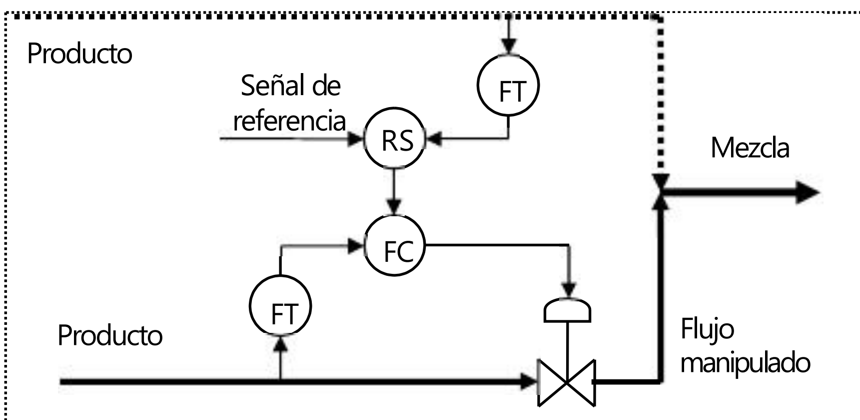


Control de temperatura en cascada para reactor isotérmico

En este caso el controlador maestro actúa de acuerdo a la diferencia entre el valor deseado y la temperatura del reactor, dando como señal de salida el valor deseado en el controlador esclavo, es decir la temperatura necesaria para el agua de enfriamiento que se introducir al reactor. Este controlara la temperatura del agua de enfriamiento por intermedio de una válvula de control que controla la proporción de agua fría y agua caliente (recirculación).

Control de relación

Es aquel en el que se controla una variable en relación a otra. El objetivo es mantener la relación entre dos variables en un valor específico. El control se efectúa manipulando una válvula que afecta a una de las variables mientras que la otra permanece constante.
Por ejemplo en un control de una mezcla de componentes se controla la proporción de uno (o varios) de ellos en función del componente principal para así mantener constante la proporción.



Control de una mezcla de componentes

En este caso una de las variables es la controlada mientras que la otra se utiliza para generar el valor deseado. La no controlada es multiplicada por un coeficiente ajustable en un instrumento llamado estación de relación (RS). La señal de salida de la estación de relación es la señal de referencia del controlador de flujo.

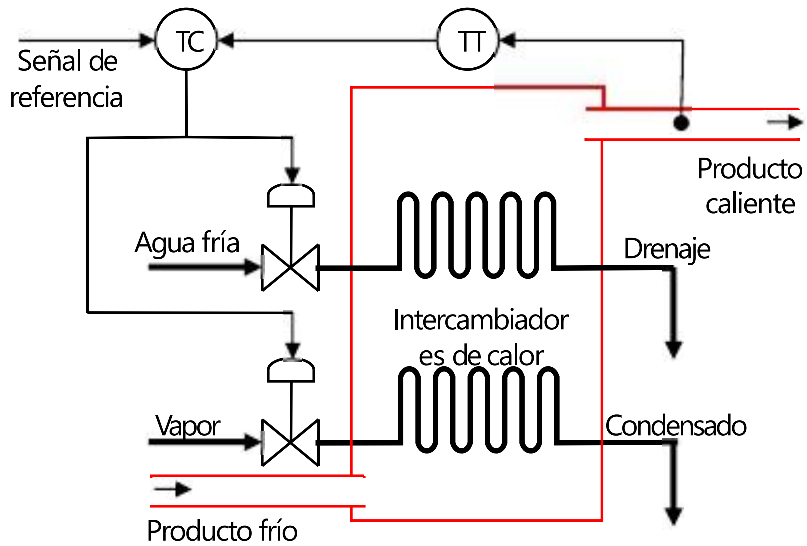
Control de rango partido

En este caso el controlador tiene una entrada y dos salidas. Una de las salidas actuará desde un valor A hasta uno B y el otro desde uno B hasta uno C.

Por ejemplo en un control de rango partido de temperatura.

En este la señal de salida del controlador se conecta a dos válvulas de control. Si la señal de salida del controlador esta en el rango de 3 a 15 psi, se ajustan las válvulas de la siguiente forma:

1. La válvula de vapor se mueve desde completamente abierta hasta completamente cerrada cuando la señal oscile entre 3 y 9 psi.
2. La válvula de agua fría se mueve entre completamente cerrada y completamente abierta cuando la señal oscile entre 9 y 15 psi.



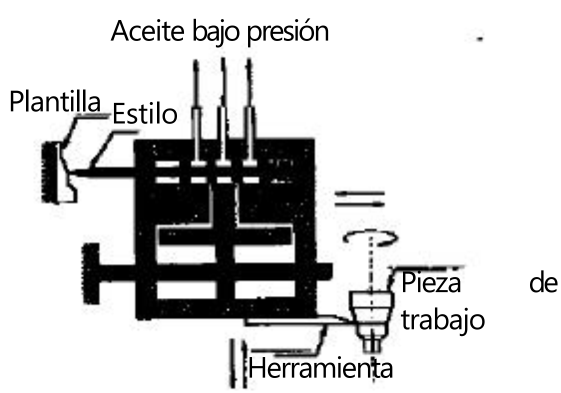
Esquema de un control de temperatura de rango partido

El controlador se ajusta de tal manera que produzca una señal de 9 psi cuando error sea nulo.

En este momento las dos válvulas estarán cerradas, cualquier variación en el error abra un u otra válvula para enfriar o calentar el producto.

Ejercicios

1) Muchas máquinas, tales como tornos, fresadoras y esmeriles, están provistos de trazadores para reproducir el contorno de las plantillas. La figura es un diagrama esquemático de un trazador hidráulico en el cual la herramienta duplica la forma de la plantilla sobre la pieza de trabajo.
   a) Explique el funcionamiento del sistema
   b) Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema
   c) Clasifique el sistema de control



2) Las neveras para mantener el producto a una temperatura dada poseen un sistema de control.
   a) Explique como es o como cree que debe que debe ser el sistema de control (Haga un esquema).
   b) Haga el diagrama de bloque típico de un sistema de control e identifique los componentes en el sistema de la nevera.
   c) Clasifique el sistema de control.

3) Los motores d ecombustión interna requieren, para funcionar correctamente, de un sistema de enfriamiento, que mantenga la temperatura del motor en un valor adecuado. Ni muy alto ni muy bajo. Existen varios sistemas para controlar esa temperatura, los dos mas conocidos son:
   - El clásico que usa un termostato que regula el flujo de refrigerante (agua), y donde el ventilador esta acoplado mecánicamente al motor.
   - En los vehiculos más recientes se usa, además del termostato, un controlador de temperatura que prende y apaga un electroventilador.

   Seleccione uno de los dos sistemas antes mensionados y:
   a) Explique su funcionamiento, utilizando figuras.
   b) Haga el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado identificando los componentes del sistema.
   c) Clasifique el sistema de control.

Tema 2. Modelado Matemático

Introducción

Par el estudio de los sistemas de control es necesario conocer el comportamiento de los elementos que eventualmente pueden formar parte de un sistema a controlar y del sistema de control. Este comportamiento se puede expresar en forma de un modelo matemático.
Se conoce como modelo matemático a las expresiones que representan el comportamiento dinámico de un sistema.
El estudio dinámico consiste entonces en determinar analíticamente la respuesta (salida) cuando la entrada experimenta una variación en el tiempo (excitación). Dicho de otra manera poder representar la respuesta transitoria del sistema.
Los modelos matemáticos de los sistemas físicos son ecuaciones diferenciales, que pueden ser ordinarias para los sistemas a parámetros concentrados o parciales para los sistemas distribuidos. Estas ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales según el rango de funcionamiento en el cual se quiere estudiare al sistema.
En este capítulo estudiaremos los modelos matemáticos, lineales y simplificados de algunos tipos de sistemas más comunes. Quedan fuera del alcance de este capítulo los modelos matemáticos no lineales de los sistemas físicos, los cuales son más precisos pero más complejos para la correcta comprensión del resto de la asignatura.

Sistemas Mecánicos

Un sistema mecánico está conformado por los elementos siguientes:

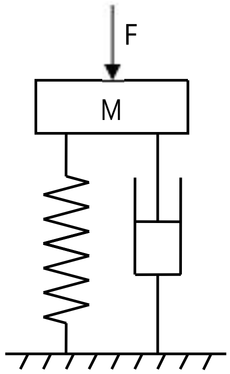
Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resorte		$F = Kx$
Amortiguador		$F = CV = C\dfrac{dx}{dt}$
Fricción		$F = BV = B\dfrac{dx}{dt}$
Masa	M	$F = Ma = M\dfrac{d^2x}{dt^2}$

Donde:

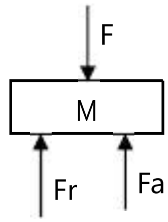
F : Fuerza | x : Desplazamiento | V : Velocidad
a : Aceleración | K : Constante del resorte | C : Constante del amortiguador
B : Coeficiente de fricción | M : Masa

El modelo matemático se obtiene haciendo un diagrama de cuerpo libre sobre cada masa del sistema.

Ejemplo 1:



El sistema posee en este caso una sola masa, se hace entonces un diagrama de cuerpo libre en la masa:



El modelo matemático del sistema será:

$$F - Kx - C\frac{dx}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

O escrito ene. Orden común de una ecuación diferencial ordinaria:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + Kx = F$$

Esta ecuación es una relación del desplazamiento de la masa (salida) en función de la fuerza aplicada (entrada).

Para simplificar la escritura de la ecuación diferencial se puede utilizar el operador matemático de derivada:

$$D = \frac{d}{dt}$$

Que para una derivada de segundo orden es: $D^2 = \dfrac{d^2}{dt^2}$

Con esta representación la ecuación de nuestro sistema mecánico se escribe: $MD^2x + CDx + Kx = F$

Sistemas Mecánicos Rotativos

Un sistema mecánico rotativo está conformado por los elementos siguientes:

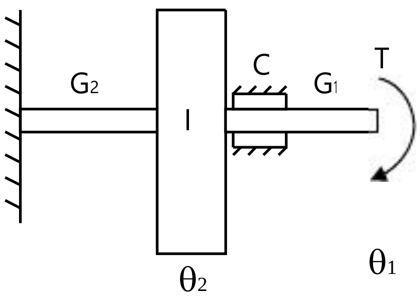
Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Ejes		$T = G\theta$
Cojinete		$T = C\omega = C\dfrac{d\theta}{dt}$
Masa o Volante de inercia	I	$T = I\alpha = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
Tren de engranes		$\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{N_2}{N_1}$ relación de velocidad $T_1\theta_1 = T_2\theta_2$ relación de trabajo

Donde:
- T : Torque o momento
- θ : Desplazamiento angular o deformación angular
- ω : Velocidad angular
- α : Aceleración angular
- G : Coeficiente de deformación de ejes
- C : Coeficiente de fricción viscosa

I : Momento de inercia de masas N : Numero de dientes de engrane

El modelo matemático se obtiene haciendo un diagrama de cuerpo libre sobre cada volante de inercia del sistema.

Ejemplo 2:



Se hace el diagrama de cuerpo libre sobre el volante de inercia:

$$G_1(\theta_1-\theta_2)-G_2\theta_2-C\frac{d\theta_2}{dt}=I\frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

Y se escribe adicionalmente la ecuación que relaciona el momento aplicado con al extremo del eje con el que momento que recibe el volante de inercia:

$$T=G_1(\theta_1-\theta_2)$$

Con estas dos ecuaciones se puede hallar una expresión entre el momento aplicado al sistema (entrada) y el movimiento angular del momento de inercia:

$$I\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+C\frac{d\theta_2}{dt}+G_2\theta_2=T$$

O escrito utilizando el operador matemático: $ID^2\theta_2+CD\theta_2+G_2\theta_2=T$

También se puede definir una salida diferente por ejemplo el desplazamiento angular en el extremo del eje. En este caso se combinan las dos ecuaciones de una forma diferente:

Se obtiene primero la expresión $\theta_2=\theta_1-\dfrac{T}{G_1}$

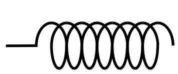
La cual se sustituye en la primera relación obtenida:

$$ID^2\left(\theta_1-\frac{T}{G_1}\right)+CD\left(\theta_1-\frac{T}{G_1}\right)+G_2\left(\theta_1-\frac{T}{G_1}\right)=T$$

$$ID^2\theta_1+CD\theta_1+G_2\theta_1=\frac{I}{G_1}D^2T+\frac{C}{G_1}DT+\left(\frac{G_2}{G_1}+1\right)T$$

Sistemas Eléctricos

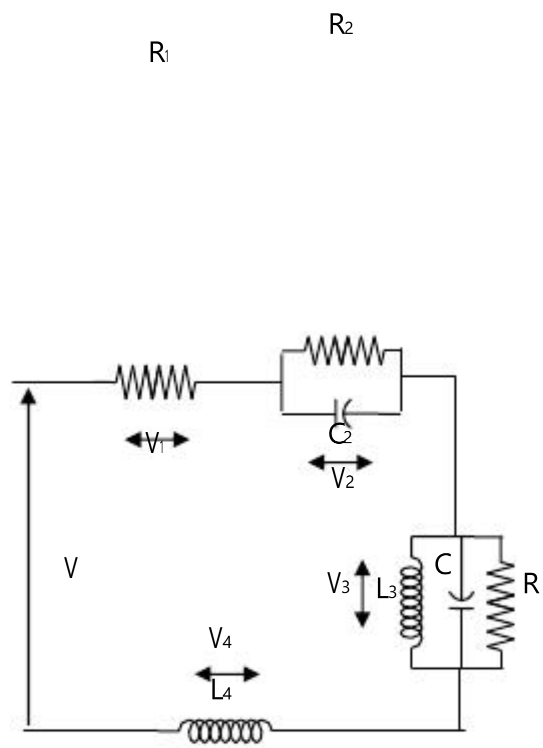
Un sistema eléctrico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resistencia		$V=RI$, $Z_R=R$
Capacitor		$V=\frac{1}{C}\int_0^t Idt$; $Z_C=\frac{1}{CD}$
Bobina		$V=L\frac{dI}{dt}$, $Z_L=LD$

Elemento cualquiera	Z	$V = ZI$
En un nodo	●	$\sum I = 0$
En una malla	↑ ⊃	$\sum V = 0$
Elementos en serie	Z Z	$Z_T = \sum Z_i$
Elementos en paralelo	Z Z	$Z_T = \dfrac{1}{\sum 1/Z_i}$

Donde:

V : Voltaje o diferencia de potencial
I : Intensidad
Z : Impedancia
R : Resistencia
C : Capacitancia
L : Inductancia



Ejemplo 3: Hallar $V = f(I)$ y $V = f(V_3)$

Primera parte $V = f(I)$

Sabemos inicialmente que:

$$V = Z_T I$$

Donde

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

$$Z_1 = R_1; \qquad Z_2 = \frac{1}{1/R_2 + C_2 D};$$

$$Z_3 = \frac{1}{1/R_3 + C_3 D + 1/L_3 D}; \quad Z_4 = L_4 D$$

Luego

$$V = \left(R_1 + \frac{1}{1/R_2 + C_2 D} + \frac{1}{1/R_3 + C_3 D + 1/L_3 D} + L_4 D \right) I$$

Segunda parte $V = f(V_3)$

Hallamos primero $I = f(V_3)$

$$V_3 = Z_3 I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{V_3}{Z_3}$$

Luego

$$V = Z_T \frac{V_3}{Z_3}$$

Analogía Electromecánica

Este es un método que permite resolver en forma relativamente más sencilla problemas mecánicos, como i se tratase de sistemas eléctricos. En este caso hacemos:

V análogo a *F*, e *I* análogo a *x*

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Resorte		$Z_R = K$
Amortiguador		$Z_A = CD$
Fricción		$Z_F = BD$
Masa	M	$Z_M = MD^2$
Elemento cualquiera	Z	$F = Zx$
Elementos en serie	Z1 Z	$Z_T = \sum Z_i$
Elementos en paralelo	Z1 Z	$Z_T = \dfrac{1}{\sum 1/Z_i}$

El método sirve para sistemas con una sola fuerza y se resuelven los problemas haciendo primero el diagrama de impedancias.

Diagrama de impedancias

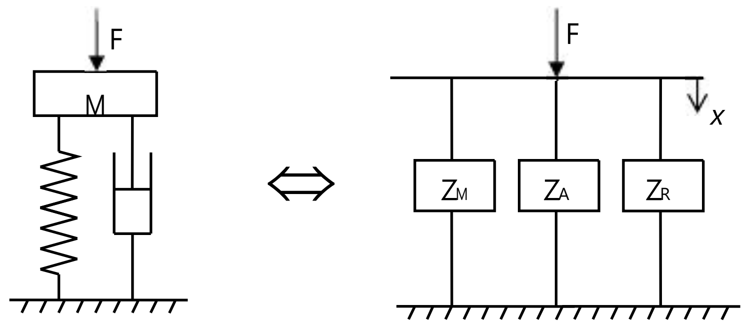
Para realizar el diagrama de impedancias:

- Se coloca en la parte superior una línea horizontal que representa la coordenada donde está aplicada la fuerza.
- Se coloca en la parte inferior una línea que representa la tierra, o referencia.
- Se colocan entre las dos anteriores líneas que representen las otras coordenadas existentes.
- Se colocan las impedancias correspondientes a cada elemento y se hace la conexión de este a las coordenadas correspondientes. Nótese que cada elemento estará conectando siempre dos coordenadas. En el caso de las masas estas siempre irán conectando la tierra y la coordenada donde se encuentran, mientras que los otros elementos pueden conectar dos coordenadas diferentes a la tierra.

Ejemplo 4:

La ecuación del sistema obtenida por éste método será:

$$F = (Z_R + Z_A + Z_M)x;$$
$$F = (K + CD + MD^2)x$$
$$F = Kx + CDx + MD^2 x$$

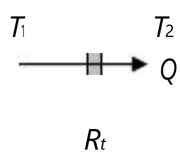
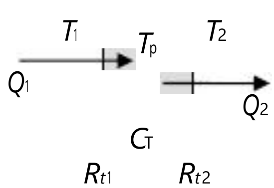


Esquema

Diagrama de Impedancias

Sistemas Térmicos

Un sistema térmico está conformado por los elementos siguientes:

Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Pared delgada (no absorbe calor)		Si $T_1 > T_2$: $Q = \dfrac{T_1 - T_2}{R_t}$
Pared gruesa (con almacenamiento de calor)		$\sum Q = C_T \dfrac{dT}{dt}$ $Q_1 = \dfrac{T_1 - T_p}{R_{t1}}$; $Q_2 = \dfrac{T_p - T_2}{R_{t2}}$ $Q_1 - Q_2 = C_T D T_p$

Donde:

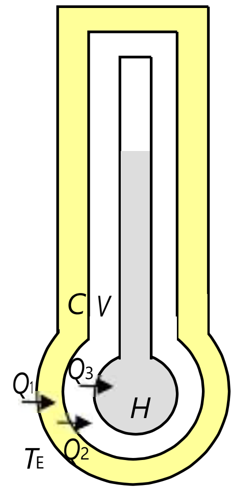
Q: Flujo de calor

R_T: Resistencia térmica

T: Temperatura

C_T: Capacitancia térmica (masa por calor específico)

Ejemplo 5: Termómetro de mercurio con pozo térmico de cobre.



El termómetro está formado de tres paredes que absorben calor, más un elemento receptor que también absorbe calor:

- *Hg*: Mercurio T_{Hg}, C_{Hg}
- *V*: Vidrio T_V, C_V
- *C*: Cobre T_C, C_C

Entre cada elemento se consideran resistencias térmicas:

- R_1: resistencia térmica entre el ambiente y el cobre
- R_2: resistencia térmica entre el cobre y el vidrio
- R_3: resistencia térmica entre el vidrio y el mercurio

Se requiere en este caso relacionar $T_{Hg} = f(T_E)$

Las ecuaciones fundamentales serán en este caso:

(1) $Q_1 - Q_2 = C_C DT_C$

(2) $Q_2 - Q_3 = C_V DT_V$

(3) $Q_3 = C_{Hg} DT_{Hg}$

(4) $Q_1 = \dfrac{T_E - T_C}{R_1}$

(5) $Q_2 = \dfrac{T_C - T_V}{R_2}$

(6) $Q_3 = \dfrac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$

Obtenemos entonces 6 ecuaciones con 7 variables ($T_E, T_C, T_V, T_{Hg}, Q_1, Q_2, Q_3$)

Para obtener una expresión de $T_{Hg} = f(T_E)$ debemos entonces reducir nuestro sistema de ecuaciones a una ecuación con dos variables:

- Con 4 y 5 en 1 obtenemos $T_E = f(T_V, T_C)$: (7) $\frac{T_E}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D\right)T_C - \frac{T_V}{R_2}$
- Con 5 y 6 en 2 obtenemos $T_{Hg} = f(T_V, T_C)$: (8) $\frac{T_{Hg}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D\right)T_V - \frac{T_C}{R_2}$
- Con 6 en 3 obtenemos $T_V = f(T_{Hg})$: (9) $T_V = R_3\left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right)T_{Hg}$
- Con 9 en 7 obtenemos $T_C = f(T_{Hg}, T_E)$ (10) $T_C = \dfrac{\frac{R_3}{R_2}\left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right)T_{Hg} + \frac{T_E}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D\right)}$
- Con 9 y 10 en 8 obtenemos $T_{Hg} = f(T_E)$:

$$\frac{T_{Hg}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D\right)R_3\left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right)T_{Hg} - \frac{R_3\left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right)T_{Hg} + \frac{T_E}{R_1}}{R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D\right)}$$

$$T_E = a_1 D^3 T_{Hg} + a_2 D^2 T_{Hg} + a_3 D T_{Hg} + a_4 T_{Hg}$$

Con:

$a_1 = R_1 R_3 C_{Hg} C_V C_C$

$a_2 = R_1\left(\frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg} C_V}{R_2} + \frac{R_3 C_{Hg} C_C}{R_2} + C_{Hg} C_C + C_V C_C\right)$

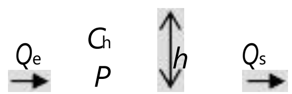
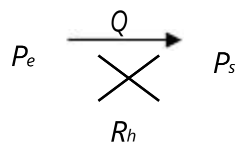
$a_3 = R_1\left(\frac{R_3 C_{Hg}}{R_1 R_2} + \frac{C_{Hg}}{R_1} + \frac{C_V}{R_1} + \frac{R_3 C_{Hg}}{R_2^2} + \frac{C_{Hg}}{R_2} - R_3 C_{Hg}\right)$

$a_4 = R_1\left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - 1\right)$

Sistemas Hidráulicos

Un sistema hidráulico está conformado por los elementos siguientes:

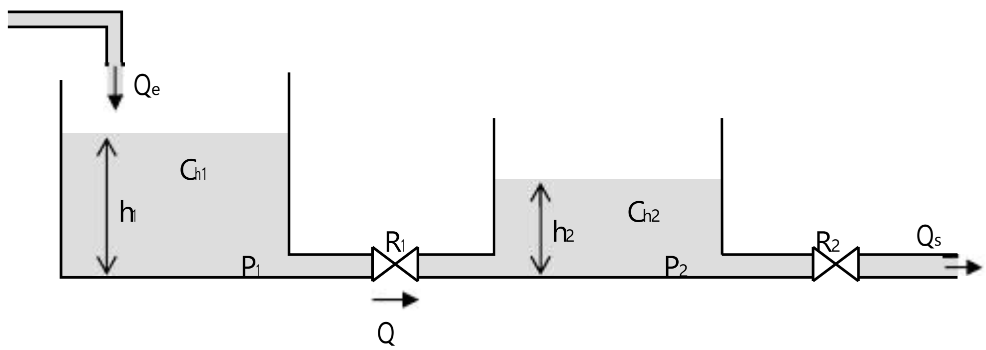
Elementos Representación gráfica Ecuación fundamental

Tanques		$\sum Q = C_h \dfrac{dP}{dt};\ Q_e - Q_s = C_h DP$ $\Delta P = \gamma h$
Ductos		$Q = \dfrac{\Delta P}{R_h};\ Q = \dfrac{P_e - P_s}{R_h}$

Donde:

Q: Flujo o caudal
P: Presión
h : Nivel
R_h: Resistencia hidráulica (perdidas que se producen en tuberías y accesorios)
C_h: Capacitancia hidráulica (volumen que es capaz de absorber)

Ejemplo 6: Hallar $h_2 = f(Q_e)$



El sistema hidráulico está conformado por dos tanques conectados entre sí. Estos tienen una entrada de agua por el primer tanque y una salida por el segundo. Las ecuaciones fundamentales del sistema, considerando presiones manométricas ($P_{atm} = 0$) serán:

(1) $P_1 = \gamma h_1$
(2) $P_2 = \gamma h_2$
(3) $Q_e - Q = C_{h1} DP_1$
(4) $Q - Q_s = C_{h2} DP_2$
(5) $Q = \dfrac{P_1 - P_2}{R_1}$
(6) $Q_s = \dfrac{P_2}{R_2}$

Tenemos por lo tanto 6 ecuaciones con 7 variables ($h_1, h_2, P_1, P_2, Q_e, Q, Q_s$).

Debemos entonces reducir el sistema a una ecuación que relacione $h_2 = f(Q_e)$:

- Con 5 en 3 obtenemos $Q_e = f(P_1, P_2)$: (7) $Q_e = \left(\frac{1}{R_1} + C_{h1}D\right)P_1 - \frac{P_2}{R_1}$
- Con 5 en 4 obtenemos $Q_s = f(P_1, P_2)$: (8) $Q_s = -\frac{P_1}{R_1} - \left(C_{h2}D - \frac{1}{R_1}\right)P_2$
- Con 6 en 8 obtenemos $P_1 = f(P_2)$: (9) $P_1 = R_1\left(-C_{h2}D + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)P_2$
- Con 9 en 7 obtenemos $Q_e = f(P_2)$: (10) $Q_e = \left(\frac{1}{R_1} + C_{h1}D\right)R_1\left(-C_{h2}D + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)P_2 - \frac{P_2}{R_1}$

  $Q_e = -R_1C_{h1}C_{h2}D^2P_2 + \left(C_{h1} - C_{h2} + \frac{R_1C_{h1}}{R_2}\right)DP_2 + \frac{1}{R_2}P_2$
- Con 2 en 10 obtenemos $Q_e = f(h_2)$: $Q_e = -R_1C_{h1}C_{h2}\gamma D^2h_2 + \left(C_{h1} - C_{h2} + \frac{R_1C_{h1}}{R_2}\right)\gamma Dh_2 + \frac{\gamma h_2}{R_2}$

Un sistema neumático está conformado por los elementos siguientes:

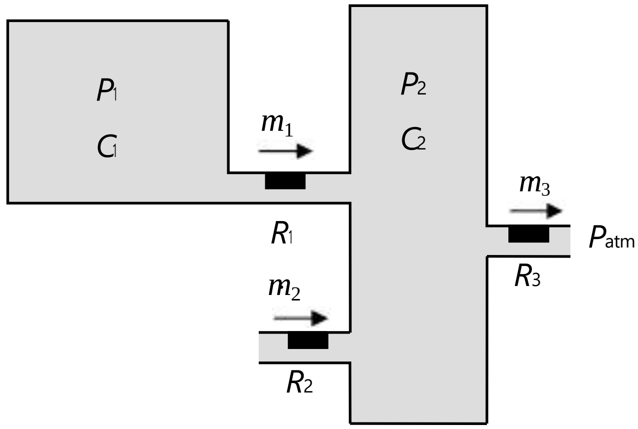
Elementos	Representación gráfica	Ecuación fundamental
Tanques	$\dot{m}_e$ → C_n P $\dot{m}_s$ →	$\sum \dot{m} = C_n\frac{dP}{dt}$; $\dot{m}_e - \dot{m}_s = C_nDP$
Ductos	P_e $\xrightarrow{\dot{m}}$ P_s R_n	$\dot{m} = \frac{\Delta P}{R_n}$; $\dot{m} = \frac{P_e - P_s}{R_n}$

Sistemas Neumáticos

Donde:

m : Flujo másico
P : Presión
R_n : Resistencia neumática (perdidas que se producen en tuberías y accesorios)
C_n : Capacitancia neumática ($V\ RT$)

Ejemplo 7: Hallar $m_2 = f(P_1)$



El sistema consta de dos tanque de aire comprimido interconectados entre sí. Existe una entrada de aire y una salida en el tanque 2.
Las ecuaciones fundamentales del sistema, suponiendo presiones manométricas, son:

(1) $\dot m_1 = \frac{P_1 - P_2}{R_1}$

(2) $\dot m_3 = \frac{P_2}{R_3}$

(3) $-m_1 = C_1 D P_1$

(4) $m_1 + m_2 - m_3 = C_2 D P_2$

Nota: m_2 debe ser conocido (entrada), o en su defecto la presión de entrada debe ser conocida.

Tenemos por lo tanto 4 ecuaciones con 5 variables ($P_1, P_2, m_1; m_2; m_3$).
Debemos entonces reducir el sistema a una ecuación que relacione $\dot m_2 = f(P_1)$:

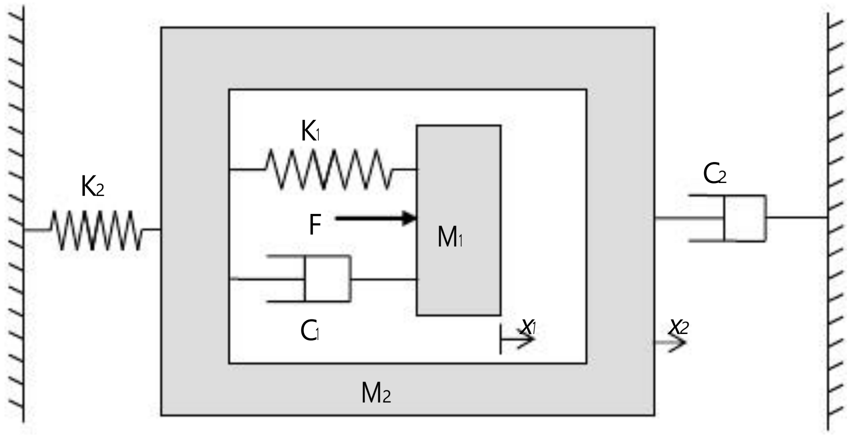
- Con 1 en 3 obtenemos $P_1 = f(P_2)$: (5) $P_2 = \left(1 + \frac{1}{R_1} D\right) P_1$
- Con 1 y 2 en 4 obtenemos $m_2 = f(P_1, P_2)$: (6) $m_2 = \frac{P_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + C_2 D\right) P_2$
- Con 5 en 6 obtenemos $\dot m_2 = f(P_1)$: $\dot m_2 = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + C_2 D\right)\left(1 + D\right) P_1$

$\dot m_2 = \frac{C_1 C_2}{R_1} D^2 P_1 + \left(\frac{C_1}{R_1 R_3} + C_2\right) D P_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) P_1$

Escuela de Ingeniería Mecánica - ULA

Ejercicios

1. Sistema mecánico

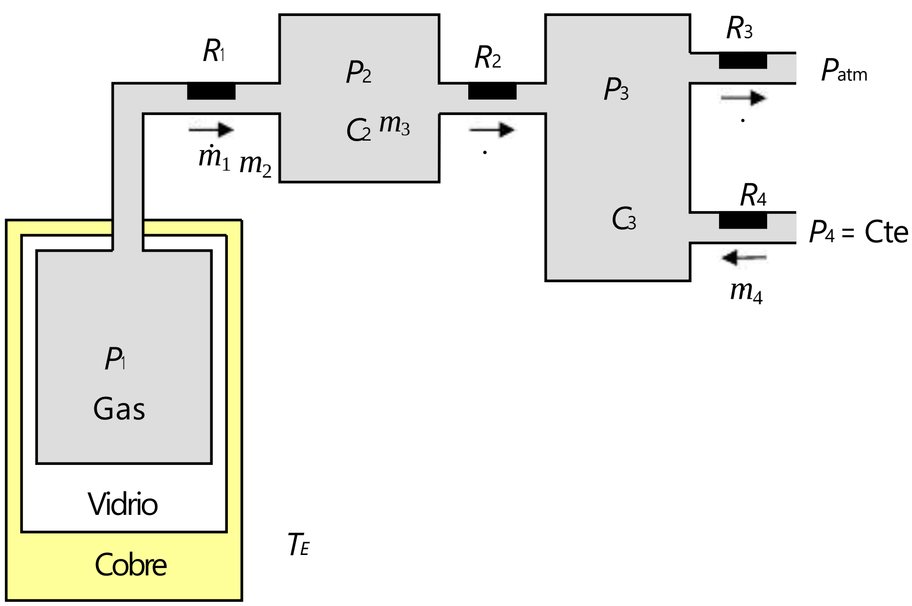


Hallar:

$x_2 = f(F)$ y
$x_1 = f(F)$

Por los dos métodos

2. Sistema termo-neumático



Hallar:

$m_3 = f(T_E, P_4)$

Nota: la ecuación de relación entre los dos sistemas:

$$Pv = mRT$$

$$P = \rho RT$$

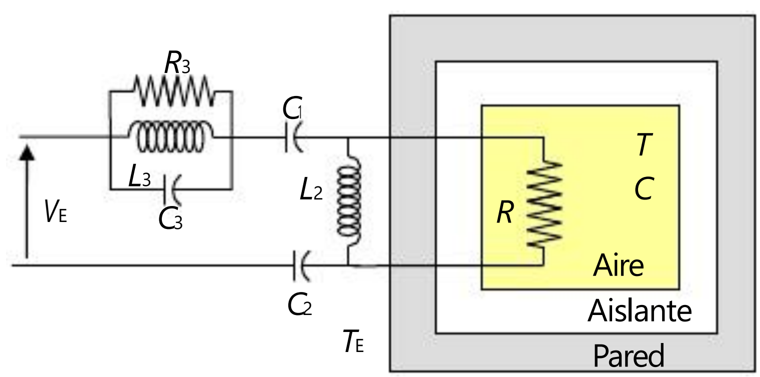
Donde se supone:

$$\rho R = \text{Constante}$$

3. Sistema termo-eléctrico

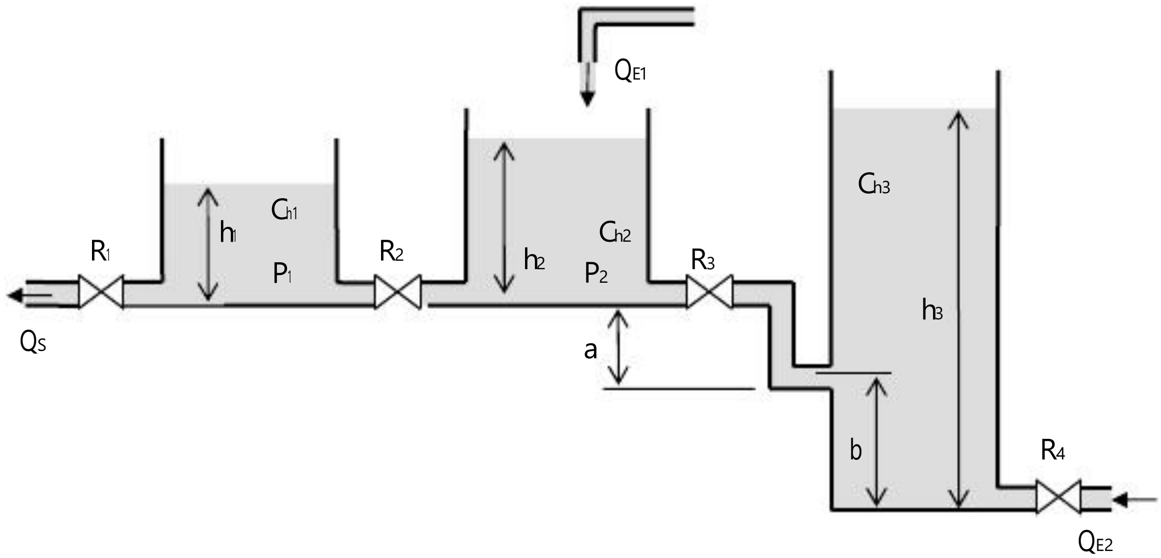
Hallar $T = f(V_E, T_E)$

Nota: la ecuación de relación de los dos sistemas es:



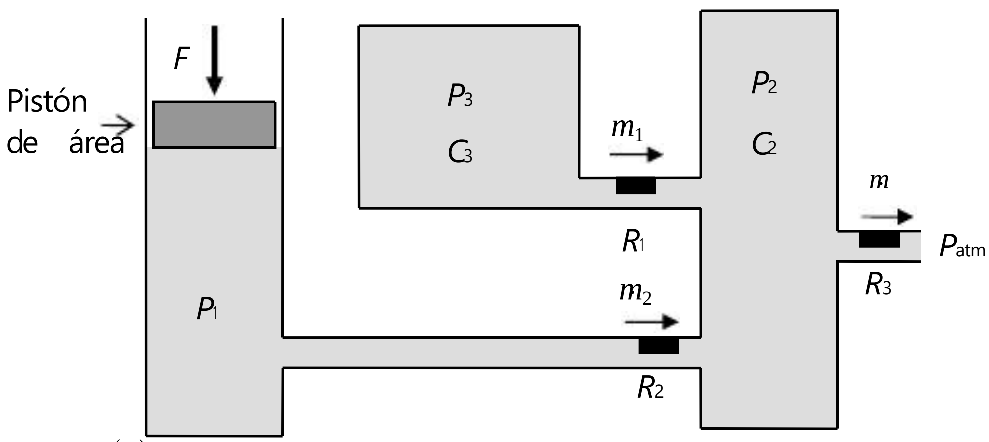
$$Q_R = VI = I^2R = V^2/R$$

4. Sistema hidráulico



Hallar $Q_S = f(Q_{E1}, Q_{E2})$

5. Sistema neumático con pistón



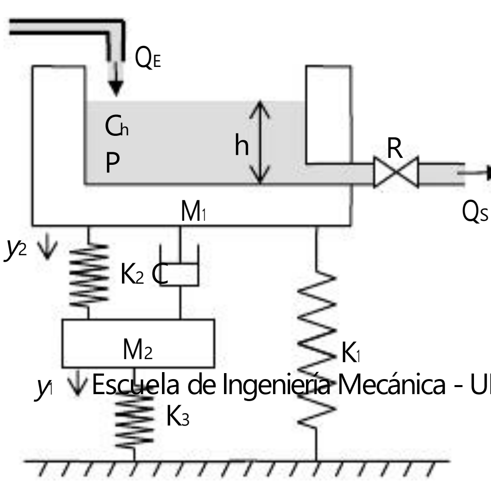
Hallar $m = f(F)$

Nota la ecuación que relaciona el sistema neumático con el pistón es: $P = F/A$

6. Sistema Mecánico Hidráulico

Hallar $y_1 = f(Q_E)$

Nota: para la relación entre el sistema mecánico y el hidráulico C_h =Área del tanque



Utilizar el método de la silla (analogía electromecánica)

Tema 3. Formas de representación del modelo matemático

Introducción

El modelo matemático de un sistema físico es una ecuación diferencial, en el caso simple de ecuaciones diferenciales lineales será una ecuación diferencial ordinaria invariante en el tiempo, cuya expresión general se puede escribir como:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x \qquad n \geq m$$

Existen diversas formas de representar esa ecuación diferencial, ya sea simplemente con nomenclaturas diferentes, por ejemplo utilizando el operador matemático :

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} D y + a_n y = b_0 D^m x + b_1 D^{m-1} x + \ldots + b_{n-1} D x + b_n x$$

O utilizando puntos para representar las derivadas:

$$a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \ldots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{m}{x} + b_1 \overset{m-1}{x} + \ldots + n_{m-2} \ddot{x} + b_{n-1} \dot{x} + b_n x$$

Pero también existen otras formas de representar las ecuaciones diferenciales cuyas características facilitan su estudio bajo ciertas condiciones, vamos a ver a continuación dos de estas formas de representación: la función de transferencia y la representación en espacio de estado. Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta

Se utiliza la representación de un modelo matemático mediante funciones de transferencia en la denominada teoría de control clásica mientras que se representan los modelos matemáticos mediante ecuaciones en espacio de estado en la denominada teoría de control moderna.

La teoría de control moderna surge a partir de los años 60 para permitir el control de sistemas cada vez más complejos, con múltiples entradas y salidas, y con requisitos de funcionamiento cada vez más severos. Su desarrollo y aplicabilidad se han ido acrecentando con el uso de las computadoras personales.

Las diferencias entre la teoría de control moderna y la teoría de control clásica son las siguientes:

Teoría de control clásica	Teoría de control moderna
Sistemas lineales	Sistemas lineales y no lineales
Sistemas invariantes en el tiempo (LTI)	Variables o invariables en el tiempo
Una sola entrada y salida (SISO)	Múltiples entradas y salidas (MIMO)
Procedimientos en el dominio de la frecuencia complejas	Procedimientos en el dominio del tiempo

Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta, estos modelos discretos también se pueden representar en forma de ecuaciones, funciones de transferencia discreta o representación estado discreta. Se incluirá en este tema un aparte completo a la representación de sistemas e forma discreta.

Representación de un modelo matemático con la Función de Transferencia

Esta representación se conoce también con el nombre de representación externa, pues no considera variables internas al sistema. Las funciones de transferencia son funciones que permiten caracterizar las relaciones entrada salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

Esta se define como la relación entre la transformada de Laplace (L) de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Función de transferencia: $$G(s) = \left. \frac{L_{(salida)}}{L_{(entrada)}} \right|_{CI=0}$$

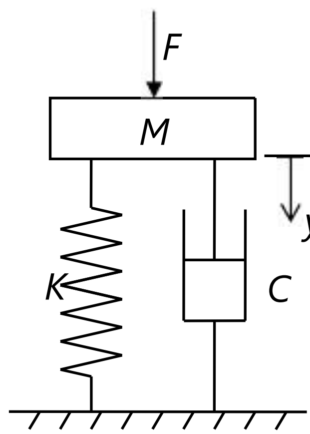
Para la ecuación diferencial anteriormente presentada es la entrada e es la salida, en este caso la función de transferencia se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros en forma independiente, con la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero y se obtiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Utilizando este concepto de función de transferencia se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en . Si la potencia más alta de en el denominador es se dice que el sistema es de orden .

Ejemplo 1: Para el sistema mecánico mostrado en la figura se tiene la ecuación diferencial:

$$MD^2 x + CDx + Kx = F$$



La transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación es:

$$Ms^2 X(s) + CsX(s) + KX(s) = F(s)$$

Donde:

Transformada de la salida: $X(s) = L[x(t)]$

Transformada de la entrada: $F(s) = L[F(t)]$

La función de transferencia de este sistema será:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K}$$

Esta función de transferencia expresa la salida como una función de la entrada:

$$X(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} F(s)$$

Comentarios sobre la función de transferencia

1. La función de transferencia es en efecto un modelo matemático ya que permite expresar la relación entre la variable de entrada y la variable de salida de un sistema.
2. Esta está limitada a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (LTI) con una sola entrada y una sola salida (SISO).
3. La función de transferencia es una propiedad del sistema en sí, y es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada.

4. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo no brinda ninguna información respecto a la estructura física del sistema. Sistemas físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia.
5. El conocimiento de la función de transferencia permite el estudio de la respuesta del sistema a diversas formas de entrada, con lo cual se puede lograr una mejor comprensión de la naturaleza del sistema.
6. La función de transferencia se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema. Esto se conoce como identificación de sistemas, para lo cual existen una multitud de métodos.
7. Una definición alternativa para la función de transferencia es : La transformada de Laplace de la respuesta al impulso:

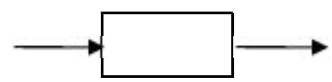
y contienen la misma información.

$$\Leftrightarrow$$

Modelo algebraico .
Modelo temporal .

Función de transferencia y respuesta al impulso

Sea un sistema LTI, SISO sometido a una entrada y representado por su función de transferencia .



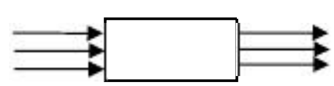
Definición de la respuesta al impulso: Un sistema que tiene como función de transferencia $G\ s$, tiene como respuesta al impulso la función:

La respuesta de este sistema a una entrada cualquiera $u\ t$ se puede calcular utilizando el teorema de convolución: La respuesta de un sistema cual función de transferencia $G\ s$ esta dado por la siguiente integral de convolución:

El producto de convolución se expresa en general como $*$ $*$

La Matriz de Transferencia

El concepto de Matriz de Transferencia es una extensión a sistemas MIMO de la función de transferencia.



Definición: la matriz $G\ s\ \in$ se denomina Matriz de Transferencia, y relaciona la entrada U con la salida Y .

$$Y \quad G \quad U$$

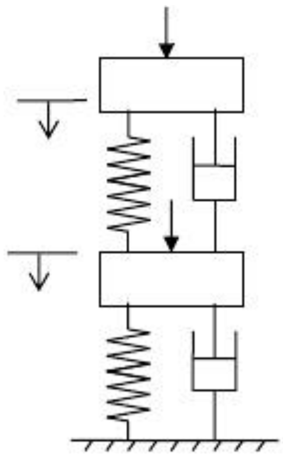
Con:
: Número de entradas; : número de salidas

Que también puede expresarse en notación matricial explícita por elemento:

Se puede por lo tanto determinar la salida con:

Σ

Ejemplo 2: Se tiene el sistema mecánico MIMO con dos entradas (et) y dos salidas (et):



Las ecuaciones del sistema son:

La transformada de Laplace de las salidas será:

Donde:

2

La matriz de transferencia, que determina la relación G es:

$G \quad s$

Polos y ceros de un sistema LTI, SISO.

Los polos y los ceros permiten la caracterización dinámica de un sistema. Estos se pueden definir a partir de funciones o matrices de transferencia (mas fácil para los sistemas SISO) o a partir de modelos de estado (mas practico en modelos MIMO).

La ecuación característica y los polos

Para un sistema LTI la ecuación característica se define como el más pequeño denominador común de todos los posibles menores de no nulos. En el caso de sistema SISO, este corresponde al denominador de la función de transferencia.

El orden de un modelo LTI ( ) corresponde al exponente más elevado de la ecuación característica, y es también igual al mínimo número de estados del modelo.

Las raíces de la ecuación característica ( ) se denominan Polos del sistema. Para matrices de transferencia, si es un polo de un elemento de entonces será un Polo del sistema. Estos Polos son necesariamente números reales o complejos conjugados.
Si tiene raíces en , el polo se dice que tiene multiplicidad

Ejemplo 3:
Para la función de transferencia del sistema mecánico del ejemplo 1:

$$\frac{\quad}{\quad} \quad \frac{1}{\quad}$$

La ecuación característica es:

Les polos serán entonces las raíces de la ecuación:

$$, \quad \frac{\sqrt{\quad 4}}{2}$$

Ejemplo 4:
Consideramos la matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \frac{\quad}{\quad} & \frac{\quad}{\quad} \\ \frac{\quad}{\quad} & \frac{\quad}{\quad} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica que se asocia al más pequeño común denominador es:

$$*1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 2$$

Los polos del sistema serán las raíces de esta ecuación característica:

$$s \quad 1; s \quad 1; s \quad 2$$

Los ceros

En el caso de los sistemas denominados cuadrados, en donde el número de entradas es igual al número de salidas, los ceros se pueden determinar mediante la matriz o función de transferencia.
Se define el polinomio o ecuación de los ceros como el más grande común divisor de los numeradores de los menores de orden máximo de normalizado, para tener la ecuación característica como denominador. Este polinomio se obtiene con:

$$\frac{\quad}{\quad} \quad |G \quad |$$

Les ceros (z) son las raíces de este polinomio de orden , y se obtienen para: $N \ z \quad 0$

Ejemplo 5: para la misma matriz de transferencia del ejemplo 4: $G \ s$ $\begin{bmatrix} \frac{\quad}{\quad} & \frac{\quad}{\quad} \\ \frac{\quad}{\quad} & \frac{\quad}{\quad} \end{bmatrix}$

Existe un menor máximo de orden 2 que es:

$$| \quad | \quad \frac{2}{s \quad 1} \frac{1}{s \quad 1} \quad \frac{3\,1}{s \quad 2} \frac{\quad}{s \quad 1} \quad \frac{s \quad 1}{s \quad 1 \quad s \quad 2}$$

El polinomio de los ceros es:

$$N \ s \quad s \quad 1$$

Existe un solo cero: $z \quad 1$

NOTA:
Todas las definiciones son aplicables al caso más simple de un sistema SISO para las cuales es una fracción racional donde:

- El numerador es y sus raíces son los ceros
- El denominador es y sus raíces son los polos.

Definiciones:

- La diferencia de grados entre y (y) se denomina el grado relativo.
- Si 0 el modelo es estrictamente propio (grado relativo positivo)
- Si 0 el modelo es bipropio (grado relativo cero).
- Si 0 el modelo es propio.
- Si 0 el modelo es impropio (grado relativo negativo).
- Los sistemas reales son estrictamente propio.
- Los controladores pueden ser propios o impropios. Los impropios se modifican para poder construirlos.

Representación de un modelo matemático en Espacio de Estado

La representación en espacio de estado, también conocida como representación interna, fue utilizada en otras disciplinas como la mecánica o termodinámica desde hace largo tiempo. Por ejemplo, para el comportamiento macroscópico de un gas puede describirse y predecirse con un número finito de variables físicas: el volumen de ese gas, su presión y su temperatura . El conjunto , , representa el estado termodinámico del gas. Su evolución en el tiempo dependerá del entorno exterior (aporte de calor por ejemplo) pudiéndose caracterizar su comportamiento dinámico con el conocimiento de ese entorno, que en control denominamos entrada del sistema.

En conclusión el estado dinámico de un sistema puede ser representado por un conjunto de variables denominadas variables de estado. Este conjunto de variables caracteriza completamente la configuración dinámica actual del sistema. Para esto se requiere de un número mínimo de variables de estado necesarias y suficientes que permiten la descripción dinámica del sistema.

Los sistemas automáticos modernos, a partir de los cuales se desarrollo la representación de estado para el control de procesos, aparecen en los años 60 para permitir el control de sistemas complejos tales como las aplicaciones espaciales Apolo y Polaris, las cuales tienen múltiples entradas y salidas (MIMO), y criterios de funcionamiento cada vez más severos. El uso del espacio de estado para representación de sistemas de control proviene de la capacidad que tiene esta representación de representar sistemas multivariables complejos. Su desarrollo y aplicación crece luego con el uso de los computadores.

El conjunto de variables de estado no es único, pero debe estar conformado para cada sistema por un número idéntico de variables de estado independientes. Esto significa que la selección de estas variables, así como de sus condiciones iniciales, constituye un conjunto que se puede fijar de forma arbitraria.
El estado inicial del sistema constituye su memoria: dado un estado inicial a un instante dado el conocimiento del pasado no permite el conocimiento del futuro del sistema, se requiero por lo tanto de unas funciones (ecuaciones de estado) que permiten la predicción del futuro, las funciones comúnmente utilizadas son las resultantes de una integración.

Para comprender correctamente el funcionamiento de esta representación se estudiaran las definiciones básicas de estado, variable de estado, vector de estado y espacio de estado. Luego se presentará la forma de las ecuaciones en espacio de estado, su relación con las funciones de transferencia y la forma de representar sistemas lineales en espacio de estado.

Definiciones

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) tales que el conocimiento de esas variables en $t = t_0$, conjuntamente con el conocimiento de la entrada para todo tiempo $t \geq t_0$, y las ecuaciones que describen la dinámica , , y , , , determinan completamente el comportamiento futuro de los estados y salidas del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado

Las variables de estado de un sistema dinámico son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.
Nótese que las variables de estado no deben ser necesariamente cantidades físicas mensurables u observables. Sin embargo es conveniente escoger como variables de estado de un sistema magnitudes.

Vector de estado

Si se requieren variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, se puede considerar a esas variables como los componentes de un vector . Vector que recibe el nombre de vector de estado.

Ecuaciones en el espacio de estado

Las ecuaciones en espacio de estado manejan tres tipos de variables:

- Las variables de entrada, o vector de entrada , ,…,
- Las variables de salida, o vector de salida , ,…,
- Las variables de estado, o vector de estado , ,…,

Donde , y , representan el número de variables de estado, salida y entrada respectivamente.
La expresión general de estas ecuaciones es la siguiente:

- Para un sistema no lineal:

  $x(t) = f(x,u,t)$ Ecuación de estado

  $y(t) = g(x,u,t)$ Ecuación de salida

- Para un sistema lineal

  $x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ Ecuación de estado

  $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ Ecuación de salida

  Donde:

  $A(t)$ se denomina matriz de estado

  $B(t)$ se denomina matriz de entrada

$C(t)$ se denomina matriz de salida

$D(t)$ se denomina matriz de transición directa

Si las funciones o vector de funciones y , o las matrices , , y comprenden explícitamente el tiempo el sistema se denomina variable en el tiempo, en el caso contrario el sistema se denomina invariante en el tiempo. En el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) las ecuaciones de estado se escriben entonces como:

$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ Ecuación de estado

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ Ecuación de salida

Representación de sistemas dinámicos en el espacio de estado

Cualquier ecuación diferencial de orden se puede expresar como una ecuación de estado de primer orden en notación vectorial-matricial. Se presenta a continuación las técnicas para la obtención de estas ecuaciones de estado para dos ecuaciones diferenciales comunes.

Representación en espacio de estado a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias (típicamente sistemas SISO)

Caso de una ecuación ordinaria de orden en donde la función exitadora no incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden :

$$\overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \ldots + a_{n-1} y + a_n y = u$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0), y\cdot(0), \ldots \overset{n-1}{y}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t \geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. Bajo esta premisa se puede entonces escoger como variables de estado:

$$x_1 = y; \quad x_2 = y; \quad \ldots x_n = \overset{n-1}{y}$$

Entonces la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = x_n$$

$$x_n = -a_n x_1 - \ldots a_1 x_n + u$$

$$y = x_1$$

O en forma matricial:

$$x = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Esta forma de representación se denomina comúnmente forma canónica controlador.

Nota: La representación de estado de un sistema no es única, pues depende de la forma como se seleccionan las variables de estado, sin embargo todas las representaciones de un mismo sistema tendrán el mismo número de variables de estado.

Ejemplo 6: para el sistema mecánico mostrado en el ejemplo 1 se tiene la ecuación diferencial:

$$M\ddot{y}+C\dot{y}+Ky=F$$

Donde $u=F$

Se puede entonces definir las variables de estado como: $x_1=y;\quad x_2=\dot{y}$.

Sustituyendo esto en la ecuación obtenemos:

$$M\dot{x}_2+Cx_2+Kx_1=u \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_2=\frac{u-(Cx_2+Kx_1)}{M}$$

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{K}{M}x_1-\frac{C}{M}x_2+\frac{1}{M}u$$

$$y=x_1$$

El cual puede expresarse matricialmente como:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Caso de ecuaciones diferenciales de orden n en donde la función excitadora incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden *n*:

$$\overset{n}{y}+a_1\overset{n-1}{y}+\ldots+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=b_0\overset{n}{u}+b_1\overset{n-1}{u}+\ldots+b_{n-1}\dot{u}+b_n u$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \ldots \overset{n-1}{y}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t\geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. En este caso en particular las variables de estado deberán además ser tales que eliminen las derivadas de *u* en la ecuación de estado. Bajo esta premisa se pueden escoger como variables de estado:

$$x_1=y-\beta_0 u$$

$$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u=\dot{x}_1-\beta_1 u$$

$$x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2 u=\dot{x}_2-\beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n=\overset{n-1}{y}-\beta_0\overset{n-1}{u}-\beta_1\overset{n-2}{u}-\ldots-\beta_{n-2}\dot{u}-\beta_{n-1}u=\dot{x}_{n-1}-\beta_{n-1}u$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ son coeficientes que se determinan como:

$$\beta_0 = b_0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\mathrm{B}_0$$
$$\vdots$$
$$\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \ldots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0$$

Con esta escogencia de variables de estado se obtiene el sistema de ecuaciones de estado:

$$x_1 = x_2 + \beta_1 u$$
$$x_2 = x_3 + \beta_2 u$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$
$$x_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \ldots - a_1 x_n + \beta_n u$$
$$y = x_1 + \beta_0 u$$

O en forma matricial:

$$x = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix};\ D = \beta_0 = b_0$$

Ejemplo 7: para la ecuación diferencial siguiente:

$$y\cdot + 18y + 192y + 640y = 160u + 640u$$

Queremos obtener una representación en espacio de estado.
Se definen entonces las siguientes variables de estado:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = y - \beta_0 u - \beta_1 u = x_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = y - \beta_0 u - \beta_1 u - \beta_2 u = x_2 - \beta_2 u$$

Donde:

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18(160) = -2240$$

La ecuación de estado del sistema será entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

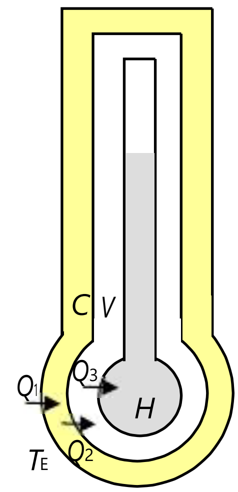
La ecuación de salida será:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Representación de estado a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales

En el caso de disponer de un sistema de ecuaciones diferenciales en lugar de una sola ecuación ordinaria es posible obtener una representación de estado directamente de este sistema de ecuaciones, los dos ejemplos siguientes ilustran esta opción.

Ejemplo 8: Se tiene el sistema térmico del termómetro mostrado en la figura, representado por las ecuaciones:



(1) $Q_1 - Q_2 = C_C D T_C$ (2) $Q_2 - Q_3 = C_V D T_V$ (3) $Q_3 = C_{Hg} D T_{Hg}$

(4) $Q_1 = \dfrac{T_E - T_C}{R_1}$ (5) $Q_2 = \dfrac{T_C - T_V}{R_2}$ (6) $Q_3 = \dfrac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$

Para el cual queremos obtener una representación en espacio de estado.
El sistema puede simplificarse inicialmente para ponerlo en función solo de las temperaturas:

(7) $\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + C_C D\right) T_C = \dfrac{T_V}{R_2} + \dfrac{T_E}{R_1}$

(8) $\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + C_V D\right) T_V = \dfrac{T_C}{R_2} + \dfrac{T_{Hg}}{R_3}$

(9) $T_V = R_3 \left(\dfrac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right) T_{Hg}$

En este caso queda claramente identificado que la entrada es y la salida es .
Los estados se pueden definir de la siguiente manera:

$$x_1 = T_C; \quad x_2 = T_V; \quad x_3 = T_{Hg}$$

En base a esta definición de los estados se puede re-escribir el sistema como:

$$\frac{1}{R_1} x_1 + \frac{1}{R_2} x_1 + C_C \dot{x}_1 = \frac{x_2}{R_2} + \frac{u}{R_1}$$

$$\frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_3} x_2 + C_V \dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_3}{R_3}$$

$$x_3 + R_3 C_{Hg} x_3 = x_2$$

A partir de estas ecuaciones se puede escribir el sistema en forma de espacio de estado:

$$x_1 = -\frac{1}{R_1C_C}x_1 - \frac{1}{R_2C_C}x_1 + \frac{1}{R_2C_C}x_2 + \frac{1}{R_1C_C}u$$

$$x_2 = \frac{1}{R_2C_V}x_1 - \frac{1}{R_2C_V}x_2 - \frac{1}{R_3C_V}x_2 + \frac{1}{R_3C_V}x_3$$

$$x_3 = \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_2 - \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_3$$

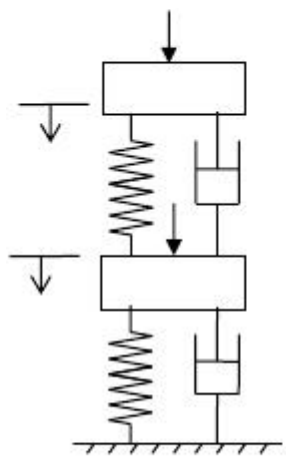
$$y = x_3$$

El cual puede escribirse en forma matricial como:

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C}-\frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V}-\frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9: Consideremos el sistema mecánico MIMO con dos entradas (y) y dos salidas (y), mostrado en la figura:



Las ecuaciones del sistema son:

En este caso tenemos:

;

Y podemos seleccionar como estados:

Si sustituimos los estados, entradas y salidas en las ecuaciones originales tendremos:

Y obtenemos la representación de estado siguiente:

Expresado en forma de Matriz:

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ — & — & — & — \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ — & — & — & — \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ — & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & — \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relación entre función de transferencia y espacio de estado

Se puede obtener la función de transferencia de un sistema expresado en espacio de estado mediante una expresión simple.

Para el sistema expresado en espacio de estado en forma matricial:

$$x = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Las transformadas de Laplace están dadas por:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Como la función de transferencia se define como la relación entre la trasformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Se supone entonces que la condición inicial 0 es igual a cero, se obtiene entonces que la expresión de las transformadas será:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \text{ ó } (sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pre multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(sI - A)^{-1}$ se obtiene:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Y al sustituirse esta expresión en la ecuación de salida obtenemos:

$$Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1} B + D\right) U(s)$$

Por lo tanto:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Ejemplo 10: para el sistema mecánico teníamos que el modelo matemático expresado en espacio de estado es:

$$x = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si queremos obtener la función de transferencia a partir de esta expresión del modelo debemos entonces usar la expresión:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}+0$$

Al resolver esta ecuación obtenemos:

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{K}{M} & s+\frac{C}{M}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}$$

Recordatorio : Donde:

1 elementos de la matriz $\operatorname{adj} A$

menores principales

$$G(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\begin{bmatrix}s+\frac{C}{M} & 1\\ -\frac{K}{M} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix};\quad G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\begin{bmatrix}s+\frac{C}{M} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\frac{C}{M}s+\frac{K}{M}}\frac{1}{M};\quad G(s)=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

Que es exactamente la función de transferencia encontrada a partir de la ecuación diferencial.

Ejemplo 11: A partir del modelo matemático en representación de estado obtenido en el ejemplo 8, queremos obtener la función de transferencia de éste sistema se puede entonces obtener con la expresión:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C} & -\frac{1}{R_2C_C} & 0\\ -\frac{1}{R_2C_V} & s+\frac{1}{R_2C_V}+\frac{1}{R_3C_V} & -\frac{1}{R_3C_V}\\ 0 & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} & s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Con:

$$[sI-A]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} \left(s+\frac{1}{R_2C_V}+\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right) - \left(-\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right) & -\left(\left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) & \left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(-\frac{1}{R\,C}\right) \\ -\left(\left(-\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) & \left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right) & -\left(\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R\,C_{Hg}}\right)\right) \\ \left(-\frac{1}{R\,C}\right)\left(-\frac{1}{R\,C}\right) & -\left(\left(s+\frac{}{}+\frac{}{}\right)\left(-\frac{}{}\right)\right) & \left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_2C_V}\right) - \left(-\frac{1}{R\,C}\right)\left(-\frac{1}{R\,C}\right) \end{bmatrix}}{\left(s+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\ldots\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\ldots\left(\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)}$$

En este caso se observa que el cálculo algebraico se vuelve relativamente largo, por lo cual es más fácil obtener la función de transferencia directamente de la ecuación diferencial del sistema:

$$T_E = a_1D^3T_{Hg} + a_2D^2T_{Hg} + a_3DT_{Hg} + a_4T_{Hg}$$

Con:

$$a_1 = R_1R_3C_{Hg}C_VC_C$$

$$a_2 = R_1\left(\frac{R_3C_{Hg}C_V}{R_1}+\frac{R_3C_{Hg}C_V}{R_2}+\frac{R_3C_{Hg}C_C}{R_2}\ \ldots\right)$$

$$a_2 = R_1\left(\frac{R_3C_{Hg}}{R_1R_2}+\frac{C_{Hg}}{R_1}\ \frac{C}{R_1}\ \frac{R_3C_{Hg}}{2}+\frac{C_{Hg}}{R_2}+C_{Hg}C_C+C_VC_C\right)$$

$$a_3 = R_1\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^{\,2}}+\frac{\ _V}{}+\ \frac{}{R_2}\ +\ +\ +\ -R_3C_{Hg}-\right)$$

$$a_4 = R_1\left(\ \ -1\right)$$

En cuyo caso la función de transferencia puede escribirse como:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}$$

No unicidad del conjunto de variables de estado

La no unicidad del conjunto de variables de estado significa que para un sistema cualquiera existen diversas representaciones de estado posibles. De forma recíproca matrices diferentes pueden representar un mismo sistema y por ende una misma ecuación característica.

Para probar que esto es posible utilicemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 12: Supongamos que inicialmente se tiene el sistema en forma de ecuación diferencial:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Para obtener una representación en forma de espacio de estado se pueden tomar los siguientes estados:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}$$

Con estos estados se obtiene la representación de estado siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Que puede expresarse en forma matricial como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde:

0 1 0
0 0 ; 1 0 0
6 11 6 6

La función de transferencia de este sistema es:

6 / 6 11 6 ; 6 / 1 2 3

Consideremos ahora el sistema lineal representado por las matrices:

1 0 0 ; 3
0 2 0 ; 6 ; 1 1 1
0 0 3 ; 3

Se puede obtener la función de transferencia del sistema con la relación:

1 1 1 · (1 0 0 / 0 1 0 / 0 0 1 − 1 0 0 / 0 2 0 / 0 0 3) · 3 / 6 / 3

1 1 1 · (1 0 0 / 0 2 0 / 0 0 3) · 3 / 6 / 3 = 1 1 1 · (1/1, 0, 0 / 0, 1/2, 0 / 0, 0, 1/3) · 3 / 6 / 3

1/1 1/2 1/3 · 3 / 6 / 3 = 3/1 + 6/2 + 3/3

6 / 1 2 3

Se observa que esta segunda representación de estado corresponde exactamente al mismo sistema pues posee la misma función de transferencia.

Forma canónica de Jordan

La forme canónica de Jordan o forma Modal, es la correspondiente a la segunda representación del ejemplo anterior, en la cual la matriz solo posee elementos en la diagonal, es una matriz llamada diagonal. Estos elementos de la diagonal corresponden directamente a los valores propios de la matriz, los cuales son los polos del sistema o raíces de su ecuación característica.

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La no unicidad de la representación de estado permite modificar la representación para obtener modelos más simples de manipulación, tal como el caso de la forma de Jordan con matrices diagonales.

En el ejemplo 12 vimos que la matriz bajo la forma canónica de Jordan es:

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si determinamos la ecuación característica correspondiente a esta nueva matriz obtenemos:

$$|sI - A_J| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

La ventaja de la representación canónica de Jordan es que muestra directamente la estabilidad del sistema y además las operaciones matemáticas con las matrices diagonales son más sencillas.

La representación canónica de Jordan es solo otra representación en espacio de estado posible para un sistema lineal.

Cambio de variable lineal

De hecho se puede demostrar que para toda representación de estado de un sistema se puede determinar un nuevo conjunto de variables de estado, mediante un cambio de variable lineal de la forma:

$$z = Px$$

Donde es una matriz cualquiera con las mismas dimensiones que .
En este caso el nuevo sistema queda determinado por:

$$Pz = APz + Bu$$

$$y = CPz$$

Es decir:

$$z = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$y = CPz$$

Donde es la inversa de .
Ejemplo 13: Supóngase que se quiere definir un nuevo conjunto de variables de estado para nuestro ejemplo usando la matriz

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es:

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 1/2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

En este caso nuestra nueva representación de estado estará definida por:

$$z = A_z z + B_z u$$
$$y = C_z z$$

Donde las matrices vienen definidas por:

$$A_z = P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-17 & -8 & -12\\ -2 & -2 & 0\\ 20 & 10 & 13\end{bmatrix};\qquad B_z = P^{-1}B=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ -3\end{bmatrix};\quad C_z = CP=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Podemos observar que esta nueva representación de estado corresponde al mismo sistema lineal, de hecho la ecuación característica de esta es:

$$\left|sI-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+17 & 8 & 12\\ 2 & \lambda+2 & 0\\ -20 & -10 & \lambda+13\end{vmatrix}$$
$$=\left((\lambda+17)(\lambda+2)(\lambda+13)-240\right)-\left(-240(\lambda+2)+16(\lambda+13)\right)$$
$$=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

Diagonalización de matrices

De hecho la representación de Jordan es un caso particular de cambio de variable, donde la matriz que permite la diagonalización de la matriz . La forma de la matriz necesaria para la obtención de la representación canónica de Jordan se puede generalizar par una matriz cuya forma es de tipo canónica controlador:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1\end{bmatrix}$$

Como:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

Para nuestro ejemplo la matriz que permite la obtención de la forma canónica de Jordan es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

De hecho:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

En esta representación bajo la forma canónica de Jordan las matrices y serán:

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Para que una representación de estado sea equivalente a otra obtenida por cambio de variable es necesario la transformación de todas las matrices que representan el sistema.

Ejercicios

1. Para los ejercicios del tema 2 obtener una representación en espacio de estado de las ecuaciones del modelo, utilizando la ecuación diferencial obtenida y otra utilizando el sistema de ecuaciones que representa el sistema.
2. Obtener la función o matriz de transferencia de los sistemas utilizados para el ejercicio 1.
3. Para los siguientes sistemas en representación de estado obtener la función de transferencia, la ecuación diferencial del sistema y la forma canónica de Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tema 4. Diagramas de Bloque

Introducción

Un diagrama de bloque es una simplificación, una representación gráfica de un sistema físico que ilustra las relaciones funcionales entre los componentes del sistema. Este nos permite evaluar las contribuciones individuales de los componentes del sistema.

Elementos de un diagrama de bloques

1. Bloques

Es el elemento principal de un diagrama de bloques ya que representa los componentes del sistema. Es el elemento que contiene la relación entre la entrada y la salida del componente del sistema, ya sea con un nombre o directamente la función de transferencia del elemento.

2. Líneas

Son las que representan la trayectoria de las señales que transportan la información y energía. Dicho de otra manera indican la conexión de una variable entre diversos bloques. Se usan por lo general flechas para indicar el sentido de la señal.

3. Punto de suma

Este se representa por un círculo e indica que la salida es igual a la suma de las dos señales que entran, o la resta en caso de que aparezca el signo negativo:

$$Z = X \pm Y$$

Existen dos nomenclaturas posibles, ya sea con los signos al exterior, en cuyo caso la ausencia de signo indica una suma, o separando el círculo en segmentos mediante una X y asignando el signo dentro del segmento correspondiente.

4. Punto de ramificación o de reparto

Es el lugar donde la señal se separa para seguir dos o más trayectorias. En otras palabras indican que una variable se usará en varios bloques.

Ejemplos de diagrama de bloques

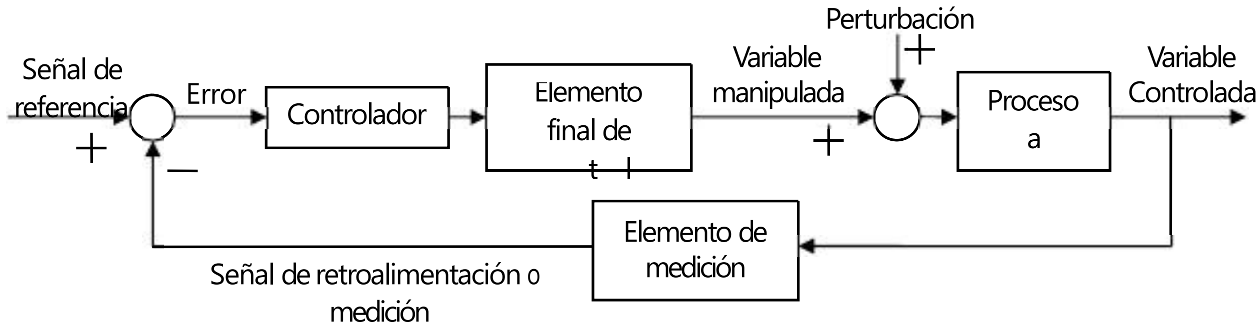


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

El cual podría también presentar la forma siguiente:

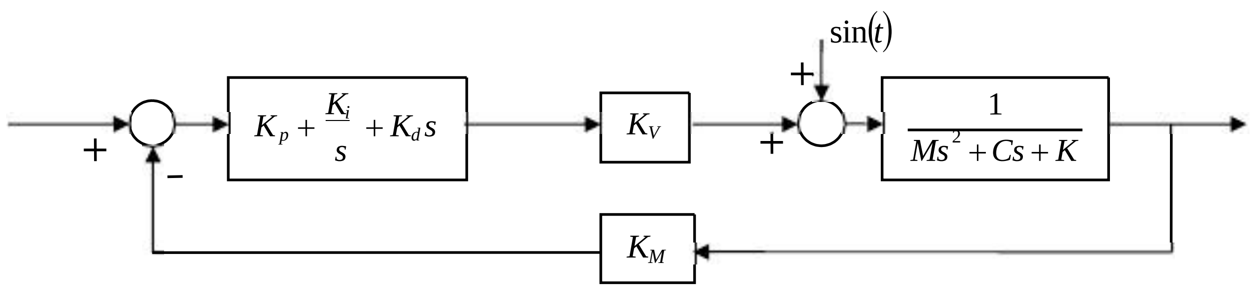
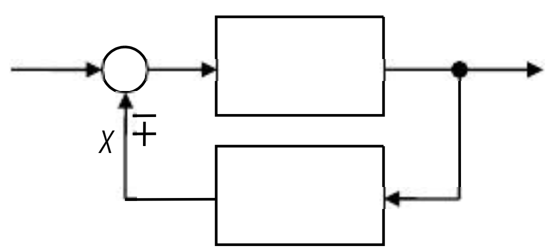


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado para un sistema mecánico

Forma canónica de un sistema de control retroalimentado



En este diagrama se pueden definir lo siguiente:

: Función de transferencia directa

: Función de transferencia de retroalimentación

: Función de transferencia de lazo abierto

$\frac{X}{U}$: Razón de retroalimentación primaria

$\frac{Y}{U}$: Función de transferencia de lazo cerrado

$\frac{E}{U}$: Razón o señal impulsora, o razón de error

En este caso la función de transferencia se puede obtener como sigue:

$Y = E \times G$ (1) $\quad X = Y \times H$ (2) $\quad E = U \mp X$ (3)

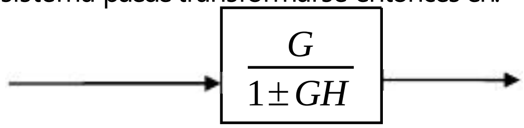
Sustituyendo (3) en (1)

$$Y = (U \mp X)G \quad (4)$$

Sustituyendo (2) en (4)

$$Y = (U \mp YH)G \quad (5) \qquad Y(1 \pm GH) = UG \qquad \frac{Y}{U} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

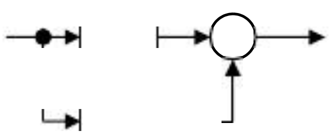
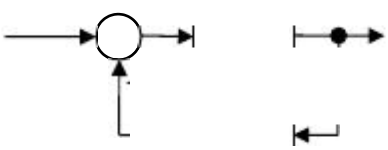
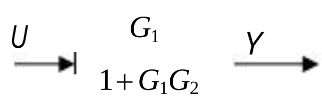
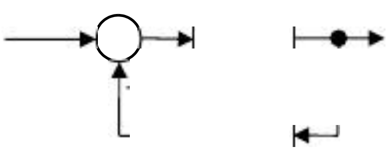
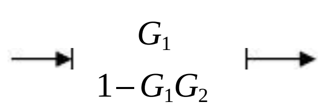
El diagrama de bloque de este sistema puede transformarse entonces en:

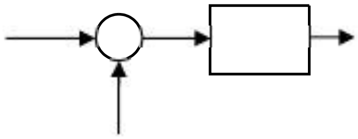
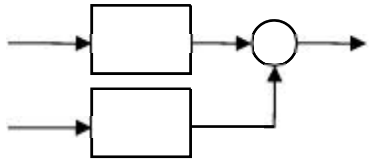
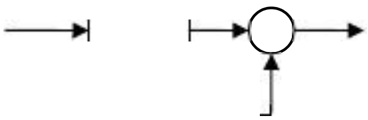
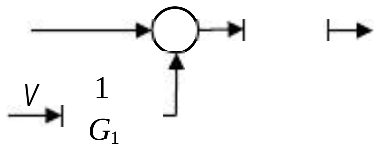
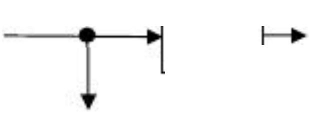
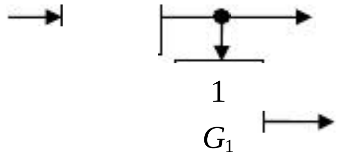
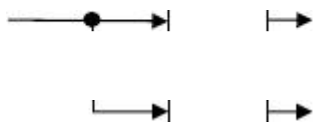
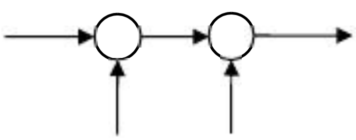
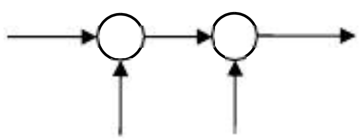
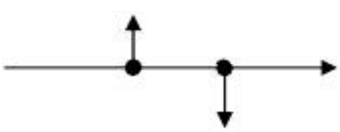
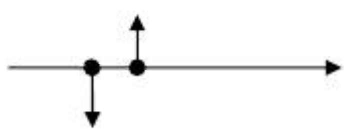
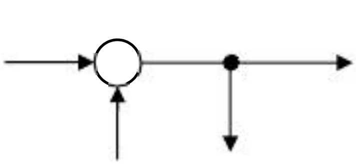
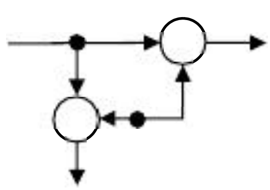


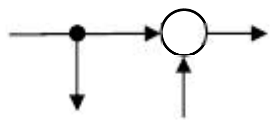
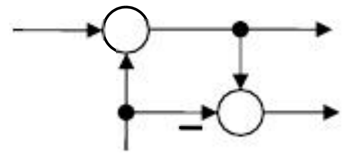
Álgebra de bloques

Los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar usando una serie de teoremas de transformación, las cuales se obtienen fácilmente por deducción del significado de los elementos.

Teoremas de transformación

Diagrama de Bloque	Diagrama de bloque equivalente	Ecuación
1 Combinación de bloques en cascada		
		$V = G_1U; \quad Y = G_2V$ $Y = (G_1G_2)U$
2 Combinación de bloques en paralelo		
		$V = G_1U; \quad W = G_2U$ $Y = V \pm W$ $Y = (G_1 + G_2)U$
3 Retroalimentación negativa		
		$Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$ $X = U - Z$ $Y = \frac{G_1}{1+G_1G_2}U$
4 Retroalimentación positiva		
		$Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$ $X = U + Z$ $Y = \frac{G_1}{1-G_1G_2}U$
5 Movimiento de un punto de suma después de un bloque		

		$X = G_1 U;\ Z = G_1 V$ $Y = G_1(U+V)$
6	Movimiento de un punto de suma antes de un bloque	
		$X = G_1 U$ $Y = G_1 U + V$
7	Movimiento de un punto de ramificación después de un bloque	
		$Y = G_1 U$ $U = \frac{1}{G_1} Y$
8	Movimiento de un punto de ramificación antes de un bloque	
		$Y = G_1 U$
9	Redistribución de puntos de suma	
		$X = U + V;\quad Z = U + W$ $Y = X + W = Z + V$ $Y = U + V + W = U + W + V$
10	Redistribución de puntos de ramificación	
		
11	Movimiento de un punto de ramificación antes de uno de suma	
		$Y = U + V$
12	Movimiento de un punto de ramificación después de uno de suma	

		$Y = U + V$ $U = Y - V$

Para el enunciado de estos teoremas de transformación se utiliza la notación siguiente:

i: Función de transferencia de un bloque cualquiera

, , : entradas del sistema

: salida del sistema

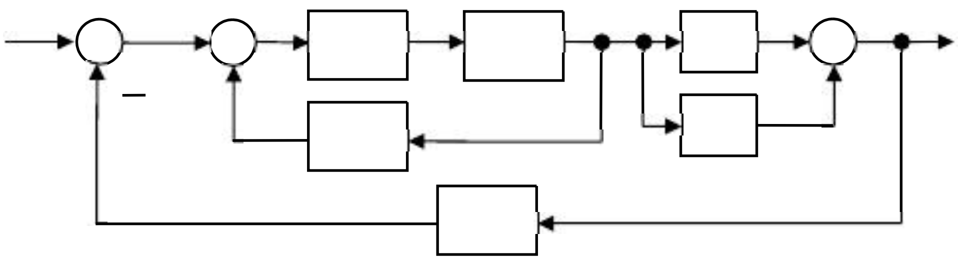
, : otras señales o variables del sistema

Los movimientos 11 y 12 no son de uso común, ya que suelen complicar el diagrama más que simplificarlo.

Simplificación de diagramas de bloque

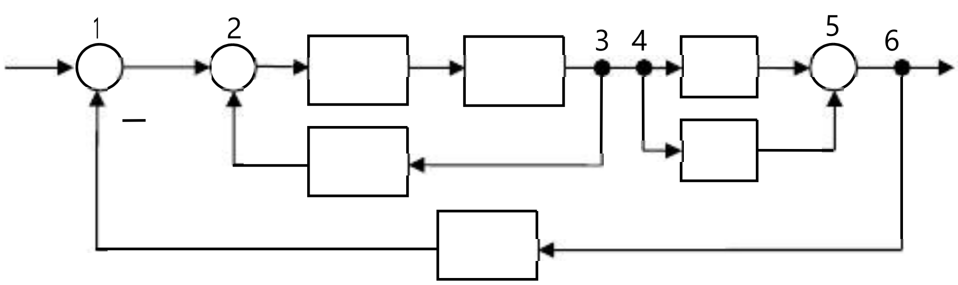
El objetivo es la reducción de un diagrama de bloques complejo a uno más sencillo.

Ejemplo 1:

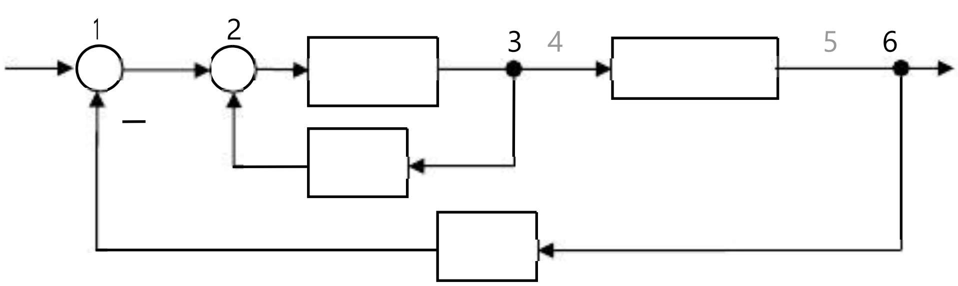


Para reducir el diagrama se pueden seguir los siguientes pasos:

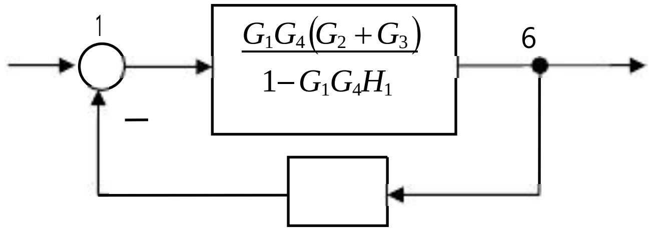
1. Numerar todos los puntos de suma y ramificación:



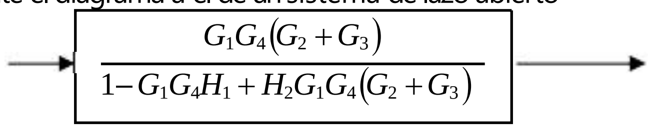
2. Reducir desde lo más interno, por ejemplo entre 2 y 3, y entre 4 y 5:



3. Llevar el diagrama a la forma canónica de un sistema de control retroalimentado:



4. Simplificar finalmente el diagrama a el de un sistema de lazo abierto

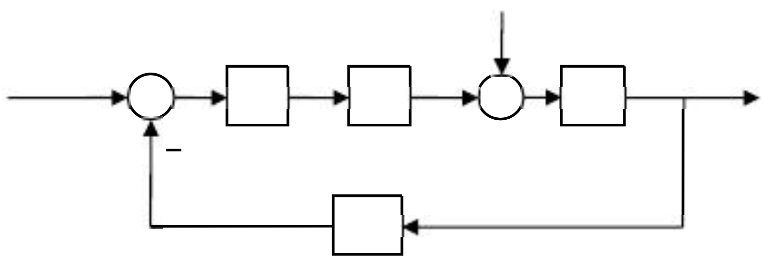


Diagramas de bloque de varias entradas

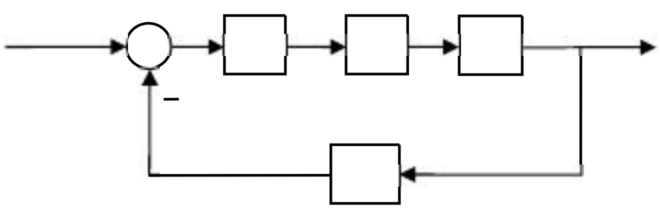
Cuando hay varias entradas se trata cada una de ellas en forma independiente de las otras y se procede según el procedimiento siguiente:

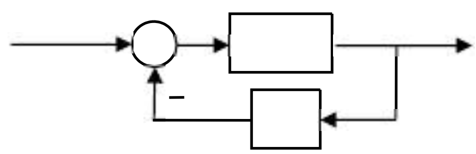
1. Igualar todas las entradas a cero excepto una.
2. Transformar el diagrama de bloque hasta obtenerlo en lazo abierto
3. Calcular la respuesta debido a la entrada actuando sola
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 ara cada una de las entradas restantes
5. La salida total es la suma de todas las entradas individuales

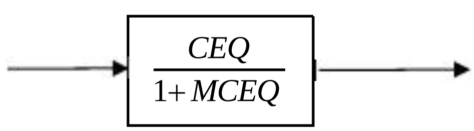
Ejemplo 2:



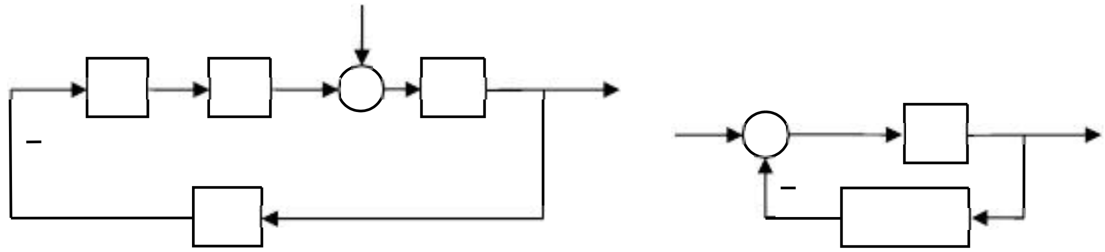
Igualamos primero 0 y reducimos el diagrama resultante:

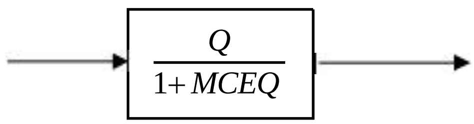




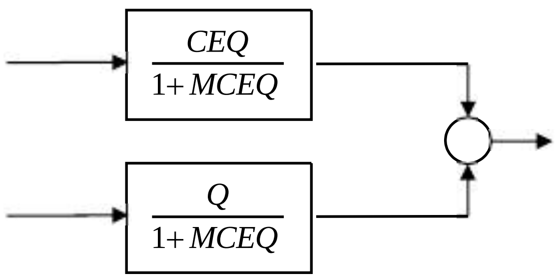


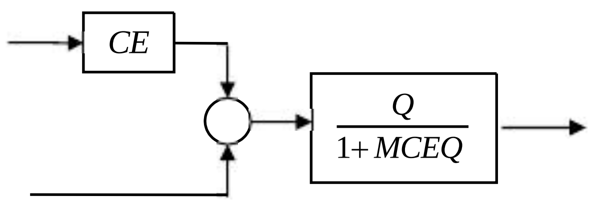
Igualamos primero 0 y reducimos el diagrama resultante:





Finalmente el diagrama resultante será la suma de los dos diagramas obtenidos:

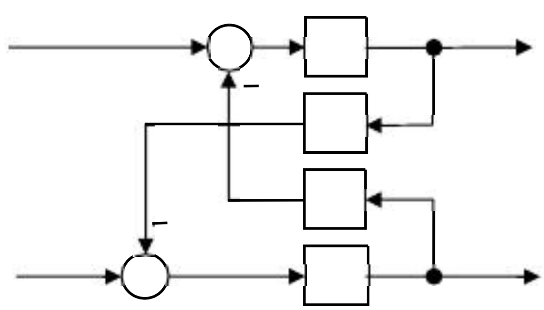




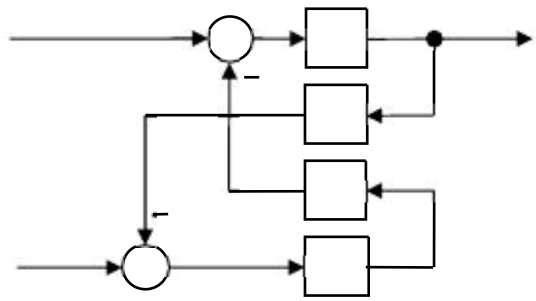
Entradas y salidas múltiples

En este caso primero se determina una de las salidas ignorando las otras y así sucesivamente para cada una de las salidas.

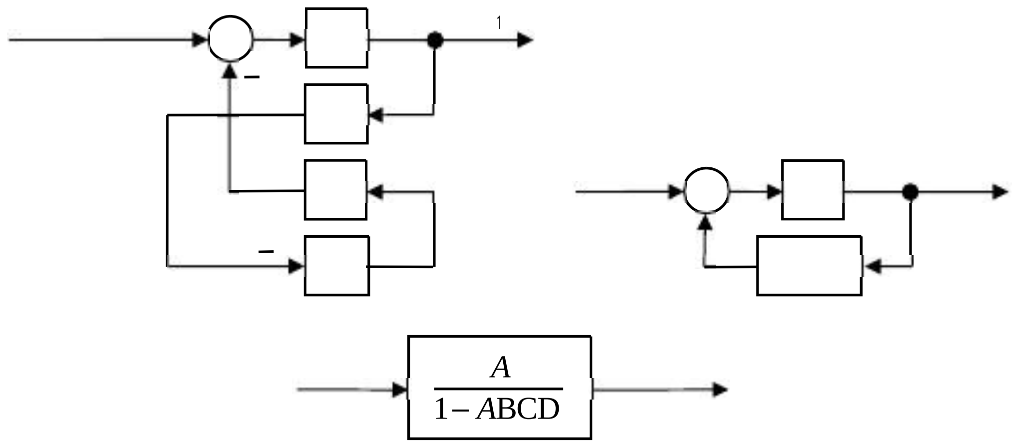
Ejemplo 3:



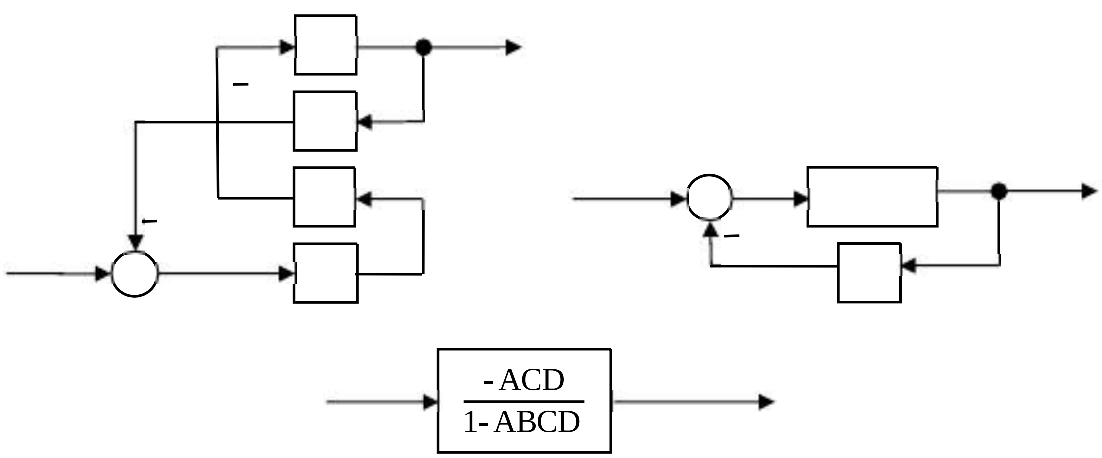
Primero determinamos a ignorando a :



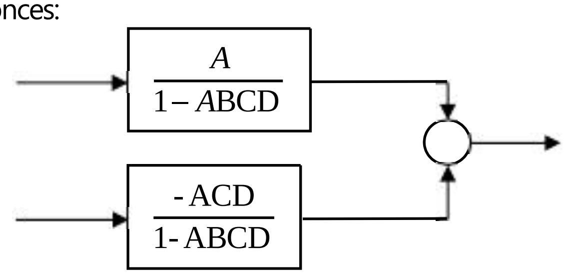
Igualamos a cero y determinamos la función de transferencia entre y :



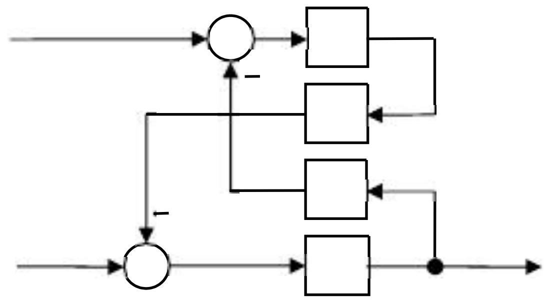
Igualamos a cero y determinamos la función de transferencia entre y :



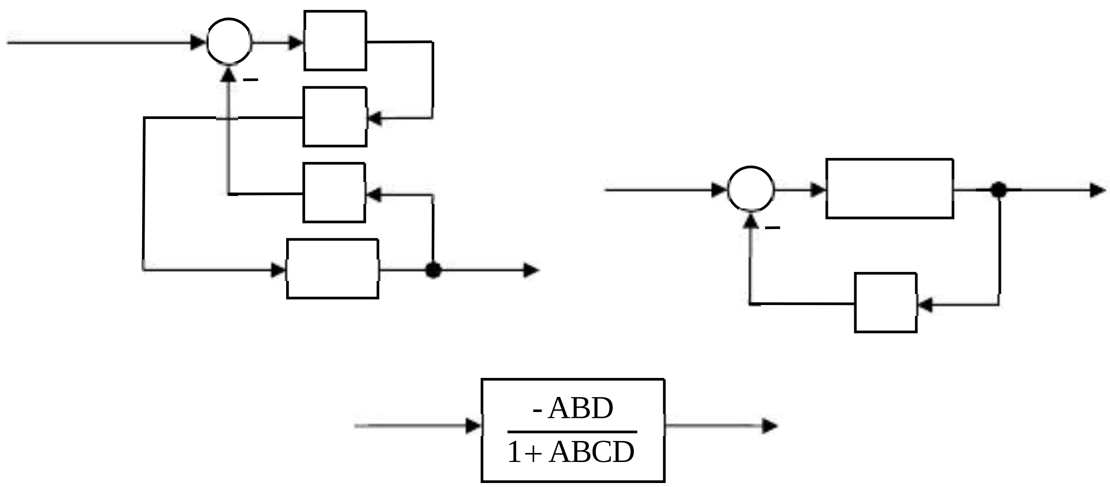
Para la salida tenemos entonces:



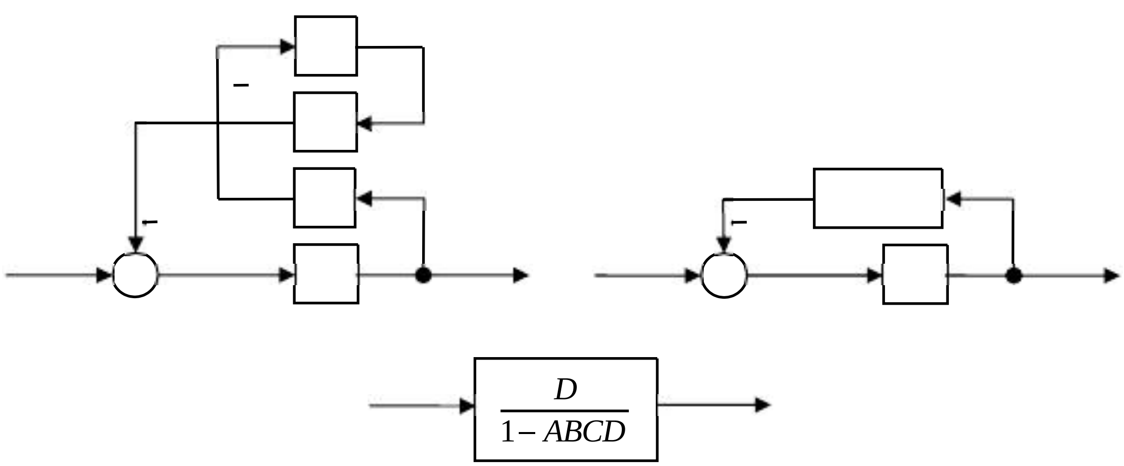
Segundo determinamos a ignorando a :



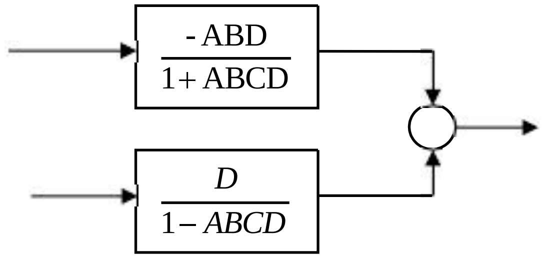
Igualamos a cero y determinamos la función de transferencia entre y :



Igualamos a cero y determinamos la función de transferencia entre y :



Para la salida tenemos entonces:



Construcción de un diagrama de bloques a partir de las funciones de transferencia de los elementos del sistema

El objetivo principal de un diagrama de bloques es representar un sistema físico gráficamente. Esta representación puede realizarse a partir de dos tipos de datos:

- El primero, que es el más común, es cuando se conocen los elementos que conforman el sistema de control, su conexión así como las funciones de transferencia de sus elementos. En este caso la construcción se hace haciendo el diagrama de bloques según la organización de los elementos y luego se coloca en cada bloque la función de transferencia correspondiente.
- La segunda forma, menos común pero no menos importante, es cuando se conocen las funciones de transferencia de los elementos sin conocer la forma como los elementos están conectados. En este caso se deberá realizar primero un diagrama de bloques preliminar, luego se deberán identificar en este los componentes principales por ejemplo: Proceso, controlador, elemento final de control y elemento de medición. Y finalmente volver a dibujar el diagrama en forma ordenada y reducirlo para obtener la función de transferencia si esto es necesario.

Ejemplo 4. Representación en diagramas de bloque a partir del esquema del sistema de control retroalimentado.

El esquema siguiente representa un sistema de control de nivel neumático, en donde se han colocado elementos de control cuyas funciones de transferencia son:

Transmisor de presión

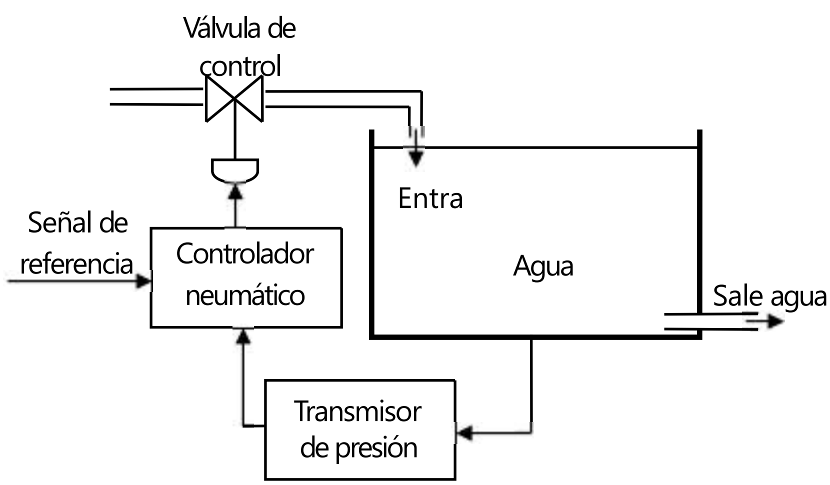
$$G(s) = \gamma_{H2O} K_T$$

Controlador neumático:

$$G(s) = K_P$$

Válvula de control:

$$G(s) = K_V$$



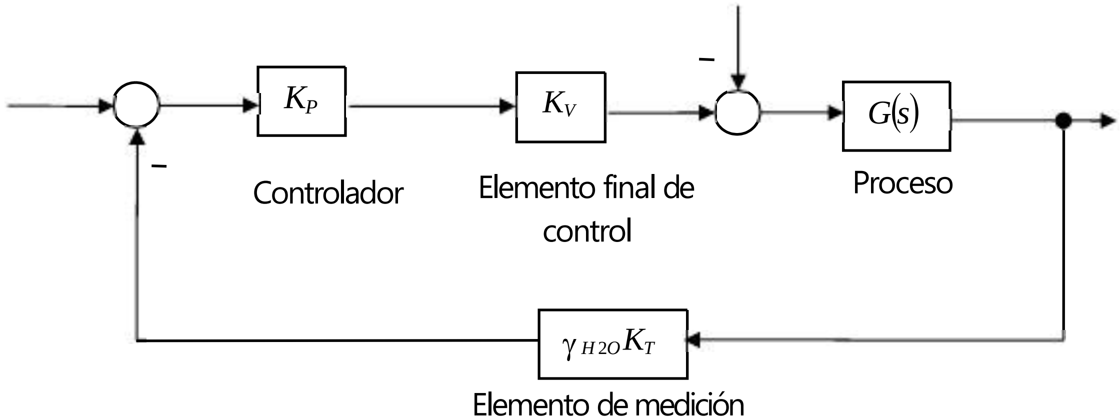
Sistema neumático de control de nivel

Para este sistema:

- Dibuje el diagrama de bloques completo.
- Determine la función de transferencia de lazo cerrado.
- Obtenga una representación en espacio de estado para el proceso y para el sistema completo.

Solución.

En este caso lo primero que debemos hacer es identificar los componentes, dibujar el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado y colocar en cada bloque las funciones de transferencia.



Donde:

: caudal de entrada al tanque

: caudal de salida del tanque

: nivel del tanque

: presión medida que corresponde directamente al valor del nivel

: presión de referencia, la deseada en el tanque, que tiene una correspondencia directa con el nivel deseado

: posición del vástago de la válvula que regula el paso del flujo de entrada.

Observamos aquí que necesitamos conocer la función de transferencia del proceso para completar el diagrama de bloque.

Esta función de transferencia corresponde al de un sistema hidráulico, donde la entrada corresponde a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida ( ), y la salida del sistema será el nivel ( ).

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_e - Q_s = CDP \quad (1) \qquad\qquad P = \gamma_{H2O}h \quad (2)$$

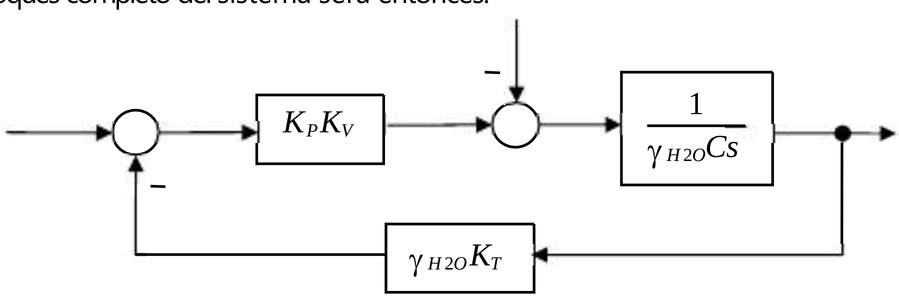
Con estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación de la dinámica del sistema que es:

$$Q_e - Q_s = \gamma_{H2O}CDh$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la función de transferencia:

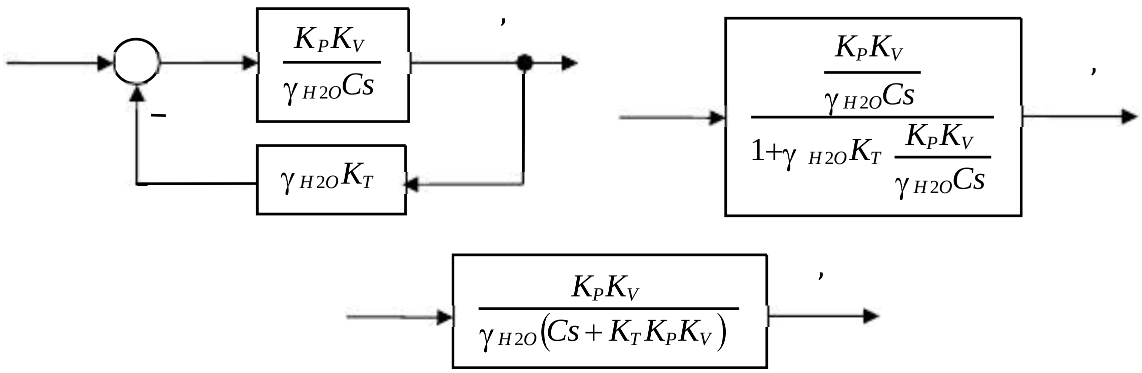
$$\frac{h(s)}{(Q_e - Q_s)(s)} = \frac{1}{\gamma_{H2O}Cs}$$

El diagrama de bloques completo del sistema será entonces:

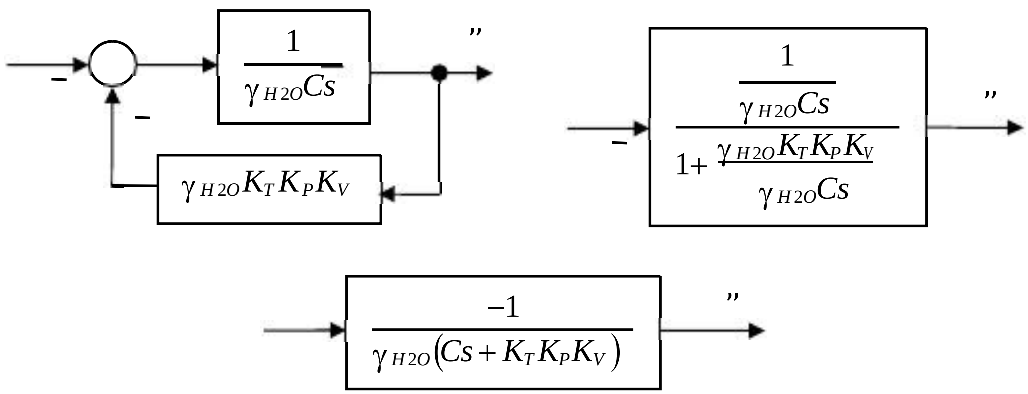


Para obtener la función de transferencia de lazo cerrado debemos reducir el diagrama de bloques del sistema, que es un diagrama de dos entradas (,) y una salida ( ).

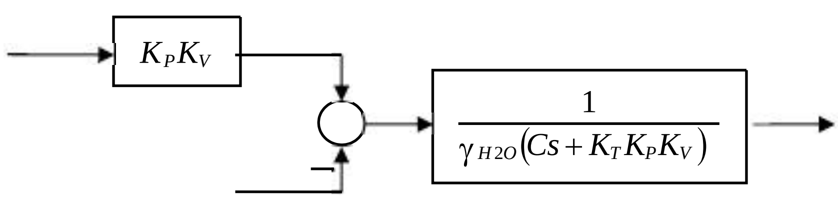
Igualamos primero a cero y obtenemos:



Igualamos luego a cero y obtenemos:



El diagrama de bloques simplificado será:



Este diagrama de bloque se puede entonces expresar como una función de transferencia o ecuación en transformada de Laplace que relaciona la entrada con la salida:

$$h=\frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O}(Cs+K_T K_P K_V)} P_r-\frac{1}{\gamma_{H2O}(Cs+K_T K_P K_V)} Q$$

Esta ecuación expresada en tiempo sería:

$$\gamma_{H2O} CDh+\gamma_{H2O} K_T K_P K_V h=K_P K_V P_r-Q_s$$

Como es una ecuación diferencial de primer orden podemos entonces definir un solo estado, en cuyo caso lo más sencillo es: $x=h$, y tenemos dos entradas: $u_1=P_r$; $u_2=Q_s$

Obtendremos entonces una ecuación de estado y una ecuación:

$$\dot{x}=\frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} x+\frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} u_1-\frac{1}{\gamma_{H2O} C} u_-$$

$$y=x$$

Esta ecuación expresada en forma vectorial sería:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} & \dfrac{-1}{\gamma_{H2O} C} \end{bmatrix}; \quad C = 1$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Representación del diagrama de bloques a partir de las ecuaciones de los componentes
Las siguientes ecuaciones representan un sistema de control:

$$e = \frac{x - v}{2}; \quad v = \frac{C_1}{AD} e; \quad z = C_2 u; \quad x = \frac{Kz - C_4 y}{K - C_7 C_3}; \quad q = C_5 v; \quad y = \frac{C_6}{1 + \tau D}(q - C_8 w)$$

Donde:

- , , , , , : son señales
- : es la variable controlada
- : es la señal de referencia
- : es el operador diferencial (derivada respecto de)
- , , , , , , , , , : son constantes (ganancias)

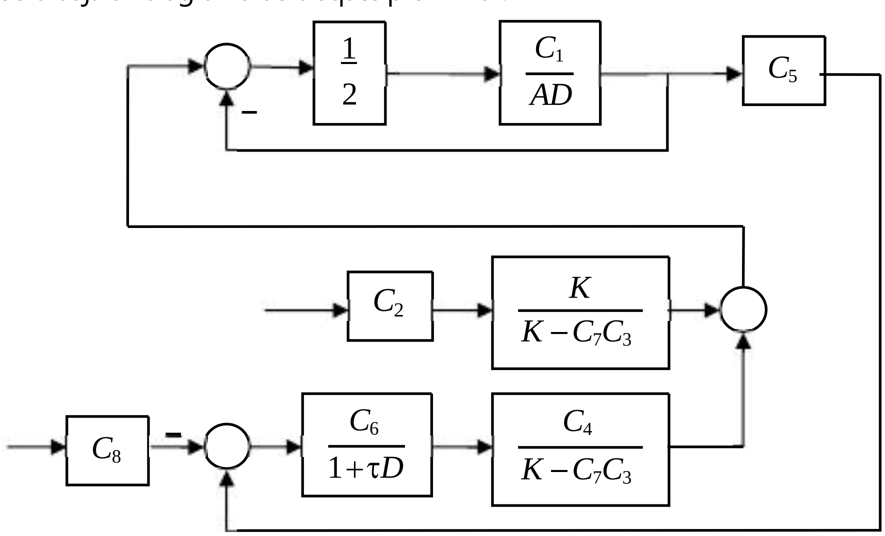
Determinar la función de transferencia de:

- Proceso
- Controlador
- Elemento final de control
- Elemento de medición

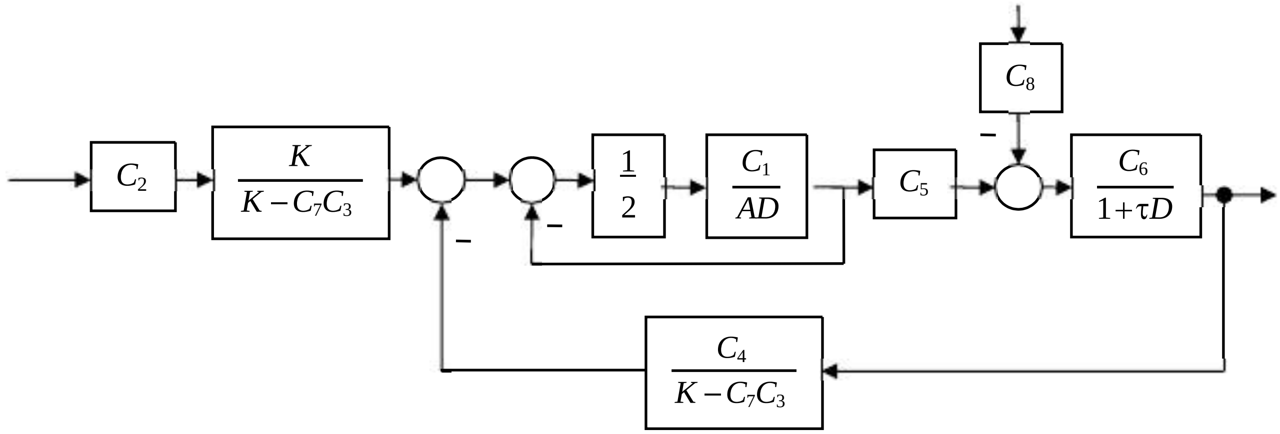
Identificar:

- Variable manipulada
- Perturbación

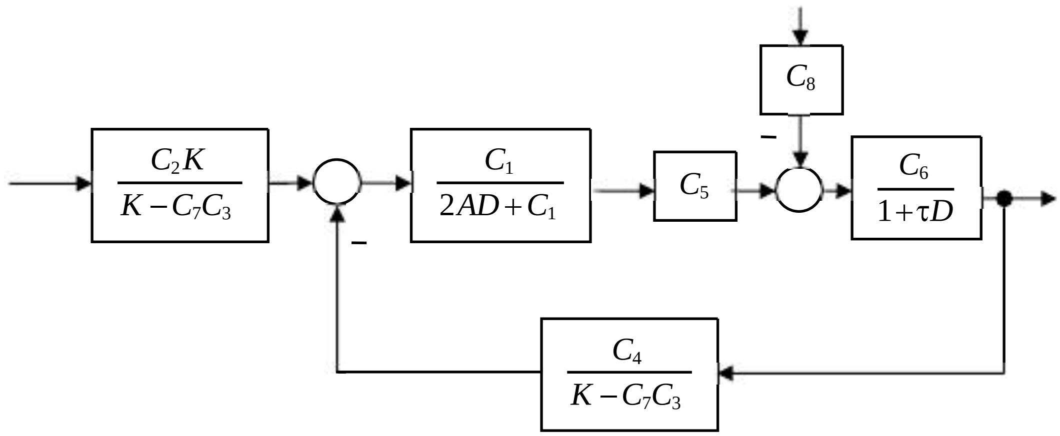
Solución: Primero se dibuja un diagrama de bloques preliminar:

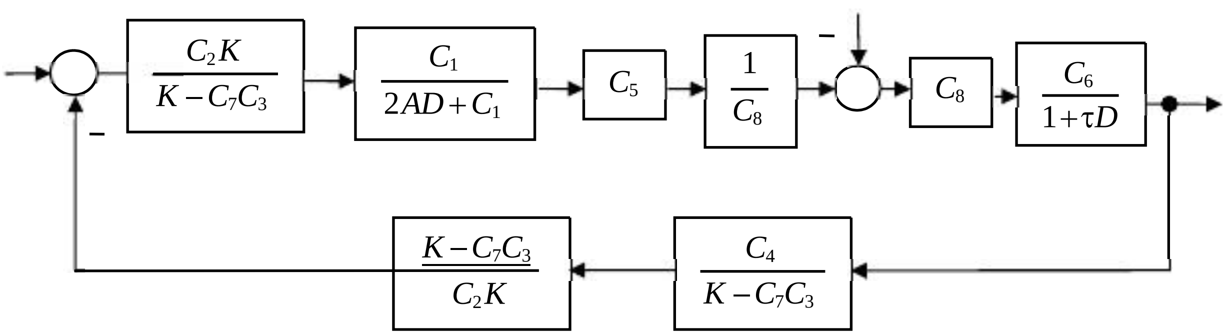


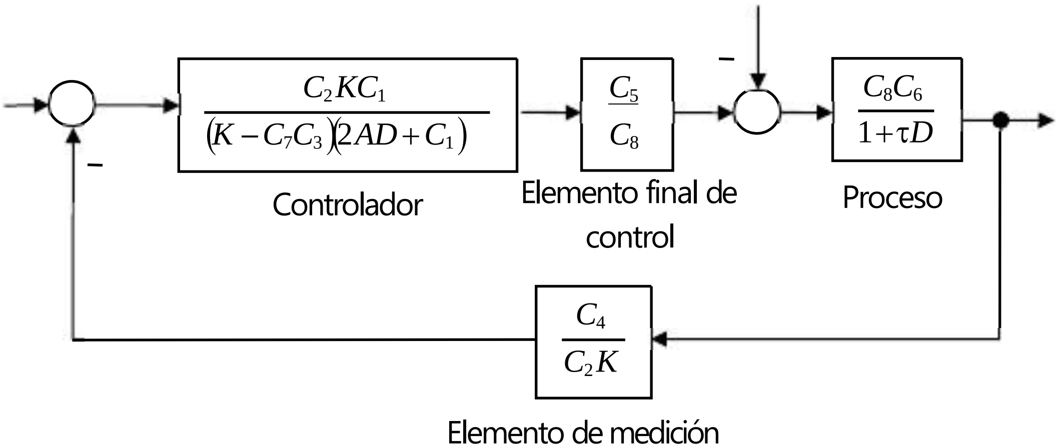
Luego se vuelve a dibujar el diagrama de bloques pero en una forma más ordenada que permita identificar más fácilmente los componentes, con como entrada y como salida:



Comparando con el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado se pueden fácilmente identificar los componentes, se hacen determinan entonces las funciones de transferencia para cada uno de ellos:







De esta última forma del diagrama observamos entonces que la variable manipulada es y que la perturbación es .

Tema 5. Respuesta de Sistemas

Introducción

El modelo matemático dinámico de un sistema físico está representado por una ecuación diferencial. La ecuación diferencial suele ser en general de cierta complejidad, pero en muchos casos prácticos el modelo puede simplificarse y transformarse en una ecuación diferencial ordinaria lineal de la forma:

$$\overset{n}{y}+a_1\overset{n-1}{y}+\ldots+a_{n-2}\ddot{y}+a_{n-1}\dot{y}+a_n y=u$$

Donde:

La parte izquierda de la igualdad representa el sistema en si

y Representa la respuesta o salida del sistema

u Representa la entrada o excitación del sistema

El estudio de la respuesta de un sistema consiste entonces en determinar la respuesta ( ) que produce un sistema ante una entrada ( ) cualquiera. La respuesta de un sistema dependerá entonces de la ecuación y de la excitación que se le aplica. Existe una infinidad de posibilidades de ecuación y de excitación, por lo tanto una infinidad de respuestas posibles. Sin embargo ciertos tipos de sistemas y ciertos tipos de excitación pueden ser útiles para la comprensión del fenómeno de la respuesta de sistemas. Es por ello que el estudio de la respuesta de sistemas es introducido aquí con dos tipos de sistemas simples y tres tipos de entradas.

Tipos de excitación

La función excitación de un sistema puede tomar cualquier forma en la realidad, y por lo general no puede conocerse con anticipación ya que suele ser de carácter aleatorio. Sin embargo en muchos casos prácticos el estudio de algunas funciones de excitación específicas suele ser suficiente, ya que puede aportar conocimientos importantes sobre el sistema.

Las funciones de excitación más representativas son:

Entrada en escalón

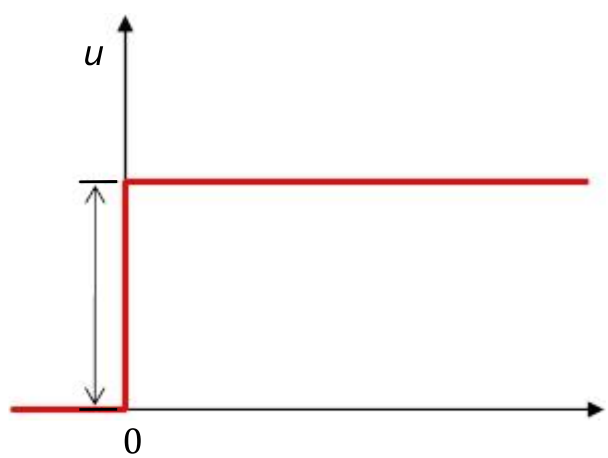
En este caso la entrada sufre un cambio instantáneo y finito.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<0\\ H & \text{para } t>0\end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s)=\frac{H}{s}$$



Donde:

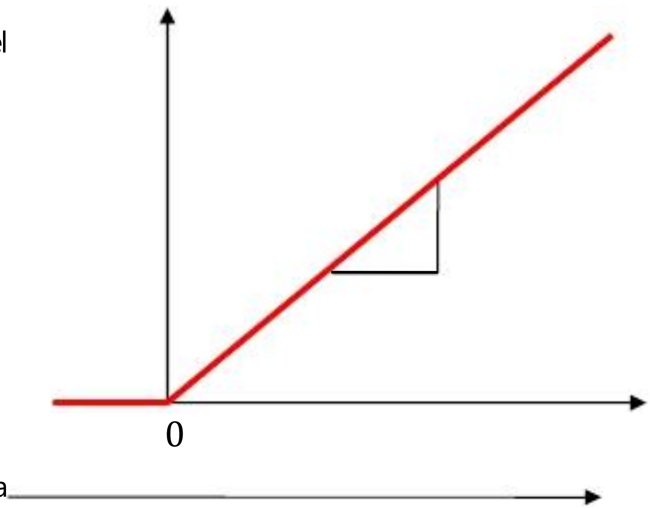
: es una constante

Cuando es igual a 1 se dice que la entrada es un escalón unitario.

Nótese que la función escalón queda indefinida para 0.

La función escalón es la más simple de las entradas que se le puede aplicar a un sistema, y por esto suele ser la más utilizada porque permite hacer análisis simples de la respuesta del sistema. Esta permite principalmente definir la respuesta de sistemas en donde los cambios son instantáneos y que luego se mantienen en el tiempo, por ejemplo la respuesta de un termómetro clínico al ser introducido en un baño a una temperatura dada.

Entrada en rampa



En este caso la entrada varía linealmente con el tiempo.

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0 \\ Ht & \text{para } t\geq 0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

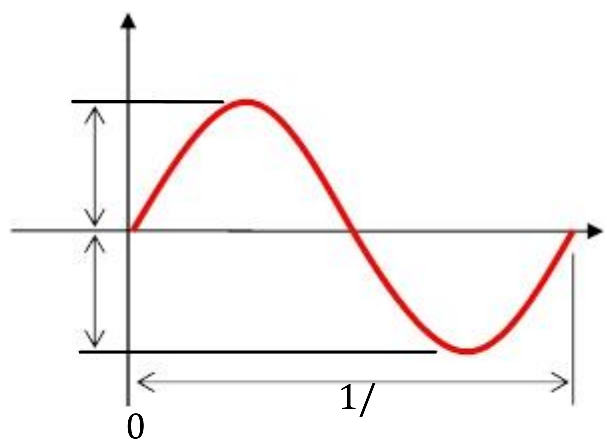
$$U(s)=\frac{H}{s^2}$$

En este caso H define la pendiente de la rampa:

$$H=\frac{a}{b}$$

La función rampa suele ser también muy utilizada ya que permite el estudio de la respuesta de un sistema sometido a una entrada que varía constantemente. Por ejemplo la respuesta de un motor al aumentar progresivamente la inyección de combustible.

Entrada sinusoidal



En este caso la entrada cambia su magnitud de acuerdo a una función sinusoidal de amplitud constante 2 y frecuencia .

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

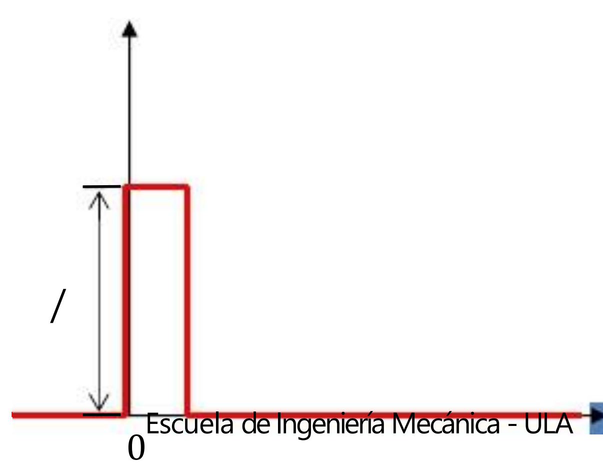
$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0 \\ H\sin\omega t & \text{para } t\geq 0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s)=\frac{H\omega}{s^2+\omega^2}$$

La función sinusoidal suele también ser muy utilizada para definir la respuesta de sistemas en donde la entrada suele variar muy rápidamente y oscilar entre valores máximos y mínimos. Por ejemplo la respuesta del sistema de amortiguación de un vehículo.

Entrada en pulso



En este caso la entrada sufre un cambio instantáneo y finito, pero de duración finita en el tiempo. Esta se puede considerar como una entrada en escalón de altura / pero de duración finita en el tiempo, comenzando en el tiempo 0 y terminando en el tiempo .

Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0,\ t>t_0 \\ \dfrac{H}{t_0} & \text{para } 0<t<t_0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s)=\frac{H}{t_0 s}\left(1-e^{-st_0}\right)$$

Donde y son constantes.

Entrada en impulso

Cuando el tiempo tiende a cero entonces se trata de un caso especial de la función pulso denominada función impulso:
Esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0,\ t>t_0 \\ \lim\limits_{t_0\to 0}\dfrac{H}{t_0} & \text{para } 0<t<t_0 \end{cases}$$

O expresada en transformada de Laplace:

$$U(s)=H$$

En este caso como la altura de la función impulso es igual a / y la duración es entonces el área bajo la curva será igual a . Cuando la el área de la función impulso es igual a la unidad entonces esta función recibe el nombre de *impulso unitario* o *delta de Dirac*. Esta se designa comúnmente como:

$$\delta(t-t_0)$$

Y cumple las siguientes condiciones:

$$\delta(t-t_0)=0 \text{ para } t\neq t_0$$

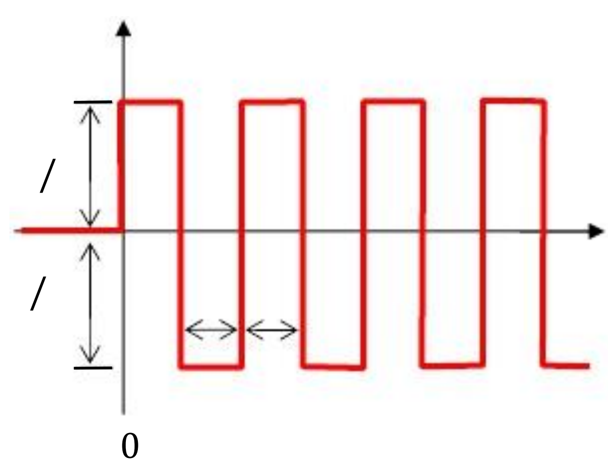
$$\delta(t-t_0)=\infty \text{ para } t=t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

Se debe notar que un impulso de magnitud infinita y duración cero es un término netamente matemático que no existe en la realidad. Sin embargo, cuando la magnitud de un pulso es muy grande y su duración muy pequeña, entonces el pulso de entrada se puede aproximar a una función impulso que es más sencilla de tratar matemáticamente.
La función impulso unitario es muy utilizada para el estudio de respuesta de sistemas ya que permite entre otras cosas estudiar la respuesta de sistemas en presencia de una entrada discontinua, como el estudio de impactos por ejemplo.

Entrada en onda cuadrada

La entrada en onda cuadrada se puede considerar como una serie de pulsos sucesivos con signos alternados.
Esta se puede expresar de la siguiente forma:



$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0 \\ \dfrac{H}{t_0} & \text{para } 0<t<t_0 \\ -\dfrac{H}{t_0} & \text{para } t_0<t<2t_0 \\ \vdots & \end{cases}$$

Esta función suele ser muy utilizada para definir la respuesta de sistemas en donde la entrada varía muy rápidamente y oscilar entre valores máximos y mínimos. Por ejemplo la respuesta de sistemas electrónicos y de audio. El objetivo de esta función de entrada es muy similar al de la función sinusoidal pero permite observar más fácilmente los resultados obtenidos siendo su cómputo más complejo por tratarse de una función discontinua.

Respuestas de sistemas de primer y segundo orden

Los modelos matemáticos de sistemas físicos lineales (o linealizados) se pueden clasificar según el orden de la ecuación diferencial que los representa, es así como se puede hablar de los sistemas de primer orden, los sistemas de segundo orden y los sistemas de orden superior.

La respuesta de un sistema corresponde a la solución de la ecuación diferencial del modelo que lo representa, la cual consta de dos partes:

- Una respuesta transitoria, correspondiente a la solución transitoria (homogénea) de la ecuación diferencial y que representa la transición entre el estado inicial del sistema y su estado una vez absorbido por completo el efecto de la entrada. Esta influye en un período de tiempo corto después de aplicada la entrada.
- Una respuesta en estado estable, correspondiente a la solución en estado estable (particular) de la ecuación diferencial y que representa la respuesta del sistema para un tiempo infinito después de la aplicación de una entrada cualquiera, momento en el cual se puede considerar que el sistema a absorbido por completo el efecto de la entrada aplicada.

En casos prácticos se considera que un sistema se encuentra en estado estable cuando la respuesta transitoria es despreciable respecto de la respuesta en estado estable. Cuando un sistema tiene una alta velocidad de respuesta la parte transitoria será de muy corta duración mientras que si posee una velocidad de respuesta lenta la parte transitoria puede extenderse por un tiempo relativamente largo.

Se estudiará en esta parte la respuesta de sistemas de primer y segundo orden sometidos a entradas en escalón, en rampa y en sinusoidales. Estas respuestas permiten tener una comprensión clara de la respuesta de sistemas en general.

Respuesta de sistemas de Primer Orden

Los sistemas de primer orden son aquellos cuyo modelo matemático responde a una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

Donde:

: Representa la salida o respuesta del sistema

: Representa la función entrada al sistema

: Se denomina constante de tiempo del sistema.

: Ganancia en estado estacionario o ganancia del sistema. Este es un parámetro muy importante que interviene en la respuesta del sistema y cuyo valor permite en muchos casos ajustar el tipo de variable de entrada y salida (por ejemplo fuerza con desplazamiento). Cuando la variable de entrada es del mismo tipo que la de salida su valor suele ser 1 (por ejemplo temperatura a la entrada y salida).

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en escalón

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caos por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Donde *C* es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A$$

Donde *A* es una constante.
Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$A = KH$$
$$y_E = KH$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$
$$y = Ce^{-t/\tau} + KH$$

Falta entonces obtener el valor de *C* con las condiciones iniciales. Para un sistema de primer orden se requiere de una sola condición inicial, la cual depende del estado en que se encuentra el sistema en el momento inicial en que se aplica la entrada (t = 0). En este caso tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante C se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

$$0 = Ce^{-0/\tau} + KH$$

$$C = -KH$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = -KHe^{-t/\tau} + KH$$

Con esta ecuación que define la respuesta del sistema se puede determinar el valor de la respuesta y para cualquier instante de tiempo, es así como por ejemplo, y en el caso que la ganancia 1:

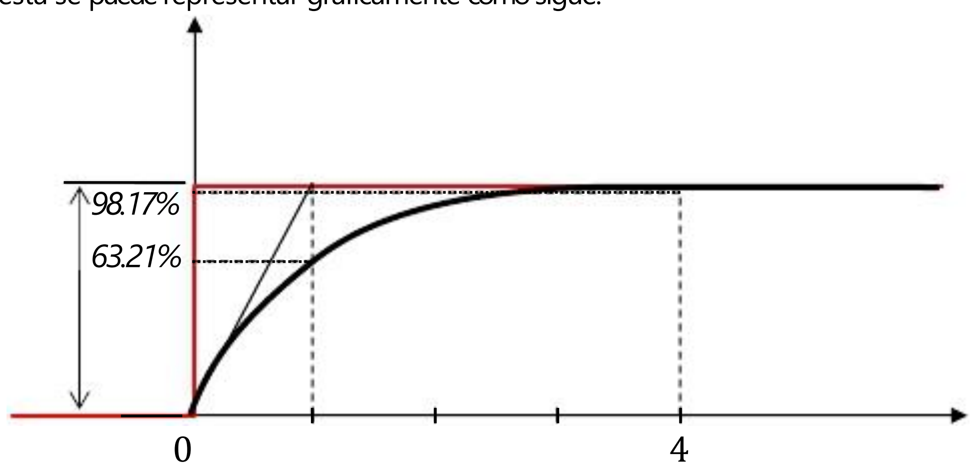
Para $t = \tau$

$$y = H\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = 0.6321H$$

Para $t = 4\tau$

$$y = H\left(1 - e^{-4\tau/\tau}\right) = 0.9817H$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



A partir de estos resultados se define la constante de tiempo ( ) como el tiempo requerido para que la respuesta de un sistema de de primer orden alcance el 63.21% del valor del escalón al cual fue sometido.
Otra definición de la constante de tiempo es el tiempo necesario para que un sistema de primer orden sometido a una entrada en escalón alcance su valor en estado estable si mantuviera la velocidad de respuesta inicial.
Esta constante de tiempo es entonces un parámetro que define la velocidad de respuesta de los sistemas de primer orden, mientras más grande es la constante de tiempo más lenta será la respuesta del sistema.
Se considera que un sistema de primer orden se encuentra en estado estable cuando el tiempo transcurrido a partir de la aplicación de la entrada es superior a 4 .

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en rampa

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = Ht$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$\tau Dy + y = KHt$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caos por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A + Bt$$

Donde A es una constante.
Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = B$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\tau B + A + Bt = KHt$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con t y otra con los términos independientes:

$$B = KH$$

$$\tau B + A = 0 \Leftrightarrow A = -\tau KH$$

$$y_E = -\tau KH + KHt$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} - \tau KH + KHt$$

Falta entonces obtener el valor de C con las condiciones iniciales. En este caso tomaremos por simplicidad y sin pérdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante C se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

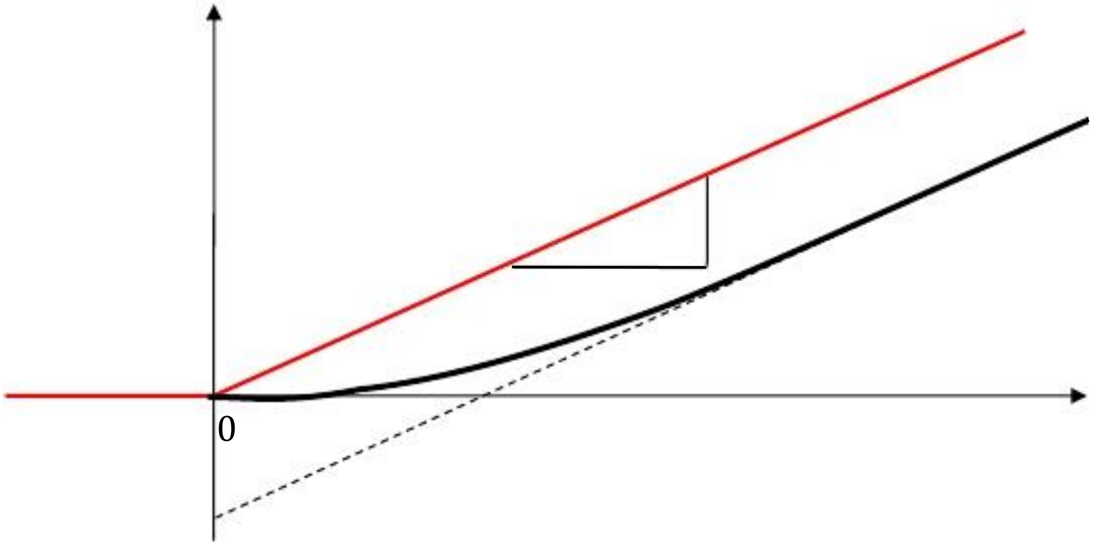
$$0 = Ce^{-0/\tau} - \tau KH + KH0$$

$$C = \tau KH$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = \tau KH e^{-t/\tau} - \tau KH + KHt$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente, en el caso de 1, como sigue:



En este caso la respuesta en estado estable tiende a una recta paralela a la entrada pero desfasada en un valor .

Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada sinusoidal

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H \sin \omega t$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$\tau Dy + y = KH \sin \omega t$$

Consideraremos aquí el caso en que 1 solamente, para mayor simplicidad:

$$\tau Dy + y = H \sin \omega t$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$\tau Dy + y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$\tau D + 1 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D = \frac{-1}{\tau}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, que en este caos por ser una sola raíz real, la solución homogénea será de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Donde *A* es una constante.
Se obtiene la derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\tau\left(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right) + A\sin\omega t + B\cos\omega t = H\sin\omega t$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con y otra con los términos con :

$$\begin{aligned} -\tau B\omega + A &= H \\ \tau A\omega + B &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= \frac{H}{1+\tau^2\omega^2} \\ B &= \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2} \end{aligned}$$

La solución particular será entonces:

$$y_E = \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega t + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega t$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

$$y = Ce^{-t/\tau} + \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega t + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega t$$

Falta entonces obtener el valor de con las condiciones iniciales. En este caso tomaremos por simplicidad y sin perdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0$$

Para determinar el valor de la constante se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en el cual estas se aplican en la ecuación de la respuesta del sistema:

$$0 = Ce^{-0/\tau} + \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega 0 + \frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega 0$$

$$C = \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

$$y = \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}e^{-t/\tau} + \frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\sin\omega t - \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\cos\omega t$$

Para tener una forma de respuesta más fácil de representar gráficamente utilizaremos la relación trigonométrica:

$$M\sin\omega t + N\cos\omega t = \left(M^2 + N^2\right)^{1/2}\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(N/M\right)\right)$$

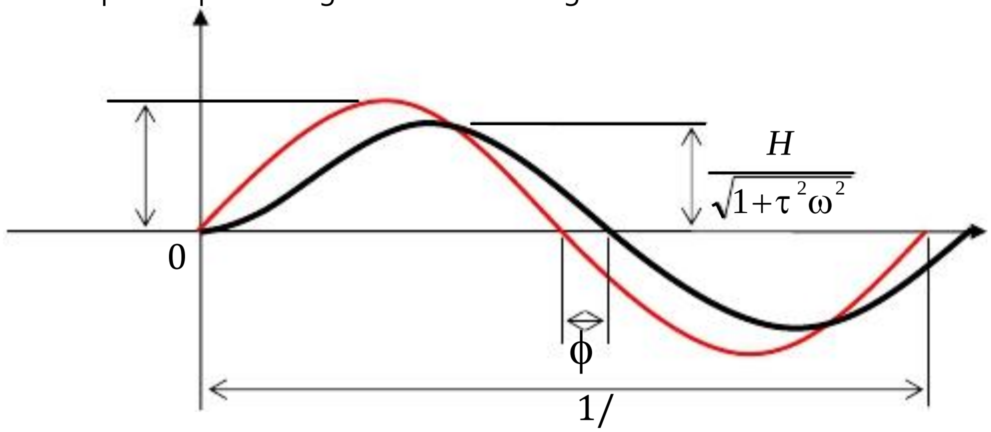
Obtenemos entonces que la solución en estado estable se puede expresar como:

$$y = \frac{\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{H}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Donde:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\left(\frac{-\tau\omega H}{1+\tau^2\omega^2}\right)}{\left(\frac{H}{1+\tau^2\omega^2}\right)} = \tan^{-1}(\tau\omega)$$

Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



La respuesta en estado estable tiende a una función sinusoidal de menor amplitud y desfasada un ángulo ϕ.

Respuesta de sistemas de Segundo Orden

Los sistemas de segundo orden son aquellos cuyo modelo matemático responde a una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$$

Donde:

: Representa la salida o respuesta del sistema
: Representa la función entrada al sistema
: Es la relación (o radio) de amortiguamiento del sistema
: Es la frecuencia natural del sistema
: Ganancia en estado estacionario o ganancia del sistema.

Para mayor simplicidad consideraremos a continuación solo el caso en que 1:
2

La respuesta para un 1 puede obtenerse con la mismo procedimiento expresado para los sistemas de primer orden.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en escalón

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 H$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Para obtener esta parte de la respuesta se iguala la ecuación diferencial a cero, dicho de otra manera se considera que la entrada es cero:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = 0$$

Y se obtiene la ecuación característica despejando la respuesta del sistema e igualando este a cero:

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0$$

Se obtienen las raíces de la ecuación característica:

$$D_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Luego la solución homogénea depende de la forma de las raíces de la ecuación característica, en este caso la forma de las raíces depende del radio de amortiguamiento ( ), la solución homogénea puede entonces tomar varias formas como se presenta a continuación:

Si $\xi > 1$ aparecen dos raíces reales positivas.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ aparecen dos raíces reales iguales.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ aparece un par de raíces imaginarias.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right)$$

Si $\xi = 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

La solución transitoria será entonces de la forma

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t$$

Donde y son constantes que dependen de las condiciones iniciales del sistema.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A$$

Donde *A* es una constante.
Se obtienen las derivadas de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = 0\,; \quad D^2 y_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\omega_n^2 A = \omega_n^2 H$$

$$y_E = H$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

Donde es cualquiera de las cuatro opciones determinadas anteriormente.
Si $\xi > 1$:

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + H$$

Si $\xi = 1$:

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t} + H$$

Si $0 < \xi < 1$:

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\right) + H$$

Si $\xi = 0$:

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t + H$$

Falta entonces obtener el valor de las constantes y con las condiciones iniciales. Para un sistema de segundo orden se requiere de dos condiciones iniciales, la cuales depende del estado en que se encuentra el sistema en el momento inicial en que se aplica la entrada (0). En este caso tomaremos por simplicidad y sin perdida de generalidad las condiciones iniciales siguientes:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0; \quad Dy_0 = 0$$

Para determinar el valor de las constantes y se debe sustituir el valor de las condiciones iniciales y del tiempo en la ecuación de la respuesta del sistema y en su derivada:
Si $\xi > 1$:

$$0 = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + H$$

$$0 = C_1\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0} + C_2\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)0}$$

$$C_1 + C_2 = -H$$

$$C_1\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) + C_2\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right) = 0$$

$$C_1 = -H - \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$C_2 = \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

Si $\xi = 1$:

$$0 = C_1 e^{-\xi\omega_n 0} + C_2 0 e^{-\xi\omega_n 0} + H$$

$$0 = -\xi\omega_n C_1 e^{-\xi\omega_n 0} + C_2 e^{-\xi\omega_n 0} - \xi\omega_n C_2 0 e^{-\xi\omega_n 0}$$

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + H \\ 0 &= -\xi\omega_n C_1 + C_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= -H \\ C_2 &= -\xi\omega_n H \end{aligned}$$

Si $0 < \xi < 1$:

$$0 = e^{-\xi\omega_n 0}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right) - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right)\right) + H$$

$$\begin{aligned} 0 = &-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n 0}\left(C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right) - C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right)\right) \\ &+ e^{-\xi\omega_n 0}\left(C_1\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right) + C_2\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,0\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -C_2 + H \\ 0 &= \xi\omega_n C_2 + C_1\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_2 &= H \\ C_1 &= -\frac{\xi\omega_n H}{\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)} \end{aligned}$$

Si $\xi = 0$:

$$0 = C_1 \sin\omega_n 0 - C_2 \cos\omega_n 0 + H$$

$$0 = C_1\omega_n \cos\omega_n 0 + C_2\omega_n \sin\omega_n 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= -C_2 + H \\ 0 &= C_1\omega_n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_2 &= H \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente la respuesta del sistema será:

Si $\xi > 1$:

$$y_T = \left(-H - \frac{H\left(\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}\right) e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} \ldots$$

Si $\xi = 1$:

$$y_T = -He^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n H t e^{-\xi\omega_n t} + H$$

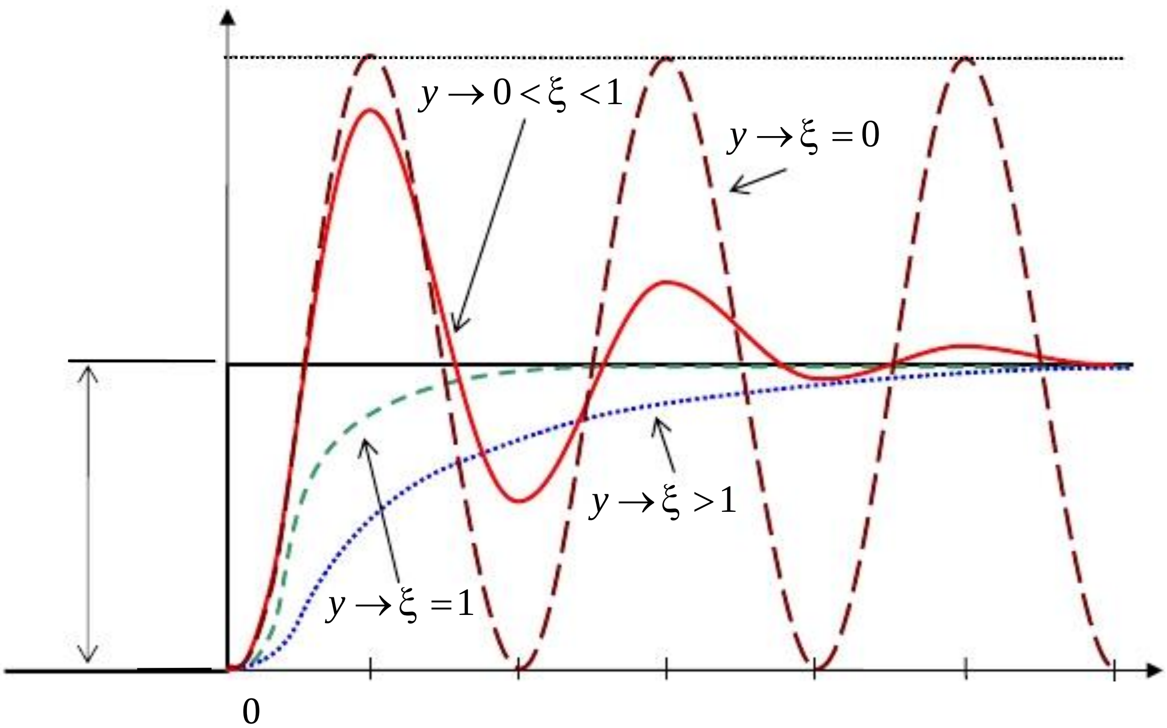
Si $0 < \xi < 1$:

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(H \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) t + \left(\frac{\xi\omega_n H}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) t \right) + H$$

Si $\xi = 0$:

$$y_T = -H\cos\omega_n t + H$$

Con esta ecuación que define la respuesta del sistema se puede determinar el valor de la respuesta *y* para cualquier instante de tiempo. Esta respuesta se puede representar gráficamente como sigue:



En función de estos resultados las respuestas de los sistemas de segundo orden se clasifican según el valor del coeficiente de amortiguamiento (ξ):

Si $\xi > 1$: Respuesta Sobre-Amortiguada. El sistema responde a una entrada en escalón lentamente.

Si $\xi = 1$: Respuesta Críticamente Amortiguada. El sistema responde a una entrada en escalón con máxima velocidad de respuesta sin oscilar.

Si $0 < \xi < 1$: Respuesta Sub-Amortiguada. El sistema responde rápidamente pero comienza a oscilar tratando de alcanzar el valor del escalón.

Si $\xi = 0$: Respuesta sin amortiguamiento. El sistema oscila constantemente entre 0 y 2 .

Definiciones utilizadas en la respuesta transitoria de sistemas

Tiempo de retardo. Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de crecimiento. Es el tiempo requerido para que la respuesta vaya del 10 al 90% (sistemas sobre-amortiguados) o del 0 al 100 % (sistemas sub-amortiguados) de su valor final.
Sobreimpulso máximo. Es el valor del pico máximo de la curva de respuesta medido desde el escalón.
Tiempo de pico. Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.
Tiempo de establecimiento. Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de un determinado rango. Por lo general este rango es del orden del 2 al 5% de error respecto al valor del escalón.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en rampa

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = Ht$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 Ht$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Las mismas cuatro opciones que para la entrada en escalón.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A + Bt$$

Donde *A* es una constante.
Se obtiene la primera y segunda derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = B; \quad D^2 y_{Eas} = 0$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$2\xi\omega_n B + \omega_n^2 (A + Bt) = \omega_n^2 Ht$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con t y otra con los términos independientes:

$$\begin{cases} \omega_n^2 B = \omega_n^2 H \\ 2\xi\omega_n B + \omega_n^2 A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = H \\ A = \dfrac{-2\xi H}{\omega_n} \end{cases}$$

La solución en estado estable será:

$$y_E = -\frac{2\xi H}{\omega_n} + Ht$$

Respuesta completa

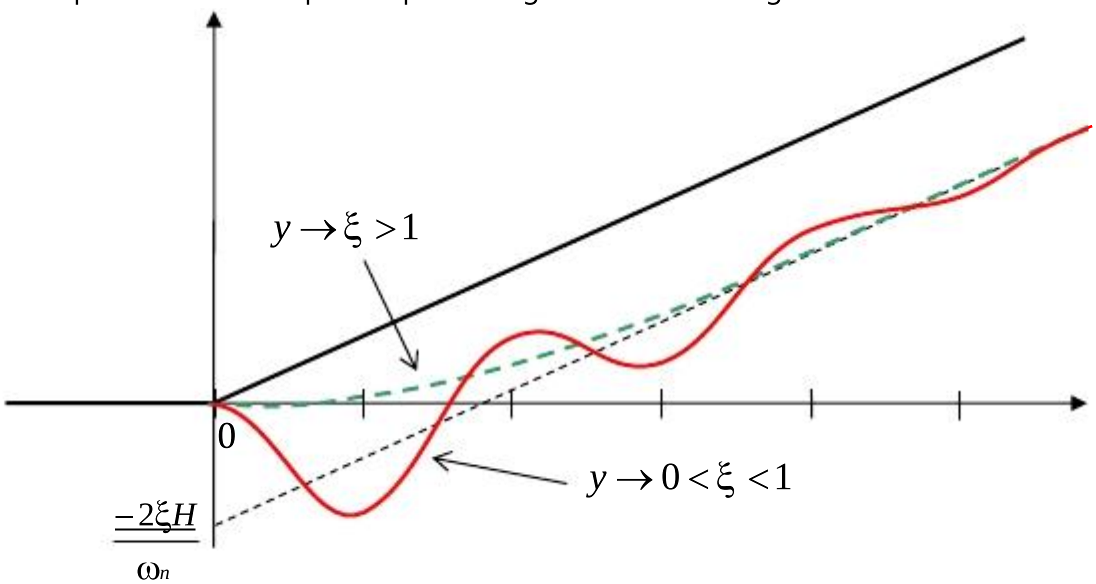
La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

$$y_E = y_T - \frac{2\xi H}{\omega_n} + Ht$$

Donde (y_T) es cualquiera de las cuatro posibilidades vistas en la entrada en escalón. Falta entonces obtener el valor de y con las condiciones iniciales, para obtener la solución completa.

La respuesta obtenida se puede representar gráficamente como sigue:



En este caso la respuesta en estado estable tiende a una recta paralela a la entrada pero desfasada en un valor $\frac{-2\xi H}{\omega_n}$.

Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada sinusoidal

En este caso la entrada para $t > 0$ será: $u = H \sin\omega t$, luego la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 H \sin\omega t$$

La respuesta de este sistema corresponde entonces a la solución de la ecuación diferencial, la cual se obtiene en dos partes:

Respuesta en estado transitorio o también llamada solución homogénea

Las mismas cuatro opciones que para la entrada en escalón.

Respuesta en estado estable o también llamada solución particular

Para obtener la solución particular de una ecuación diferencial se supone que la solución será similar a la entrada:

$$y_{Eas} = A \sin\omega t + B \cos\omega t$$

Donde *A* es una constante.
Se obtiene la primera y segunda derivada de la solución supuesta:

$$Dy_{Eas} = A\omega \cos\omega t - B\omega \sin\omega t \; ; \; D^2 y_{Eas} = -A\omega^2 \sin\omega t - B\omega^2 \cos\omega t$$

Se sustituye la solución supuesta y su derivada en la ecuación original, para obtener el valor final de la solución particular:

$$\left(-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t\right) + 2\xi\omega_n\left(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right) + \omega$$

Se obtienen dos ecuaciones, una con los términos con y otra con los términos con :

$$-A\omega^2 - 2\xi\omega_n B\omega + \omega_n^2 A = \omega_n^2 H$$
$$-B\omega^2 + 2\xi\omega_n A\omega + \omega_n^2 B = 0$$

$$\left(\omega_n^2-\omega^2\right)A - 2\xi\omega_n\omega B = \omega_n^2 H$$
$$2\xi\omega_n\omega A + \left(\omega_n^2-\omega^2\right)B = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)\omega_n^2 H}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2} \qquad B = -\frac{2\xi\omega_n^3\omega H}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2}$$

La solución particular será entonces:

$$y_{Eas} = \frac{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)\omega_n^2 H}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2}\sin\omega t - \frac{2\xi\omega_n^3\omega H}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2}\cos\omega t$$

$$y_{Eas} = \frac{\omega_n^2 H}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_n\omega\right)^2}\left(\left(\omega_n^2-\omega^2\right)\sin\omega t - 2\xi\omega_n\omega\cos\omega t\right)$$

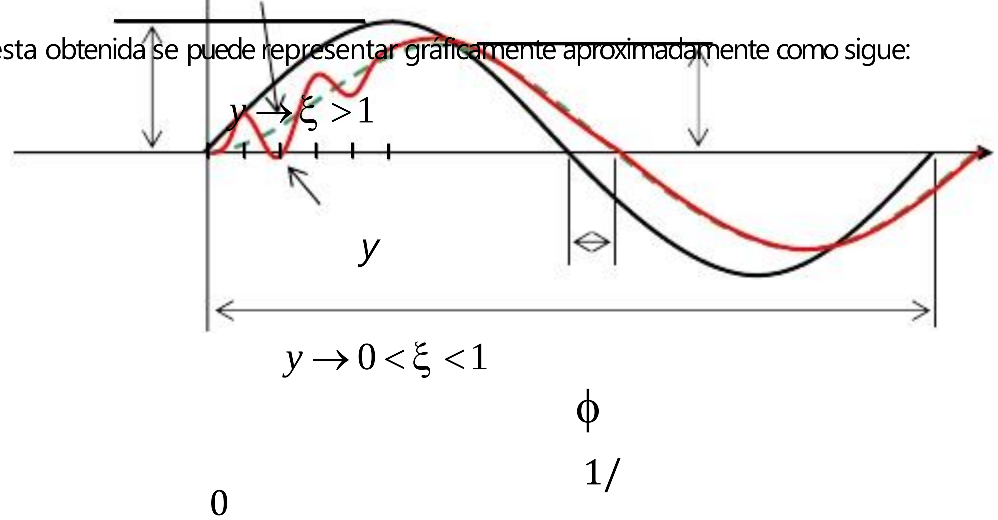
Respuesta completa

La respuesta completa del sistema será entonces la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable:

$$y = y_T + y_E$$

Donde (y_T) es cualquiera de las cuatro posibilidades vistas en la entrada en escalón. Falta entonces obtener el valor de y con las condiciones iniciales, para obtener la solución completa.

La respuesta obtenida se puede representar gráficamente aproximadamente como sigue:



La respuesta en estado estable tiende a una función sinusoidal de menor amplitud y desfasada un ángulo ϕ.

Solución de las ecuaciones en representación de estado.

En el caso de los sistemas representados en espacio de estado para obtener la respuesta del sistema es necesario primero resolver la ecuación de estado (ecuación dinámica):

Una vez que se tenga esta solución la respuesta del sistema corresponde a una operación algebraica establecida en la ecuación de salida:

Como se trata simplemente de una representación diferente de un mismo sistema tendremos también una respuesta transitoria (también llamada respuesta libre) y una respuesta en estado estable (también llamada respuesta forzada).

Respuesta transitoria

En el caso general en donde el modelo es variable en el tiempo, se requiere definir una matriz de transición de estado Φ que interviene en la solución de la ecuación de estado.

Matriz de transición: La solución de la ecuación de estado homogénea (con entrada 0):

Donde es continua respecto de , está dada por la respuesta libre del sistema, que es la respuesta del sistema producto de sus condiciones iniciales:

$\Phi \quad , \quad \forall$

Donde Φ , es la denominada matriz de transición, solución de la ecuación diferencial:

$\Phi \quad , \quad , \quad \forall$

Esta matriz posee las siguientes propiedades:

- $\Phi \quad , \quad \Phi \quad , \quad \Phi \quad ,$
- $\Phi \quad ,$ es invertible para todo y todo
- $\Phi \quad , \quad \Phi \quad , \quad \forall \; ,$

En el caso general, de un sistema variable en el tiempo, es raramente posible calcular la solución exacta de la matriz de transición, por lo cual su solución suele calcularse de forma numérica. Mientras que para sistemas LTI, la matriz de transición si se puede calcular de forma explícita, solución que será mostrada más adelante.

Respuesta en estado estable

La respuesta en estado estable es la respuesta del sistema a sus señales de entrada para condiciones iniciales nulas. Esta solución se obtiene para sistemas en espacio de estado con la expresión:

$$\Phi \quad ,$$

Respuesta completa

La respuesta completa del sistema representado por la solución de la ecuación dinámica de estado:

Se puede obtener entonces, aplicando el principio de superposición, a partir de matriz de transición, este será la suma de la respuesta transitoria más la respuesta en estado estable, de la cual resulta la expresión:

$$\Phi \quad , \qquad \Phi \quad ,$$

La salida del sistema se puede entonces calcular con la expresión:

$$\Phi \quad , \qquad \Phi \quad ,$$

Caso particular de los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI). Solución en el dominio del tiempo.

Consideremos el modelo LTI:

El cual se caracteriza completamente por las matrices , , , , donde $\in$ es el vector de estado, $\in$ es el vector de entrada e $\in$ es el vector de salida. Se define el orden ( ) del modelo a partir de la dimensión del vector de estado.

En el caso de un modelo estrictamente propio, para el cual la matriz de transición directa 0 , se tiene el modelo LTI homogéneo (sin entrada) y con las condiciones iniciales ,

La matriz de transición se puede calcular con la expresión:

$$\Phi \quad ,$$

Que se puede calcular con un desarrollo en serie de Taylor:

$$1 \qquad \frac{}{2!} \quad \cdots \quad \frac{}{!}\cdots \qquad ! \quad \frac{}{}$$

La respuesta en estado transitorio del sistema será entonces:

Nota: Se debe tomar en cuenta que a diferencia de los números escalares (. .) las operaciones con matrices no son conmutativas (. .), por lo tanto:

Teorema de Cayley-Hamilton.

Este teorema permite simplificar el cálculo de la aproximación del exponencial por la serie de Taylor, limitándolo a un número finito de términos.

Toda matriz cuadrada es solución de su ecuación característica. Por lo tanto, si es el polinomio característico de : ., entonces para una matriz cuadrada de dimensión , es un polinomio de grado .

$$\ldots$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que cumple con la propiedad:

$$\ldots \quad 0$$

Es decir, se puede expresar como una combinación lineal de las potencia inferiores de A :

$$\ldots \quad -$$

En consecuencia se puede calcular:

$$\frac{}{!} \quad \Phi$$

Utilizando solamente las potencias de estrictamente inferiores a , es decir que existe un juego de coeficientes $0, \ 1\ldots \quad 1$ tales que:

$$\Phi \quad \ldots$$

La respuesta en estado estable de un sistema LTI se puede calcular con:

Un sistema LTI de la forma:

Tiene como solución de su ecuación dinámica de estado:

La respuesta completa de este sistema se puede calcular con la expresión:

Caso particular de los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI). Solución en el dominio de Laplace.

También se puede determinar la matriz de transición utilizando la transformada de Laplace del modelo del sistema, para ello partimos del modelo LTI:

Considerando las condiciones iniciales iguales a cero, condición que se aplica a todas las transformadas de Laplace, le solución de la ecuación de estado es de la forma:

$$\Phi \quad 0 \quad \Phi$$

Y se puede demostrar que:

$$\Phi$$

Se puede por lo tanto determinar la solución de la ecuación de estado obteniendo la transformada de Laplace inversa de Φ :

$$\Phi \qquad \Phi$$

Ejemplo: se quiere determinar la matriz de transición del sistema LTI representado por la matriz:

$$\begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

La matriz de transición en transformada de Laplace se determina con la expresión:

$$\Phi \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\Phi \quad \frac{1}{} \quad \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \quad \frac{1}{3 \quad 2} \quad \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & \end{matrix}$$

$$\Phi \quad \begin{matrix} \frac{3}{1 \quad 2} & \frac{2}{1 \quad 2} \\ \frac{1}{1 \quad 2} & \frac{}{1 \quad 2} \end{matrix}$$

Para determinar la transformada inversa se debe descomponer los elementos de la matriz en fracciones parciales, por ejemplo para el primer elemento de la matriz tenemos (:

$$\frac{3}{1 \quad 2} \quad \frac{}{1} \quad \frac{}{2}$$

Con: $\frac{}{}$, por lo tanto:

$$\frac{1 \quad 3}{1 \quad 2} \qquad 2$$

$$\frac{2 \quad 3}{1 \quad 2} \qquad 1$$

La matriz de convierte entonces en:

$$\Phi \quad \begin{matrix} \frac{2}{1} - \frac{1}{2} & \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \\ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} & \frac{1}{1} - \frac{2}{2} \end{matrix}$$

La matriz de transición del sistema será entonces:

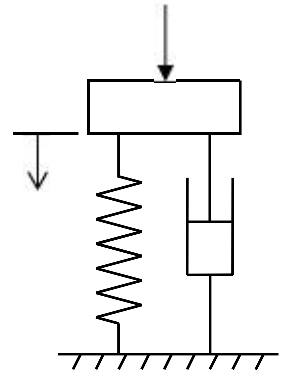
$$\Phi \qquad \Phi \quad 2 \qquad 2 \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Si consideramos unas condiciones iniciales diferentes de conocidas, por ejemplo $0 \quad 0 \quad 1$, se pueden determinar entonces los valores de los estados para cualquier tiempo :

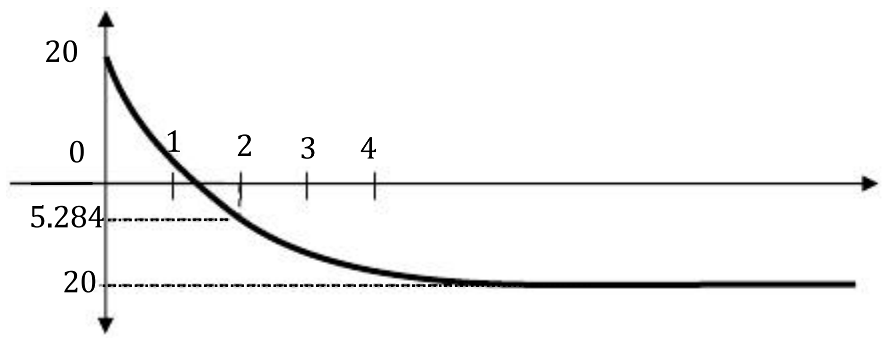
Φ 1
1

Ejercicios

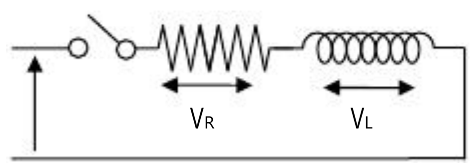
1. Cuál es el valor o el rango de valores de para que el sistema de la figura responda en forma sobreamortiguada, críticamente amortiguada, subamortiguada y sin amortiguamiento. Hallar las expresiones para y . Para el mismo sistema trate de hacer una gráfica aproximada de la respuesta ( ) para cada uno de los cuatro casos. Determine adicionalmente el valor de la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$.



2. La gráfica representa la respuesta de un termómetro clínico (primer orden) cuando se introdujo repentinamente en un baño a -20 ºC. Determine la ecuación del termómetro sabiendo que la temperatura ambiente es de 20ºC.



3. Determine al cabo de un segundo de cerrar el siguiente circuito, donde 24 voltios 20 , 20 Henrys.



4. Un termómetro clínico se introduce repentinamente en un baño a 80 ºC, calcule el valor de la constante de tiempo ( ) para que en 20 segundos indique 75 ºC. La temperatura ambiente es de 25 ºC.

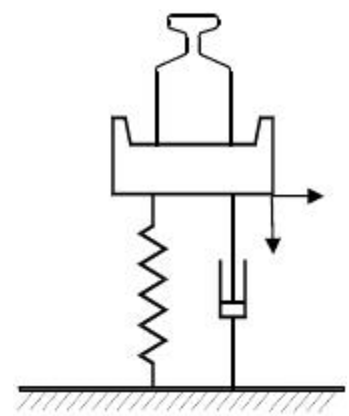
5. Se tiene una resistencia eléctrica introducida en un baño, el cual se puede considerar aislado térmicamente del exterior, y que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente. La resistencia se prende, y a los 5 minutos se introduce un termómetro de primer orden. ¿Cuál es la lectura del termómetro a los 2 minutos de haberse introducido? Si: 20 º , 2 , 2000 , 10 , 8 / º . / º , constante de tiempo del termómetro de 30 . Haga una gráfica aproximada de la respuesta del proceso.

6. Se tiene un tanque de aire comprimido conectado a un compresor mediante una válvula, a un manómetro por otra válvula, y a la atmósfera por otra válvula. Inicialmente el compresor se encuentra apagado y todas las válvulas abiertas. Se cierran las válvulas del manómetro y descarga a la atmósfera y posteriormente se prende el compresor, con lo cual el tanque comienza a llenarse de aire, con un incremento de presión lineal a razón de Un Psi por segundo. Treinta segundos después se abre la válvula del manómetro. Un minuto después de abierta esta última se apaga el compresor, y

se cierra la válvula que comunica el compresor con el tanque para evitar pérdidas. Cuál es el valor indicado por el manómetro al cabo de 2 minutos de haberse prendido el compresor, si este es un instrumento de primer orden con una constante de tiempo de 0,5 min.

7. Se tiene un envase con mezcla de agua y hielo sobre un mechero para calentarla, y fuera del envase se tiene un termómetro de primer orden con una constante de tiempo de 0.5 minutos. Se prende el mechero, con lo cual el agua comienza a calentarse a razón de 1 ºC por minuto. Treinta segundos después se introduce en el envase el termómetro. Un minuto después de introducido el termómetro se reduce la llama del mechero, con lo cual la temperatura del agua se mantiene constante. Cuál es el valor indicado por el termómetro al cabo de 2 minutos de haberse prendido el mechero.

8. En un sistema neumático se tiene un manómetro conectado a un tanque mediante una válvula A, el tanque posee dos válvulas más una B que lo conecta a un compresor y una C a la atmósfera. Inicialmente todas las válvulas se encuentran abiertas, se cierran A y C y se prende el compresor con lo cual la presión en el tanque aumenta a razón de 1 psi/seg, al cabo de un minuto se cierra la válvula B, se apaga el compresor y se abre la válvula A. Dos minutos después se vuelve a prender el compresor y se abre la válvula B con lo que la presión sigue aumentando con características similares al proceso anterior. Si el manómetro se comporta como un instrumento de segundo orden con radio de amortiguamiento igual a 0.8 y frecuencia natural igual a 1/60 rad/seg, determine la presión indicada por el manómetro al cabo de tres minutos de haberse cerrado la válvula B.



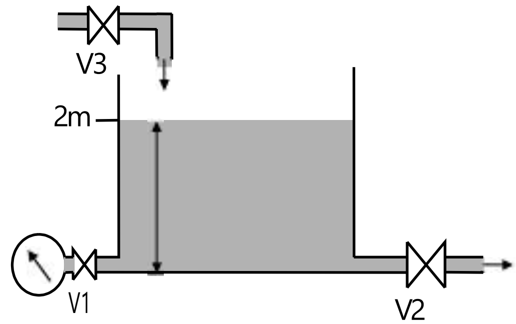
9. El esquema de la figura representa un sistema mecánico de masa resorte amortiguador, inicialmente el sistema está en reposo, es decir 0 y no existe peso sobre él, posteriormente se van colocando pesos sobre la masa de la siguiente forma: para 5 2 , para 10 se añade 1 , y en 30 se le quitan 2 . Si los valores de , y son respectivamente 1 , 1 / y 1 / , determine la posición de la masa para un tiempo de 45 segundos. Considere la gravedad de la tierra como 10 / .

10. Se tiene un voltímetro de corriente continua, el cual debido a su estructura interna se comporta como un instrumento de segundo orden con relación de amortiguamiento igual a 0.9 y frecuencia natural igual a 1 / . El instrumento se encuentra inicialmente desconectado y se conecta a una batería de 12 . Al cabo de un minuto se le conecta a la batería un cargador por lo cual su voltaje comienza a aumentar a razón de 0.1 voltios por segundo hasta llegar a 14 , a partir de este momento el voltaje de la batería permanece constante. ¿Cuál será el voltaje indicado por el instrumento al cabo de 2 minutos de haberse conectado?

11. Se tiene un medidor de flujo para gasolina, con el cual se quiere medir la cantidad de combustible que gasta un vehículo en un momento determinado. Inicialmente el vehículo se encuentra apagado por lo que el flujo de combustible es nulo, y se enciende el motor dejándolo en velocidad de marcha mínima, con lo cual empieza a consumir un caudal de combustible de 5 litros por hora. Al cabo de 5 minutos se comienza a acelerar el motor progresivamente por lo que el consumo de combustible aumenta a razón de 1 litro por hora cada minuto hasta alcanzar la velocidad máxima del motor, en donde éste consume 20 litros por hora. Tres minutos después de haber alcanzado la velocidad máxima se apaga el motor. Si el instrumento es de segundo orden con radio de amortiguamiento de 12 y frecuencia

natural de 60 radianes por segundo ¿Cuál será el valor de flujo indicado por el instrumento 24 minutos después de de haberse encendido el motor?

12. En la figura se observa un tanque de agua en donde se quiere medir el nivel mediante un manómetro conectado en el fondo a través de la válvula V1, dicho tanque tiene un área 10 posee una entrada de agua a través de la válvula V3 y una salida Qs a travez de la válvula V2. El manómetro funciona como un instrumento de segundo orden con 0.8 y ω, e inicialmente la válvula V1 se encuentra cerrada, indicando el manómetro presión atmosférica; el nivel de agua en el tanque se encuentra en 2 metros y los flujos de entrada y salida son iguales (5 /). Repentinamente se abre la válvula V1 y por tanto el manómetro empieza a medir la presión en el fondo del tanque que es proporcional al nivel, al cabo de 2 minutos se abre un poco más la válvula V2 por lo que el flujo de salida aumenta repentinamente al doble del flujo de entrada (2), dos minutos después se vuelve a cerrar un poco la válvula V2 hasta que los flujos de entrada y salida vuelven a ser iguales ( ), esto se mantiene durante 1 minuto al cabo del cual se abre un poco la válvula V3 por lo que el flujo de entrada pasa a ser el doble del flujo de salida (2). a) Haga la gráfica aproximada del proceso, entrada (nivel del tanque “ ”), salida (nivel indicado por el manómetro “ ”). b) Cual será el valor del nivel en el cual se encuentra el tanque ( ) al cabo de 7 minutos de comenzar el proceso. c) Cual es el valor de presión ( ), en psi., indicado por el manómetro el cabo de 7 minutos de comenzar el proceso. d) Cual es el error que se comete en la lectura del nivel a través del manómetro.



Datos adicionales: γ 9.800 / . 1 / 1.45 10 4 / .
γ

Tema 6. Estabilidad de Sistemas

Introducción

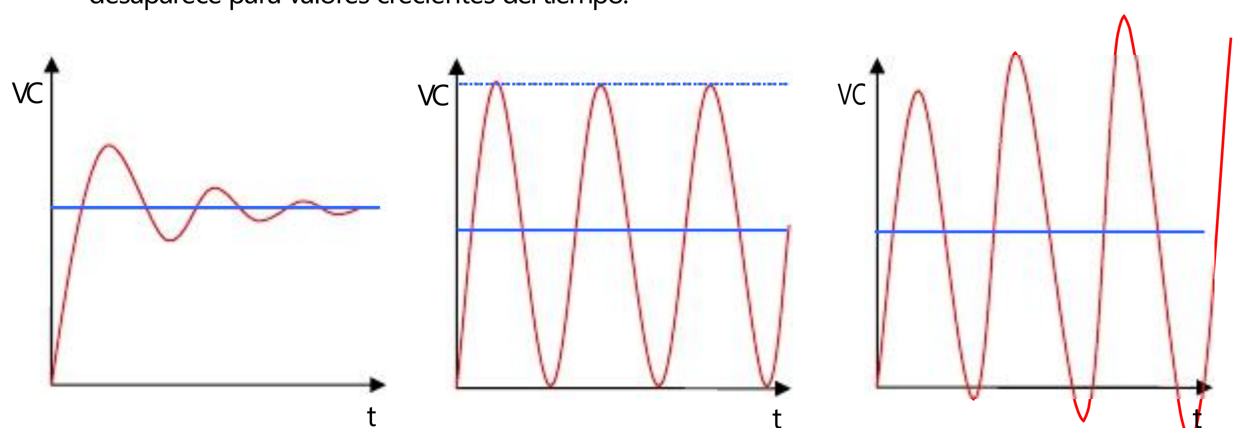
La noción de estabilidad es fundamental en el desarrollo de sistemas de control y en particular para los sistemas retroalimentados. La ausencia de esta propiedad vuelve inútil en la práctica a cualquier sistema.

Existen diversas formas de definir la estabilidad. Por ejemplo se puede hablar de la noción de estabilidad de un sistema autónomo que no es idéntica a la utilizada en sistemas sometidos a entradas y salidas (en donde la energía puede tener ciertos límites). También podemos referir que la estabilidad entre la entrada y la salida no necesariamente implica una estabilidad interna a los sistemas. Se puede hablar entonces de estabilidad local, global o semiglobal según el sistema no lineal en consideración.

Aquí nos vamos a interesar solamente a un tipo de estabilidad, utilizada para una clase de sistemas específicos, entre los que se encuentran los sistemas LTI, la cual es la descripción de estabilidad entrada salida, la cual nos lleva a la definición de estabilidad de entradas y salidas limitadas, comúnmente denominada estabilidad BIBO (Bounded Input Bounded Output).

Definiciones de estabilidad BIBO

1. Un sistema es estable si responde en forma limitada a una excitación limitada.
2. Un sistema estable es aquel en que los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes del tiempo.



Estable Estabilidad Inestable

Tal consideración sugiere que los coeficientes de en los términos exponenciales de la respuesta transitoria sean números reales negativos o números complejos con parte real negativa.
Esto implica que para que un sistema sea estable las raíces de la ecuación característica deben ser negativas o con parte real negativa. Esto es ya que la ecuación característica representa la parte transitoria (homogénea) de la ecuación que rige el sistema.
De lo anterior podemos observar que la estabilidad no depende de la entrada sino que es una característica propia del sistema.

Ejemplo 1. Para un sistema de primer orden la ecuación característica es:

$$\tau D + 1 = 0$$

La solución transitoria es de la forma:

$$y_T = Ce^{-t/\tau}$$

Este será estable siempre que la constante de tiempo sea positiva.

Para un sistema de segundo orden:

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2$$

La solución transitoria es de la forma:

Si $\xi > 1$ aparecen dos raíces reales positivas.

$$y_T = C_1 e^{\left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right)t}$$

Si $\xi = 1$ aparecen dos raíces reales iguales.

$$y_T = C_1 e^{-\xi\omega_n t} + C_2 t e^{-\xi\omega_n t}$$

Si $0 < \xi < 1$ aparece un par de raíces imaginarias.

$$y_T = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Si $\xi = 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = C_1 \sin \omega_n t - C_2 \cos \omega_n t$$

Si $\xi < 0$ aparece un par de raíces imaginarias puras.

$$y_T = e^{\xi\omega_n t}\left(C_1 \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t - C_2 \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t\right)$$

Solo en este último caso el sistema será inestable, ya que el coeficiente de t en el exponencial es positivo, luego los transitorios aumentan en el tiempo.

Estabilidad limitada

Es el caso que sirve de frontera entre l estabilidad absoluta y la inestabilidad, y se presenta cuando las raíces de la ecuación característica tienen partes reales iguales a cero.

La respuesta resulta ser una oscilación permanente cuya amplitud ni crece ni decae en el tiempo.

Esto es el caso de $\xi = 0$ para un sistema de segundo orden por ejemplo.

Conclusión

De todo lo anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

1. Un sistema es estable si todas la raíces de la ecuación característica son negativas o con parte real negativa.
2. Un sistema es inestable, si tiene en su ecuación característica alguna raíz positiva o con parte real positiva.
3. Un sistema tiene estabilidad limitada si alguna de sus raíces son pares de imaginarios puros. Una raíz cero no influye sobre la estabilidad porque la respuesta no es oscilatoria.
4. Si el polinomio de la ecuación característica tiene algún coeficiente ausente o negativo entonces el sistema es inestable.

Ejemplo 2. Algunas ecuaciones características

1. $(D+1)(D+2)(D+3)=0$ Es estable porque todas las raíces son negativas
2. $(s+1)(s+2)(s-3)(s^2+4)=0$ Inestable por tener una raíz positiva
3. $(s+1)(s^2-4)=0$ Inestable por tener una raíz positiva (+2)

4. $(s^2+4)(s^2+16)=0$ Estabilidad limitada ya que tiene dos pares de raíces imaginarias puras
5. $(s^2+16)(s+1)=0$ Estabilidad limitada. Ya que el exponencial domina sobre la otra función y no hay ninguna raíz positiva, ni con parte real positiva. Los exponenciales siempre dominan sobre los cosenos y senos.
6. $(s^2+2s-8)(s+2)(s^2+1)=0$ Que es lo mismo que: $(s+4)(s-2)(s+2)(s^2+1)=0$ Es inestable por poseer una raíz positiva.

Para hallar la estabilidad de cualquier sistema, se pueden utilizar métodos para facilitar la operación, Ya que en algunos casos si el polinomio es de orden elevado será poco práctico encontrar las raíces. Entre los métodos más sencillos para determinar la estabilidad están:

- Criterio de Routh
- Criterio de Hurwitz
- Criterio de la fracción continuada

Estos métodos sirven para hallar la estabilidad de ecuaciones características en forma de polinomios. Existirán además métodos más complejos para determinar la estabilidad a otros sistemas y obtener mayor información.

Criterio de Estabilidad Routh

Es un método que sirve para determinar si la ecuación característica tiene o no raíces con parte real positiva sin necesidad de determinar el valor preciso de estas raíces. Y sirve para determinar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es de orden n y de la forma:

$a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0 = 0$ en el dominio del tiempo

$a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1s + a_0 = 0$ en el dominio del Laplace

Y esta se aplica usando la tabla de Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\ldots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\ldots$
s^{n-3}	b_1	b_2	b_3	$\ldots$
s^{n-4}	c_1	c_2	c_3	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
s^0	0	0	0	0

Donde:

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$: son los coeficientes de l ecuación característica.

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_na_{n-3}}{a_{n-1}};\ b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_na_{n-5}}{a_{n-1}};\ b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1};\ c_1 = \frac{b_1a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1};\ \text{etc.}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta que solo se obtengan ceros.

El criterio de Routh dice que:

1. Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh tienen todos el mismo signo.
2. De lo contrario el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo.
3. Si existe un cero no terminal el sistema tiene un par de raíces imaginarias puras.
4. Si existen ceros terminales implica una raíz cero.

Observaciones al criterio de Routh

1. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es cero se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
2. Si alguno de los coeficientes de la ecuación característica es negativo se concluye que el sistema es inestable y no es necesario construir la tabla de Routh.
3. Todos los elementos de una fila cualquiera pueden multiplicarse o dividirse por una constante no negativa sin que se perturben las propiedades de la tabla.
4. Si el primer valor de una fila es cero, mientras que los otros valores no lo son el procedimiento consiste en sustituir el cero por un ε pequeño y positivo, y se continua el arreglo.

Ejemplo 3.

Para el sistema:

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

La tabla de Routh será:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 6 & 8 & 0 \\ s & 32/3 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Como en la primera columna no hay cambios de signo entonces el sistema tiene 3 raíces negativas o con parte real negativa y por lo tanto es estable.

Ejemplo 4.

Si se tiene la siguiente primera columna de Routh determinar todas las conclusiones posibles:

$$\begin{array}{c|c} s^5 & 2 \\ s^4 & 3 \\ s^3 & 4 \\ s^2 & -5 \\ s & 2 \\ s^0 & 0 \end{array}$$

El sistema tiene dos raíces positivas o con parte real positiva porque hay dos cambios de signo.
El sistema tiene una raíz cero por el cero terminal.
Hay dos raíces negativas o con parte real negativa.
El sistema es de quinto orden.
Por lo tanto es inestable.

Ejemplo 5.

Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

El sistema es de orden 4, posee 4 raíces.
No tiene cambios de signo, luego no tiene raíces positivas.
Posee u par de raíces imaginarias puras.

$$\begin{array}{c|c} s^4 & 3 \\ s^3 & 2 \\ s^2 & 5 \\ s & 0 \\ s^0 & 2 \end{array}$$

Posee un par de raíces negativas o con parte real negativa.
El sistema tiene estabilidad limitada por el cero no terminal.

Ejemplo 6.
Haga un estudio de la estabilidad del siguiente sistema usando el criterio de Routh

$$D^5x+3D^4x+7D^3x+20D^2x+6Dx+15x=u$$

El primer paso es entonces el construir la tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} s^5 & 1 & 7 & 6 & 0 \\ s^4 & 3 & 20 & 15 & 0 \\ s^3 & 1/3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 11 & 15 & 0 & \\ s & 6/11 & 0 & & \\ s^0 & 15 & 0 & & \end{array}$$

La primera columna de la tabla de Routh no posee cambios de signo luego todas sus raíces son negativas o con parte real negativa, por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 7.
Determinar todas las conclusiones posibles de la siguiente primera columna de Routh:

$$\begin{array}{c|c} s^{10} & 3 \\ s^9 & 2 \\ s^8 & 5 \\ s^7 & 4 \\ s^9 & -3 \\ s^5 & 2 \\ s^4 & 0 \\ s^3 & 1 \\ s^2 & 0 \\ s & 2 \\ s^0 & 0 \end{array}$$

El sistema es de orden 10
Tiene una raíz cero
Tiene dos raíces imaginarias puras
Tiene un par de raíces positivas o con parte real positiva
Es inestable por poseer un cambio De signo

Ejemplo 8.
Determinar, con el criterio de Routh, la estabilidad del sistema cuya ecuación característica es:

$$s^4+s^3-s-1=0$$

La tabla de Routh será: