

### 14.3 ACCIONES DE LOS ELEMENTOS

Una vez que se tienen las deformaciones de los elementos en coordenadas globales  $p$  se obtienen las acciones de los elementos en coordenadas globales  $P$  multiplicando la matriz de rigidez de miembro  $k_3$  por las deformaciones  $p$ . En el Capítulo 12 se indicó que la designación de  $k_3$  era para indicar que se refiere al sistema 3, que es **coordenadas globales**, se va a obviar el número y se designará simplemente  $k$  como se lo realizó en el Capítulo 13. Por lo tanto se tiene:

$$P^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$$

Se destaca una vez más que  $P^{(i)}$  son las acciones en coordenadas globales del elemento  $i$ . A éste vector por didáctica en el presente Capítulo se lo designa como  $PG$  donde la letra G indica que se trata de coordenadas globales. Por otro lado  $k^{(i)}$  es la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales y  $p^{(i)}$  es el vector de deformaciones en coordenadas globales.

En el computador se resuelve la estructura en coordenadas globales. Pero no es fácil la interpretación de  $PG$  cuando se tienen elementos inclinados razón por la cual se acostumbra pasar las acciones de los elementos de coordenadas globales a coordenadas locales.

Se denomina  $PL$  las acciones de los elementos en coordenadas locales y el paso de coordenadas globales a locales se realiza con la matriz  $T_{2-3}$  para ello se recuerda a continuación lo estudiado en los Capítulos 5 y 12.

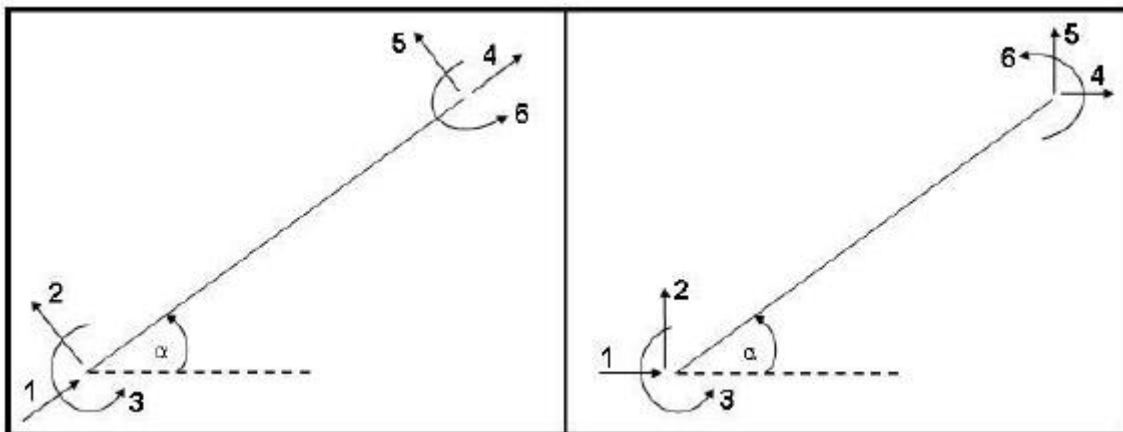


Figura 14.2.1 Sistema PL – pL

Figura 14.2.2 Sistema PG – pG

De acuerdo a la notación indicada en las figuras 14.2.1 y 14.2.2 se tiene:

$$pL = T_{2-3} pG \tag{14.1}$$

$$PG = T_{2-3}^t PL \tag{14.2}$$

$$T_{2-3}^t = T_{2-3}^{-1} \tag{14.3}$$

La ecuación (14.1) es por definición de la Matriz de Transformación de Coordenadas. La ecuación (14.2) es un teorema de la matriz  $T$  estudiado en el Capítulo 5 y la ecuación (14.3) es debida a que la matriz  $T_{2-3}$  es ortogonal. Lo que interesa es encontrar  $PL$  para el efecto de la ecuación (14.2) se tiene:

$$PL = (T_{2-3}^t)^{-1} PG$$

Pero la transpuesta de la matriz  $T_{2-3}$  es la inversa, luego se tendría que la inversa de la inversa es la misma matriz en consecuencia la última ecuación queda:

$$PL = T_{2-3} PG \quad (14.4)$$

Por lo tanto para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales  $PL$  se debe multiplicar la matriz  $T_{2-3}$  por el vector de cargas en coordenadas globales  $PG$ . Si la estructura solo tiene cargas en las juntas en éste paso se termina de resolver el problema. **Se destaca que se ha resuelto el Problema Complementario.** Cuando la estructura tiene cargas en los elementos a las acciones  $PL$  obtenidas se debe sumar el problema primario para encontrar la solución total.

## 14.4 EJERCICIOS RESUELTOS

### • EJEMPLO 1

Resolver el Ejemplo 4 desarrollado en el Capítulo 11 pero en forma similar a la que se realiza en el ordenador. En la figura 14.3.1 se describe el problema que es una estructura que tiene solo cargas en los nudos luego no existe problema primario y en las figuras 14.3.2 y 14.3.3 se indican los sistemas de coordenadas generalizadas  $Q - q$  y el sistema de coordenadas globales de los elementos  $P - p$ . Considerar  $E = 2173706.513 \text{ T/m}^2$ .

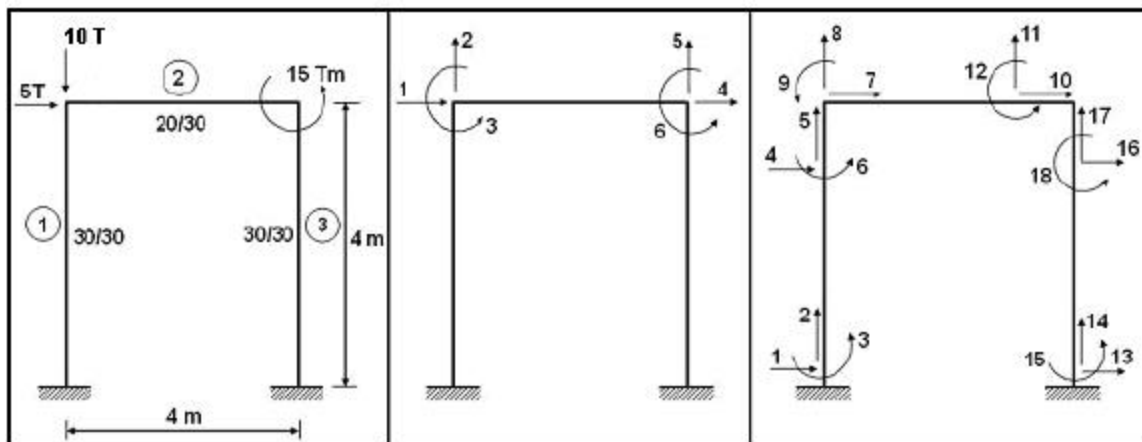


Figura 14.3.1

Figura 14.3.2  $Q - q$

Figura 14.3.3  $P - p$

### • SOLUCIÓN

La matriz de rigidez de la estructura  $K$  y el vector de cargas generalizadas  $Q$  se indican en el Capítulo 11, en el Ejemplo 4. La solución del sistema de ecuaciones lineales:  $Q = K q$  reporta:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{PG}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -0.395 \\ 11.004 \\ 1.686 \\ 0.395 \\ -11.004 \\ -0.104 \end{bmatrix} &
 \mathbf{PG}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} &
 \mathbf{PG}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -4.605 \\ -0.978 \\ 7.272 \\ 4.605 \\ 0.978 \\ -11.146 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz de paso de coordenadas locales a globales para el elemento 1 es la siguiente:

$$\mathbf{T}_{2-3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 la matriz  $\mathbf{T}_{2-3}$  es la identidad y para el elemento 3 la mencionada matriz es igual a la del elemento 1. Las acciones de los elementos en coordenadas locales  $\mathbf{PL}$  se obtienen con la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{PL}^{(i)} = \mathbf{T}_{2-3}^{(i)} \mathbf{PG}^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{PL}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 11.004 \\ 0.395 \\ 1.686 \\ -11.004 \\ -0.395 \\ -0.104 \end{bmatrix} &
 \mathbf{PL}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 4.597 \\ 0.989 \\ 0.105 \\ -4.597 \\ -0.989 \\ 3.853 \end{bmatrix} &
 \mathbf{PL}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -0.978 \\ 4.605 \\ 7.272 \\ 0.978 \\ -4.605 \\ 11.146 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Al no existir cargas en los elementos aquí termina el problema. El significado físico de los vectores obtenidos se puede ver al final del Ejemplo 4 resuelto en el Capítulo 11.

## • EJEMPLO 2

Resolver el Ejemplo anterior si en la viga actúa una carga uniforme distribuida de 4.41 T/m. A la izquierda de la figura 14.4 se presenta el problema y a la derecha se indican las acciones de empotramiento perfecto.

## • SOLUCIÓN

En base a las acciones de empotramiento perfecto se determina el vector de cargas generalizado  $\mathbf{q}$ .

Por otra parte, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es la misma del ejemplo anterior. Al resolver el sistema de ecuaciones lineales  $\mathbf{q} = \mathbf{K} \mathbf{q}$ , se encuentra el vector de coordenadas  $\mathbf{q}$ .

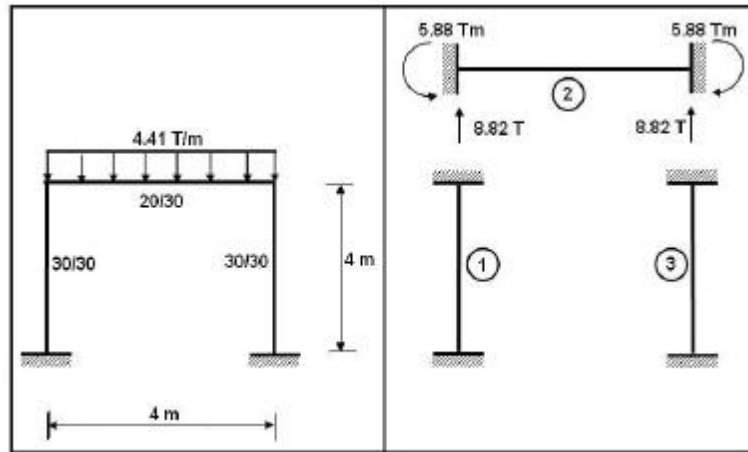


Figura 14.4 Pórtico de Ejemplo 2 y Problema Primario

Los vectores  $Q$  y  $q$  que se encuentran son:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -8.820 \\ -5.880 \\ 0.000 \\ -8.820 \\ 5.880 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Como se está resolviendo con el mismo sistema de coordenadas generalizadas del ejercicio anterior los vectores de colocación de cada uno de los elementos son los del Ejemplo 1. Con esta indicación las deformaciones de los elementos en coordenadas globales, son:

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \end{bmatrix} \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0000254 \\ -0.0001803 \\ -0.0029962 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix} \quad p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ 0.0000000 \\ -0.0000254 \\ -0.0001803 \\ 0.0029962 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez en coordenadas globales son las del ejemplo anterior. Luego al efectuar el producto  $PG^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$  se tiene:

$$PG^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.654 \\ 8.818 \\ -2.200 \\ -1.654 \\ -8.818 \\ -4.415 \end{bmatrix} \quad PG^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} \quad PG^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.654 \\ 8.818 \\ 2.200 \\ 1.654 \\ -8.818 \\ 4.415 \end{bmatrix}$$

Al pasar las acciones de coordenadas globales a coordenadas locales empleando la matriz de transformación de coordenadas  $T_{2-3}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 PL^{(1)} &= \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} & PL^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1.656 \\ 0.000 \\ -1.465 \\ -1.656 \\ 0.000 \\ 1.465 \end{bmatrix} & PL^{(3)} &= \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se ha resuelto el problema complementario. Por lo tanto a las acciones de los elementos obtenidas se deben sumar las acciones del problema primario. A la derecha de la figura 14.4 se indica el Problema Primario, si se agrupa estas acciones en un vector denominado  $Q_2$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q_2^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} & Q_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0.00 \\ 8.82 \\ 5.88 \\ 0.00 \\ 8.82 \\ -5.88 \end{bmatrix} & Q_2^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La solución total es igual al Problema Primario más el Problema Complementario. Sea  $PT$  el vector de acciones finales de los elementos el mismo que se obtiene de la siguiente manera:

$$PT^{(i)} = PL^{(i)} + Q_2^{(i)}$$

Al realizar la suma matricial indicada en cada uno de los elementos del marco plano se halla:

$$\begin{aligned}
 PT^{(1)} &= \begin{bmatrix} 8.818 \\ -1.654 \\ -2.200 \\ -8.818 \\ 1.654 \\ -4.415 \end{bmatrix} & PT^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1.656 \\ 8.820 \\ 4.415 \\ -1.656 \\ 8.820 \\ -4.415 \end{bmatrix} & PT^{(3)} &= \begin{bmatrix} 8.818 \\ 1.654 \\ 2.200 \\ -8.818 \\ -1.654 \\ 4.415 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El significado físico de las acciones  $PT$  se indica al final del Ejemplo 5 del Capítulo 11.

### • EJEMPLO 3

Resolver la armadura plana, indicada a la izquierda de la figura 14.5 cuyo sistema de coordenadas generalizadas se indica a la derecha. El módulo de elasticidad del material es  $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ . Todos los elementos tienen la misma sección transversal y el área es igual a  $2 \text{ cm}^2$ .

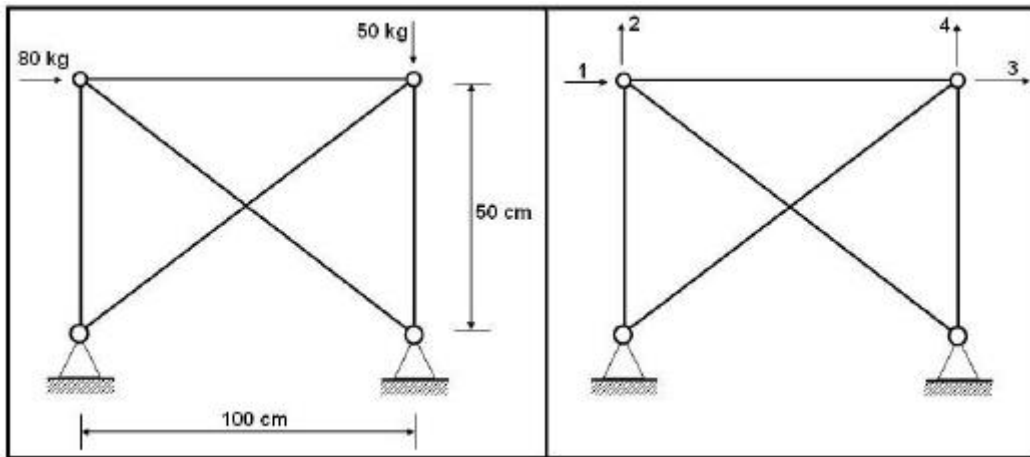


Figura 14.5 Armadura Plana de Ejemplo 3 y sistema de coordenadas  $Q - q$

• SOLUCIÓN

La matriz de rigidez de la estructura  $K$  resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 68621.67 & & & & & \\ -14310.84 & 87155.42 & & & & \\ -40000.00 & 0.00 & 68621.67 & & & \\ 0.00 & 0.00 & 14310.84 & 87155.42 & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

Los vectores de cargas y coordenadas generalizadas son:

$$Q = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Lo expuesto hasta aquí de la solución de éste ejemplo ha sido tratado con detenimiento en capítulos anteriores. En la figura 14.6 se presenta la numeración de los elementos y el sistema de coordenadas globales de cada uno de los elementos. Como se identifica al elemento la numeración del sistema  $P - p$  no se la realiza en forma continua como en los otros ejemplos, se pudo haber numerado de corrido.

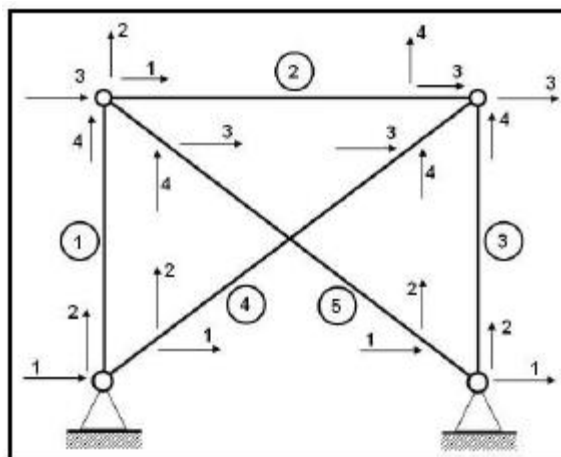


Figura 14.6 Coordenadas globales de los elementos.

Por otra parte los vectores de colocación de la armadura plana analizada son los siguientes:

$$\begin{aligned} VC(1) &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2] \\ VC(2) &= [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \\ VC(3) &= [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4] \\ VC(4) &= [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4] \\ VC(5) &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2] \end{aligned}$$

En base al vector de colocación y al vector de coordenadas generalizadas  $q$  se obtienen los vectores de deformación  $p$  en coordenadas globales; estos son:

$$p^{(1)} = p^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.002017 \\ 0.000331 \end{bmatrix} \quad p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.002017 \\ 0.000331 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix} \quad p^{(3)} = p^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.001341 \\ -0.000793 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales son:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 & & & \\ 0.00 & 80000.00 & & \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \\ 0.00 & -80000.00 & 0.00 & 80000.00 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{SIMÉTRICA} \\ \end{matrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 40000.00 & & & \\ & 0.00 & & \\ -40000.00 & & 0.00 & \\ & & & 0.00 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{SIMÉTRICA} \\ \\ \end{matrix}$$

$$k^{(4)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ 14310.84 & 7155.42 & & \\ -28621.67 & -14310.84 & 28621.67 & \\ -14310.84 & -7155.42 & 14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{SIMÉTRICA} \\ \\ \end{matrix}$$

$$k^{(5)} = \begin{bmatrix} 28621.67 & & & \\ -14310.84 & 7155.42 & & \\ -28621.67 & 14310.84 & 28621.67 & \\ 14310.84 & -7155.42 & -14310.84 & 7155.42 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{SIMÉTRICA} \\ \\ \end{matrix}$$



Las fuerzas internas de elemento  $PG$  en coordenadas globales se obtienen del producto matricial de la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales por el vector de deformación también en coordenadas globales. El resultado de éste producto es el siguiente:

$$PG^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$$

$$PG^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \end{bmatrix} \quad PG^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ -27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \quad PG^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \end{bmatrix} \quad PG^{(4)} = \begin{bmatrix} -27.04 \\ -13.50 \\ 27.04 \\ 13.50 \end{bmatrix} \quad PG^{(5)} = \begin{bmatrix} -52.9 \\ 26.5 \\ 52.9 \\ -26.5 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas de los elementos encontradas se presentan en la figura 14.7, teóricamente ahí se podría dar por finalizado el problema pero es bastante difícil utilizarlas para el diseño lo mejor es tener en coordenadas locales. Por ese motivo los resultados se pasan a dichas coordenadas por medio de la matriz  $T_{2-3}$

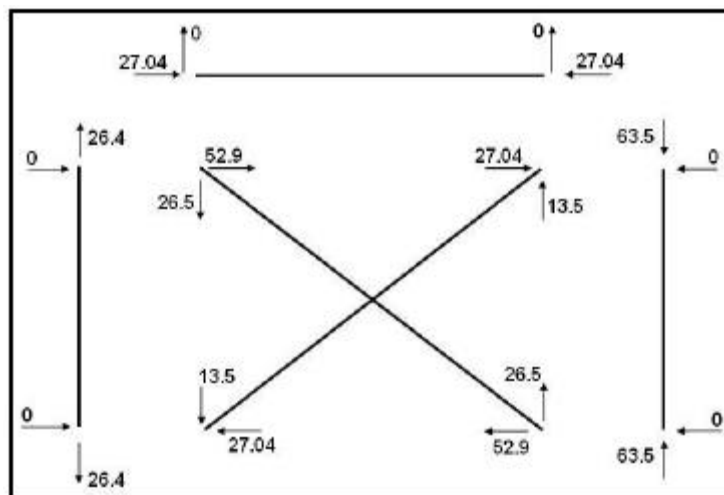


Figura 14.7 Acciones de los elementos en coordenadas globales

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0.0 & 0.0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0.0 & 0.0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

El valor del ángulo  $\alpha$  para los diferentes elementos, son:

$$\alpha(1) = 90^\circ, \quad \alpha(2) = 0^\circ, \quad \alpha(3) = 90^\circ, \quad \alpha(4) = 26.565^\circ, \quad \alpha(5) = 153.435^\circ$$

Luego las matrices  $T_{2-3}$  son:

$$T_{2-3}^{(1)} = T_{2-3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{2-3}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & 0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & 0.89443 \end{bmatrix}$$

$$T_{2-3}^{(5)} = \begin{bmatrix} -0.89443 & 0.44721 & 0.00 & 0.00 \\ -0.44721 & -0.89443 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.89443 & 0.44721 \\ 0.00 & 0.00 & -0.44721 & -0.89443 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 la matriz  $T_{2-3}$  es la identidad. Finalmente para encontrar las acciones de los elementos en coordenadas locales se multiplica la matriz de transformación de coordenadas por el vector de fuerzas en coordenadas globales como se ha realizado en los ejemplos anteriores.

$$PL^{(1)} = \begin{bmatrix} -26.4 \\ 0.0 \\ 26.4 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad PL^{(2)} = \begin{bmatrix} 27.04 \\ 0.00 \\ 27.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} \quad PL^{(3)} = \begin{bmatrix} 63.5 \\ 0.0 \\ -63.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$PL^{(4)} = \begin{bmatrix} -30.2 \\ 0.0 \\ 30.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad PL^{(5)} = \begin{bmatrix} 52.9 \\ 0.0 \\ -52.9 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Los resultados alcanzados se muestran en la figura 14.8. Finalmente se deja al lector comprobar el equilibrio de las juntas.

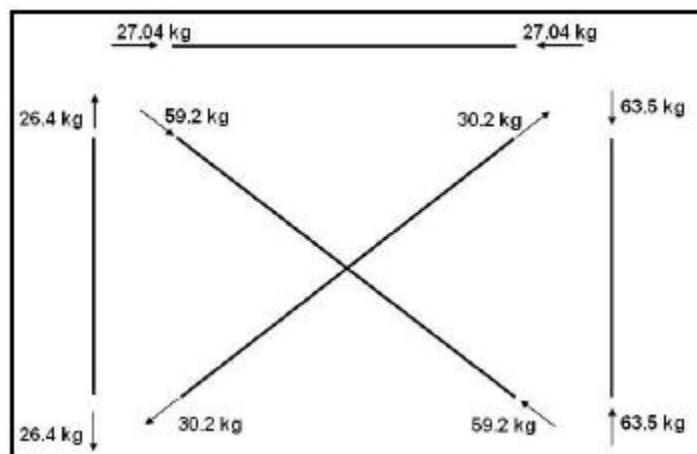
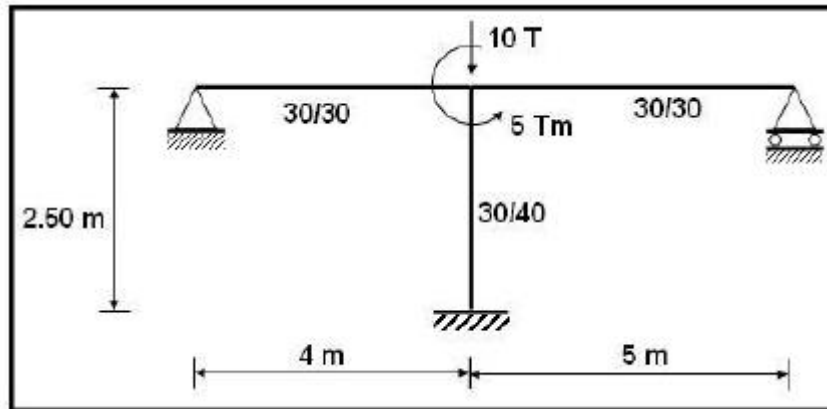


Figura 14.8 Acciones en los elementos en coordenadas locales.

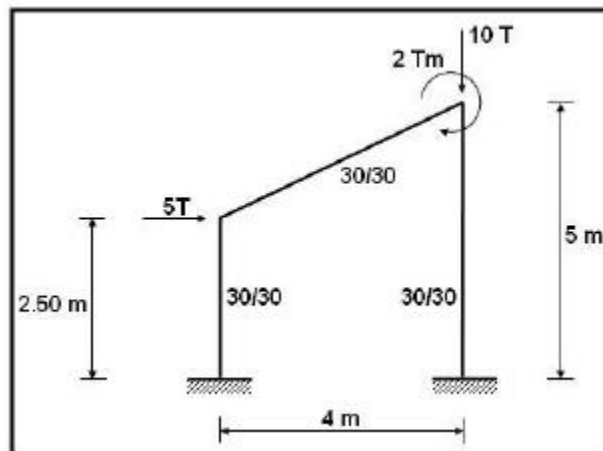
### 14.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Encontrar las acciones finales en los elementos utilizando **MATLAB**, no utilizar el sistema de computación **CEINCI-LAB**. Considerar  $E = 2100000 T/m^2$  para los pórticos planos y  $E = 2000000 Kg/cm^2$  para las armaduras planas.

#### EJERCICIO N.- 1

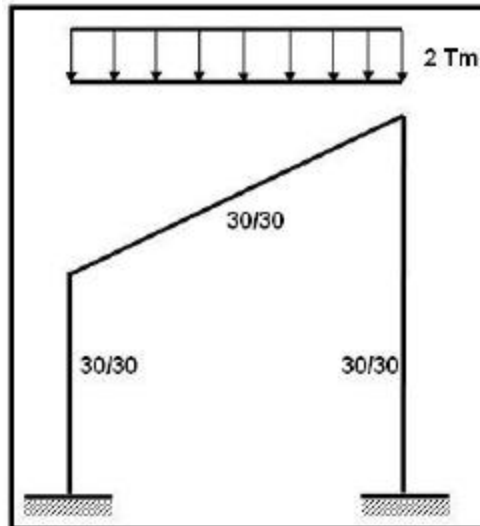


#### EJERCICIO N.- 2

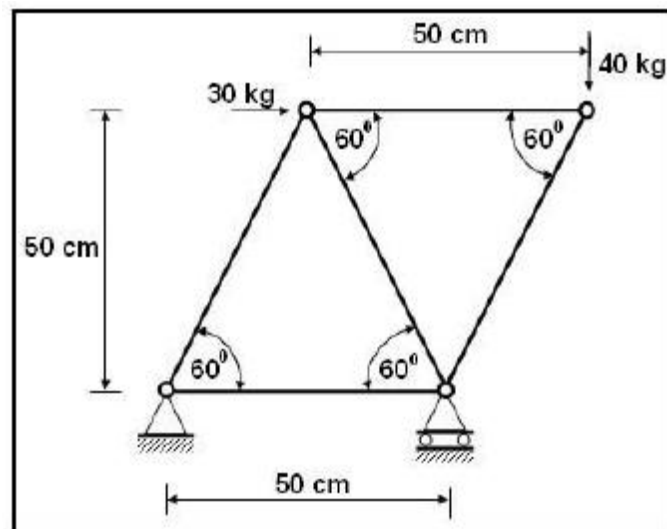


#### EJERCICIO N.- 3

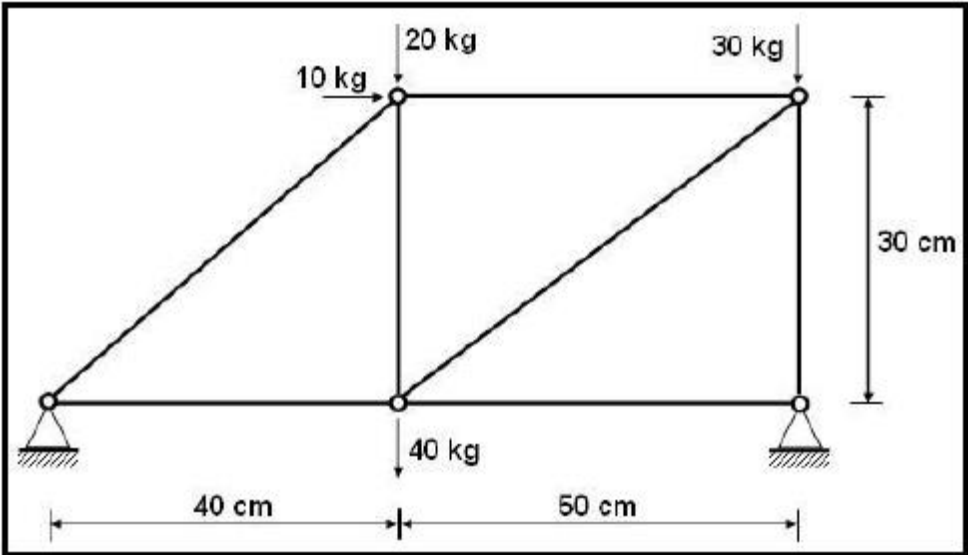
La estructura del Ejercicio N.- 3, es la misma del Ejemplo anterior en consecuencia la longitud de sus elementos es la misma, solo lo que cambia es la carga, que ahora es uniforme distribuida.

**EJERCICIO N.- 4**

El área de la sección transversal es igual en todos los elementos y vale  $A = 1.12 \text{ cm}^2$

**EJERCICIO N.- 5**

Todos los elementos de la armadura plana, que se indica a continuación, tienen la misma sección transversal y es igual a  $2 \text{ cm}^2$ . Se pide al igual que en los Ejercicios anteriores encontrar las acciones finales en coordenadas locales en los extremos de los elementos.



## **CAPITULO 15**

---

### **ANALISIS ESTATICO CON CEINCI-LAB**

#### **RESUMEN**

Se presenta la teoría y el uso del sistema de computación **CEINCI-LAB** para resolver: armaduras planas y pórticos planos. Una buena parte de los programas que se utilizan para resolver Armaduras Planas sirven para Pórticos Planos y Mallas Espaciales, por esta razón cuando se estudie los pórticos planos se indicará con detalle el uso de estos programas, lo propio se realizará en el Capítulo 18 dedicado a las Mallas.

Se presentan dos ejemplos para el caso de Armaduras Planas, el segundo ejemplo es bastante práctico y tiene que ver con el reforzamiento de una estructura de acero de una Piscina; estas estructuras son bastante rígidas en el sentido transversal porque se debe cubrir una gran luz, pero en el sentido longitudinal son bastante flexibles por lo que se recomienda reforzar con una celosía Tipo San Andrés. Se resuelve un ejemplo de ésta celosía pero considerando únicamente tres elementos horizontales para no alargar la exposición y poder resolver completamente en pocas páginas.

En el primer ejercicio que se resuelve con Pórticos Planos, se explica con mucho detenimiento el uso de los diferentes programas que se requieren en su solución pero a más de ello se presenta el marco teórico respectivos, para repasar lo estudiado en capítulos anteriores.

Luego se resuelven dos pórticos de un piso y un vano, en el primer caso se ve que no se obtienen directamente las reacciones de los apoyos, en cambio en el segundo caso se encuentra directamente las reacciones en los apoyos. Nótese que para el primer caso se tienen 6 grados de libertad mientras que para el segundo caso se tienen 12 grados de libertad ya que se consideró tres grados de libertad en cada uno de los apoyos. En el primer caso la matriz de rigidez admite inversa en cambio en el segundo caso la matriz de rigidez no admite inversa por lo que se trabaja con la matriz de rigidez condensada.

Posteriormente se presenta la solución de un pórtico con cargas puntuales sobre los elementos, esto con el objeto de ilustrar cómo se resuelve un pórtico con cualquier tipo de carga. En este caso el usuario debe encontrar las acciones de empotramiento perfecto en coordenadas locales y dar como dato al programa.

Una forma de reforzar una estructura de hormigón armado es mediante la colocación de diagonales de acero, con lo que se convierte en una estructura mixta de hormigón y acero. La solución de este tipo de estructuras se ilustra mediante la solución de un pórtico con vigas y columnas de hormigón y diagonales de acero.

## 15.1 ARMADURAS PLANAS

Son estructuras que tienen dos grados de libertad por nudo, un desplazamiento horizontal y un desplazamiento vertical; existen giros en una armadura plana pero estas son coordenadas dependientes. Sus elementos solo trabajan axialmente, no trabajan a flexión por este motivo es que se los modela como  $A_0, I = \infty$ .

### 15.1.1 Matriz de rigidez de un elemento

En la parte superior izquierda de la figura 15.1 se presenta el sistema de coordenadas del elemento cuando no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido, de ahí la presencia de los apoyos, a este sistema se denomina 1. En la parte superior izquierda se tiene el sistema de coordenadas locales que se identifica con el 2, aquí ya se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido. Finalmente en la parte inferior se muestra el sistema 3 que corresponde al sistema de coordenadas globales de un elemento de una armadura plana.

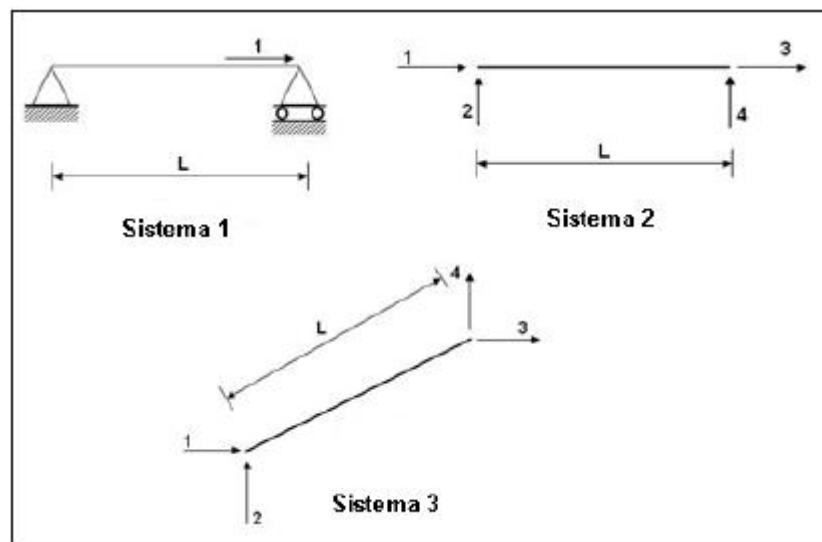


Figura 15.1 Sistema de coordenadas de un elemento de una armadura plana.

La matriz de rigidez para el sistema uno se denomina  $k_1$  y es:

$$k_1 = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix} \quad (15.1)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $A$  es el área de la sección transversal y  $L$  la longitud del elemento. La matriz de paso del sistema de coordenadas 1 al sistema de coordenadas 2 es:

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

La matriz de rigidez en el sistema 2, que se llama  $k_2$ , se halla del triple producto matricial, siguiente.

$$k_2 = T_{1-2}^t k_1 T_{1-2} \quad (15.3)$$

$k_2$  Es la matriz de rigidez en coordenadas locales (axial y transversal). Finalmente la matriz de paso del sistema 2 al sistema 3, es:

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (15.4)$$

Siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X; así para una barra horizontal  $\alpha = 0$ . Finalmente la matriz de rigidez en coordenadas globales (horizontal y vertical) se halla con la siguiente expresión.

$$k_3 = T_{2-3}^t k_2 T_{2-3} \quad (15.5)$$

La subrutina que obtiene la matriz de rigidez de una armadura plana en la forma indicada, en el programa **CEINCI-LAB** se denomina **kdiagonal** Los datos de entrada y forma de uso de este programa, son:

- **[k3]=kdiagonal (A,L,E,seno,coseno)**

Donde **A** es el área de la sección transversal; **L** es la longitud del elemento; **E** es el módulo de elasticidad del material; **seno** es el valor de  $\text{sen } \alpha$ ; **coseno** es el valor de  $\cos \alpha$ .

### 15.1.2 Solución total de una armadura plana

Se presenta un resumen de los pasos a seguir para su solución.

- Se seleccionan los grados de libertad de la estructura. Esto se lo hace con la subrutina **cg**. Se destaca, una vez más, que hay dos grados de libertad por nudo.
- Se obtienen los vectores de colocación de cada uno de los elementos. El vector de colocación de un elemento está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final. La subrutina que obtiene los vectores de colocación de todos los elementos se llama **vc**.
- Se halla la matriz de rigidez de la estructura **K** por ensamblaje directo, con la subrutina **krigidez**. Esta subrutina a su vez llama a la subrutina **kdiagonal** para calcular la matriz de rigidez de cada elemento.
- Se encuentra el vector de cargas generalizadas **Q** con la subrutina **cargas\_armadura**. Una armadura plana solo tiene cargas en las juntas de tal manera que el usuario puede indicar directamente el vector de cargas **Q**.
- Se obtienen los desplazamientos de los nudos **q**, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$Q = K q \quad (15.6)$$

- Se encuentran las fuerzas finales en cada uno de los elementos, para ello se determina



en primer lugar las deformaciones  $p$  en coordenadas globales, con la ayuda del vector de colocación; luego las fuerzas  $P_G$  en coordenadas globales y finalmente con la matriz de paso  $T_{2-3}$  las fuerzas  $P_L$  en coordenadas locales. Todo esto se hace con la subrutina **fuerzas\_armadura**

$$P_G = k_3 p \quad (15.7)$$

$$P_L = T_{2-3} P_G \quad (15.8)$$

- vii. Es fundamental que se halle el momento de volcamiento debido a que en algunas estructuras de acero se han volteado durante un sismo o un fuerte viento, como se aprecia en la figura 15.2



**Figura 15.2** Volcamiento de una torre de transmisión. (Cortesía de Theofilos Toulkeridis)

- **EJEMPLO 1**

Resolver la armadura plana, con nudos simples, indicada en la figura 15.3, la longitud  $L = 50 \text{ cm}$ . el área de la sección transversal de los elementos es igual y vale  $1.13 \text{ cm}^2$ . La fuerza  $F$  aplicada en la parte superior vale  $50 \text{ kg}$ ., y el módulo de elasticidad del acero  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ .

- **SOLUCIÓN**

En la figura 15.4 se presenta, a la izquierda, la numeración de los nudos y elementos de la armadura y a la derecha los grados de libertad de acuerdo a la numeración de los nudos. Antes de resolver el problema, el lector debe leer la entrada de datos y salida de resultados de algunos de los programas de **CEINCI-LAB**, que se indican más adelante, en el desarrollo del Ejemplo 3. Con esta acotación el programa que se ha elaborado para resolver el ejercicio es el siguiente:

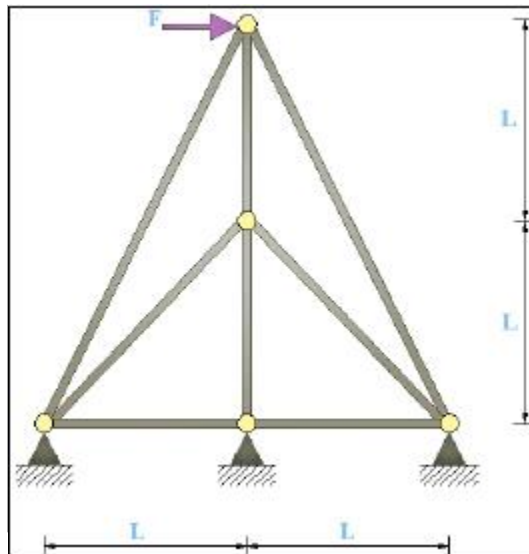


Figura 15.3 Armadura plana a resolver con **CEINCI-LAB**

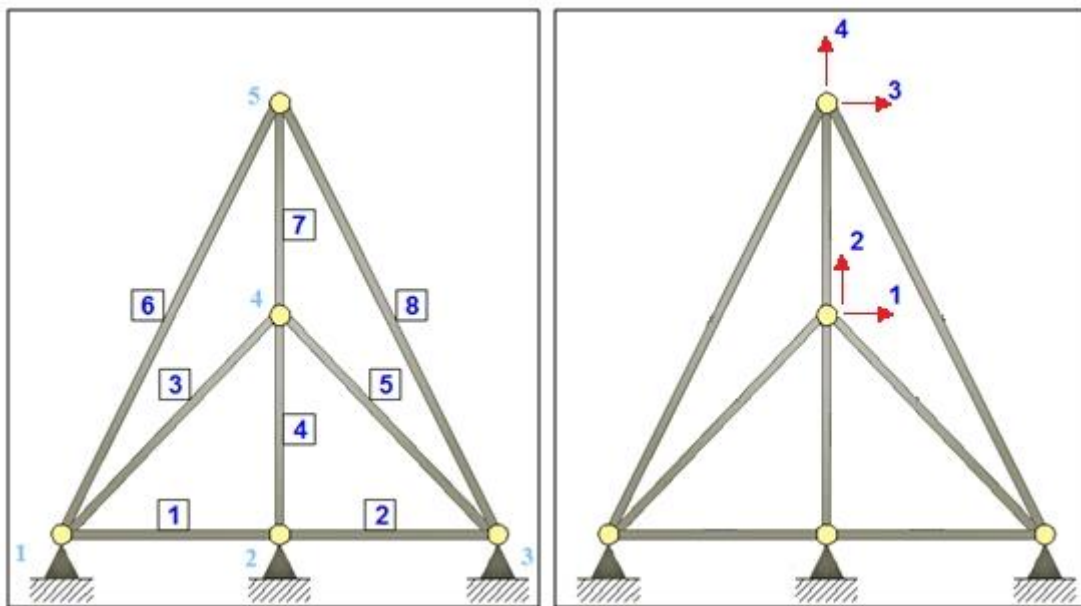


Figura 15.4 Numeración de nodos, elementos y grados de libertad

```

function armadura_ej1
%
% Programa para resolver Armaduras Planas
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%   CEINCI-ESPE
%   Noviembre de 2009
%-----
% armadura_ej1
%-----
nod=5; % Número de nodos de armadura plana
nr=3; % Número de nodos restringidos
L=50; %Dimensión

```

```

%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1 1 1; % Nudo restringido Des X, Des Y
      2 1 1;
      3 1 1];
%
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES); % CG Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 2 1 1 1 1; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     3 1 4 0 0 0 0;
     4 2 4 1 3 2 1;% Se genera elemento 7
     5 3 4 0 0 0 0;
     6 1 5 1 2 2 0];% Se genera elemento 8
% Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 -L 0.0 0 0 0.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       2 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
       3 L 0.0 0 0 0.0 0.0;
       4 0 L 0 0 0.0 0.0;
       5 0 2*L 0 0 0 0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
% Dibuja la armadura plana
dibujo(X,Y,NI,NJ);
% Vector de colocación
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
%Longitud, Seno y Coseno de elementos
[L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
% Vector de cargas generalizadas
njc=1; % Número de juntas Cargadas
F=[5 50.0 0.0]; %Junta Cargada, FH, FV
[Q]=cargas_armadura(njc,ngl,CG,F)
% Areas de los elementos
[ELEM]=[1.12; %Area del elemento 1 en cm2
        1.12; 1.12;1.12;1.12;1.12;1.12;1.12];
% Matriz de rigidez de la estructura
E=2100000; % Modulo de elasticidad del acero en kg/cm2
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
% Desplazamientos y Giros
q=K\Q
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas_armadura(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q)
% Cálculo de Momento de Volcamiento
punto=1; % Es el número de nudo con respecto al cual se calcula momento
[Momento]=mom_vol(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,X,Y,NI,NJ,njc,F,punto)
% ---end---

```

El vector de colocación de un elemento está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y final. La matriz que contiene a estos vectores se ha denominado VC, que se indica a continuación.

$$VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La primera fila de VC corresponde al vector de colocación del elemento 1, ver figura izquierda de 15.4; la segunda fila al elemento 2, etc. Los elementos 1 y 2 no aportan a la matriz de rigidez de la estructura ya que sus vectores de colocación son cero; los restantes elementos si aportan a la matriz K

El programa que determina la matriz de rigidez de la armadura se denomina **krigidez**, este programa llama al programa **kdiagonal**. A continuación se indica, a la izquierda, la matriz de rigidez del elemento 3 en coordenadas globales; a la derecha se presenta la misma matriz pero en la parte superior se ha anotado el vector de colocación, que indica la posición a la cual van cada uno de los elementos, así por ejemplo el término de la primera fila y primera columna de la matriz de rigidez va a la fila 0 y columna 0 pero como no existe esa fila simplemente no contribuye a la matriz de rigidez, por este motivo se ha tachado las filas y columnas cuyo vector de colocación es cero.

$$k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 \\ 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \quad k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ \hline -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ \hline -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \\ \hline -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

El tercer elemento si contribuye y va a la posición (1,1) de la matriz de rigidez de la estructura que también es de 4 por 4, ya que se tienen 4 grados de libertad. A continuación se presenta la matriz de rigidez del elemento 4 y su respectiva contribución a la matriz de rigidez de la estructura, todo esto con el objeto de que el lector comprenda el ensamblaje directo.

$$k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47040 & 0 & -47040 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -47040 & 0 & 47040 \end{bmatrix} \quad k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 47040 & 0 & -47040 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -47040 & 0 & 47040 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez el elemento 5, tiene los mismos valores que la del elemento 3 pero difieren en algunos signos por el ángulo  $\alpha$ . La contribución del elemento 5 a la matriz de rigidez se indica a continuación.

$$k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \\ -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \quad k_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ \hline -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ \hline -1.6631 & 1.6631 & 1.6631 & -1.6631 \\ \hline 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \\ \hline 1.6631 & -1.6631 & -1.6631 & 1.6631 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

En forma similar se procede con los elementos 6, 7 y 8. La matriz de rigidez de la estructura que se encuentra es la siguiente.

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 0.3326 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2734 & 0 & -0.4704 \\ 0 & 0 & 0.0841 & 0 \\ 0 & -0.4704 & 0 & 0.8070 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas  $Q$  se pudo escribir directamente en el programa sin necesidad de utilizar ningún programa ya que las carga solo actúa en el nudo 5. Este vector es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la solución del sistema de ecuaciones lineales, se halla el vector  $q$  que contiene los desplazamientos de los nudos 4 y 5.

$$Kq = Q$$

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento horizontal del grado de libertad 3, es 5.9 mm. Las deformaciones de los elementos  $p$ , se halla en base al vector  $q$  y al vector de colocación; para los elementos 1 al 5 estas deformaciones son cero; para los elementos 6, 7 y 8 el vector  $p$  es el mismo y es el siguiente.

$$p^{(6)} = p^{(7)} = p^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento 7 es la misma que la del elemento 4, que fue ya se indicó anteriormente, al multiplicar esta matriz por  $p^{(7)}$  se halla que  $p_c = 0$ . Es cero vector; es decir todos sus elementos son cero.

Las fuerzas en coordenadas globales para el elemento 6, se halla de la siguiente manera:

$$P_G^{(6)} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.4207 & 0.8415 & -0.4207 & -0.8415 \\ 0.8415 & 1.6830 & -0.8415 & -1.6830 \\ -0.4207 & -0.8415 & 0.4207 & 0.8415 \\ -0.8415 & -1.6830 & 0.8415 & 1.6830 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.0000 \\ 50.0000 \\ 25.0000 \\ -50.0000 \end{bmatrix}$$

De igual manera se procede con el elemento 8. En la figura 15.5 se indican las fuerzas en coordenadas globales. Nótese que existe equilibrio en cada uno de los elementos y que también existe equilibrio de juntas.

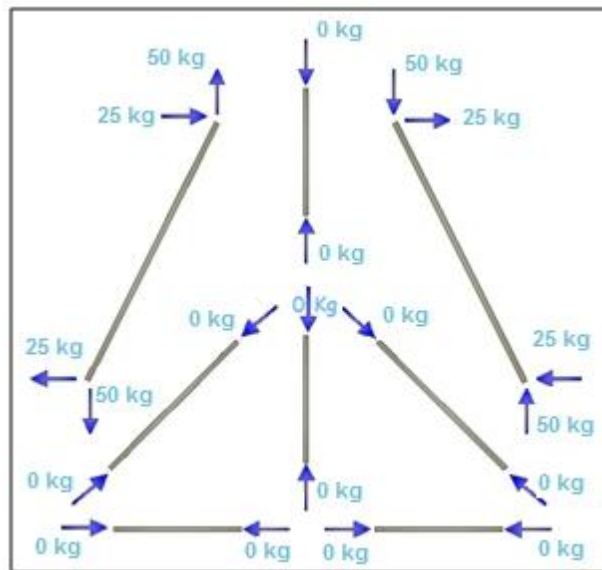


Figura 15.5 Fuerzas en Coordenadas Globales en los elementos de armadura plana.

Aquí podría finalizar la solución de la armadura plana, para luego manualmente encontrar la resultante de las dos fuerzas que actúan en cada nudo, descomponiendo las fuerzas horizontales y verticales. En forma matricial esto se realiza por medio de la matriz de paso de coordenadas locales a globales (Ecuación 15.4 ). Para el elemento (6) se indica la forma de obtener el vector de cargas en coordenadas locales  $p_l$

$$p_l^{(6)} = T_{2-3}^{(6)} p_g^{(6)}$$

$$PL^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 & 0.8944 \\ 0 & 0 & -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25.0000 \\ 50.0000 \\ 25.0000 \\ -50.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.9017 \\ 0 \\ 55.9017 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados que reporta el programa, a nivel de fuerzas en los elementos se indica en la figura 15.6. El elemento 6 trabaja a tracción y el elemento 8 a compresión.

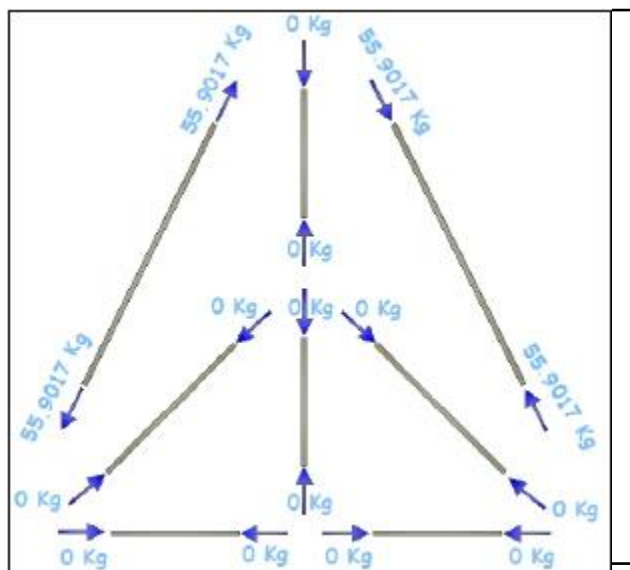


Figura 15.6 Fuerzas en Coordenadas Locales de la Armadura.

Al multiplicar las fuerzas horizontales y verticales que aparecen en la figura 15.5, por su distancia con respecto a la base, se obtiene el momento de volcamiento, con respecto al nudo 1, que vale  $M = 5000 \text{ kg} * \text{cm}$ .

### 15.1.3 Reforzamiento de estructuras de acero

Las estructuras de acero que son utilizadas para cubrir Piscinas, Naves Industriales o Coliseos, por lo regular se las construye pensando solo en la carga vertical, no en la sísmica, es así que son muy rígidas en el sentido transversal, que tienen que cubrir grandes luces, debido a que las columnas se las orienta de tal manera que tengan un gran momento de inercia en ese sentido y las vigas son de dimensiones considerables. A más de ello hay una gran cantidad de pórticos, todo esto hace que la estructura sea muy rígida en el sentido transversal.

El problema se presenta en el sentido longitudinal, debido en primer lugar al hecho de que solo se tienen dos pórticos en dicha dirección, que son los exteriores; luego a que no existe una verdadera viga entre las columnas de éstos pórticos, lo que existe es una correa que está pensada para soportar el recubrimiento de la Piscina pero en el caso de un sismo debe trabajar como viga. Finalmente en muy pocos proyectos se observa la presencia de tensores que son muy adecuados para soportar las fuerzas sísmicas en sentido longitudinal.

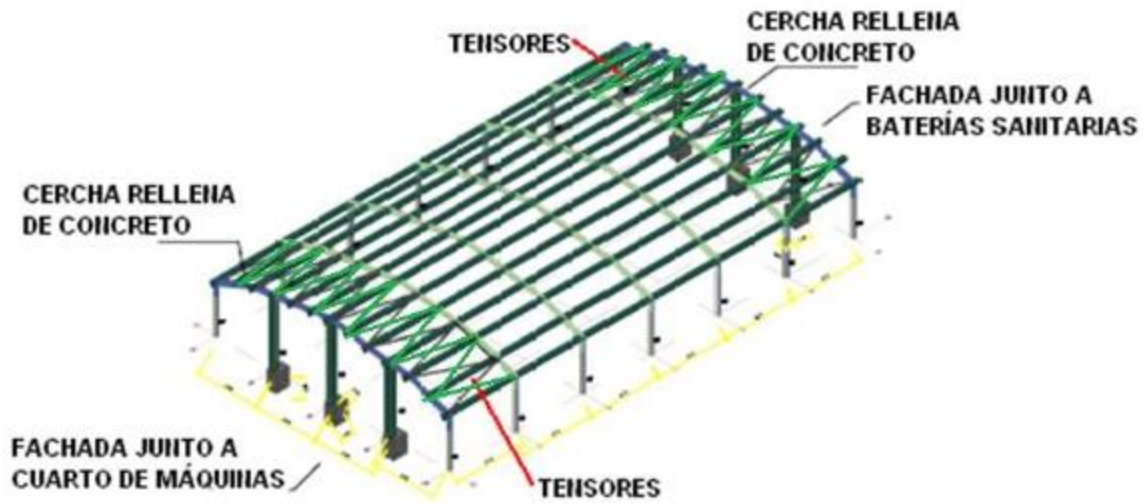
En la figura 15.7 se presenta, parte de la cubierta de la Piscina del Colegio Fernández Madrid, ubicada en el Centro Colonial de Quito, al fondo se observa el pórtico transversal exterior con mampostería confinada en la parte interior y ventanas en la parte superior. Nótese las dimensiones considerables que tienen las vigas transversales en contraste con las correas que existen en sentido longitudinal.



**Figura 15.7** Vista interior de la Piscina del Colegio Fernández Madrid de Quito. Sin reforzamiento.

En la figura 15.8 se presenta el reforzamiento sísmico para la estructura de la Piscina del Colegio Fernández Madrid, que consiste en encamisar con hormigón las columnas existentes que confinan la mampostería en los pórticos exteriores transversales y prolongarles hasta la cercha de la cubierta, a más de ello se colocarán tensores en los vanos exteriores como se indica en la figura 15.8. Todo esto con el propósito de que la estructura resista un sismo en sentido longitudinal.



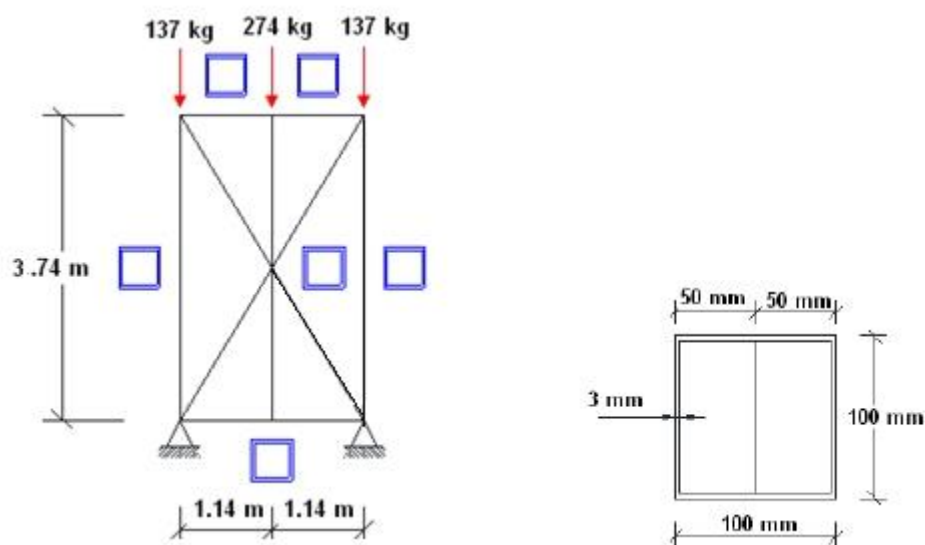


**Figura 15.8** Reforzamiento sísmico de la estructura de la Cubierta del Colegio Fernández Madrid. Aguiar (2012)

Los tensores, en los vanos exteriores, ante la acción sísmica en sentido longitudinal o ante fuerzas de viento, trabajan como vigas de gran peralte sujetas a fuerzas horizontales. Con este antecedente se presenta el siguiente ejemplo, que por motivos didácticos a la viga de borde se la ha hecho muy pequeña para poder presentar los resultados, en forma fácil

- **EJEMPLO 2**

Resolver la estructura de acero, presentada a la izquierda de la figura 15.9, si está compuesta por dos perfiles "G" de 100/50/15/3 mm. Las cargas verticales son las debidas a la acción sísmica en sentido longitudinal. La altura de 3.74 m., de la cercha vendría a ser la distancia entre los pórticos transversales. En realidad solo se coloca como correa un perfil "G" de 100/50/15/3 mm., pero se refuerza con otro perfil de las mismas características. El módulo de elasticidad del acero, es  $E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ .



**Figura 15.9** Geometría de Cercha de Ejemplo 2.



## • SOLUCIÓN

Todos los elementos estructurales de la armadura tienen el mismo perfil, luego tienen la misma sección transversal y es de  $11.41 \text{ cm}^2$ . En realidad no se dibujo toda la viga de borde en sentido transversal solo se dibujaron tres correas que están separadas 1.14 m.

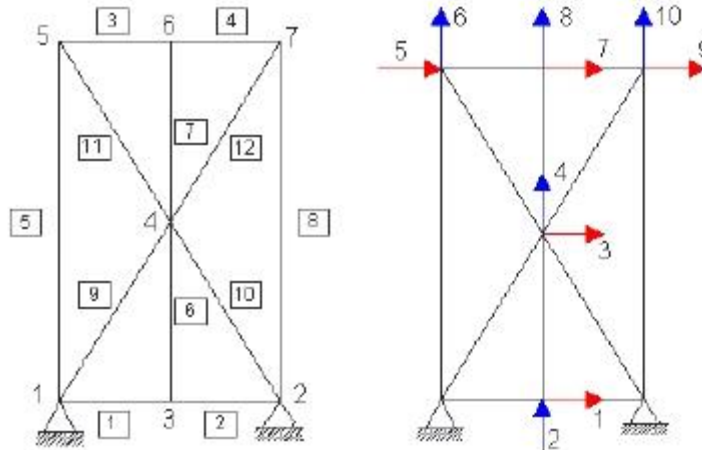


Figura 15.10 Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

A la izquierda de la figura 15.10 se presenta la numeración de los nudos y elementos de la armadura plana; a la derecha los grados de libertad considerados. Cada nudo de la armadura tiene dos grados de libertad, la componente de desplazamiento horizontal y la de desplazamiento vertical. Nótese que en el nudo 4, existen grados de libertad, ya que se soldarán los perfiles que llegan a ese nudo.

```
function armadura_ej2
% Programa para resolver Armaduras Planas tipo San Andres
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%   CEINCI-ESPE
%   Diciembre de 2009
%-----
% armadura_ej2
%-----
nod=7; % Número de nudos de armadura plana
nr=2; % Número de nudos restringidos
F1=137; F2=274;% Se trabaja en kg y cm
%
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1 1 1; % Nudo restringido Des X, Des Y
      2 1 1];
%
% Calculo de Coordenadas Generalizadas y grados de libertad
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 0 0 0 0; %elem, ni, nf, elem a gene, inc en elem, inc en ni, inc en nf
      2 3 2 0 0 0 0;
      3 5 6 1 1 1 1;
      5 1 5 1 3 1 2;
      6 3 4 1 1 1 2;
      9 1 4 1 3 3 3;
      10 2 4 1 1 2 1];
% Generación de vector NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final) de elementos
[NI,NJ]=gn_portico(GEN);
```

```

% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 4 0.0 374;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
      3 114 0.0 1 1 0.0 374/2;
      2 114*2 0 1 5 0.0 374;
      6 114 374 0 0 0.0 0.0];
% Generación de las coordenadas de los nudos
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
% Dibuja la armadura plana
dibujo (X,Y,NI,NJ);
% Vector de colocación
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
% Lngitud, Seno y Coseno de elementos
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
% Vector de cargas generalizadas
njc=3; % Número de juntas Cargadas
F=[5 0 -F1;
  6 0 -F2;
  7 0 -F1]; %Junta Cargada, FH, FV
[Q]=cargas_armadura(njc,ngl,CG,F);
% Areas de los elementos
area=11.41; %area de un elemento
SECCION=[1 area,11 1];
[ELEM]=gelem_armadura(SECCION);
% Matriz de rigidez de la estructura
E=2100000; % Modulo de elasticidad del acero en kg/cm2
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)
% Desplazamientos y Giros
q=K\Q
% Fuerzas y momentos finales en los elementos
[FF]=fuerzas_armadura(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q)
% Cálculo de Momento de Volcamiento
punto=1; % Es el número de nudo con respecto al cual se calcula momento
[Momento]=mom_vol(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,X,Y,NI,NJ,njc,F,punto)
% ---end---

```

En la figura 15.11 se presenta la solución de la armadura. Los tensores en las cubiertas de las estructuras de acero, son una excelente alternativa para soportar las fuerzas sísmicas o de viento en sentido longitudinal.

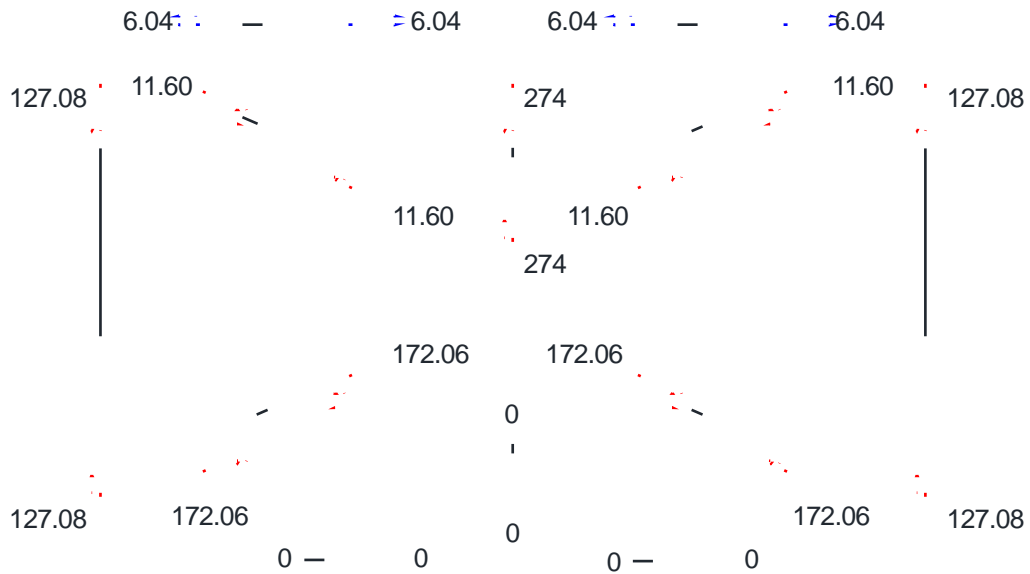


Figura 15.11 Fuerzas que actúan en la Armadura del Ejemplo 2.

## 15.2 PORTICOS PLANOS

Los pórticos planos tienen tres grados de libertad por nudo, un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y una rotación. En este apartado se considera que todos los elementos de un pórtico, son totalmente flexibles.

### 15.2.1 Matriz de rigidez de un elemento

En forma similar al caso de una armadura plana, en la figura 15.12 se muestran los tres sistemas de un elemento de un pórtico plano. El sistema 1 corresponde al caso en que no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido; el sistema 2 son las coordenadas locales (axial y transversal) y el sistema 3 son las coordenadas globales (horizontal y vertical).

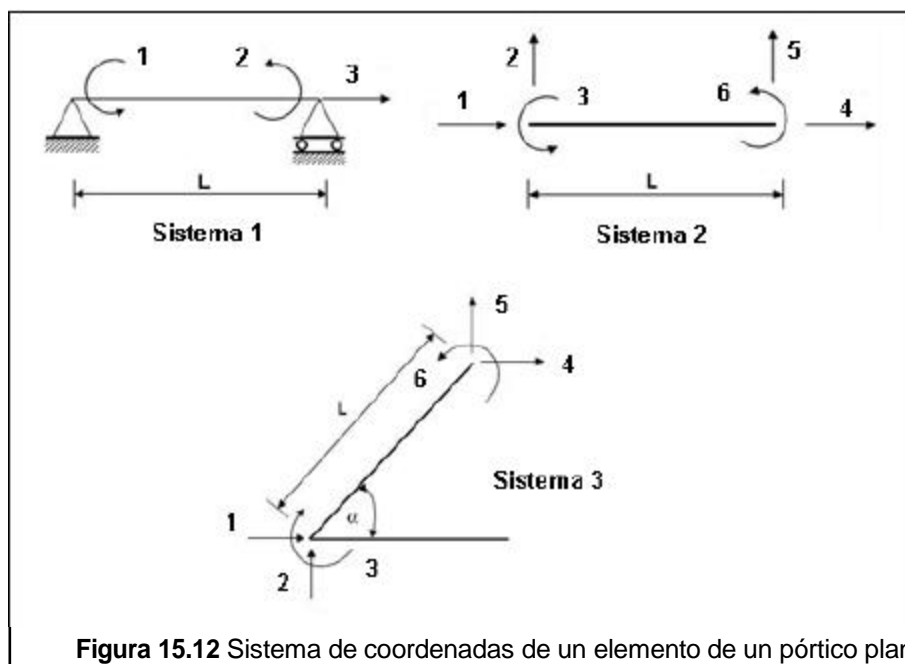


Figura 15.12 Sistema de coordenadas de un elemento de un pórtico plano.

La matriz de rigidez en el sistema 1, es la siguiente:

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} (1+\phi) & \frac{2EI}{L} (1-2\phi) & 0 \\ \frac{2EI}{L} (1-2\phi) & \frac{4EI}{L} (1+\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (15.9)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal;  $A$  es el área de la sección transversal;  $L$  es la longitud del elemento;  $\phi$  es el factor que mide el efecto del corte.

$$\phi = \frac{3\beta EI}{GA L^2} \quad (15.10)$$

Siendo  $\beta$  el factor de forma que vale 1.2 para elementos rectangulares;  $G$  es el módulo de corte.

La matriz de paso de los sistemas 1 al 2 y del 2 al 3, son:

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15.11)$$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15.12)$$

Las matrices de rigidez en coordenadas locales  $k_2$  y en coordenadas globales  $k_3$  se hallan con las ecuaciones (15.3) y (15.5) ya indicadas. Pero realizando los productos matriciales con las matrices (15.9), (15.11) y (15.11). En **CEINCI-LAB** la matriz que determina la matriz de rigidez de un elemento de un pórtico plano se denomina: **kmiembro**. Los datos de entrada y forma de uso es la siguiente:

- **[k3]=kmiembro (b,h,L,E,seno,coseno)**

Donde  $k_3$  es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales;  $b, h$  son la base y la altura de la sección transversal del elemento;  $L$  es la longitud;  $E$  es el módulo de elasticidad;  $\operatorname{seno}$  es el valor de  $\operatorname{sen} \alpha$ ;  $\operatorname{coseno}$  es el valor del  $\cos \alpha$ .

### 15.2.2 Solución de un Pórtico Plano

El Análisis Matricial de Estructuras, está orientado a resolver una estructura en el computador, sin embargo de ello y con el propósito de conocer exactamente cómo se resuelve una estructura por el Método de los Desplazamientos, se desarrolla el siguiente ejercicio,

#### • EJEMPLO 3

Se considera que todos los elementos de la estructura de la figura 15.13, son totalmente flexibles, se pide:

- Encontrar el Vector de Cargas Generalizadas  $\bar{q}$ , empleando el Algoritmo denominado: Problema Primario y Problema Complementario.
- Indicar como se obtiene el Vector de Cargas Generalizadas  $\bar{q}$  utilizando la librería de programas de **CEINCI-LAB**.
- Describir la forma como se halla la matriz de rigidez de la estructura con **CEINCI-LAB**.
- Presentar la solución total con **CEINCI-LAB**

No se desea elaborar un Programa que resuelva la estructura en forma completa como se hizo con el Ejemplo 1, lo que se quiere es ilustrar como se utilizan las diferentes subrutinas de **CEINCI-LAB**.

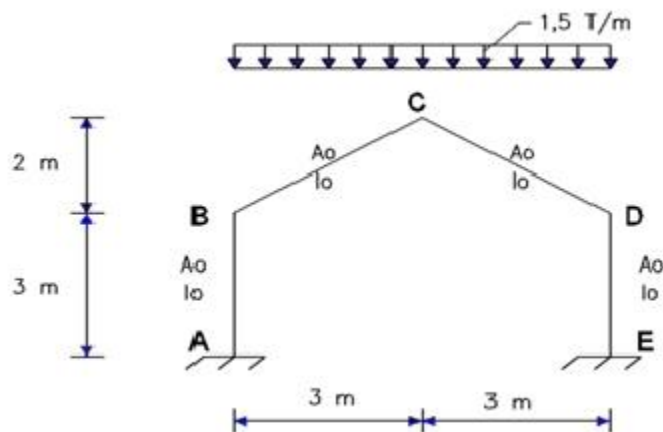


Figura 15.13 Pórtico Plano correspondiente al Ejemplo 3.

#### • SOLUCIÓN

A la izquierda de la figura 15.14 se presenta la numeración de los nudos, que se ha considerado en la solución, en concordancia con esta numeración de los nudos, a la derecha se indican los grados de libertad. Por ser los elementos totalmente flexibles existente tres grados de libertad en cada nudo.

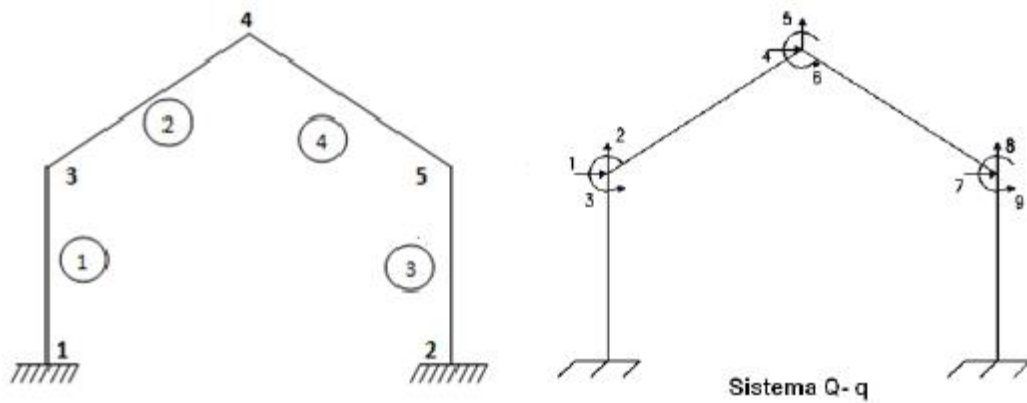


Figura 15.14 Numeración de nudos, elementos y sistema de coordenadas  $Q - q$

- **Problema Primario**

Por definición el Problema Primario, es aquel en el cual actúan todas las cargas y la condición es que el vector  $q = 0$ . Es decir que actúan todas las cargas y los nudos interiores no se desplazan ni rotan, para lograr esto es necesario que existan cargas (fuerza o momento) de fijación  $R_i$  que impiden ese grado de libertad.

Estas cargas de fijación se colocan con sentido contrario al sistema de cargas  $Q$  indicado en la figura 15.14. El Problema Primario finaliza con la determinación de estas cargas de fijación y ahí se obtendrá la verdadera dirección que tienen. En la figura 15.15 se presenta el problema primario de la estructura analizada.

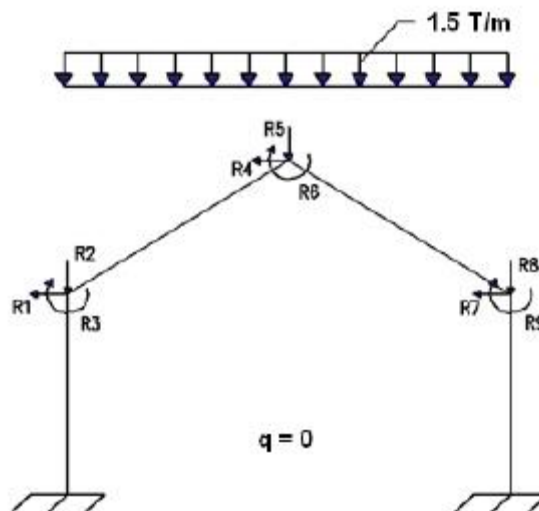


Figura 15.15 Problema Primario

El Problema Primario tiene 2 etapas, que son equilibrio de elementos y equilibrio de juntas.

- **Equilibrio de elementos**

Para el equilibrio de elementos se considera que cada elemento está empotrado-empotrado debido a la condición de  $q = 0$ . En la figura 15.16 se presentan los elementos empotrados-empotrados y las acciones de empotramiento perfecto, se ha utilizado un subíndice el mismo que corresponde a la identificación de los nudos que se ha dado en la figura 15.13. Nótese que los momentos de empotramiento perfecto se han colocado con el signo que salen.

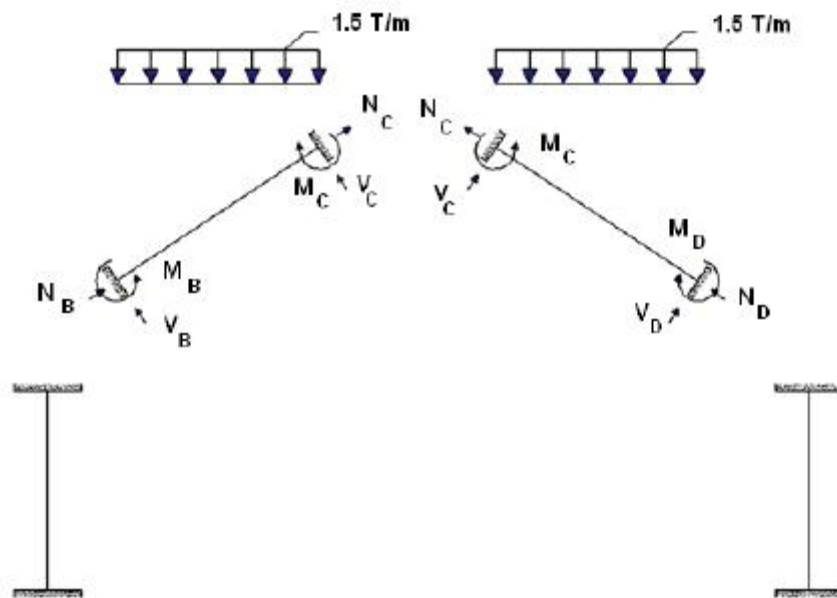


Figura 15.16 Equilibrio de Elementos

Para encontrar las acciones de empotramiento perfecto, la carga vertical  $W$  debe descomponerse en sus dos componentes  $W_x$  que es una carga uniforme axial al eje del elemento y en la componente  $W_y$  que es una carga transversal uniforme; en la figura 15.17 se presentan estas cargas pero en un elemento diferencial. Las ecuaciones con las que se hallan estas cargas uniformes distribuidas son:

$$W_y = W * \cos^2 \alpha = 1,5 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 1,03 \text{ T/m}$$

$$W_x = W * \text{sen } \alpha * \cos \alpha = 1,5 * \frac{2}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,69 \text{ T/m}$$

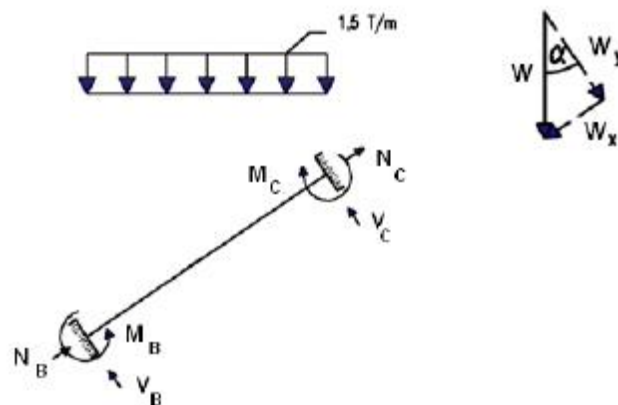


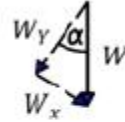
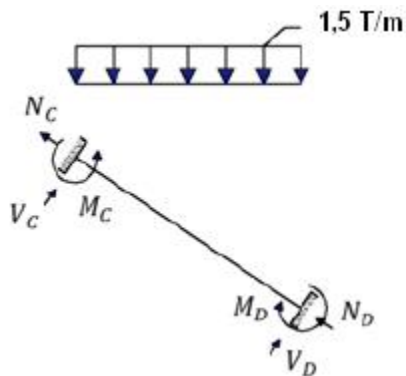
Figura 15.17 Acciones de empotramiento perfecto de elemento BC.

$$N_C = N_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_x * \vartheta_1(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 0,69 * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{13}}\right) dx = 1,24 \text{ T}$$

$$V_C = V_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_y * \vartheta_2(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1,03 * \left(1 - \frac{3x^2}{13} + \frac{2x^3}{(\sqrt{13})^3}\right) dx = 1,85 \text{ T}$$

$$M_C = M_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_y * \vartheta_3(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1,03 * \left(x - \frac{2x^2}{\sqrt{13}} + \frac{x^3}{13}\right) dx = 1,11 \text{ T}$$

Para el elemento CD se tiene algo similar y se presenta a continuación



$$W_Y = W * \cos^2 \alpha = 1,5 * \frac{3}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 1,03 \text{ T/m}$$

$$W_x = W * \sin \alpha * \cos \alpha = 1,5 * \frac{2}{\sqrt{13}} * \frac{3}{\sqrt{13}} = 0,69 \text{ T/m}$$

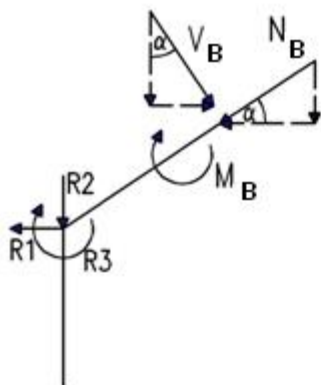
$$N_C = N_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_x * \varnothing_1(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 0,69 * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{13}}\right) dx = 1,24 \text{ T}$$

$$V_C = V_D = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \varnothing_2(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1,03 * \left(1 - \frac{3x^2}{13} + \frac{2x^3}{(\sqrt{13})^3}\right) dx = 1,85 \text{ T}$$

$$M_C = \int_0^{\sqrt{13}} W_Y * \varnothing_3(x) dx = \int_0^{\sqrt{13}} 1,03 * \left(x - \frac{2x^2}{\sqrt{13}} + \frac{x^3}{13}\right) dx = 1,11 \text{ T}$$

#### • Equilibrio de Junta B

Las acciones de empotramiento perfecto actúan con sentido contrario en la Junta por este motivo se han cambiado de sentido. Para el equilibrio de la Junta la fuerza axial y de corte se descomponen en sus componentes horizontal y vertical.



$$\sum F_x = 0$$

$$V_B * \sin \alpha - N_B * \cos \alpha - R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

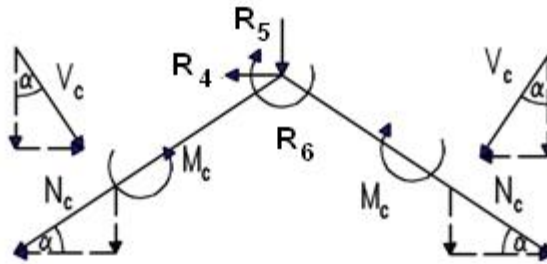
$$-V_B * \cos \alpha - N_B * \sin \alpha - R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = -2,22 \text{ T}$$

$$\sum M = 0$$

$$R_3 + M_B = 0 \Rightarrow R_3 = -1,11 \text{ T.m}$$



- **Equilibrio de Junta C**



$$\sum F_X = 0$$

$$V_C * \text{sen } \alpha - N_C * \text{cos } \alpha - R_4 - V_C * \text{sen } \alpha + N_C * \text{cos } \alpha = 0 \Rightarrow R_4 = 0$$

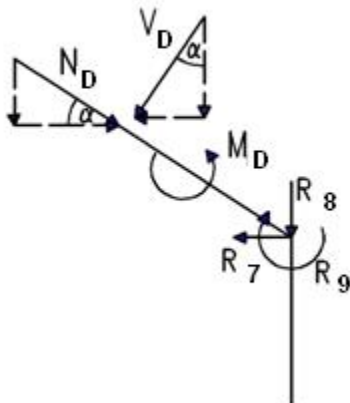
$$\sum F_Y = 0$$

$$-V_C * \text{cos } \alpha - N_C * \text{sen } \alpha - R_5 - V_C * \text{cos } \alpha - N_C * \text{sen } \alpha = 0 \Rightarrow R_5 = -4,11 T$$

$$\sum M = 0$$

$$R_6 + M_C - M_C = 0 \Rightarrow R_6 = 0$$

- **Equilibrio de Junta D**



$$\sum F_X = 0$$

$$-V_D * \text{sen } \alpha + N_D * \text{cos } \alpha - R_7 = 0 \Rightarrow R_7 = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-V_D * \text{cos } \alpha - N_D * \text{sen } \alpha - R_8 = 0 \Rightarrow R_8 = -2,22 T$$

$$\sum M = 0$$

$$R_9 - M_D = 0 \Rightarrow R_9 = 1,11 T.m$$

- **Problema Complementario**

Solo actúan las cargas de fijación con sentido contrario al del Problema Primario para que generen el vector de coordenadas generalizadas  $q$ . En la figura 15.18 se presenta el Problema Complementario, que es el que se resuelve con Análisis Matricial de Estructuras.

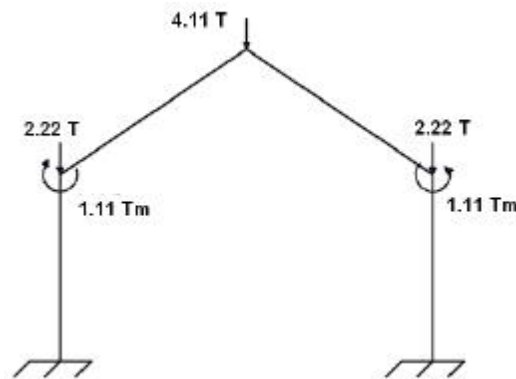


Figura 15.18 Problema Complementario

En el Problema Complementario se tienen las cargas solo en las juntas y en la dirección del sistema  $q$ . Por lo que se cumple con la segunda hipótesis de estructuras. La primera hipótesis se refiere al hecho de que solo interesa la posición de las juntas y para ello utilizamos coordenadas para definir la posición de las juntas o nudos.

De la figura 15.18 se desprende que el vector de cargas  $q$  es:

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.22 \\ -1.11 \\ 0 \\ -4.11 \\ 0 \\ 0 \\ -2.22 \\ [ 1.11 ] \end{bmatrix}$$

La segunda pregunta del Ejemplo 3, se refiere a como se determina este vector de cargas utilizando el sistema de computación **CEINCI-LAB**. Para ello se van a ir indicando cada una de las subrutinas que se requieren, con la entrada de datos y resultados esperados.

- Descripción de algunos programas
- $[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES)$

El programa **cg** sirve para encontrar el **CG** y **ngl** de estructuras que tienen tres grados de libertad por nudo o dos grados de libertad por nudo. Sirve entonces por ahora, para pórticos planos o armaduras planas. Si es armadura plana el usuario solo indicará en la matriz **RES** tres datos por fila y son el número de nudo, código en X, y código en Y. Se destaca que código vale 1 o 0; el número 1 es para cuando no existe ese grado de libertad; el código 0 es para cuando existe ese grado de libertad; para pórticos planos se tienen 4 datos por cada nudo restringido: el número del nudo restringido y los códigos para los desplazamientos en X, Y, y la rotación.

Los datos de entrada, son: **nod** que es el número de nudos de la estructura; **nr** que es el número de nudos restringidos; **RES** la matriz que contiene las restricciones de los nudos restringidos y que ha sido descrito en el párrafo anterior.

El programa reporta una matriz que contiene las Coordenadas Generalizadas de la estructura **CG**, y el número de grados de libertad **ngl**.

Para la estructura del Ejemplo 3, los datos son:

```
>> nod = 5; nr = 2; RES = [1 1 1 1; 2 1 1 1];
```

>> [CG,ngl]=cg (nod,nr,RES)

$$CG = \begin{array}{ccc} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \\ & 4 & 5 & 6 \\ & [7 & 8 & 9] \end{array} \quad ngl=9$$

Es conveniente numerar primero los nudos restringidos y después todos los demás como se lo ha realizado en la figura 15.14. La primera fila de **CG** son los grados de libertad del nudo 1; la segunda del nudo 2; la tercera del nudo 3; etc.

- [NI,NJ]=gn\_portico (GEN)

El programa **gn\_portico** sirve para obtener dos vectores que contienen al nudo inicial **NI** y al nudo final **NJ** de cada uno de los elementos del pórtico plano. La forma de uso del programa es: [NI,NJ]=gn\_portico (GEN). Donde **GEN** es una matriz con la siguiente información para cada uno de los elementos: número del elemento; nudo inicial del elemento; nudo final del elemento; número de elementos a generar; incremento en la numeración de los elementos; incremento en la numeración del nudo inicial; incremento en la numeración del nudo final.

Para el Ejemplo 3 se indica el arreglo **GEN** sin generar los nudos para que sea más fácil la explicación; a la derecha de la figura 15.14 se indica la numeración de los elementos

>> GEN = [ 1      1    3    0    0    0    0;  
         2      3    4    0    0    0    0;  
         3      2    5    0    0    0    0;  
         4      4    5    0    0    0    0];

>> [NI,NJ]=gn\_portico (GEN)

El programa reporta:

$$NI = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \qquad NJ = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

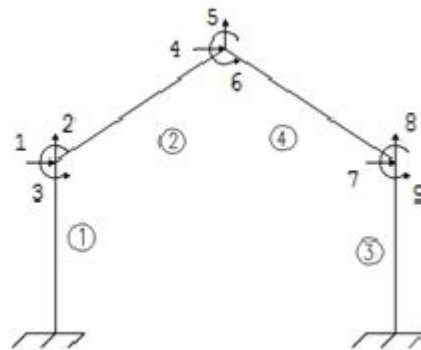
- [VC]=vc (NI,NJ,CG)

El programa **vc** determina los vectores de colocación de estructuras que tienen dos o tres grados de libertad por nudo. La forma de uso es: [VC]=vc (NI,NJ,CG). Donde **NI** es el vector que contiene a los nudos iniciales; **NJ** el vector con los nudos finales; **CG** es una matriz con las coordenadas generalizadas. El programa reporta la matriz que contiene a los vectores de colocación de cada uno de los elementos. El vector de colocación está compuesto por los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final.

A continuación se indica a la izquierda lo que reporta el programa, para el Ejemplo 3 y a la derecha se recuerda la numeración de los elementos (número dentro de un círculo) y los grados de libertad, para entender la matriz que contiene a los vectores de colocación de cada uno de los elementos.

VC =

0	0	0	1	2	3
1	2	3	4	5	6
0	0	0	7	8	9
4	5	6	7	8	



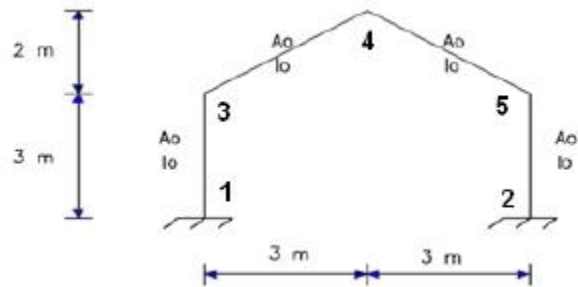
- $[X, Y] = \text{glinea\_portico} (\text{Nudos})$

El programa **glinea\_portico** genera las coordenadas de los nudos, tanto en sentido X, como en sentido Y. La forma de uso es:  $[X, Y] = \text{glinea\_portico} (\text{Nudos})$  Donde **Nudos** es una matriz que contiene: Número de nudo; coordenada en X del nudo; coordenada en Y del nudo; número de nudos a generar; incremento en la numeración del nudo; incremento de longitud en sentido X; incremento de longitud en sentido Y. Reporta dos vectores **X, Y** con las coordenadas en X y de cada nudo.

La entrada de datos, del Ejemplo 3, sin generar ningún nudo, es la siguiente.

```

NUDOS=[1 0.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
2 6.0 0.0 0 0 0.0 0.0;
3 0.0 3.0 0 0 0.0 0.0;
4 3.0 5.0 0 0 0.0 0.0;
5 6.0 3.0 0 0 0.0 0.0];
    
```



El Programa reporta los vectores **X, Y** que tienen esta información.

$$\begin{matrix}
 0 & 0 \\
 6 & 0 \\
 \mathbf{X} = 0 & \mathbf{Y} = 3 \\
 3 & 5 \\
 [6] & [3]
 \end{matrix}$$

Con las coordenadas de los nudos se obtiene la longitud de los elementos; el seno y coseno del ángulo  $\alpha$ . Esto se lo realiza con el programa **longitud** que se indica más adelante.

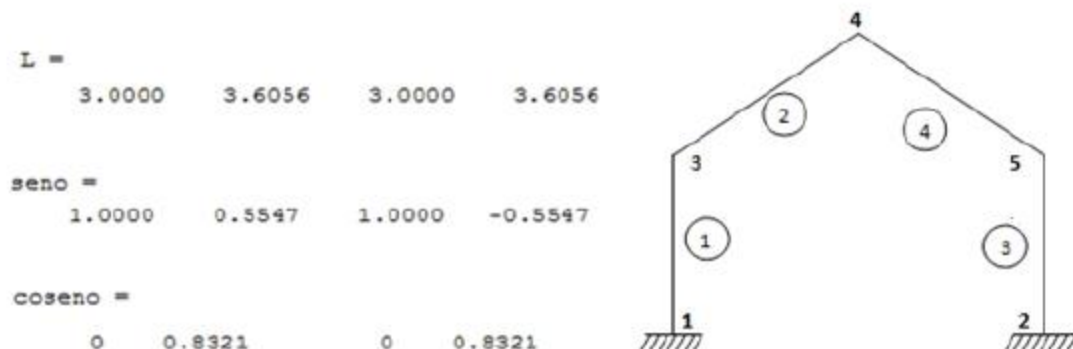
- **dibujo (X, Y, NI, NJ)**

El programa **dibujo**, presenta la estructura, es importante utilizar este programa para verificar si se han ingresado bien los datos. La forma de uso es: **dibujo (X, Y, NI, NJ)** Las variables de entrada de este programa ya fueron indicadas.

- $[L, \text{seno}, \text{coseno}] = \text{longitud} (X, Y, NI, NJ)$

El programa **longitud** determina la longitud;  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$  de cada uno de los elementos de una estructura plana. Como se indicó  $\alpha$  es el ángulo que forma el eje del elemento con el eje de las X. El programa reporta tres vectores, denominados **L**, que contiene la longitud de cada uno de los elementos; **seno** con el valor de la función seno de cada elemento y **coseno** con el valor del coseno de cada elemento.

Para el Ejemplo 3, la ejecución del programa, reporta.



- $[Q, Q2] = \text{cargas} (n_{jc}, n_{mc}, n_{gl}, L, \text{seno}, \text{coseno}, CG, VC, F, Fm, \text{datos})$

El programa **cargas** determina el vector de cargas generalizadas  $Q$  en pórticos con cargas en las juntas y cargas en los elementos; la forma de uso de este programa es la siguiente:  $[Q, Q2] = \text{cargas} (n_{jc}, n_{mc}, n_{gl}, L, \text{seno}, \text{coseno}, CG, VC, F, Fm)$ . Donde  **$n_{jc}$**  es el número de juntas cargadas,  **$n_{mc}$**  es el número de elementos cargados;  **$n_{gl}$**  es el número de grados de libertad;  **$L$**  vector con la longitud de cada uno de los elementos; **seno** vector con el  $\text{sen } \alpha$  de los elementos; **coseno** vector con el  $\text{cos } \alpha$  de los elementos;  **$CG$** , matriz que contiene las coordenadas generalizadas de la estructura;  **$VC$** , matriz con los vectores de colocación de los elementos;  **$F$**  matriz con la siguiente información: número del elemento cargado, fuerza horizontal (positiva hacia la derecha), fuerza vertical (positiva hacia arriba) y el momento (anti horario positivo) de cada una de las juntas cargadas;  **$Fm$**  matriz que contiene el número del elemento cargado; la carga que actúa en el elemento; Código de Carga, actualmente solo trabaja con carga uniforme distribuida, el código es 1; número de elementos a generar; incremento en la numeración de los elementos; **datos** esta opción se utiliza cuando se tiene cualquier tipo de carga en los elementos, en este caso, el usuario, determina aparte las acciones de empotramiento perfecto y da como datos en la variable **datos**, que tiene la siguiente información: número del elemento cargado; fuerzas axial y de corte y momento en el nudo inicial; fuerza axial, de corte y momento en el nudo final, son 7 datos por cada elemento cargado.

Si no hay cargas en las juntas se debe especificar  $n_{jc} = 0$  y se debe indicar  $F = 0$ .

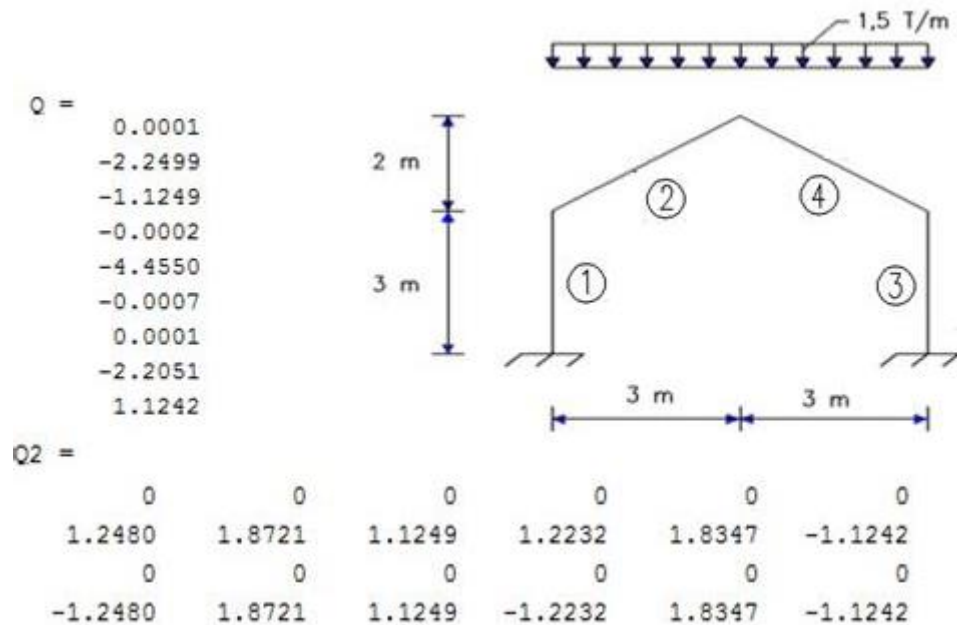
Lo propio si no hay cargas en los elementos se debe indicar  $n_{mc} = 0$  y  $Fm = 0$ .

Finalmente si no se desea ingresar las acciones de empotramiento perfecto, se colocará **datos = 0**

Para el Ejemplo 3, los datos que todavía no se han indicado para usar el programa **cargas** son:

```
>> n_{jc}=0; n_{mc}=2; F=0; datos=0;
>> FM=[2 1.5 1 0 0 0;
      4 1.5 1 0 0 0];
```

Los otros datos que se necesitan para ejecutar el programa **cargas** han sido ya indicados. El programa reporta.



- **[K] = krigidez (ngl, ELEM, L, seno, coseno, VC, E)**

Programa que determina la matriz de rigidez de Pórticos Planos o de Armaduras Planas. Las variables que han sido ya definidas son: **ngl** es el número de grados de libertad de la estructura; **L**, es un vector con la longitud de cada uno de los elementos; **seno, coseno**, vectores con los senos y cosenos de cada elemento; **VC** es la matriz con los vectores de colocación de cada elemento. Las variables no definidas todavía, son: **E** es el módulo de elasticidad del material; **ELEM** define la geometría de las secciones transversales de los elementos.

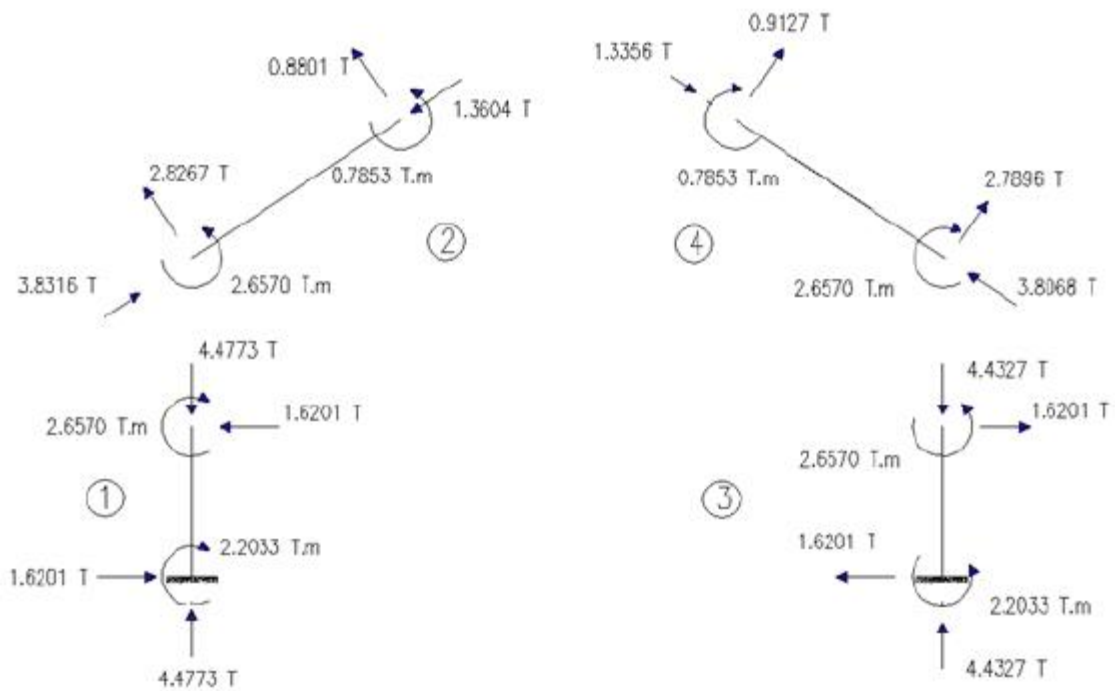
Para **armaduras planas**, **ELEM**, está compuesto el área de la sección transversal de cada uno de los elementos. Para **pórticos planos**, en **ELEM** se indica la base y la altura de cada elemento.

- **[FF]=fuerzas (ngl, ELEM, L, seno, coseno, VC, E, q, Q2)**

De los datos de entrada, la variable no definida todavía es **q** que es el vector de coordenadas generalizadas. Este vector se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:  $Q = K q$ . En **MATLAB** la solución del sistema de ecuaciones se realiza de la siguiente manera:  $q = K \backslash Q$

Este programa determina las cargas finales en los elementos en coordenadas locales, en una matriz que se ha denominado **FF**. Para **armaduras planas** la matriz **FF** tiene cuatro cantidades que son las fuerzas axiales y de corte, del nudo inicial y final, respectivamente; la fuerza de corte será cero en armaduras planas. Para **pórticos planos**, **FF** contiene la fuerza axial, fuerza de corte, momento, del nudo inicial y del nudo final. La primera fila de **FF** corresponde al primer elemento, la segunda fila al segundo elemento, etc.

Se destaca que la matriz **Q2** contiene las cargas de empotramiento perfecto de los elementos en coordenadas locales y se encontró cuando se ejecutó el programa **cargas**. Para una armadura plana la matriz **Q2** es nula, debido a que en armaduras no hay cargas en los elementos.



### 15.2.3 Comentario de los Programas

La solución matricial de un pórtico plano, por el método de los desplazamientos, es similar a la de una armadura plana, es por eso que se utilizan las mismas subrutinas. Así por ejemplo la subrutina que obtiene la matriz **CG** que contiene los grados de libertad de un pórtico plano es la subrutina **cg**, la misma que se utilizó para armadura plana. Evidentemente que en esta subrutina existe un código con el cual se identifica a una armadura plana y a un pórtico plano; ese código vale 2 para armaduras planas y 3 para pórticos planos.

En pórticos planos, existen cargas en los elementos por este motivo la solución total del problema es igual a la solución del problema primario más la solución del problema complementario. En el caso de armaduras planas la solución total es la solución del problema complementario. Para el caso de pórticos planos se debe sumar la solución del problema primario en que sus elementos se consideran que están empotrados. Aguiar (2004).

- **EJEMPLO 4**

Resolver, utilizando los programas del sistema de computación **CEINCI-LAB**, el pórtico plano indicado en la figura 15.19, las columnas son de 30/40 y la viga de 30/30. Sobre la estructura actúa una fuerza horizontal de 3 T., y una carga uniforme distribuida de 2 T/m. El módulo de elasticidad  $E = 1800000 \text{ T/m}^2$ .

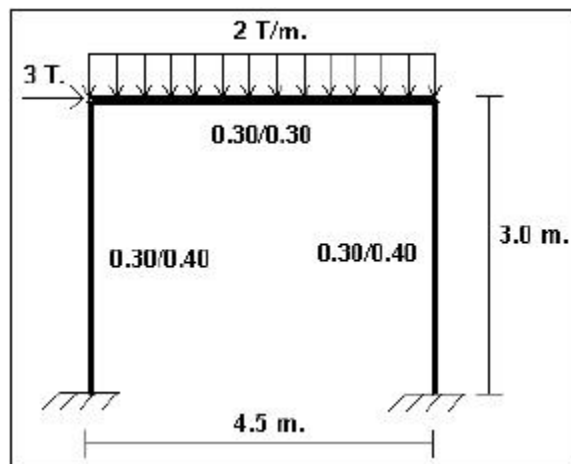


Figura 15.19 Pórtico plano a resolver con **CEINCI-LAB**

### • SOLUCIÓN

A la izquierda de la figura 15.20 se muestra la numeración de los nudos y elementos; a la derecha se indican los grados de libertad. Las matrices **CG** (Coordenadas Generalizadas) y **VC** (Vectores de colocación) son:

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad VC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

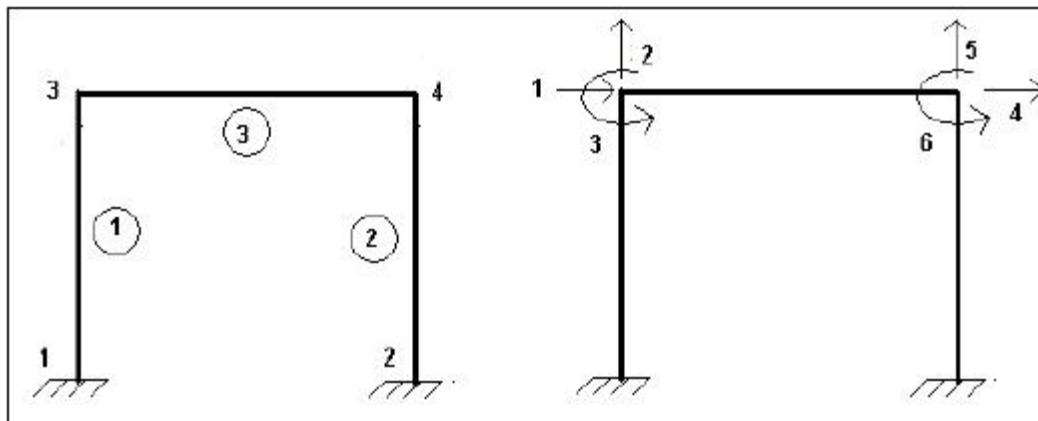


Figura 15.20 Numeración de nudos y elementos. Grados de libertad de la estructura.

El vector de cargas es:

$$Q^t = [ 3.00 \quad -4.50 \quad -3.375 \quad 0.00 \quad -4.50 \quad 3.375 ].$$

De la solución del sistema de ecuaciones  $K Q = q$ , se encuentra:

$$q^t = [0.0026 \quad -0.0001 \quad -0.0017 \quad 0.0025 \quad -0.0001 \quad -0.0001].$$



Tabla 15.1 Fuerzas y momentos finales en extremos de elementos

Elemento	Nudo Inicial			Nudo Final		
	Fuerza Axial (T.)	Fuerza de Corte (T.)	Momento (T.m.)	Fuerza Axial (T.)	Fuerza de Corte (T.)	Momento (T.m.)
1	3.8762	0.0646	1.7255	-3.8762	-0.0646	-1.5316
2	5.1238	2.9354	4.4765	-5.1238	-2.9354	4.3386
3	2.9354	3.8762	1.5316	-2.9354	5.1238	-4.3386

En la tabla 15.1, se muestran las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, en coordenadas locales. El archivo de datos del programa que resuelve el pórtico indicado es el siguiente.

```

% Programa para resolver un Pórtico de 1 piso y 1 vano
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%   CEINCI-ESPE
%   30 de agosto de 2012
%.....
% portico_ej1
%.....
nod=4; % Número de nudos del pórtico plano
nr=2; % Número de nudos restringidos
% MATRIZ DE RESTRICCIONES DE LOS NUDOS
RES=[ 1  1  1  1; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2  1  1  1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG Matriz de coord generalizadas
% MATRIZ DE GENERACION DE NUDOS DE LOS ELEMENTOS
GEN=[1 1 3 1 1 1 1; %elem, ni, nf, elem a gener, inc en elem, inc en ni, inc en nf
     3 3 4 0 0 0 0];
[Ni,Nj]=gn_portico(GEN);%Generacion de vectores NI (Nudo Inicial) y NJ (Nudo Final)
% MATRIZ DE GENERACION DE COORDENADAS DE LOS NUDOS
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       3 0.0 3.0 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el portico plano
[VC]=vc(NI,NJ,CG);% Vector de colocación
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);% Longitud, Seno y Coseno de elementos
% Vector de cargas generalizadas
njc=1;F=[3 3 0 0];datos=0; % Cargas en las Juntas
nmc=1;Fm=[3 2.0 1 0 0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
% Secciones de los elementos
SECCION=[1 0.30 0.40 1 1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
        3 0.30 0.30 0 0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);% Matriz de rigidez de la estructura
q=KQ % Desplazamientos y Giros
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)% Fuerzas y momentos finales en los
elementos
% ---end---

```

### 15.2.4 Cálculo de las Reacciones

En la forma como se resolvió el pórtico plano, del Ejemplo 4, no es posible calcular directamente las reacciones de los apoyos, se debe hacer equilibrio en los apoyos y colocar las fuerzas en los extremos de los elementos que se han obtenido. Si se desea encontrar directamente, las reacciones se debe considerar como que no existe apoyo en la base y numerar esos grados de libertad.

#### • EJEMPLO 5

En la figura 15.21, se presenta a la izquierda el pórtico resuelto en el apartado anterior con los grados de libertad (gdl) indicados en la gráfica central. Ahora se va a resolver este pórtico con los gdl., indicados a la derecha, con 12 gdl, considerando grados de libertad en los empotramientos para hallar directamente las reacciones. Como se verá más adelante los grados de libertad del 1 al 6 que están relacionados con apoyos valen cero ya que es empotramiento perfecto.

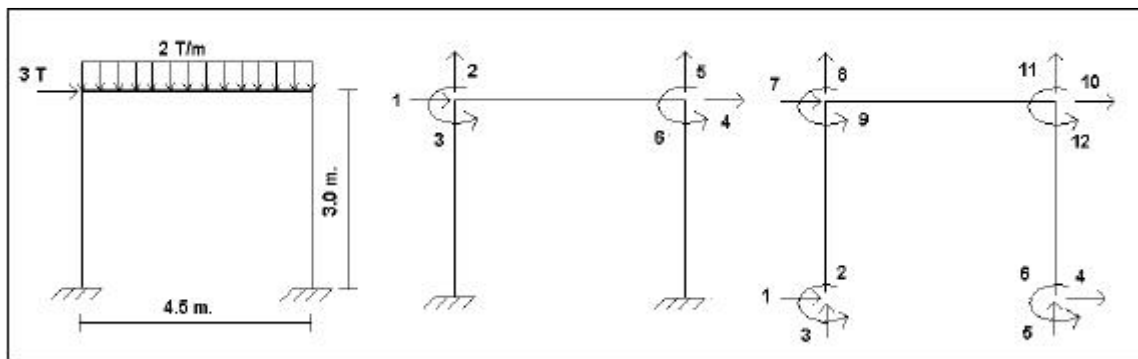


Figura 15.21 Modelo para calcular las reacciones de los apoyos directamente.

La ecuación básica de análisis matricial de estructuras, es la siguiente.

$$Q = K q$$

Donde  $Q$  es el vector de cargas generalizadas;  $K$  es la matriz de rigidez de la estructura y  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas. Para encontrar directamente las reacciones se debe reconocer dos tipos de coordenadas, las que están directamente relacionadas con las reacciones, en el ejemplo sería de la 1 a la 6, a estas se denominan **coordenadas a**, y los restantes grados de libertad que en este caso van del 7 al 12, a estas se llaman **coordenadas b**. Luego la ecuación básica de análisis matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} Q_A + R \\ Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \end{bmatrix} \quad (15.15)$$

Siendo  $Q_A$  el vector de cargas generalizadas asociadas a las coordenadas 1 a 6 pero como no existen cargas en las columnas este vector vale cero.  $R$  es el vector que contiene las reacciones de los apoyos;  $Q_B$  es el vector de cargas generalizadas asociado a las coordenadas 7 a 12.

Con los grados de libertad considerados, la matriz de rigidez de la estructura es de 12 por 12 y la partición se realiza de acuerdo al número de coordenadas **a** y **b**; se denominan **na** al número de coordenadas **a** que en este caso es 6; **nb** al número de coordenadas **b**

que también es 6. Luego las sub matrices  $K_{AA}$  es de  $(na, na)$ ;  $K_{AB}$  de  $(na, nb)$ ;  $K_{BB}$  de  $(nb, nb)$  y  $K_{BA} = K_{AB}^t$ . El vector  $q_A$  contiene a los desplazamientos y giros de las coordenadas  $a$  que vale cero ya que la estructura es empotrada y  $q_B$  son los desplazamientos y giros de las coordenadas  $b$ . Al desarrollar la ecuación (15.15) se tiene:

$$\begin{aligned} Q_A + R &= K_{AB} * q_B \\ Q_B &= K_{BB} q_B \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene  $q_B$  resolviendo el sistema de ecuaciones indicado. Al reemplazar  $q_B$  en la primera ecuación se halla  $R$ .

$$R = K_{AB} * q_B - Q_A \quad (15.16)$$

## • SOLUCIÓN

El programa con el cual se obtiene directamente las reacciones de los apoyos de la estructura indicada en la figura 15.20 se lista a continuación.

```
% Calculo Directo de las Reacciones de un Pórtico
%
%      Dr. Roberto Aguiar
%      15 de diciembre de 2012
%-----
% portico_ej2
%-----
nod=4;nr=1;RES=[1 0 0 0];% Obligado colocar nr=1
[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES);% CG con todos los grados de libertad
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 0 0 0 0];
[Nl,NJ]=gn_portico(GEN);
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0; 3 0.0 3.0 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
dibujo (X,Y,Nl,NJ);
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,Nl,NJ);
SECCION=[1 0.30 0.40 1 1; 3 0.30 0.30 0 0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
[VC]=vc(Nl,NJ,CG);
E=1800000;
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
Kaa=K(1:6,1:6);Kab=K(1:6,7:ngl);Kbb=K(7:ngl,7:ngl);
njc=1;F=[3 3 0 0];nmc=1;Fm=[3 2 1 0 0]; datos=0;
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos);
na=6;Qa=Q(1:na);
Qb=Q(na+1:ngl);
qb=Kbb\Qb;
qa=[0;0;0;0;0;0];
q=[qa;qb];
R=Kab*qb
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)
```

El vector que contiene las reacciones  $R$  que reporta el programa es:

$$R' = [-0.0646 \quad 3.8762 \quad 1.7255 \quad -2.9354 \quad 5.1238 \quad 4.4675]$$

Los restantes resultados son los ya indicados en el problema anterior.

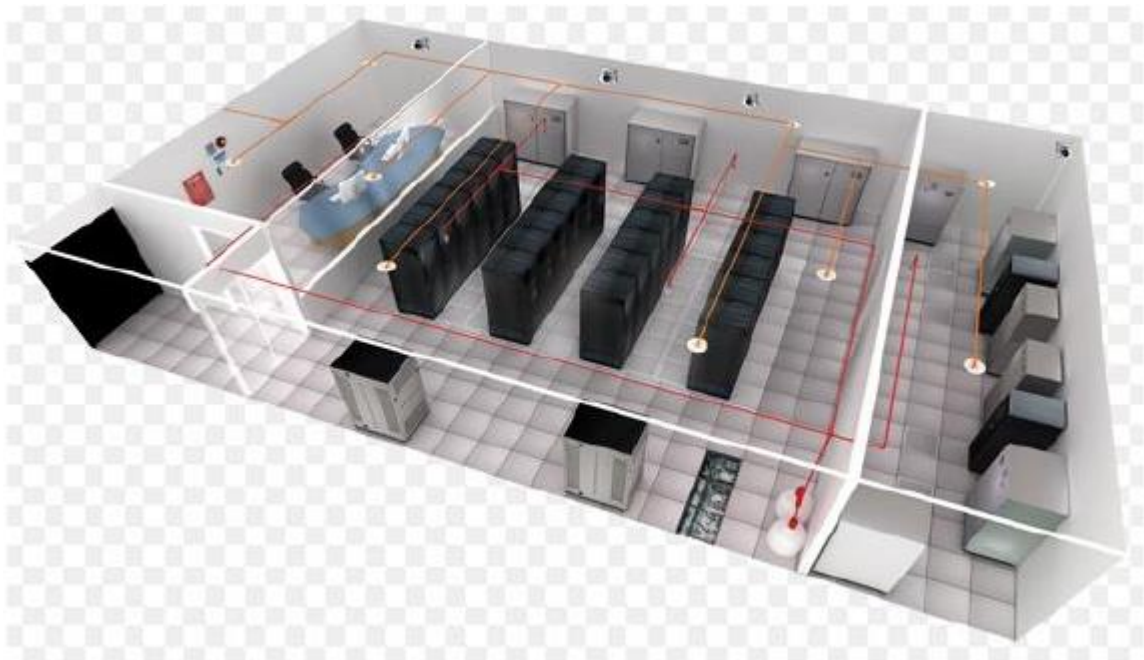
### 15.2.5 Estructuras con cargas puntuales

Actualmente algunas estructuras se están reforzando o al menos están comprobando si sus elementos estructurales están en capacidad de resistir la colocación de un Data Center, que tienen un considerable número de equipos que son bastante pesados, ver figura 15.22

Los fabricantes de estos equipos proporcionan los pesos de cada uno de ellos y conjuntamente con el Arquitecto se procede a ubicarlos. Estos equipos pueden ser modelados como cargas puntuales o como carga repartida en un determinado sitio.

Sea como sea el Proyectista estructural deberá hacer su modelo de cálculo con cargas puntuales o con cargas uniformes o una mezcla de las dos y encontrar las acciones de empotramiento perfecto que deberá dar como dato al programa **CEINCI-LAB**.

En el Ejemplo que se presenta a continuación se ha considerado solo dos cargas puntuales en la viga, para ilustrar el cálculo con cualquier tipo de carga.



**Figura 15.22** Equipos de un Data Center que se pueden modelar como masas puntuales.

- **EJEMPLO 6**

Resolver el pórtico plano de la figura 15.23, que tiene cargas puntuales sobre la viga. Las dimensiones están en metros y la sección transversal de sus elementos en cm. EL módulo de elasticidad  $E = 1800000 \text{ T/m}^2$

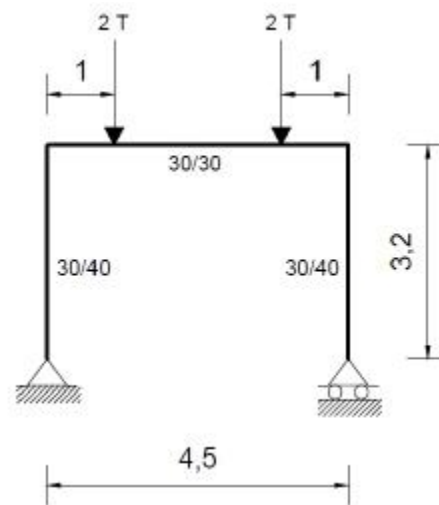


Figura 15.23 Pórtico con cargas puntuales.

### • SOLUCION

Se debe encontrar el vector de empotramiento perfecto de la viga con dos cargas puntuales, esto se lo hace con funciones de forma o simplemente viendo en una tabla donde se encuentren las fórmulas para esas cargas. Se denomina  $Q_2$  al vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales, para la viga este vector es el siguiente.

$$Q_2 = [0.0 \quad 2.00 \quad 1.556 \quad 0.0 \quad 2.00 \quad -1.556]$$

La numeración de los grados de libertad se indica a la izquierda de la figura 15.24; a la derecha se presenta la numeración de nudos y elementos. Se ha colocado un apoyo fijo y un rodillo para ilustrar la entrada de datos en los nudos restringidos.

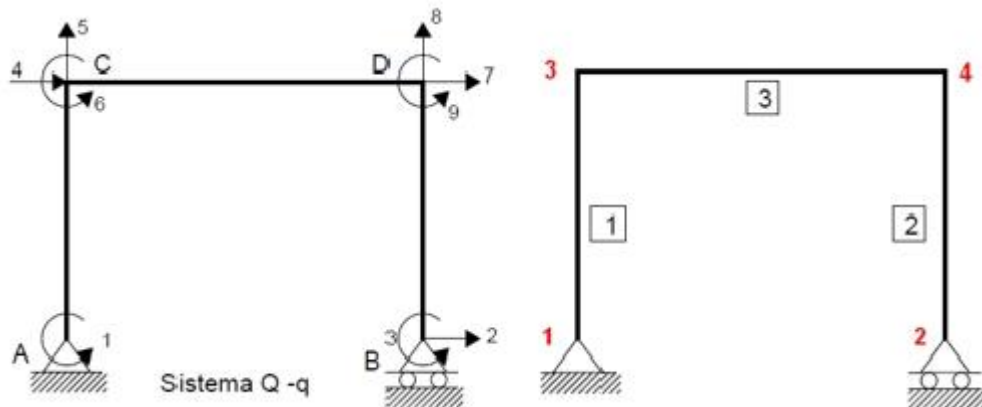


Figura 15.24 Coordenadas generalizadas, numeración de nudos y elementos.

El programa con que se resuelve el Ejemplo 6 se lista a continuación.

```
% Solución de pórtico con cargas puntuales en un elemento
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      27 de septiembre de 2013
%.....
% portico_ej3
%.....
```

```

nod=4; % Número de nudos del pórtico plano
nr=2; % Número de nudos restringidos
RES=[ 1 1 1 0; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2 0 1 0];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES) % CG Matriz de coord generalizadas
GEN=[1 1 3 1 1 1 1;
     3 3 4 0 0 0 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN) % Nudo Inicial NI y Nudo Final NJ
NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 4.5 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
       3 0.0 3.2 1 1 4.5 0.0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS) % Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el Pórtico
[VC]=vc(NI,NJ,CG) % Vector de colocación
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ) %Longitud, seno y coseno de los elementos
njc=0;F=0; % Número de juntas Cargadas
datos=[0 2 1.5556 0 2 -1.556]; % N V M N' V' M' de empotramiento perfecto
nmc=1; % Número de miembros cargados
Fm=[3 0 4 0 0]; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr numero elemento
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
SECCION=[1 0.30 0.40 1 1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
        3 0.30 0.30 0 0];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION)
E=1800000; % Modulo de elasticidad del material
[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E) % Matriz de rigidez de la estructura
q=K\Q % Desplazamientos y Giros
[FF]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2) % Fuerzas y momentos finales en los
elementos
% ---end---

```

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.0000 \\ -1.5556 \\ 0 \\ -2.0000 \\ 1.5560 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 1.5556 & 0 & 2.0000 & -1.5560 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.3479 & 0 & 0 & 0.1612 & 0 & 0.1679 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1007 & -0.1612 & 0 & 0 & 0 & -0.1007 & 0 & -0.1612 \\ 0 & -0.1612 & 0.3479 & 0 & 0 & 0 & 0.1612 & 0 & 0.1679 \\ 0.1612 & 0 & 0 & 3.7007 & 0 & 0.1612 & -3.6000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7658 & 0.0355 & 0 & -0.0158 & 0.0355 \\ 0.1679 & 0 & 0 & 0.1612 & 0.0355 & 0.4548 & 0 & -0.0355 & 0.0529 \\ 0 & -0.1007 & 0.1612 & -3.6000 & 0 & 0 & 3.7007 & 0 & 0.1612 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0158 & -0.0355 & 0 & 6.7658 & -0.0355 \\ 0 & -0.1612 & 0.1679 & 0 & 0.0355 & 0.0529 & 0.1612 & -0.0355 & 0.4548 \end{bmatrix} \cdot 1.0e+004$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.0184 \\ 0.0029 \\ 0.0092 \\ -0.0000 \\ -0.0029 \\ 0.0092 \\ -0.0000 \\ 0.0029 \end{bmatrix} \quad \mathbf{FF} = \begin{bmatrix} 2.0001 & -0.0000 & -0.0000 & -2.0001 & 0.0000 & -0.0000 \\ 1.9999 & 0.0000 & 0.0000 & -1.9999 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0 & 2.0001 & 0.0000 & 0 & 1.9999 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

Se ha presentado el vector de cargas generalizadas  $\mathbf{Q}$  y la matriz que contiene las acciones de empotramiento perfecto  $\mathbf{Q2}$ ; luego se indica la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ ; finalmente se

muestra el vector de coordenadas generalizadas  $q$  que contiene los desplazamientos y giros y las fuerzas finales en coordenadas locales, en los elementos  $ff$ .

### 15.2.6 Reforzamiento sísmico de estructuras

Una forma de reforzar sísmicamente una estructura es colocar diagonales de acero entre las columnas, de esta manera se rigidiza notablemente el pórtico. Lo que se desea ilustrar en este apartado es como se resuelve un pórtico de hormigón armado con diagonales de acero, sometido a cargas verticales (carga muerta más carga viva) y cargas horizontales (sismo).

Ese es el objetivo, razón por la cual no se profundiza en el reforzamiento pero vale la pena mencionar que el Proyectista Estructural deberá tener en cuenta los problemas de torsión en planta ya que cuando se colocan diagonales se tienen pórticos muy rígidos y el otro aspecto que se debe chequear es el problema de pandeo cuando las diagonales trabajan a compresión, debido a que la fuerza axial que resisten es muy alta.

En la figura 15.25 se presenta una estructura de hormigón armado reforzada con diagonales de acero en forma de "V" invertida, ubicada en la ciudad de Viña del Mar, en Chile. El ejemplo que se resuelve a continuación está inspirado en la estructura de la figura 15.25.



**Figura 15.25** Estructura reforzada en Viña del Mar, con diagonales de acero.

- **EJEMPLO 7**

Resolver la estructura de la figura 15.26, considerando un módulo de elasticidad del hormigón de  $1600000 \text{ T/m}^2$  y del acero  $20000000 \text{ T/m}^2$ . Las columnas y vigas de hormigón son de  $20/20 \text{ cm}$ , y las diagonales de acero un perfil tubular de  $100/100/4 \text{ mm}$ .



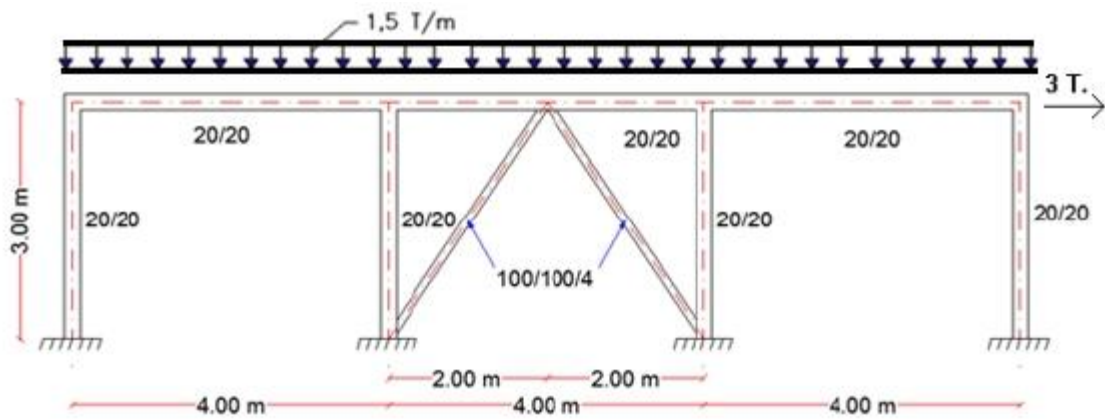


Figura 15.26 Estructura mixta de hormigón armado y diagonales de acero

### • SOLUCIÓN

En la figura 15.27 se presentan los grados de libertad de la estructura analizada y en la figura 15.28 la numeración de los nudos y elementos. Nótese que se ha considerado un nudo en el punto medio de la viga central donde llegan las dos diagonales de hormigón.

Por otra parte, se ha numerado en primer lugar todos los elementos de hormigón y después los elementos de acero; de esa manera se encontrará en primer lugar la contribución de los elementos de hormigón a la matriz de rigidez y posteriormente la contribución de los elementos de acero.

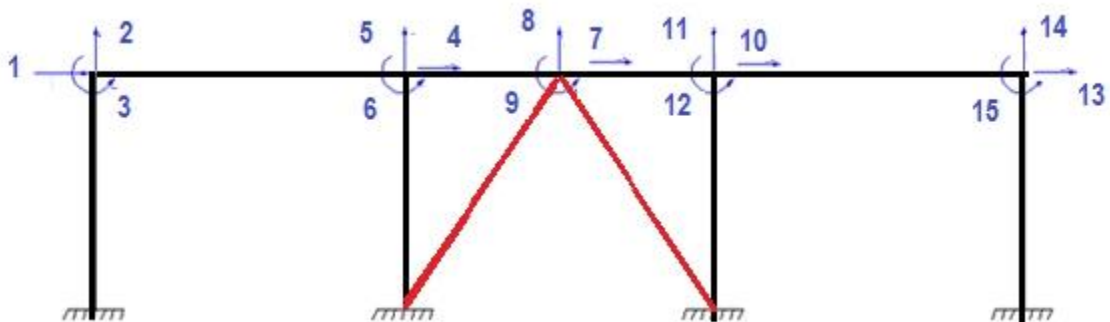


Figura 15.27 Grados de libertad

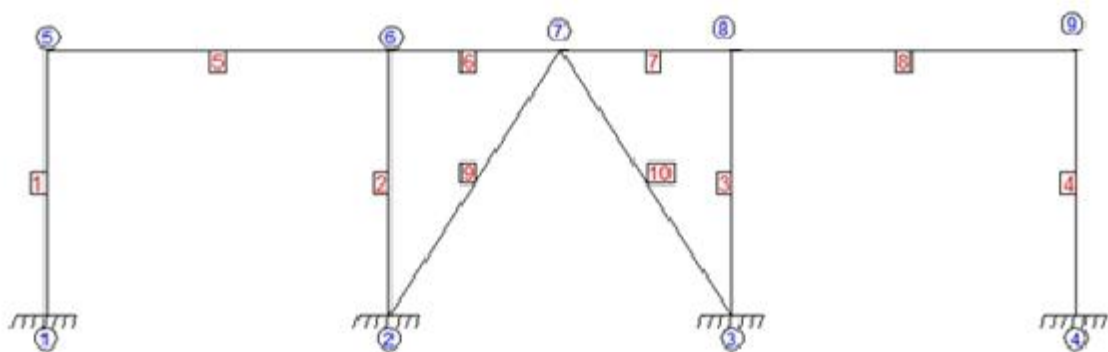


Figura 15.28 Numeración de nudos y elementos

Las diagonales de acero tienen conexiones simples, por lo tanto lo más fácil es que se



sumistre al programa los vectores de colocación. A continuación se presenta el programa desarrollado en **MATLAB** utilizando el sistema de computación **CEINCI-LAB**

```
% Solución de pórtico con vigas y columnas de hormigón y diagonales
% de acero.
%
% Por: Roberto Aguiar Falconi
%      CEINCI-ESPE
%      16 de mayo de 2014
%.....
% portico_ej4
%.....
nod=9; nr=4;
RES=[ 1 1 1 1; % Nudo restringido Des X, Des Y, Rot
      2 1 1 1; 3 1 1 1; 4 1 1 1];
[CG,ngl]=cg(nod,nr,RES); % CG Matriz de coord generalizadas
GEN=[1 1 5 1 1 1 1;3 3 8 1 1 1 1;
      5 5 6 3 1 1 1;9 2 7 1 1 1 0];
[NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Nudo Inicial NI y Nudo Final NJ
NUDOS=[1 0.0 0.0 3 1 4.0 0.0;% i, xi, yi, nudos a gener, incr num nudo, dx,dy
        5 0.0 3.0 1 1 4.0 0.0; 7 6.0 3.0 1 1 2.0 0.0;
        9 12 3.0 0 0 0 0];
[X,Y]=glinea_portico(NUDOS); % Generación de las coordenadas de los nudos
dibujo (X,Y,NI,NJ)% Dibuja el Pórtico
[VC]=vc(NI,NJ,CG); % Vector de colocación
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ); %Longitud, seno y coseno de los elementos
njc=1;F=[9 0 0 0]; % Número de juntas Cargadas
datos=0;
nmc=4; % Número de miembros cargados
Fm=[5 1.5 1 1 3; %Elem carg, carga, código, elem a gener, incr num elemen
    6 1.5 1 1 1];
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos);
SECCION=[1 0.20 0.20 7 1; % Eleme, base, altura, elem a gener, increm en elem
          9 0.0001 0.0001 1 1];
[ELEM]=gelem_portico(SECCION);
E=1600000; % Modulo de elasticidad del material
[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); % Matriz de rigidez solo de elementos de acero
% Contribucion de diagonales de acero a la matriz de rigidez
LA=L(9:10);senA=seno(9:10);cosA=coseno(9:10);area=0.001536;
VCA=[0 0 7 8;0 0 7 8]; Es=20000000; ELEMA=[area;area];
[KA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es);
KT=KH+KA;
q=KT\Q; % Desplazamientos y Giros
[FH]=fuerzas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2) % Fuerzas y mom en Hormigon
Q2A=zeros(2,4)
[FA]=fuerzas(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es,q,Q2) % Fuerzas y mom en Acero
% ---end---
```

En la parte final del programa **portico\_ej4** se observa que se ha ejecutado dos veces el programa **fuerzas**, en la primera se obtienen fuerzas y momentos en coordenadas locales de los elementos de hormigón y en la segunda solo las fuerzas en coordenadas locales de los elementos de acero. Nótese que en este último caso se debe dar como dato Q2A una matriz de 2 por 4 con ceros, ya que no existen cargas de empotramiento perfecto en los elementos de acero pero es necesario para que pueda ejecutarse el programa **fuerzas**. Los resultados se indican a continuación.

	2.8008	-0.6033	-0.5715	-2.8008	0.6033	-1.2384
	5.3374	0.3491	0.3728	-5.3374	-0.3491	0.6746
	5.3221	-0.2617	-0.2305	-5.3221	0.2617	-0.5546
	2.8411	0.6806	0.7123	-2.8411	-0.6806	1.3293
FH =	0.6033	2.8008	1.2384	-0.6033	3.1992	-2.0350
	0.2542	2.1382	1.3604	-0.2542	0.8618	-0.0840
	-2.5811	0.8368	0.0840	2.5811	2.1632	-1.4104
	-2.3194	3.1589	1.9649	2.3194	2.8411	-1.3293
		-1.5349	-0.0000	1.5349	0.0000	
FA =		3.5764	-0.0000	-3.5764	0.0000	

## CAPITULO 16

---

# CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

## RESUMEN

La condensación estática de la matriz de rigidez, es la base fundamental para el análisis sísmico de estructuras. Por este motivo en éste capítulo se presenta esta temática orientada al uso del sistema de computación **CEINCI-LAB**.

Se presentan tres formas de encontrar la matriz de rigidez condensada, a saber: la primera involucra la inversión de una matriz, la segunda implica la solución de un conjunto de ecuaciones lineales y la tercera mediante la triangularización de Gauss.

El análisis sísmico de una estructura puede realizarse considerando pisos rígidos o considerando pisos flexibles, temas que también son analizados en el presente capítulo.

Para el modelo de piso flexible, se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Este modelo permite realizar el análisis sísmico con la componente horizontal o vertical de un sismo. En cambio, con el modelo de piso rígido se puede considerar únicamente la componente horizontal de movimiento del suelo.

Posteriormente, se comenta sobre tres variables que intervienen en la modelación de los elementos y de la estructura, De la selección de ellos depende la matriz de rigidez, que se obtenga para el análisis sísmico. Las variables que se consideran son: i) Modelación de las condiciones de apoyo; ii) Modelación de las inercias a considerar en el análisis; y, iii) Modelación de los nudos.

Finalmente se determina la matriz de rigidez lateral de tres ejemplos. El primero trata de una estructura irregular en elevación en que se deben incorporar elementos ficticios de sección transversal muy baja para poder resolver con **CEINCI-LAB**. El segundo es un pórtico en el cual se ha acoplado la mampostería a la estructura y el tercero es una estructura de hormigón que ha sido reforzada con diagonales de acero.

## 16.1 INTRODUCCIÓN

El sistema de coordenadas generalizadas,  $Q - q$  se puede numerar de cualquier forma. Ahora bien para poder condensar la matriz de rigidez, se deben numerar las coordenadas de tal forma que las cantidades diferentes de cero se encuentren al principio o al final del vector de cargas generalizadas  $Q$ ; esto es factible hacerlo numerando adecuadamente las coordenadas. Para cualquiera de los dos casos se va a tener que particionar los vectores de cargas  $Q$  y de coordenadas  $q$ , de la siguiente manera.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}$$

Si las cantidades diferentes de cero se encuentran al comienzo, se tiene que  $Q_b = 0$ . El otro caso corresponde cuando las cantidades diferentes de cero del vector de cargas generalizadas se hallan al final en este caso  $Q_a = 0$ . De tal manera que en la condensación estática de la matriz de rigidez se tienen dos casos a saber el primero cuando  $Q_b = 0$  y el segundo cuando  $Q_a = 0$ . Para los dos casos los vectores  $q_a$  y  $q_b$  son diferentes de cero.

En el análisis sísmico de estructuras se considera que ante la componente horizontal de movimiento del suelo, el piso se desplaza lateralmente lo mismo, de tal manera que se tiene un grado de libertad horizontal por piso. Por lo tanto se considera que las vigas son axialmente rígidas  $A = \infty$ .

Por otra parte, en el caso de un pórtico plano la acción sísmica se representa mediante fuerzas estáticas equivalentes, actuando en la dirección horizontal en cada uno de los pisos, nuevamente ante la componente horizontal de movimiento del suelo. Al tener un pórtico sometido a fuerzas horizontales en sus pisos y considerando que solo se tiene un grado de libertad por piso, es muy sencillo numerar las coordenadas de tal manera que se pueda condensar la matriz de rigidez lateral.

A la izquierda de la figura 16.1 se presenta un pórtico de un piso y un vano, en el cual la viga es axialmente rígida y todos los demás elementos completamente flexibles, de tal manera que el sistema tiene 5 grados de libertad. Por otra parte, en el grado de libertad horizontal (1) actúa una fuerza horizontal  $F$ , de tal manera que el vector de cargas para el sistema de coordenadas  $Q - q$ , es.

$$Q^i = [F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

En este caso  $Q_a = [F]$  y  $Q_b = [0]$  se tiene una sola coordenada para  $Q_a$  y cuatro coordenadas para  $Q_b$ .

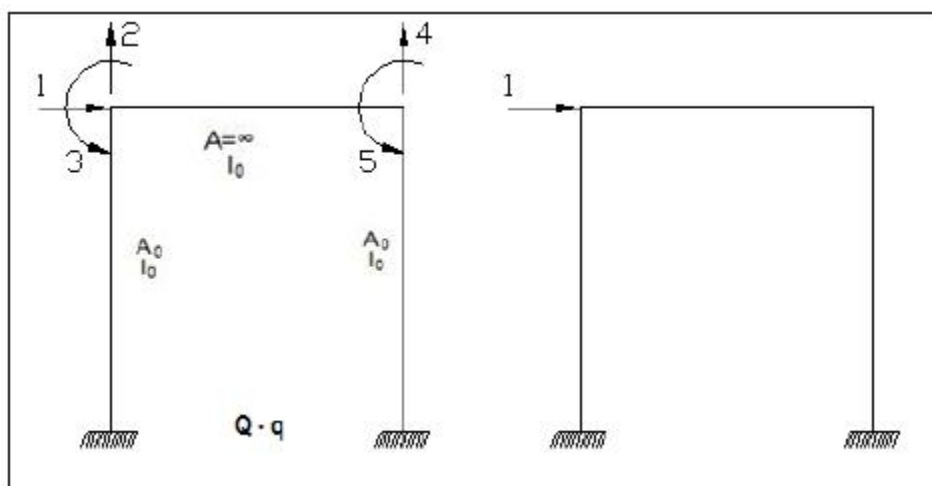


Figura 16.1 Coordenadas "a" y "b", de un pórtico plano.

En el sistema de coordenadas de una estructura, se puede diferenciar un grupo de coordenadas a las que se denomina "coordenadas a", que en el ejemplo de la figura 16.1 es la uno y las restantes, a las que se denomina "coordenadas b". Al hacer esto, tanto el vector de cargas

generalizadas  $Q$ , como el vector de coordenadas generalizadas  $q$ , están particionados de la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} \quad (16.1)$$

$$q = \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

Por otra parte, la ecuación básica de análisis estático, que relaciona el vector de cargas generalizadas  $Q$ , con el vector de coordenadas generalizadas  $q$ , por medio de la matriz de rigidez de la estructura  $K$ , es:

$$Q = K q \quad (16.3)$$

Al reemplazar (16.1) y (16.2) en (16.3) y al trabajar con submatrices; la matriz de rigidez de la estructura, también estará particionada, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (16.4)$$

Como se indicó la condensación estática de la matriz de rigidez se da cuando  $Q_a$  o  $Q_b$  son ceros, los dos casos se desarrollan a continuación:

### 16.2.1 Condensación a las coordenadas "a"

Este caso se presenta cuando el vector  $Q_b=0$ .

$$\begin{pmatrix} Q_a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{aligned} Q_a &= k_{aa} q_a + K_{ab} q_b \\ 0 &= K_{ba} q_a + k_{bb} q_b \end{aligned} \quad \begin{matrix} a \\ = \\ ( \\ K \\ aa \end{matrix}$$

Luego:

$$q_b = -k_{bb}^{-1} K_{ba} q_a$$

Al sustituir  $q_b$  en la primera ecuación y luego de factorar se obtiene.

$$\mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb} \mathbf{K}_{ba} \mathbf{q}_a$$

(16.5)

(16.6)

Sea  $\mathbf{K}^*$  la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "a".

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb} \mathbf{K}_{ba} \quad (16.7)$$

### 16.2.2 Condensación a las coordenadas "b"

Se presenta cuando el vector de cargas  $Q_a = \mathbf{0}$ . Procediendo en forma similar se obtiene:

$$q_a = -k_{aa}^{-1} K_{ab} q_b \quad (16.8)$$

$$Q_b = (K_{bb} - K_{ba} K_{aa}^{-1} K_{ab}) q_b \quad (16.9)$$

Sea  $K^+$  la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "b".

$$K^+ = K_{bb} - K_{ba} K_{aa}^{-1} K_{ab} \quad (16.10)$$

### 16.2.3 Programa *cg\_sismo*

Para encontrar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas "a" o a las coordenadas "b", se debe determinar primero la matriz de rigidez de la estructura con todos los grados de libertad, por ensamblaje directo y luego aplicar la ecuación (16.7) si se condensa a las coordenadas "a" o la ecuación (16.10) si se condensa a las coordenadas "b".

Lo único nuevo que se tiene para encontrar la matriz de rigidez de la estructura es definir la matriz que contiene a las Coordenadas Generalizadas, CG, teniendo en cuenta que las vigas son axialmente rígidas.

El programa de **CEINCI-LAB** que determina la matriz CG para pórticos regulares en elevación y considerando que las vigas son axialmente rígidas es el denominado **cg\_sismo**. Los datos de entrada de este programa son:

- $[CG, ngl] = cg\_sismo(nod, np, nr)$

Los datos del programa son:

**nod** Es el número de nudos del pórtico.  
**np** Es el número de pisos.  
**nr** Es el número de nudos restringidos.

El programa reporta:

**CG** Matriz que contiene las coordenadas generalizadas.  
**ngl** Número de grados de libertad del pórtico

Para el pórtico que se indica a la derecha de la figura 16.2, la matriz CG es:

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 1**

El pórtico plano de dos pisos mostrado a la izquierda de la figura 16.2, tiene columnas de 30/30 cm., y vigas de 25/25 cm. El módulo de elasticidad del hormigón  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ . Se pide:

- Presentar un programa de computación utilizando la librería de programas de **CEINCI-LAB**

para determinar la matriz de rigidez total y la matriz de rigidez lateral.

- ii) Indicar las sub matrices  $k_{aa}$  y  $k_{bb}$ , con las que se halla la matriz de rigidez en coordenadas de piso.
- iii) Presentar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales.

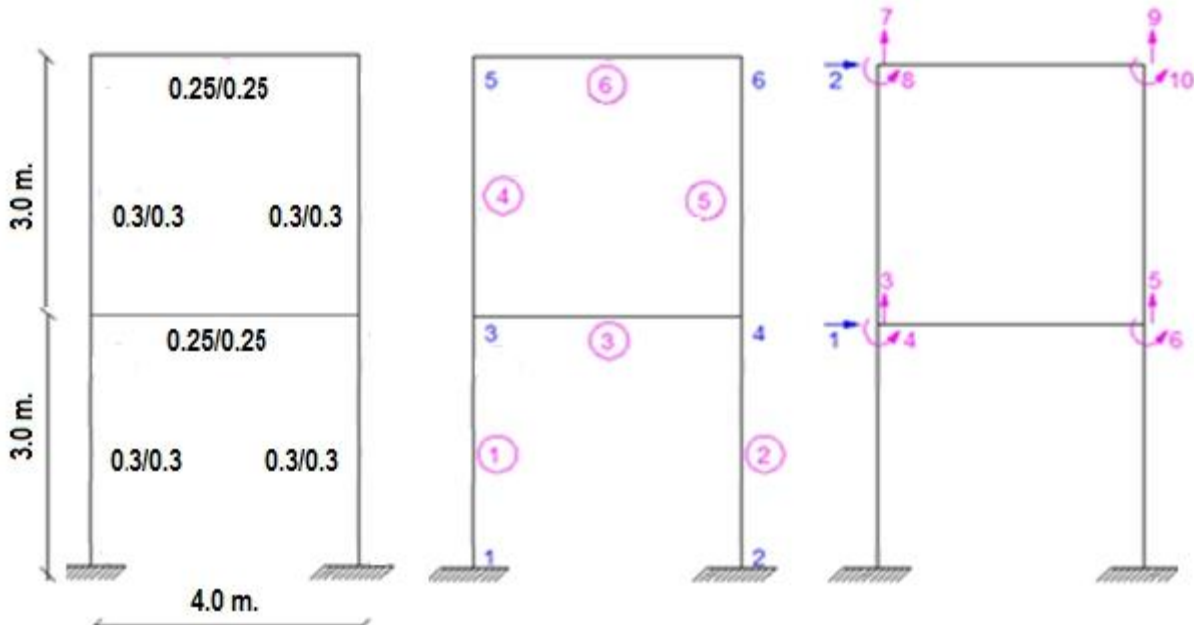


Figura 16.2 Estructura de Ejemplo 1.

## • SOLUCIÓN

En la parte central de la figura 16.2, se presenta la numeración de nudos y elementos y a la derecha los grados de libertad considerando que las vigas son axialmente rígidas. Nótese que primero se ha numerado a las coordenadas laterales (1 y 2) que en este caso son las coordenadas “a” y luego a las demás coordenadas que son las coordenadas “b”.

Se va a encontrar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas “a”. Ante la componente horizontal del movimiento del suelo, las coordenadas laterales tendrán valores altos en relación a las coordenadas “b”, por este motivo a las coordenadas laterales “a” en el análisis sísmico se denominan coordenadas principales y a las coordenadas “b” secundarias.

### i) Programa de computación

```

1   %Programa Ej1_libro Capitulo 16
2   nod=6;np=2;nr=2; [CG,ngl]=cg_sismo(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
3   GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 1 3 2 2;4 3 5 1 1 1 1];
4   [NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nodo final
5   NUDOS=[1 0.0 0.0 2 2 0.0 3.0;2 4.0 0.0 2 2 0.0 3.0];
6   [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
7   dibujo(X,Y,NI,NJ)
8   [VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
9   ELEM=[0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25;0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25];
10  [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
11  E=2400000; [K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E) %Matriz de rigidez
12  na=2;kaa=K(1:na,1:na);kab=K(1:na,na+1:ngl);kba=kab';
13  kbb=K(na+1:ngl,na+1:ngl);KL=kaa-kab*inv(kbb)*kba

```

La matriz de rigidez total de 10 por 10 es la siguiente, las líneas intermedias es donde se particiona.



$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0280 & -0.0140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0105 & 0 & -0.0105 \\ -0.0140 & 0.0140 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 \\ 0 & 0 & 1.4414 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 & 0.0029 & 0.0500 & -0.0029 & 0.0038 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 1.4414 & -0.0029 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 \\ 0 & 0.0105 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 \\ 0 & 0 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 & 0.7214 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 \\ -0.0105 & 0.0105 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 & 0.0029 & 0.0289 & -0.0029 & 0.0038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 0.7214 & -0.0029 \\ -0.0105 & 0.0105 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

ii) **Sub matrices**

$$k_{aa} = \begin{bmatrix} 0.0280 & -0.0140 \\ -0.0140 & 0.0140 \end{bmatrix} 10^5$$

$$k_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0105 & 0 & -0.0105 \\ 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 & 0 & 0.0105 \end{bmatrix} 10^5$$

Se deja al lector observar en la matriz de rigidez de la estructura las sub matrices  $k_{aa}$  y  $k_{bb}$ .

iii) **Matriz de rigidez condensada**

Se denomina  $K_l$  a la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales.

$$K_l = k_{aa} - k_{ab} k_{bb}^{-1} k_{ba}$$

$$K_l = \begin{bmatrix} 2078.8 & -817.8 \\ -817.8 & 520.0 \end{bmatrix}$$

**16.3 CONDENSACIÓN MEDIANTE SOLUCIÓN DE ECUACIONES**

El trabajar con la ecuación (16.7) o con la ecuación (16.10) implica calcular una matriz inversa, lo cual demanda bastante tiempo de cálculo, razón por la cual lo que se hace en la práctica, es transformar el cálculo de la matriz inversa por un sistema de ecuaciones lineales, como se ve a continuación.

**16.3.1 Caso en que  $Q_b = 0$** 

En la ecuación (16.5), se define la matriz  $T$  de la siguiente manera:

$$T = -K_{bb}^{-1} K_{ba} \quad (16.11)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (16.11) por  $K_{bb}$  se obtiene:

$$K_{bb} T = -K_{ba} \quad (16.12)$$

Para encontrar la matriz  $T$ , se debe resolver un conjunto de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es la sub matriz  $K_{bb}$  y los términos independientes son las diferentes columnas de la sub matriz  $K_{ba}$

Con el cambio de variable realizado, la ecuación (16.7) se transforma en:

$$K^* = K_{aa} + K_{ab} T \quad (16.13)$$

- EJEMPLO 2

Encontrar la matriz de rigidez condensada del ejercicio anterior, por intermedio de la matriz  $T$ . Las sub matrices  $K_{bb}$  y  $K_{ba}$ , son:

$$K_{bb} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.4414 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 & -0.7200 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0029 & 0.0500 & -0.0029 & 0.0038 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 \\ -0.0014 & -0.0029 & 1.4414 & -0.0029 & 0 & 0 & -0.7200 & 0 \\ 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0500 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 \\ -0.7200 & 0 & 0 & 0 & 0.7214 & 0.0029 & -0.0014 & 0.0029 \\ 0 & 0.0103 & 0 & 0 & 0.0029 & 0.0289 & -0.0029 & 0.0038 \\ 0 & 0 & -0.7200 & 0 & -0.0014 & -0.0029 & 0.7214 & -0.0029 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0103 & 0.0029 & 0.0038 & -0.0029 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

$$K_{ba} = 10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ -0.0105 & 0.0105 \\ 0 & 0 \\ -0.0105 & 0.0105 \end{bmatrix}$$

- SOLUCIÓN

Para hallar la matriz  $T$  se deben resolver dos sistemas de ecuaciones lineales. Con el primer sistema se obtiene los elementos de la primera columna de la matriz  $T$ , en este caso el término independiente es la primera columna de la sub matriz  $K_{bb}$ . El término independiente para el segundo sistema de ecuaciones lineales es la segunda columna de  $K_{bb}$  y de esta forma se halla los elementos de la segunda columna de la matriz  $T$ .

Al programa presentado en el Ejemplo 1, se deben añadir las siguientes sentencias para obtener la matriz  $T$  y la matriz de rigidez condensada.

```
14 % Cálculo mediante solución de ecuaciones lineales
15 - T=-kbb\kba
16 - KL=kaa+kab*T
```

La matriz  $T$  que se obtiene de la solución de los dos sistemas de ecuaciones lineales, es.

$$T = \begin{bmatrix} -0.0022 & 0.0033 \\ -0.0654 & -0.1420 \\ 0.0022 & -0.0033 \\ -0.0654 & -0.1420 \\ -0.0049 & 0.0055 \\ 0.3421 & -0.2767 \\ 0.0049 & -0.0055 \\ 0.3421 & -0.2767 \end{bmatrix}$$

Finalmente al plicar la ecuación (16.13) se obtiene la misma matriz de rigidez condensada, indicada en el Ejemplo 1.

### 16.3.2 Caso en que $Q_a = 0$

Se procede en forma similar al indicado en el apartado (16.3.1), con lo que se obtiene:

$$T = -K_{aa}^{-1} K_{ab} \quad (16.14.1)$$

$$K^+ = K_{bb} + K_{ba} T \quad (16.14.2)$$

$$K_{aa} T = -K_{ab} \quad (16.14.3)$$

Ahora, la matriz  $T$  se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales que tienen una sola matriz de coeficientes que es  $K_{aa}$  pero diferentes términos independientes que son las diferentes columnas de la matriz  $K_{ab}$ .

### 16.3.1 Coordenadas secundarias

Es importante destacar que la matriz  $T$  no solo sirve para hallar la matriz de rigidez condensada sino también para hallar el vector que contiene a las coordenadas secundarias.

Para el caso en que  $Q_b = 0$

$$q_b = T q_a$$

Para el caso en que  $Q_a = 0$

$$q_a = T q_b$$

Al examinar estas dos últimas ecuaciones se concluye que  $T$  es una Matriz de Paso que permite obtener las coordenadas secundarias una vez hallada las coordenadas principales. La matriz  $T$  también se le conoce con el nombre de Matriz de Incidencia.

## 16.4 CONDENSACIÓN MEDIANTE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Si bien es cierto, mediante la solución de un conjunto de ecuaciones lineales, se optimiza la obtención de la matriz de rigidez condensada. No es menos cierto, que todavía se puede optimizar el proceso de cálculo únicamente triangularizando la matriz de rigidez, tema que se trata a continuación y es válido únicamente para el caso de que  $Q_a = 0$ .

### 16.4.1 Triangularización de la matriz de rigidez

La ecuación básica de análisis estático de estructuras, considerando que  $Q_a = 0$ , es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}$$

De donde:

$$0 = K_{aa} q_a + K_{ab} q_b \quad (16.15.1)$$

$$Q_b = K_{ba} q_a + K_{bb} q_b \quad (16.15.2)$$

Si a la ecuación (16.15.1) se multiplica por  $K_{aa}^{-1}$ , y en ésta se reemplaza la ecuación (16.14.1), se obtiene:

$$0 = I q_a + K_{aa}^{-1} K_{ab} q_b$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{I} \mathbf{q}_a - \mathbf{T} \mathbf{q}_b \quad (16.15.3)$$

Ahora, si a la ecuación (16.15.3) se multiplica por  $-\mathbf{K}_{ba}$  y se suma a la ecuación (16.15.2), se encuentra:

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{0} \mathbf{q}_a + (\mathbf{K}_{bb} + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{T}) \quad (16.15.4)$$

De acuerdo a (16.14.2), la ecuación entre paréntesis es la matriz de rigidez condensada  $\mathbf{K}^+$ .

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{0} \mathbf{q}_a + (\mathbf{K}^+\mathbf{T}) \quad (16.15.5)$$

Al rescribir en forma matricial las ecuaciones (16.15.3) y (16.15.5) se halla.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (16.15.5)$$

Por consiguiente, dada la matriz de rigidez total, se aplica la eliminación de Gauss Jordan hasta eliminar los elementos correspondientes a las coordenadas "a" y lo que se obtienen son las matrices  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{K}^+$ .

#### 16.4.2 Programas para Condensación en CEINCI-LAB

Dos programas adicionales, a los ya presentados, se requieren para encontrar la matriz de rigidez condensada. El primero **cg\_sismo\_gaus** que determina el sistema de Coordenadas Generalizadas para análisis sísmico numerando las coordenadas principales al final. Se recuerda que **cg\_sismo** numera al comienzo las coordenadas principales.

El segundo programa que se requiere es **kcondensada** que determina la matriz de rigidez lateral triangularizando la matriz de rigidez. La entrada de datos de estos programas se indica a continuación.

- **[CG,ngl] = cg\_sismo\_gaus (nod,np,nr)**

**nod** Es el número de nudos del pórtico regular.  
**np** Es el número de pisos.  
**nr** Es el número de nudos restringidos.

**CG** Es la matriz que contiene los grados de libertad de los nudos, numerando las coordenadas principales al final.  
**ngl** Es el número de grados de libertad.

- **[KL]=kcondensada(K,nb)**

**K** Es la matriz de rigidez  
**nb** Es el número de coordenadas principales.

**KL** Es la matriz de rigidez condensada.

- **EJEMPLO 3**

Presentar un programa, utilizando los programas de **CEINCI-LAB** para encontrar la matriz de rigidez del marco plano del Ejemplo 1, que se indica nuevamente en la figura 16.3 pero con la nueva numeración de los grados de libertad, las coordenadas principales se han numerado al último para poder aplicar la triangularización de Gauss.

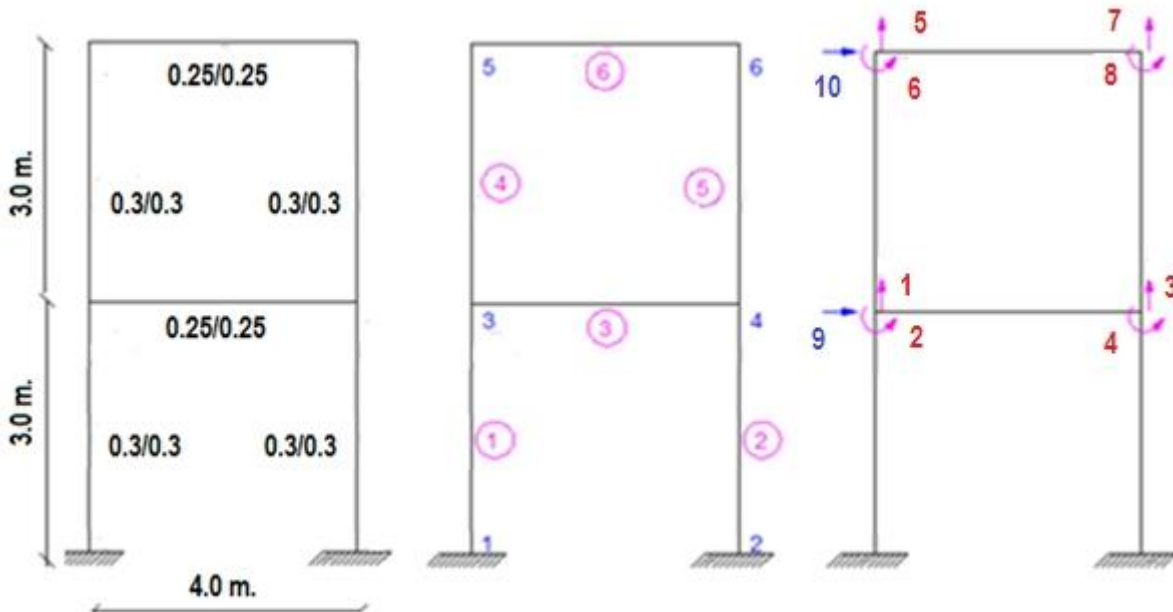


Figura 16.3 Ejemplo 3, numerando las Coordenadas Principales al final.

## • SOLUCIÓN

```

1   %Programa Ej2_libro Capítulo 16
2   -   nod=6;np=2;nr=2;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
3   -   GEN=[1 1 3 1 1 1 1;3 3 4 1 3 2 2;4 3 5 1 1 1 1];
4   -   [NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
5   -   NUDOS=[1 0.0 0.0 2 2 0.0 3.0;2 4.0 0.0 2 2 0.0 3.0];
6   -   [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
7   -   % dibujo(X,Y,NI,NJ)
8   -   [VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
9   -   ELEM=[0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25;0.30 0.30;0.30 0.30;0.25 0.25];
10  -   [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
11  -   E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
12  -   nb=2;[KL]=kcondensada(K,nb)

```

La matriz de rigidez que se encuentra es la indicada en el Ejemplo 1.

## 16.5 MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL

Se define...*matriz de rigidez lateral,  $K_L$* ... a la matriz de rigidez asociada a las coordenadas laterales de piso. De hecho la matriz de rigidez condensada de los Ejemplos 1 a 3 es la matriz de rigidez lateral.

Existen dos formas de modelar los elementos de un pórtico plano, ante la acción sísmica horizontal. En la primera forma se considera que únicamente las vigas son axialmente rígidas y las columnas totalmente flexibles. En cambio, en la segunda forma se considera que todos los elementos son axialmente rígidos. El pórtico analizado en los numerales anteriores corresponde a la primera forma de cálculo.

En la figura 16.4, se indican los dos modelos anotados, para un pórtico plano de dos pisos y dos vanos. El modelo de la izquierda, corresponde a la primera forma de cálculo y el de la derecha a la segunda forma de cálculo. En el pórtico de la izquierda se nota que solo las vigas son axialmente rígidas; en cambio, en el de la derecha todos los elementos son axialmente rígidos.

Con el gran desarrollo informático que se tiene actualmente, no tiene sentido calcular la matriz de rigidez lateral con el modelo de cálculo presentado a la derecha de la figura 16.4 se lo indicó para

recordar que era el modelo que se utilizaba en los años 80 y 90 del siglo pasado, cuando todavía no se tenía el gran desarrollo informático que se tiene actualmente.

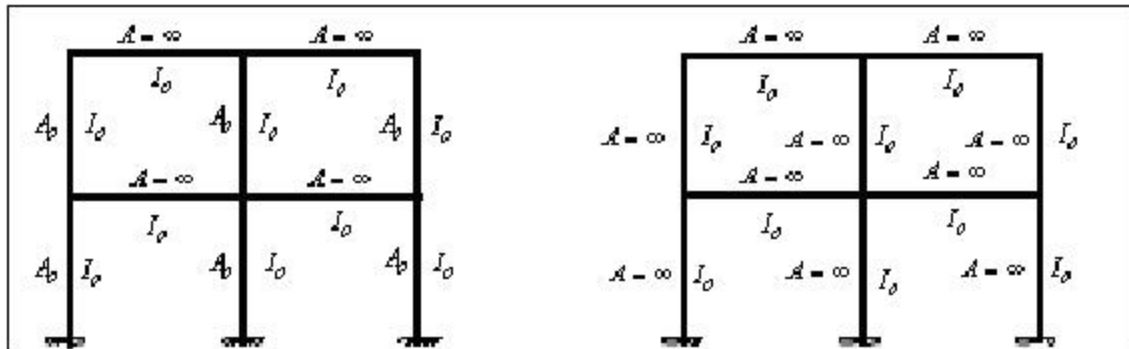


Figura 16.4 Modelos de cálculo para determinar  $K_L$ .

#### • EJEMPLO 4

Para el pórtico plano indicado en la figura 16.4, cuyas vigas son de 30/30 y las columnas de 30/40. Se desea encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando que solo las vigas son axialmente rígidas. A la derecha de la figura 16.4, se indica la numeración de los nudos y elementos. Por otra parte, el módulo de elasticidad  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ .

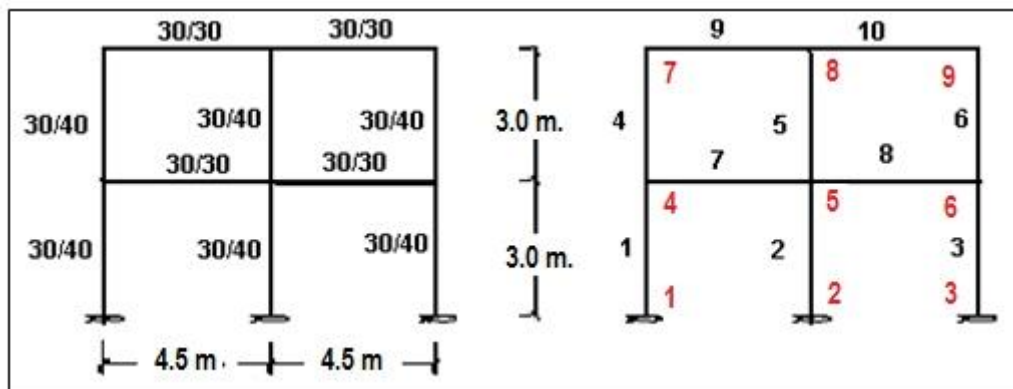


Figura 16.4 Geometría del pórtico de Ejemplo 4 y numeración de nudos y elementos

#### • SOLUCIÓN

A continuación se indica el programa con el cual se obtiene la matriz de rigidez lateral, se deja al lector que indique la forma como se numeró los grados de libertad.

```

1  %Programa Ej4_libro Capitulo 16
2  - nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
3  - GEN=[1 4 2 1 1 1; 4 4 7 2 1 1 1; 7 4 5 1 2 3 3; 8 5 6 1 2 3 3];
4  - [NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
5  - NUDOS=[1 0.0 0.0 2 1 4.5 0.0;4 0.0 3.0 2 1 4.5 0.0;7 0 6 2 1 4.5 0.0];
6  - [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
7  - dibujo(X,Y,NI,NJ)
8  - [VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
9  - SECCION=[1 0.3 0.4 5 1;7 0.3 0.3 3 1];
10 - [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
11 - [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
12 - E=2400000;[K]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
13 - nb=2;[KL]=kcondensada(K,nb)

```

La matriz de rigidez lateral del pórtico del Ejemplo 4 es.

$$K_l = \begin{bmatrix} 7235.7 & -2848.0 \\ -2848.0 & 1823.5 \end{bmatrix}$$

## 16.6 SIGNIFICADO FÍSICO

Los elementos de la matriz de rigidez lateral, son las fuerzas horizontales que deben aplicarse a nivel de piso, con el objeto de obtener un determinado desplazamiento lateral unitario y los demás desplazamientos laterales nulos.

Con los datos de la matriz de rigidez lateral encontrados en el Ejemplo 4, se presenta el significado físico de los elementos de  $K_L$ . En la figura 16.5, a la izquierda se aplican los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez lateral y a la derecha se observa la deformada que se obtiene, el primer piso se desplaza la unidad y el segundo no se desplaza; se destaca que existen desplazamientos verticales y rotaciones en los nudos.

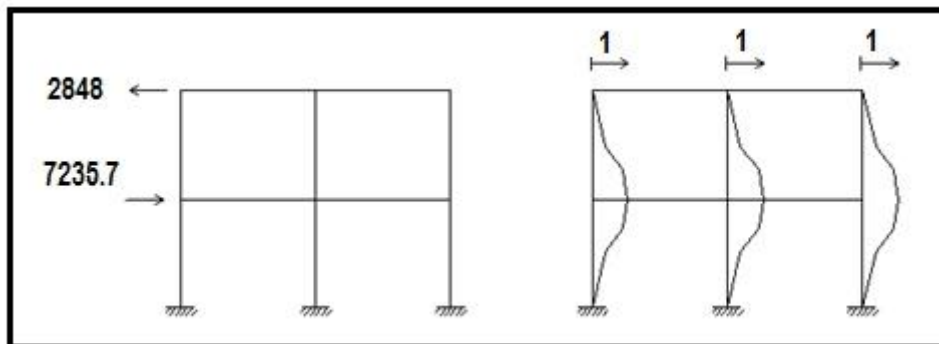


Figura 16.5 Significado físico de los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez lateral

La figura 16.6, corresponde a los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez lateral, el piso inferior no se desplaza, en cambio el piso superior se desplaza la unidad.

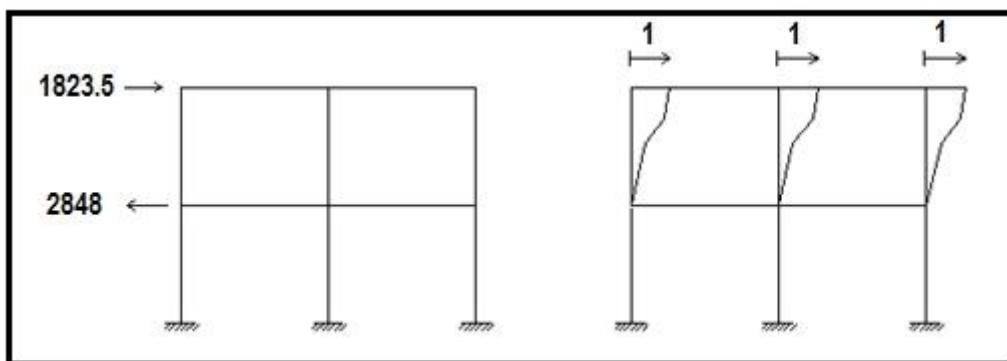


Figura 16.6 Significado físico de los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez lateral.

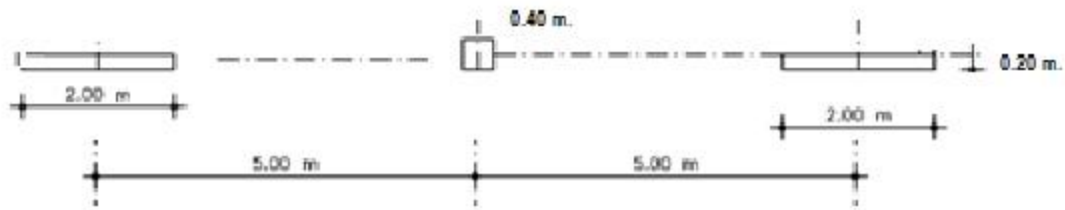
## 16.7 ANÁLISIS CON NUDO RÍGIDO

En Chile y en Perú se construyen apartamentos habitacionales de 4 o 5 pisos con **muros de ductilidad limitada** que tienen un espesor de por lo general 20 cm. Esta práctica ha sido extendida a edificios de más de 10 pisos y en el sismo de Concepción de 2010, tuvieron un mal comportamiento sísmico. Aguiar (2010).

Para pocos pisos funcionan los **muros de ductilidad limitada** con este pequeño antecedente se obtiene en el próximo ejemplo la matriz de rigidez lateral de un pórtico con muros. Como se indicó en Capítulos anteriores, se debe calcular con nudos rígidos.

- EJEMPLO 5

En la parte superior de la figura 16.7, se tiene la planta de un pórtico de un edificio de 2 pisos. Este pórtico tiene dos muros en los extremos de 0.2 m., por 2.0 m. En la parte central una columna de 0.4 m., por 0.4 m. En la parte inferior se presenta la geometría del pórtico en planta. Se pide encontrar la matriz de rigidez lateral, considerando nudos rígidos. Considerar  $E_i$  2400000 T/m<sup>2</sup>.



Vista en Planta

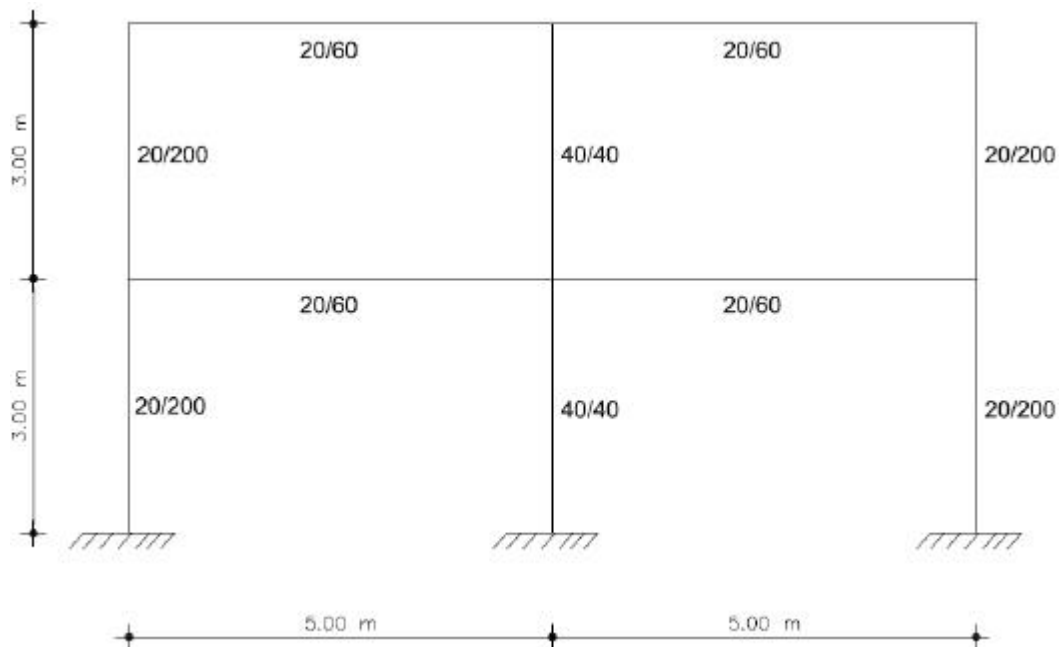


Figura 16.7 Pórtico con muros

- SOLUCIÓN

Los muros son de 20/200 cm., luego para la viga que está a la izquierda, las longitudes del nudo rígido que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez lateral, son:  $t_1 = 100$  cm;  $t_2 = 20$  cm;  $f = 500 - t_1 - t_2$ . Para la viga que se encuentra a la derecha en cambio  $t_1 = 20$  cm;  $t_2 = 100$  cm. Para la determinación del nudo rígido en los elementos verticales de la planta baja se considera que existe una viga de igual dimensión que la del primer piso.

En la figura 16.8, se presenta la numeración de los grados de libertad considerando que las vigas son axialmente rígidas, es decir se tiene un grado de libertad por piso y la numeración de los elementos se halla en un cuadrado. Los nudos se han numerado de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.



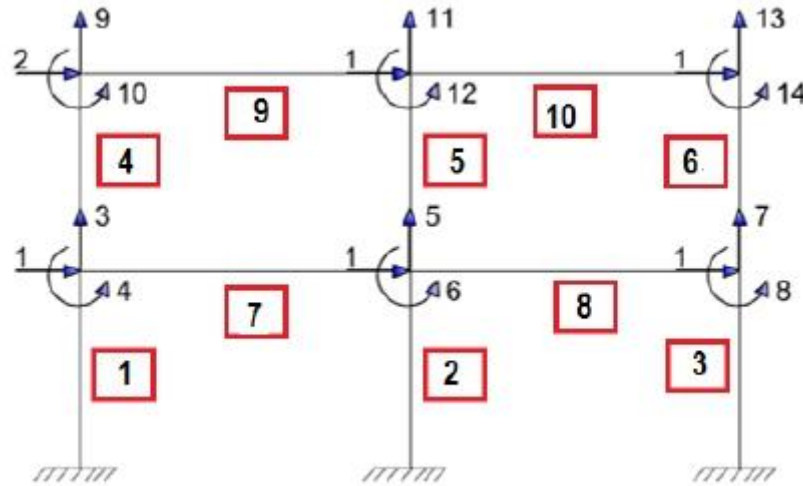


Figura 16.8 Grados de libertad y numeración de elementos.

El programa que obtiene la matriz de rigidez lateral se lista a continuación.

```

1  % Programa Ej5_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
2  - nod=9; np=2; nr=3; [CG, ngl]=cg_sismo(nod, np, nr);
3  - GEN=[1 1 4 2 1 1 1; 4 4 7 2 1 1 1; 7 4 5 1 2 3 3; 8 5 6 1 2 3 3];
4  - [NI, NJ]=gn_portico(GEN);
5  - NUDOS=[1 0 0 2 1 5 0; 4 0 3 2 1 5 0; 7 0 6 2 1 5 0];
6  - [X, Y]=glinea_portico(NUDOS);
7  - dibujo(X, Y, NI, NJ)
8  - [L, seno, coseno]=longitud(X, Y, NI, NJ);
9  - [VC]=vc(NI, NJ, CG);
10 - ELEM=[0.2 2.0; 0.4 0.4; 0.2 2.0; 0.2 2.0; 0.4 0.4; 0.2 2.0;
11         0.2 0.6; 0.2 0.6; 0.2 0.6; 0.2 0.6];
12 - cc1=[0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 1.0; 0.2; 1.0; 0.2];
13 - cc2=[0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 0.3; 0.2; 1.0; 0.2; 1.0];
14 - E=2400000;
15 - [K]=krigidez_nudo_rigido(ngl, ELEM, cc1, cc2, L, seno, coseno, VC, E);
16 - na=2; kaa=K(1:na, 1:na); kab=K(1:na, na+1:ngl); kba=kab';
17 - kbb=K(na+1:ngl, na+1:ngl); KL=kaa-kab*inv(kbb)*kba

```

La matriz de rigidez lateral, es la siguiente.

$$K_L = \begin{bmatrix} 244956.47 & -83774.75 \\ -83774.75 & 43697.30 \end{bmatrix}$$

## 16.8 ANÁLISIS CON PISO FLEXIBLE

El modelaje de una estructura con piso flexible, permite realizar el análisis sísmico para la componente vertical de movimiento del suelo o para la componente horizontal. En este caso se considera que todos los elementos son totalmente flexibles. Para el análisis sísmico de un pórtico plano considerando piso flexible, se procede de la siguiente manera:

- i) Se numeran todos los grados de libertad horizontal de la estructura.
- ii) Luego se numeran todos los grados de libertad vertical.
- iii) Finalmente se numeran las rotaciones de los nudos.

- iv) Se encuentra la matriz de rigidez por ensamblaje directo.
- v) Se particiona la matriz de rigidez, en base al número de grados de libertad horizontales y verticales.
- vi) Se determina la matriz de rigidez condensada a las coordenadas horizontales y verticales.

### • EJEMPLO 6

Determinar la matriz de rigidez condensada a las coordenadas laterales y verticales de la estructura cuya geometría se indica en la figura 16.9, todos los elementos son de 30/30, la luz es de 4.0 m, y la altura es de 2.5 m. Se considera  $E=2100000 \text{ T/m}^2$ , además todos los elementos completamente flexibles.

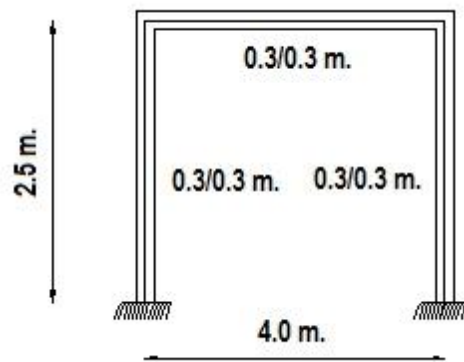


Figura 16.9 Pórtico de Ejemplo 6.

### • SOLUCIÓN

En la figura 16.10, a la izquierda se presentan los grados de libertad de la estructura, cuyos elementos son totalmente flexibles, se ha notado primero los grados de libertad horizontal, luego los verticales y finalmente la rotación. A la derecha se indican los grados de libertad, para los cuales se va a encontrar la matriz de rigidez condensada.

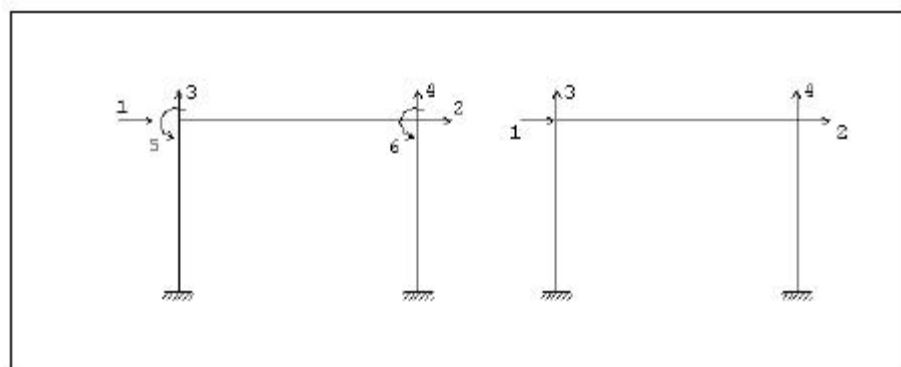


Figura 16.10 Numeración de grados de libertad para análisis con piso flexible y grados de libertad para el análisis sísmico ante componente horizontal o vertical.

Sea, la columna izquierda el elemento uno, la viga el dos y la columna derecha el elemento tres. Los vectores de colocación para el ensamblaje, son:

$$VC^{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 5]$$

$$VC^{(2)} = [1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 4 \ 6]$$

$$VC^{(3)} = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 6]$$

- **Matriz de rigidez completa**

$$KT = \begin{bmatrix} 48338.64 & -4720.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 & 0.00 \\ -47250.00 & 48338.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1360.80 \\ 0.00 & 0.00 & 75865.78 & -265.78 & 531.56 & 531.56 \\ 0.00 & 0.00 & -265.78 & 75865.78 & -531.56 & -531.56 \\ \hline 1360.80 & 0.00 & 531.56 & -531.56 & 3685.50 & 708.75 \\ 0.00 & 1360.80 & 531.56 & -531.56 & 708.75 & 3685.50 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez condensada**

$$K = \begin{bmatrix} 47816.896 & -47149.665 & -164.613 & 164.613 \\ -47149.665 & 47816.896 & -164.613 & 164.613 \\ -164.613 & -164.613 & 75737.177 & -137.177 \\ 164.613 & 164.613 & -137.177 & 75737.177 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector el desarrollo del presente ejercicio considerando nudos rígidos.

## 16.9 VARIABLES EN LA MODELACIÓN

Lo fundamental del presente Capítulo es ilustrar el cálculo de la matriz de rigidez condensada para el análisis sísmico de estructuras. Sin embargo, es importante destacar que existen tres variables que son básicas para la modelación de los pórticos, a saber:

- Modelación de las condiciones de apoyo.
- Modelación de las inercias a considerar en el análisis.
- Modelación de los nudos.

### 16.9.1 Modelación de las condiciones de apoyo

*Normalmente, se considera que las columnas están empotradas en su base, esto significa que la cimentación es completamente rígida y no permite que la columna gire.*

Pero si en la base de la columna actúan grandes momentos es probable que exista rotación en la unión columna con la cimentación, y se tengan fuerzas y momentos totalmente diferentes en la columna, en relación a los que se obtienen con base empotrada. Por este motivo se recomienda que la columna sea modelada en su base mediante resortes con rigidez rotacional, para cuando existan grandes momentos actuando en la base de la columna.

La modelación de la base de la columna, con resortes rotacionales, tiene su grado de complejidad en el sentido de definir los parámetros de la rigidez del resorte. *Como alternativa se puede considerar que las columnas están sobre apoyos articulados en una viga de fundación de iguales*

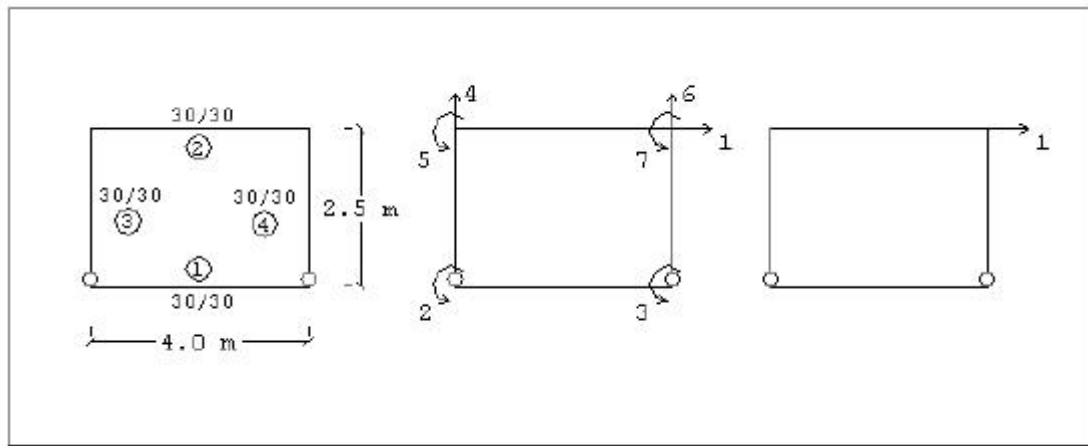
dimensiones que la de los niveles superiores.

- **EJEMPLO 7**

Determinar la matriz de rigidez lateral, considerando nudos rígidos, de la estructura indicada en la figura 16.6 pero considerando que las columnas están sobre apoyos articulados sobre una viga de iguales dimensiones de la viga superior. El módulo de elasticidad es  $E = 2100000 \text{ T/m}^2$ .

- **SOLUCIÓN**

En la figura 16.11, a la izquierda se muestra la geometría de la estructura cuya matriz de rigidez lateral  $K_L$  se va a calcular y la numeración de los elementos; al centro se indican los grados de libertad considerados y a la derecha el grado de libertad horizontal, para el cual se va a encontrar  $K_L$ .



**Figura 16.11** Descripción de la estructura, grados de libertad y coordenada lateral del ejemplo, considerando que las columnas se encuentran sobre apoyos articulados en una viga de cimentación.

- **Matriz de rigidez de las vigas 1 y 2**

$$k = \begin{bmatrix} 329.32 & 658.64 & -329.32 & 658.64 \\ 1700.39 & -658.64 & 934.17 & \\ & 329.32 & -658.64 & \\ & & & 1700.39 \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez de las columnas 3 y 4**

$$k = \begin{bmatrix} 1249.60 & 0 & -1468.28 & & & & \\ & 80425.53 & -1249.60 & 0 & & & -80425.53 \\ & & -1655.72 & & & & \\ & & 2328.42 & 1468.28 & 0 & 1342.28 & \\ & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 1249.60 & 0 & 1655.72 & \\ & & & & 80425.53 & 0 & \\ & & & & & & 2797.02 \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 0 & -329.32 & -658.64 & 80754.85 & -658.64 \\
 0 & & & & & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & 
 \end{array}$$

La matriz de rigidez lateral que se obtiene es.

$$k_m]$$

Por lo tanto, al calcular con  $k_m]$  columnas articuladas sobre una viga de dimensiones iguales a la viga del primer piso, la matriz de rigidez disminuye.

### 16.9.2 Modelación de las inercias

En la filosofía de diseño sísmico se considera que una estructura, ante un *sismo frecuente* de baja magnitud no va a sufrir ningún daño, en ese caso es muy correcto todo lo que se ha realizado en el presente capítulo de calcular con inercias gruesas  $I_0$ . Pero también se considera el caso de que va a registrarse un *sismo muy fuerte* que va a producir daño en la estructura en éste caso el análisis sísmico debe realizarse con inercias agrietadas  $I_{cr}$  tema que se aborda en el presente sub apartado.

Un aspecto que no se ha tomado en cuenta, en este texto, es la incorporación de la losa en la resistencia y rigidez de las vigas, *para el caso de que estos dos elementos estructurales se construyan en forma monolítica*. Este tema es tratado de acuerdo a lo prescrito por la Norma Ecuatoriana de la Construcción NEC-11.

$$K_l = [1003.3 \text{ } ^l$$

Al considerar base empotrada se obtiene  $K_l = [1485.7 \text{ } ^l$

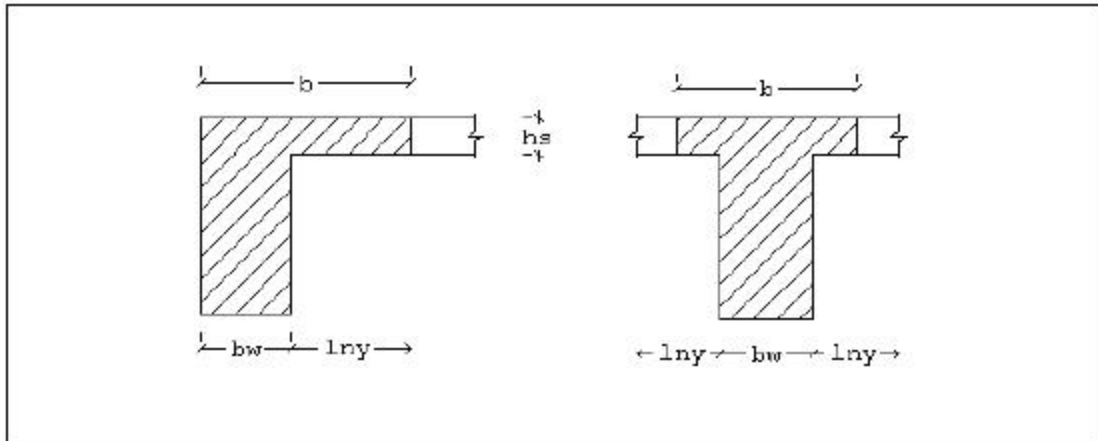


Figura 16.12 Nomenclatura para vigas L y T.

En la figura 16.12, se indica la nomenclatura utilizada para determinar la resistencia a flexión y rigidez, de una viga "T" o "L", de acuerdo al ACI-05 y NZS-3101-82.

El valor del ancho efectivo  $b$ , para cuando el ala se encuentra en compresión, es el menor valor de:

- **Viga "L" de acuerdo al ACI 318-05**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \leq b_w + 6h_s \quad (16.16.1)$$

$$\leq b_w + \frac{l_{ny}}{2} \quad (16.16.2)$$

$$\leq b_w + \frac{l_x}{12} \quad (16.16.3)$$

- **Viga "T" de acuerdo al ACI 318-02**

Valores para determinar resistencia a flexión y rigidez.

$$b \leq b_w + 16h_s \quad (16.17.1)$$

$$\leq b_w + l_{ny} \quad (16.17.2)$$

$$\leq b_w + \frac{l_x}{4} \quad (16.17.3)$$

Siendo  $l_x$ , la luz de la viga en la dirección de análisis,  $l_{ny}$ , la distancia libre al próximo nervio.

Una vez determinada la contribución de la losa para el cálculo de las inercias, se procede a determinar las inercias agrietadas de acuerdo al ACI-05 se tiene:

$$I_v = 0.35 I_g \quad (16.18.1)$$

$$I_c = 0.70 I_g \quad (16.18.2)$$

La norma de Nueva Zelanda NZS-3101-82, determina el ancho equivalente con las ecuaciones (16.16.1) a (16.17.3) únicamente para determinar la resistencia a flexión cuando el ala está sujeta a compresión. Para el cálculo de la rigidez, los valores son los siguientes:

- **Viga "L" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \leq b_w + 3h_s \quad (16.19.1)$$

$$\leq b_w + \frac{l_{my}}{4} \quad (16.19.2)$$

$$\leq b_w + \frac{l_x}{24} \quad (16.19.3)$$

- **Viga "T" de acuerdo a NZS-3101-82**

Valores para determinar rigidez.

$$b \leq b_w + 8h_s \quad (16.20.1)$$

$$\leq b_w + \frac{l_{my}}{2} \quad (16.20.2)$$

$$\leq b_w + \frac{l_x}{8} \quad (16.20.3)$$

Los valores han sido prácticamente reducidos en un 50% con relación a los del ACI 318-05.

Por otra parte, Paulay y Priestley recomiendan utilizar las inercias agrietadas  $I_{cr}$  indicadas en la tabla 16.1, se indica además el rango de variación.

**Tabla 16.1** Valores recomendados por Paulay y Priestley para la inercia agrietada  $I_{cr}$ .

ELEMENTO Y FORMA	RANGO $I_{cr}$	RECOMENDADO $I_{cr}$
Viga Rectangular	0.30 a 0.50 de $I_g$	0.40 de $I_g$
Viga T o L	0.25 a 0.45 de $I_g$	0.35 de $I_g$
Columna $P > 0.5 f_c A_g$	0.70 a 0.90 de $I_g$	0.80 de $I_g$
Columna $P = 0.2 f_c A_g$	0.50 a 0.70 de $I_g$	0.60 de $I_g$
Columna $P = -0.05 f_c A_g$	0.30 a 0.50 de $I_g$	0.40 de $I_g$

En la tabla 16.1,  $f_c$  es la resistencia a la compresión del hormigón;  $A_g$ , es el área total de la sección;  $I_g$ , es el momento de inercia grueso y  $P$  la fuerza axial.

Al iniciar el análisis no se conoce la carga axial que gravita sobre la columna  $P$ , por lo que el cálculo debe realizarse en forma iterativa.

Finalmente el NEC-11 considera la inercia agrietada en vigas el 50% de la inercia gruesa y la inercia agrietada en columnas el 80% de la inercia gruesa. De esta forma ante un sismo severo se tiene previsto un mayor daño en las vigas que en las columnas.

De otra manera, se puede manifestar que la mayor reducción de inercia de las vigas conduce a tener columna fuerte viga débil.



$$I_v = 0.5 * I_o \quad (16.21.1)$$

$$I_c = 0.8 * I_o \quad (16.21.2)$$

Una forma más exacta de encontrar la inercia agrietada es mediante el diagrama momento curvatura, pero por ser este un libro de Estructuras, se deja al lector que incursione en esta temática y vea cómo puede hallar en este diagrama la inercia agrietada.

### 16.9.3 Modelación de los nudos

Se diseña con el principio de *nudo fuerte - viga débil*. Esto significa que teóricamente el nudo no va a dañarse durante un sismo severo. En estas condiciones, el modelaje de los elementos debe considerar dos sectores de rigidez infinita en los extremos, de esta manera la rigidez de los elementos será mayor.

Ahora bien, durante un sismo el nudo está sujeto a fuerzas de corte de considerable magnitud lo cual provoca una considerable fisuración diagonal, especialmente en nudos en los cuales no se ha realizado el control del cortante horizontal y vertical transmitido al nudo. Existe la posibilidad de un deterioro de la adherencia en el nudo como consecuencia de las fuerzas reversibles que se producen debido al sismo, el ACI-05 con las recomendaciones estipuladas para el control de adherencia no está resolviendo el problema, únicamente está minimizando los efectos de adherencia. **En fin, ante la acción de un sismo severo es conveniente modelar los elementos sin nudos rígidos en los pórticos dúctiles compuestos por vigas y columnas.**

Por lo tanto, el modelaje del elemento con y sin nudo rígido depende del nivel de desempeño esperado en la edificación. Para el nivel de desempeño denominado *operacional* en que no se espera daño en la estructura se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita, de igual manera se debe proceder para el desempeño *inmediatamente ocupacional*. Para los niveles de desempeño denominados *seguridad de vida* y *prevención del colapso*, lo más adecuado es modelar los elementos sin nudos rígidos. La nomenclatura utilizada de los niveles de desempeño es la recomendada por VISION 2000 en la nueva filosofía de diseño sísmico de las estructuras.

En estructuras con muros de corte, es importante modelar los elementos con nudos rígidos debido a que las deformaciones en la unión muro de corte con las vigas, las deformaciones del nudo serán probablemente muy pequeñas.

## 16.10 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

### • EJEMPLO 8

Elaborar un programa de computación, utilizando los programas de **CEINCI-LAB** para encontrar la matriz de rigidez lateral, mediante la triangularización de la matriz de rigidez, de la estructura irregular indicada en la figura 16.13; las columnas son de 30/30 cm., y las vigas de 25/25 cm. Considerar un módulo  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ .

### • SOLUCIÓN

Tanto el programa **cg\_sismo** como **cg\_sismo\_gaus**, generan la matriz de coordenadas generalizadas de estructuras regulares en elevación. Como la estructura de Ejemplo 8 es irregular se la debe hacer regular colocando elementos ficticios, en este caso una viga y una columna de dimensiones pequeñas, que tiendan a cero.

En la parte superior izquierda de la figura 6.14 se presenta el pórtico con los elementos ficticios; a la derecha se indican los grados de libertad en que se ha numerado al final las coordenadas principales para poder hacer la triangularización.

En la parte inferior de la figura 6.14 se indica la numeración de nudos y elementos en base a la cual se realiza el programa que se presenta a continuación.

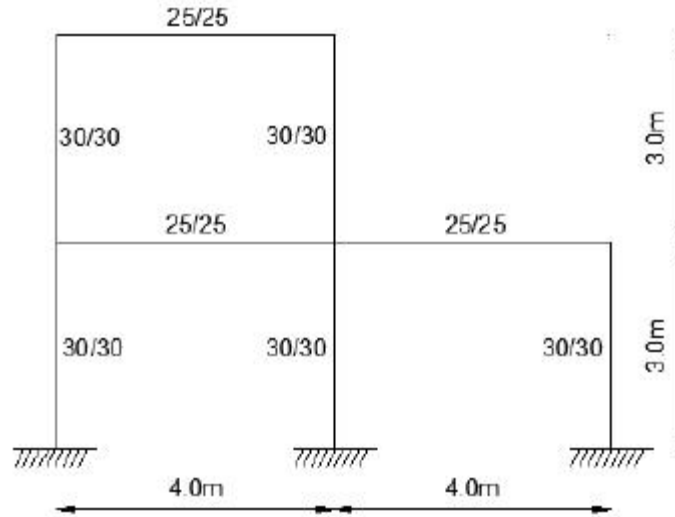


Figura 16.13 Estructura Irregular

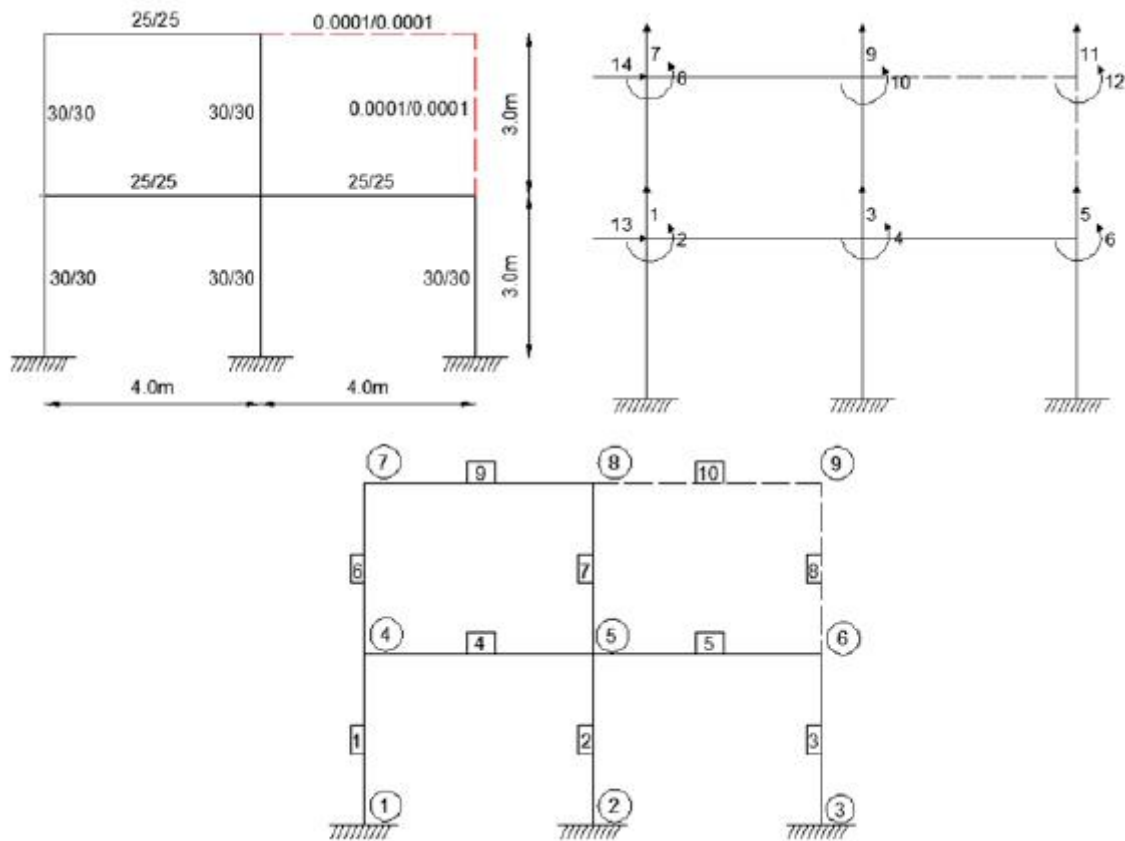


Figura 16.14 Estructura con elementos ficticios; grados de libertad; numeración de nudos y elementos.

$$K_i = \begin{bmatrix} 2410.9 & -794.7 \\ -794.7 & 532.8 \end{bmatrix}$$

```

1  % Programa Ej8_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
2  - nod=9; np=2; nr=3; [CG, ngl]=cg_sismo_gaus (nod, np, nr);
3  - GEN=[1 1 4 2 1 1 1; 4 4 5 1 5 3 3; 6 4 7 2 1 1 1; 5 5 6 1 5 3 3];
4  - [NI, NJ]=gn_portico (GEN);
5  - NUDOS=[1 0 0 2 1 4 0; 4 0 3 2 1 4 0; 7 0 6 2 1 4 0];
6  - [X, Y]=glinea_portico (NUDOS);
7  - dibujo (X, Y, NI, NJ)
8  - [L, seno, coseno]=longitud (X, Y, NI, NJ);
9  - [VC]=vc (NI, NJ, CG);
10 - ELEM=[0.3 0.3; 0.3 0.3; 0.3 0.3; 0.25 0.25; 0.25 0.25; 0.3 0.3;
11       0.3 0.3; 0.0001 0.0001; 0.25 0.25; 0.0001 0.0001]
12 - E=2400000; [K]=krigidez (ngl, ELEM, L, seno, coseno, VC, E); %Matriz de rigidez
13 - nb=2; [KL]=kcondensada (K, nb)

```

### • EJEMPLO 9

Encontrar la matriz de rigidez lateral, aplicando la triangularización de Gauss, del pórtico de dos pisos, mostrado a la izquierda de la figura 16.15; las columnas son de 30/30 cm., las vigas de 25/25 cm. El módulo de elasticidad del hormigón es  $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$ . Considerar la mampostería del piso superior ya que está acoplada a la estructura y tiene un espesor de 15 cm., el módulo de la mampostería es  $E_m = 100000 \frac{T}{m^2}$ . Modelar la mampostería como se indica a la derecha de 16.15, el ancho "a" calcular con el Modelo de Priestley (1992).

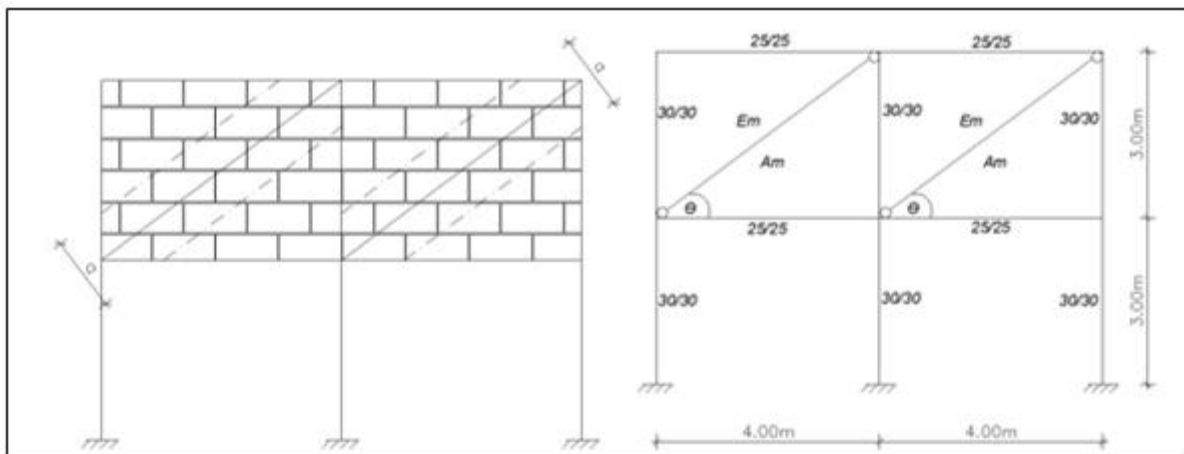


Figura 16.15 Estructura con piso blando.

### • SOLUCIÓN

La diagonal de mampostería trabaja solo a compresión, de tal manera que solo tiene rigidez axial  $r = \frac{E_m A_m}{L_m}$ . Donde  $E_m$  es el módulo de elasticidad de la mampostería;  $A_m$  es el área de la diagonal equivalente;  $L_m$  es la longitud de la diagonal equivalente de mampostería.

$$A_m = a * t \quad a = \frac{L_m}{4}$$

Donde  $t$  es el espesor de la mampostería. El vector de colocación, de las diagonales equivalentes tiene cuatro cantidades y son los grados de libertad horizontal y vertical del nudo inicial y final de la diagonal equivalente.

En la parte superior izquierda de la figura 16.16 se indica la numeración de nudos y elementos. Nótese que las diagonales equivalentes se numeran al final.

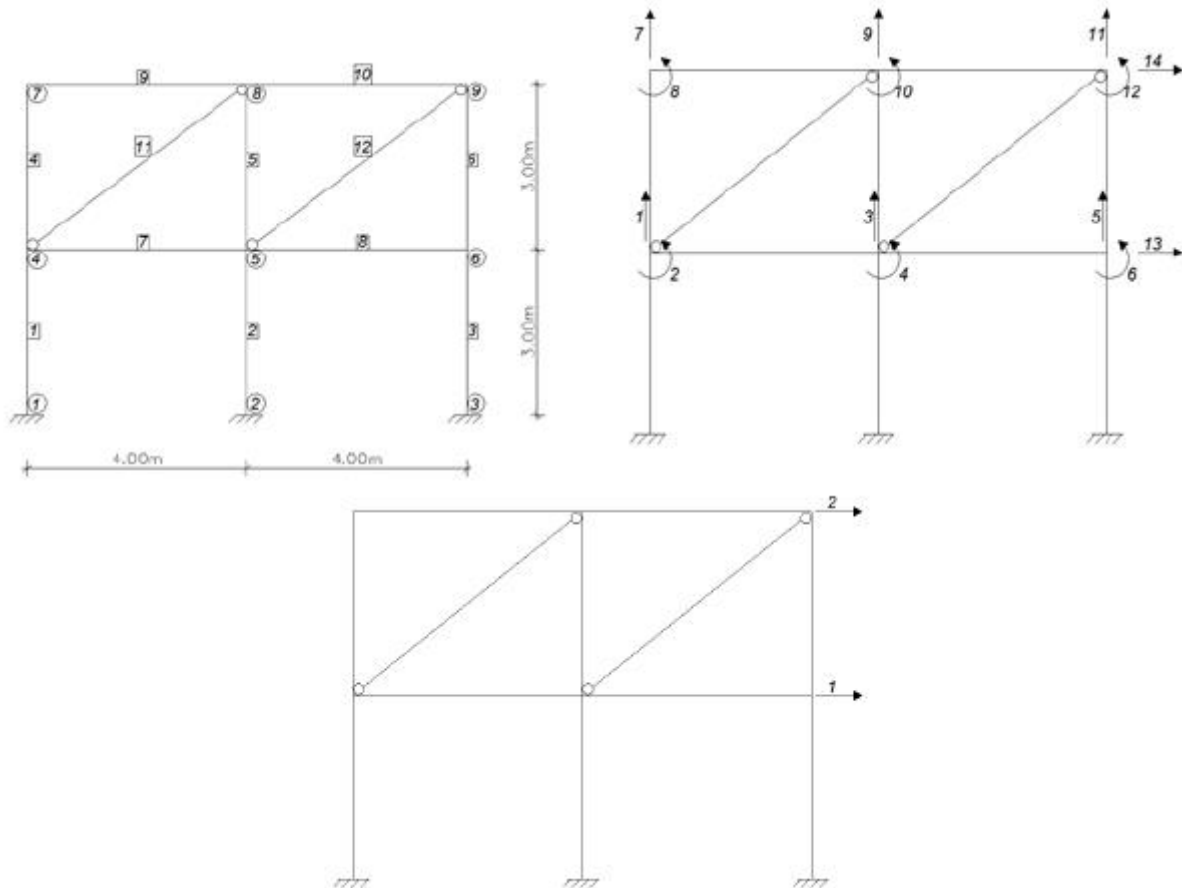


Figura 16.16 Numeración de nudos y elementos; grados de libertad y coordenadas principales.

A la derecha de la figura 16.16 se indican los grados de libertad, considerando que las vigas son axialmente rígidas. Al final se numeró las coordenadas principales. A continuación se indica el programa con el cual se encuentra la matriz de rigidez lateral.

```

1  % Programa Ej9_libro. de Capitulo 16 de libro de Matricial
2  - clear all
3  - nod=9;np=2;nr=3;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr)
4  - GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 7 2 1 1 1;7 4 5 1 2 3 3;8 5 6 1 2 3 3;
5      11 4 8 1 1 1 1];
6  - [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
7  - NUDOS=[1 0 0 2 1 4 0;4 0 3 2 1 4 0;7 0 6 2 1 4 0];
8  - [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
9  - dibujo(X,Y,NI,NJ)
10 - [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
11 - [VC]=vc(NI,NJ,CG);
12 - SECCION=[1 0.3 0.3 5 1;7 0.25 0.25 3 1;11 0.0001 0.0001 1 1];
13 - [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
14 - E=2400000;[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Matriz de rigidez
15 - % Contribución de Mampostería a matriz de rigidez
16 - ELEM=[0.15 2.75;0.15 2.75];VCM=[13 1 14 9;13 3 14 11];Em=100000;
17 - Ld=sqrt(3.7^2+2.75^2);Lm=[Ld;Ld];
18 - [KM]=krigidez_mamposteria(ngl,ELEM,Lm,VCM,Em);
19 - KT=KH+KM;
20 - nb=2;[KL]=kcondensada(KT,nb)

```

$$k_i = \begin{bmatrix} 7846.1 & -5928 \\ -5928 & 5495 \end{bmatrix}$$

Al observar la matriz de rigidez lateral, se puede decir en forma aproximada que la rigidez del segundo piso  $k_2 = 5495 \text{ T/m}$  y que la rigidez del primer piso es  $k_1 = 7846.1 - 5495 = 2351.1 \text{ T/m}$ .

Para que una estructura sea sismo resistente la rigidez del primer piso tiene que ser mayor que la rigidez del segundo piso. En el ejemplo no se cumple esto por éste motivo la estructura analizada es muy vulnerable sísmicamente y en la literatura se la conoce con el nombre de **Piso Blando**.

• **EJEMPLO 10**

La estructura indicada en la figura 16.17 fue construida inicialmente con columnas y vigas de hormigón armado de 20/20 cm. Posteriormente fue reforzada con diagonales de acero de sección cuadrada de 200/200/5 mm. El módulo de elasticidad del hormigón es  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ . Del acero  $E_s = 20000000 \text{ T/m}^2$ . Se pide calcular la matriz de rigidez lateral; considerar apoyo simple para los elementos de acero.

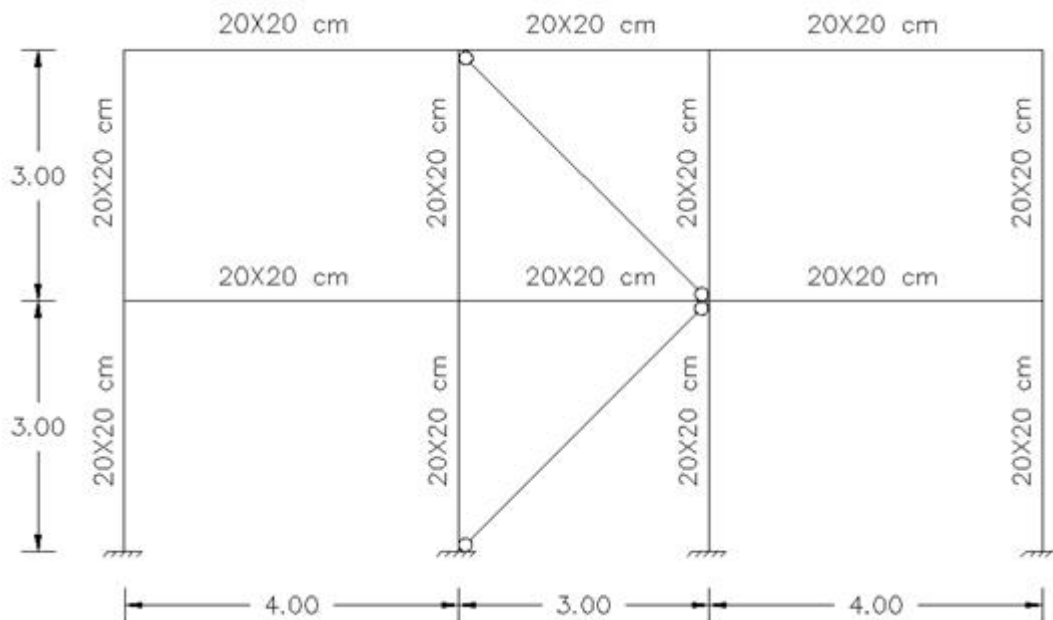


Figura 16.17 Pórtico de Hormigón con diagonales de acero

• **SOLUCIÓN**

Las diagonales de acero se calculan como apoyos simples, de tal manera que solo trabajan axialmente a tracción o compresión. En consecuencia el vector de colocación tiene cuatro cantidades, desplazamiento horizontal y vertical del nudo inicial y del nudo final.

En la parte superior de la figura 16.18 se tiene la numeración de los nudos y elementos en base a la cual se realiza el programa. Nótese que los elementos de acero se han numerado al final, hacerlo de esta manera facilita encontrar la matriz de rigidez de los elementos de hormigón, por una parte y encontrar la contribución de los elementos de acero por otra. La matriz de rigidez total es la suma de las dos contribuciones de los elementos de hormigón y de los elementos de acero.

En la parte inferior, de la figura 16.18, se presenta el sistema de coordenadas generalizadas, numerando al final las coordenadas principales.

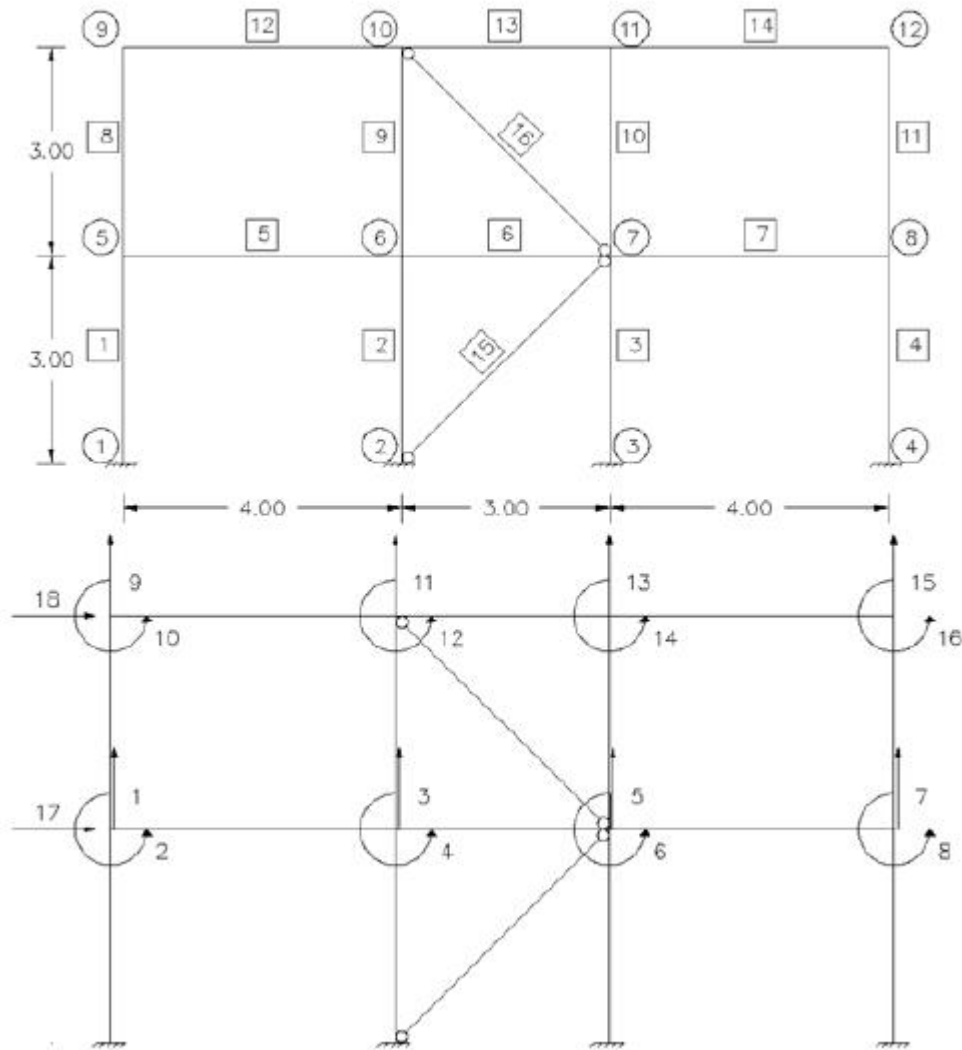


Figura 16.18 Numeración de nudos, elementos y grados de libertad

```

1  % Programa Ej10_libro. de Capítulo 16 de libro de Matricial
2  - nod=12;np=2;nr=4;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
3  - GEN=[1 1 5 3 1 1 1;5 5 6 2 1 1 1;8 5 9 3 1 1 1;12 9 10 2 1 1 1;
4  - 15 2 7 1 1 5 3];
5  - [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
6  - NUDOS=[1 0 0 2 4 0 3.0;2 4 0 2 4 0 3.0;3 7 0 2 4 0 3.0; 4 11 0 2 4 0 3];
7  - [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
8  - dibujo(X,Y,NI,NJ)
9  - [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
10 - [VC]=vc(NI,NJ,CG);
11 - SECCION=[1 0.2 0.2 13 1;15 0.0001 0.0001 1 1];
12 - [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
13 - E=2400000;[KH]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E); %Hormigón
14 - % Contribución de Acero con nudos simples
15 - area=0.20*0.20-0.19*0.19;ELEMA=[area;area];Es=20000000;
16 - LA=L(15:16);senA=seno(15:16);cosA=coseno(15:16);
17 - VCA=[0 0 17 5;17 5 18 11];
18 - [KA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senA,cosA,VCA,Es);
19 - KT=KH+KA;nb=2;[KL]=kcondensada(KT,nb)

```

La matriz de rigidez que se obtiene es la siguiente.

$$K_l = \begin{bmatrix} 15763 & -6691 \\ -6691 & 5462 \end{bmatrix}$$

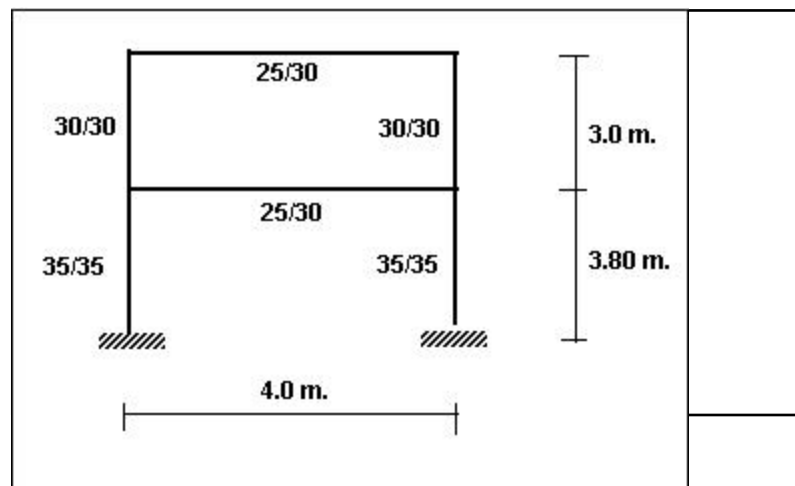
### 16.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

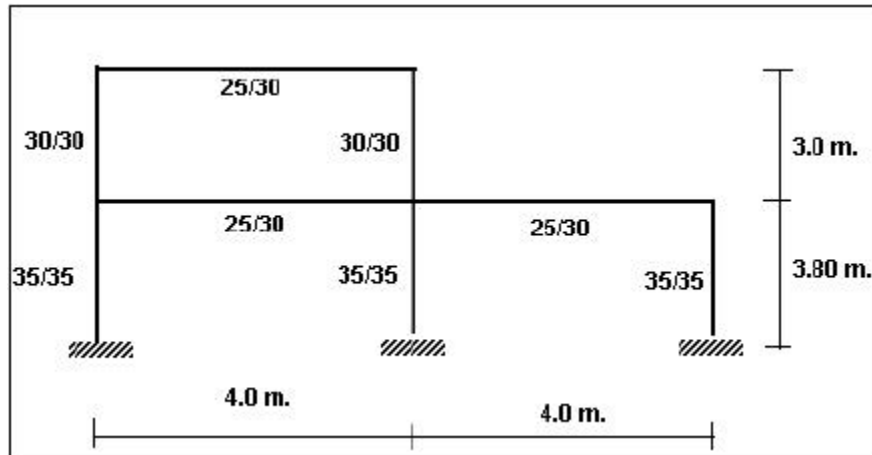
En las siguientes estructuras determinar la matriz de rigidez lateral de la siguiente manera:

- Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.
- Mediante un modelo numérico de cálculo sin nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.
- Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que solo las vigas son axialmente rígidas.
- Mediante un modelo de cálculo con nudo rígido y considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.
- Mediante la rigidez de piso calculada como la sumatoria de las rigideces  $t = \frac{12EI}{H^3}$

Considerar  $E = 12000 \cdot f'c$        $f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$       Despreciar el efecto del corte.

#### EJERCICIO N.- 1



**EJERCICIO N.- 2****EJERCICIO N.- 3**

Resolver el ejercicio 1 considerando inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11

**EJERCICIO N.- 4**

Resolver el ejercicio 2 considerando inercias agrietadas de acuerdo al ACI-05.

**EJERCICIO N.- 5**

Resuelva los ejercicios 3 y 4 considerando rotaciones en los apoyos.



## CAPITULO 17

---

# MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

## RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura en la cual se consideran tres grados de libertad por planta, orientado al análisis sísmico espacial de edificios considerando que los pisos son completamente rígidos. En el modelo numérico de cálculo se considera que los pórticos son elementos de una estructura que se unen por medio de una losa o diafragma horizontal en cada uno de los pisos. Se analiza las sub matrices que conforman la matriz de rigidez en coordenadas de piso con el propósito de que el lector aprenda a decidir una buena estructuración sísmica de un edificio de acuerdo a un determinado objetivo que puede ser, por ejemplo que la estructura tenga una gran rigidez torsional.

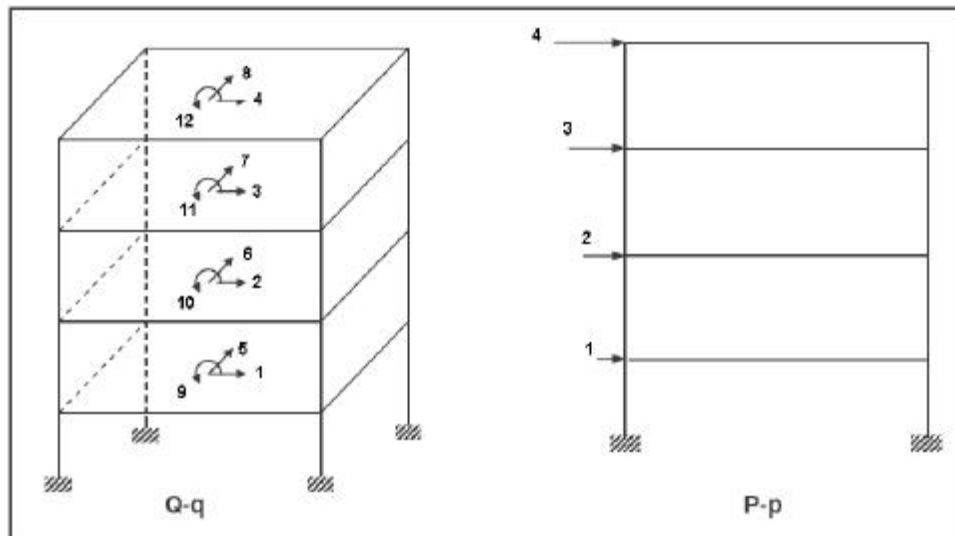
Por otra parte se presenta el cálculo del Centro de Rigidez de tres maneras, la primera en forma matricial; la segunda en base a la matriz de rigidez lateral, procedimiento valido para un piso y la tercera en forma muy aproximada en base a la rigidez "t".

Se complementa el estudio con el cálculo de la matriz de rigidez en coordenadas de piso de estructuras irregulares en elevación, sin y con aisladores sísmicos.

### 17.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En la figura 17.1, a la izquierda, se presenta un edificio de cuatro pisos compuesto por cuatro pórticos, el modelo es aplicable a un edificio con cualquier número de pisos y pórticos. En cada planta de la estructura se ha definido el Centro de Masas y en ese punto se han ubicado los tres grados de libertad por planta que son dos componentes de desplazamiento horizontal y una rotación de piso.

La numeración de los tres grados de libertad por planta es arbitrario sin embargo es conveniente numerar primero todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje X empezando desde la primera planta hasta la última planta; luego todas las componentes de desplazamiento horizontal según el eje Y así mismo empezando desde la primera planta hasta la última y finalmente las rotaciones de piso como lo muestra la figura 17.1. A éstos tres grados de libertad por planta se denomina sistema  $Q - q$  ya que son coordenadas de la estructura. Donde  $Q$  es el vector de cargas aplicadas en el centro de masa de la estructura y  $q$  el vector de coordenadas de piso.



**Figura 17.1** Coordenadas de la Estructura y Coordenadas de un Elemento

Para la estructura de la figura 17.1 se tiene que los vectores de cargas y coordenadas generalizadas tienen la siguiente forma y significado.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_\theta \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_\theta \end{bmatrix}$$

$$Q_X = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}, \quad Q_Y = \begin{bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix}, \quad Q_\theta = \begin{bmatrix} Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{12} \end{bmatrix}$$

$$q_X = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad q_Y = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}, \quad q_\theta = \begin{bmatrix} q_9 \\ q_{10} \\ q_{12} \end{bmatrix}$$

Donde  $Q_1$  es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido X positiva si va hacia la derecha,  $Q_2$  similar a  $Q_1$  pero en el segundo piso, ...,  $Q_5$  es la fuerza horizontal aplicada en el primer piso en sentido Y positivo si está en la dirección del sistema  $Q - q$ ,  $Q_6$  similar a  $Q_5$  pero en el piso 2, ...,  $Q_9$  es el momento de torsión aplicado en el primer piso positivo si es anti horario,  $Q_{10}$  momento de torsión aplicado en el segundo piso, etc.

Por otro lado se tiene que  $q_1$  es la componente de desplazamiento horizontal en sentido X del primer piso,  $q_2$  es similar a  $q_1$  pero en el piso 2, ...,  $q_5$  es la componente de desplazamiento horizontal en sentido Y del primer piso,  $q_6$  similar a  $q_5$  pero en piso 2, ...,  $q_9$  es la rotación por torsión en el

primer piso,  $q_{10}$  es la rotación por torsión en el segundo piso, etc. Serán positivas si están en el sentido del sistema  $Q - q$ .

## 17.2 HIPÓTESIS DEL MODELO

Como se indicó se considera que cada pórtico plano es un elemento de la estructura cuyo sistema de coordenadas de miembro está conformado por las coordenadas laterales de cada uno de los pisos. En la figura 17.1 a la derecha se indica el sistema de coordenadas  $P - p$  de los elementos que tienen la siguiente forma y significado.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

Donde  $P_1$  es la fuerza horizontal que actúa en el piso 1,  $P_2$  es la fuerza horizontal en el piso 2, etc. Por otra parte  $p_1$  es el desplazamiento horizontal del piso 1,  $p_2$  es el desplazamiento horizontal en el piso 2, etc.

La relación entre el vector de cargas  $P$  y el vector de desplazamientos  $p$  viene dado por la matriz de rigidez lateral  $K_L$  de la siguiente manera:

$$P = K_L * p \quad (17.1)$$

## 17.3 MATRIZ $K_E$

Se recuerda que la matriz de rigidez lateral  $K_L$  es aquella matriz que está asociada a las coordenadas laterales de piso, con esta matriz se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso  $K_E$  aplicando la ecuación (17.2) que fue estudiada en capítulos anteriores.

$$K_E = \sum_{i=1}^n A^{(i)T} K_L A^{(i)} \quad (17.2)$$

Donde  $n$  es el número de pórticos de la estructura (elementos),  $A^{(i)}$  es la matriz de compatibilidad del pórtico  $i$ , que relaciona las coordenadas laterales de un pórtico con las coordenadas de piso de la estructura. La forma de la matriz  $A^{(i)}$  es la siguiente:

$$A^{(i)} = \begin{bmatrix} \text{Cosa} & & \text{Sena} & & r_1 \\ & \text{Cosa} & & \text{Sena} & & r_2 \\ & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & \text{Cosa} & & \text{Sena} & & r_n \end{bmatrix} \quad (17.3)$$

Siendo  $\alpha$  es el ángulo que forma la orientación positiva del pórtico con el eje de las  $X$ . Para pórticos paralelos al eje  $X$  este ángulo vale  $0$  y para pórticos perpendiculares al eje  $X$  vale  $90$ .

Por otra parte  $r_j$  es la distancia desde el Centro de Masa al pórtico en el piso  $j$ , será positiva si la orientación del pórtico rota con respecto al centro de masa en sentido horario. La orientación positiva de los pórticos

es paralela y en el sentido de los ejes X, Y. La matriz  $A$  tiene  $NP$  filas y  $3 * NP$  columnas, donde  $NP$  es el número de pisos del pórtico para el caso más general.

Se deja al lector la deducción de la matriz  $A$ . Lo deseable es que se calcule la matriz de rigidez lateral aplicando la condensación estática de la matriz de rigidez que se estudió en el capítulo anterior pero se puede encontrar en forma aproximada la matriz de rigidez lateral  $K_l$  en función de la rigidez de piso  $k_j$ , con la ecuación (17.4). Donde  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  son la rigidez del piso uno, dos, tres, ... y del último piso.

$$\begin{matrix}
 & \left[ \begin{array}{cccc|ccc}
 k_1 + k_2 & -k_2 & & & & & \\
 & k_2 + k_3 & -k_3 & & & & \\
 & & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & & \\
 & & & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & -k_n & k_n & 
 \end{array} \right] & (17.4)
 \end{matrix}$$

• EJEMPLO 1

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso para la estructura de cinco pisos indicada en la figura 17.2, por facilidad se considera que todos los pórticos son iguales y se va a obtener la matriz de rigidez lateral aplicando la ecuación (17.4). En la tabla 17.1 se indica la rigidez de cada uno de los pisos de un pórtico tipo.

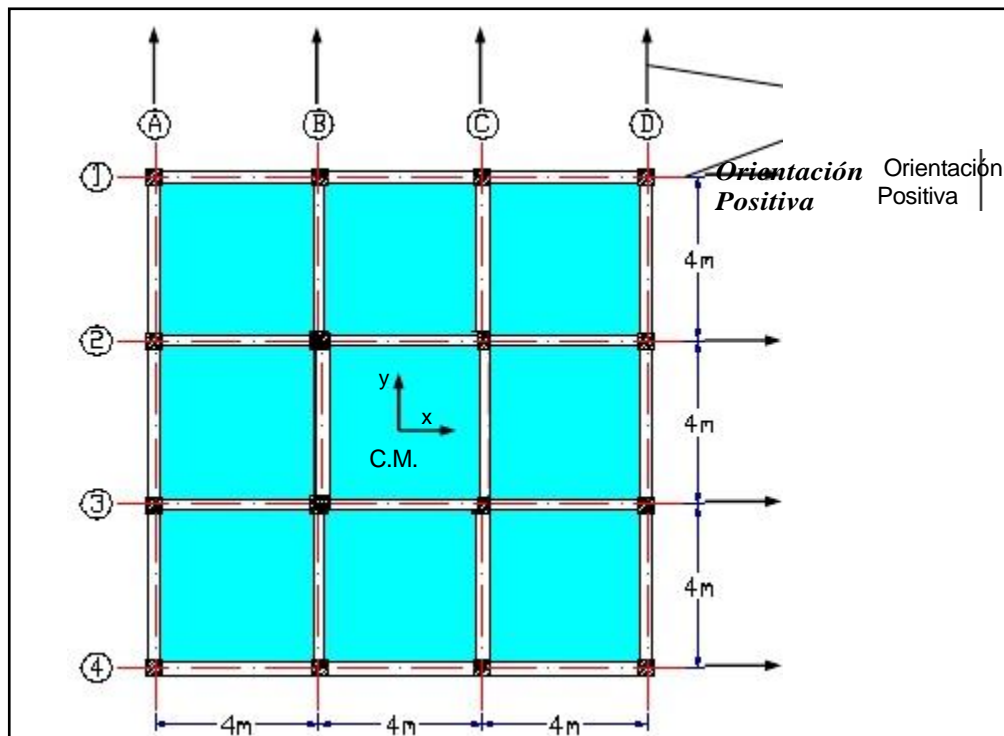


Figura 17.2 Descripción en planta de la estructura de 5 pisos.

Tabla 17.1 Rigidez de Piso para el Ejemplo 1

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
Elástica	4435.05	2428.38	2202.36	2326.37	2359.46

- SOLUCIÓN**

En la figura 17.2, se muestra la orientación positiva de los pórticos en base a la cual se obtienen la matriz de compatibilidad de cada uno de ellos. Nótese que es paralela a los ejes X,Y. Para encontrar las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos con la ecuación (17.3) es conveniente tabular los datos en una tabla como la 17.2.

**Tabla 17.2** Parámetros que definen los pórticos para calcular matriz  $A$

Pórtico	$\alpha$	$r$
1	0	-6
2	0	-2
3	0	2
4	0	6
A	90	-6
B	90	-2
C	90	2
D	90	6

Se considera que las plantas son iguales en todos los pisos razón por la cual la distancia del Centro de Masas al pórtico es un solo valor y no cambia de piso a piso. En la tabla 17.2 se aprecia que el valor de  $r$  para el Pórtico 1 es negativo debido a que la orientación de dicho pórtico con respecto al Centro de Masa es horario, lo propio se tiene con los pórtico 2, A y B. Al reemplazar los datos de la tabla 17.2 en la ecuación (17.3) se obtienen las matrices de compatibilidad de cada uno de los pórticos. Para el pórtico 1, se tiene:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Para los pórticos 2, 3 y 4 lo único que cambia es el valor de  $r$  de -6 que se tiene para el pórtico 1 a -2, 2 y 6, respectivamente. A continuación se indica la matriz de compatibilidad para el pórtico A.

$$A^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

De igual manera para los pórticos B, C, y D la matriz  $A$  se mantiene igual a la del pórtico A con la acotación de que cambian los valores de  $r$  por -2, 2 y 6 respectivamente.

La matriz  $K_i$  es la misma para todos los pórticos y es la que se muestra a continuación empleando la ecuación (17.4).

$$KL^{(i)} = \begin{bmatrix} 6863.43 & -2428.38 & 0 & 0 & 0 \\ -2428.38 & 4630.74 & -2202.36 & & \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & -2326.37 & 4685.83 & -2359.46 \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Al realizar el triple producto matricial y la sumatoria respectiva indicada en la ecuación (17.2) se obtiene la matriz de rigidez  $K_i$  que resulta de 15X15. Por falta de espacio se escribe a continuación algunos elementos de esta matriz de rigidez.

$$KE = \begin{bmatrix} 27453.72 & -9713.52 & 0 & 0 & 0 & \Delta 0 \\ -913.52 & 18522.96 & -8809.44 & 0 & 0 & \Delta 0 \\ 0 & -8809.44 & 18114.92 & -9305.48 & 0 & \Delta 0 \\ 0 & 0 & -9305.48 & 18743.32 & -9437.84 & \Delta 0 \\ & 0 & 0 & -9437.84 & 9437.84 & \Delta 0 \\ & M & M & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta -377513.60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta 377513.60 \end{bmatrix}$$

## • EJEMPLO 2

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura irregular indicada en la figura 17.3. En la parte superior se indica una perspectiva de la estructura y en la parte inferior se indica la distribución en planta con la nomenclatura utilizada para identificar cada uno de los pórticos. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo a la Norma Ecuatoriana de la Construcción NEC-11. Considerar  $E = 2173706.513 \text{ T/m}^2$ . En la figura 17.4 se indica la geometría de cada uno de los pórticos de la estructura.

## • SOLUCIÓN

La Norma Ecuatoriana de la Construcción, NEC-11, estipula que las Inercias agrietadas con las cuales se debe realizar el análisis sísmico de vigas y columnas son:

$$I_v = 0.5 I_o \qquad I_c = 0.8 I_o \qquad I_o = \frac{b h^3}{12}$$

Las matrices de rigidez lateral de cada uno de los pórticos son las siguientes:

$$K_L^{(A)} = [772.87]$$

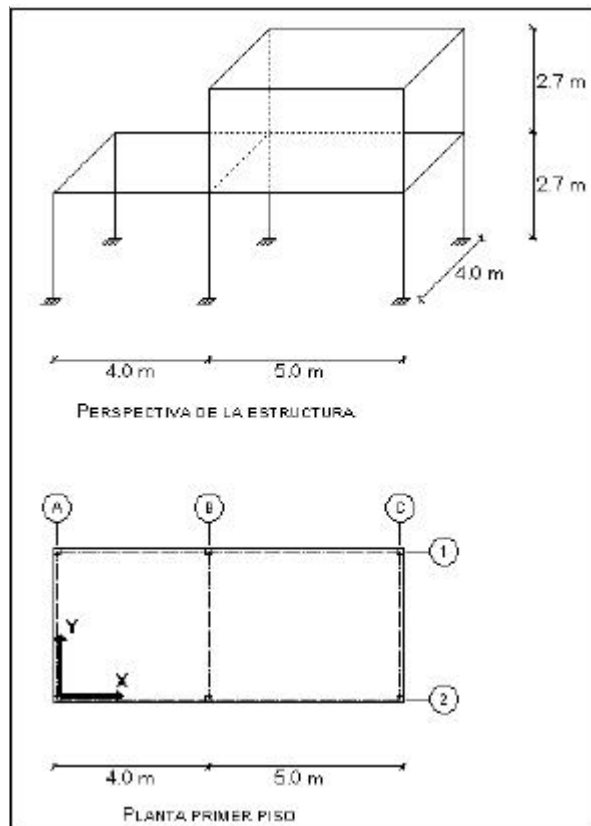


Figura 17.3 Descripción de la estructura irregular de 2 pisos.

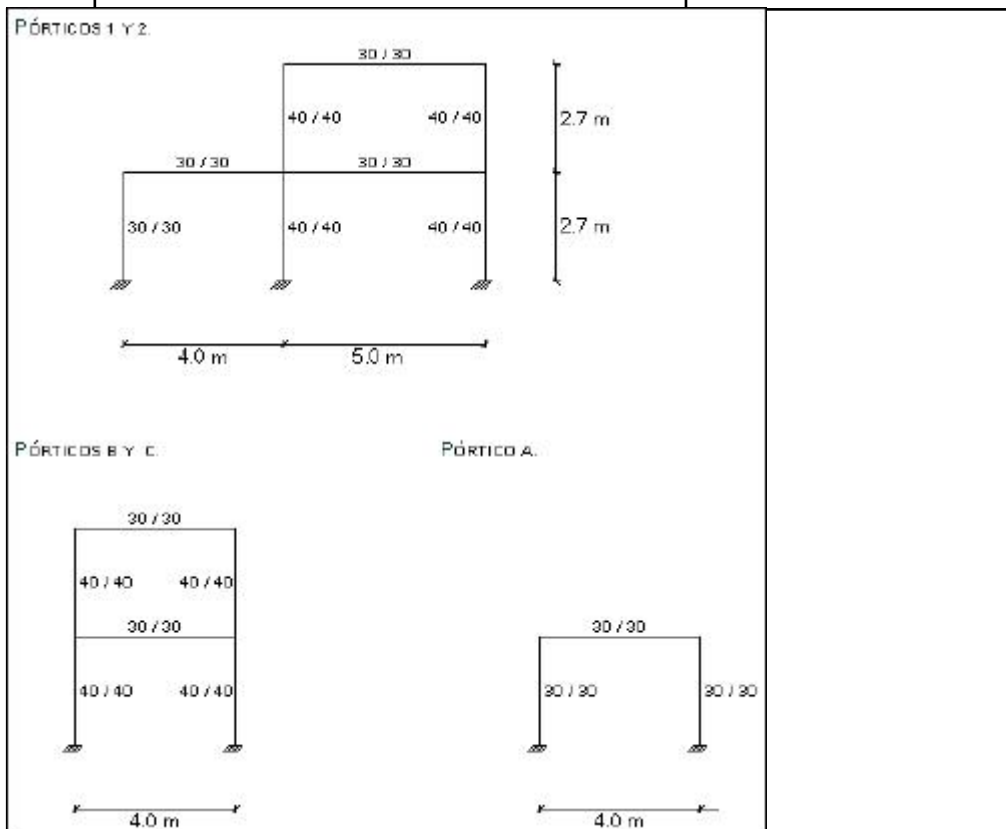


Figura 17.4 Geometría de los pórticos de la estructura irregular de 2 pisos.

$$K_L^{(B)} = K_L^{(C)} = \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix}$$

$$K_L^{(1)} = K_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.5 se indica el sistema de coordenadas laterales de cada uno de los pórticos.

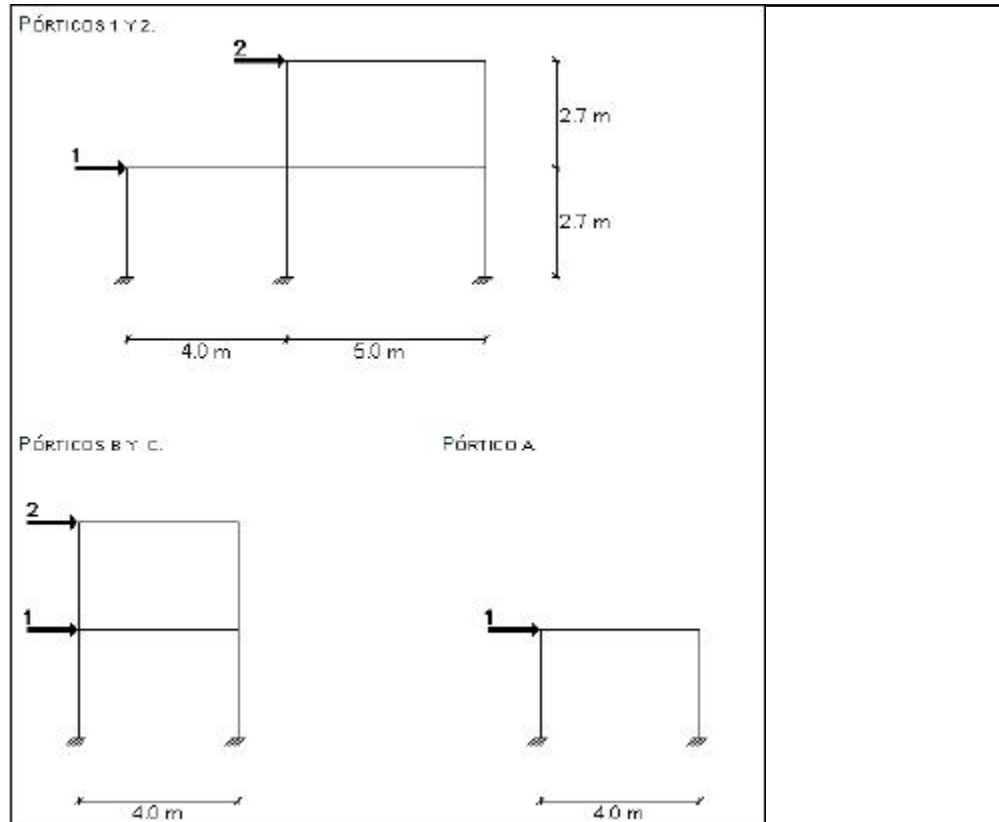


Figura 17.5 Sistema de coordenadas  $P - p$  de los pórticos.

El pórtico A es de un piso en consecuencia la matriz de rigidez lateral es de  $1 \times 1$  pero los restantes pórticos son de dos pisos y sus matrices de rigidez lateral son de  $2 \times 2$ . Con el objeto de que todas las matrices de rigidez lateral sean de  $2 \times 2$  se utiliza el siguiente artificio que consiste en escribir la matriz de rigidez lateral del pórtico A como una matriz de  $2 \times 2$ , de la siguiente manera:

$$K_L^{(A)} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Ahora se debe determinar el Centro de Masas de cada uno de las plantas. En plantas regulares con carga repartida en forma simétrica éste centro coincide con el centro geométrico de la misma pero cuando se trabaja con plantas irregulares o plantas con aberturas para determinar el centro de masas se debe aplicar el siguiente formulario.

$$X_{CM} = \frac{\sum X_i m_i}{\sum m_i} \qquad Y_{CM} = \frac{\sum Y_i m_i}{\sum m_i}$$



Donde  $X_{CM}$  es la distancia en X del Centro de Masas con respecto a un punto tomado como origen;  $Y_{CM}$  es la distancia en Y del CM con respecto a un punto tomado como origen;  $X_i$  es la distancia en sentido X desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia;  $Y_i$  es la distancia en sentido Y desde el CM de cada figura hasta el punto de referencia;  $m_i$  es la masa de la figura i.

En la estructura que se está analizando se considera que el Centro de Masas se halla ubicado en el centro geométrico de cada planta como se indica en la figura 17.6 es ahí donde se ubica el sistema de coordenadas  $Q - q$ . Nótese que primero se han numerado todos los desplazamientos en sentido X, luego los desplazamientos en sentido Y, finalmente las rotaciones.

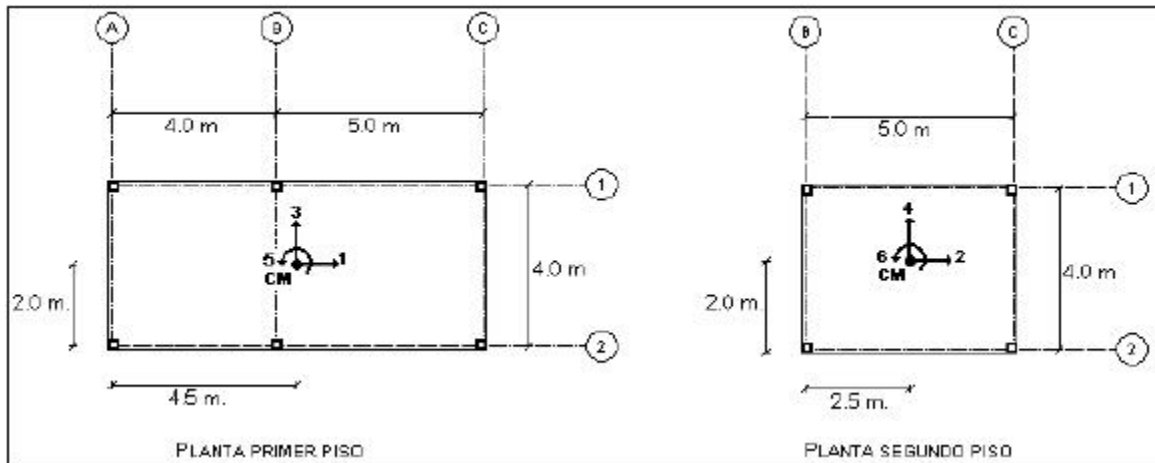


Figura 17.6 Sistema de coordenadas  $Q - q$  de la estructura irregular de 2 pisos.

Las matrices de compatibilidad que se obtienen para los pórticos 1 y 2 al reemplazar  $\alpha = 0$  en la ecuación (17.3) y considerando que la distancia del centro de masas a dichos pórticos son -2 y 2 m. respectivamente.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para los pórticos: A, B y C el valor del ángulo  $\alpha = 90$  y la distancia del CM al pórtico A es de -4.5 m. es negativo debido a que la orientación positiva de éste pórtico rota con respecto al CM en forma horaria. Para el pórtico B la distancia es -0.5 m. en el primer piso y -2.5 m. en el segundo piso. Finalmente para el pórtico C estas distancias son 4.5 m. en el primer piso y 2.5 m. en el segundo piso. Las matrices de compatibilidad de los mencionados pórticos son:

$$A^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{(C)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Estrictamente la matriz de compatibilidad del pórtico A debe tener una fila ya que ese pórtico tiene un piso sin embargo es de dos filas por el artificio realizado en la escritura de la matriz de rigidez lateral. Nótese que todos los elementos de la segunda fila son ceros al igual que la segunda, cuarta y sexta columna.

Finalmente al realizar el triple producto matricial indicado en la ecuación 17.2 se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas de piso  $KE$  que resulta:

$$KE = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 12618.3 & -4217.6 & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4217.6 & 2229.8 & -8435.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20213.0 & -8435.2 & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -42292.0 & 22339.0 \end{bmatrix}$$

#### 17.4 SUBMATRICES DE $KE$

La matriz de rigidez  $KE$  es particionada de acuerdo al número de pisos. Para el Ejemplo 2 en que se trata de una edificación de 2 pisos la partición será de la siguiente forma:

$$KE = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 \\ -3983.0 & 2100.8 & \dots & 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.0 & 0.0 & \dots & 12618.3 & -4217.6 & \dots & 20213.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \dots & -4217.6 & 2229.8 & \dots & -8435.2 & 0.0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.0 & 0.0 & \dots & 20213.0 & -8435.2 & \dots & 186480.0 & -42292.0 \\ 0.0 & 0.0 & \dots & 0.0 & 0.0 & \dots & -42292.0 & 22339.0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar el triple producto matricial definido en la ecuación 17.2 se obtiene que las submatrices son:

$$KE = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$K_{XX} = \sum \cos^2 \alpha K_L$$

$$K_{YY} = \sum \sin^2 \alpha K_L$$

$$K_{XY} = \sum \sin \alpha \cos \alpha K_L$$

$$K_{X\theta} = \sum \cos \alpha K_L r$$

$$K_{Y\theta} = \sum \sin \alpha K_L r$$

$$K_{\theta\theta} = \sum K_L r^2$$

$$K_{YX} = K_{XY}^t$$

$$K_{\theta X} = K_{X\theta}^t$$

$$K_{\theta Y} = K_{Y\theta}^t$$

Cuando los Centros de Masa no son colineales la rigidez  $K_{\theta\theta}$  se calcula con la siguiente ecuación.

$$K_{\theta\theta} = \sum r' K_L r$$

### • EJEMPLO 3

Determinar las sub matrices de la matriz de rigidez  $KE$  aplicando el formulario correspondiente para el Ejemplo 2.

### • SOLUCIÓN

En estructuras con pórticos ortogonales como en el presente caso se tiene que  $K_{XX}$  es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido X, y  $K_{YY}$  es igual a la sumatoria de las matrices de rigidez lateral en sentido Y.

$$K_{XX} = K_L^{(1)} + K_L^{(2)} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix}$$

$$K_{XX} = \begin{bmatrix} 12352.4 & -3983.0 \\ -3983.0 & 2100.8 \end{bmatrix}$$

$$K_{YY} = K_L^{(A)} + K_L^{(B)} + K_L^{(C)} = 2 * \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 1114.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$K_{YY} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$$

En pórticos ortogonales  $K_{XY} = 0$ . Por otra parte se tiene que  $K_{X\theta} = \sum K_L r$  pero únicamente de los pórticos en sentido X. El vector  $r$  está conformado por las distancias del centro de masas al pórtico desde el piso 1 al piso n.

$$r^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad r^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_{XY} = \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6176.2 & -1991.5 \\ -1991.5 & 1050.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{XY} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para pórticos ortogonales se tiene que  $K_{Y\theta} = \sum K_L r$  pero con los pórticos en sentido Y.

$$r^{(A)} = \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r^{(B)} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \quad r^{(C)} = \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{y\theta} = \begin{bmatrix} 772.87 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2108.8 & 0 \\ 0 & 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5922.7 & -2108.8 \\ -2108.8 & 205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{y\theta} = \begin{bmatrix} 20213.0 & 0.0 \\ -8435.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$K_{\theta\theta} = K_L^{(1)} (r^{(1)})^2 + K_L^{(2)} (r^{(2)})^2 + K_L^{(A)} (r^{(A)})^2 + K_L^{(B)} (r^{(B)})^2 + K_L^{(C)} (r^{(C)})^2$$

$$K_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6176.2 & 0 \\ -1991.5 & 11050.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5922.7 \\ -2108.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2108.8 \\ 1114.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2108.8 \\ 1114.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 186480 & -42292 \\ -42292 & 22339 \end{bmatrix}$$

## 17.5 CENTRO DE RIGIDEZ

Se define el **Centro de Rigidez**, CR, de un piso como el punto donde al aplicar una fuerza cortante horizontal el piso se traslada sin rotar respecto al nivel inferior. Se destaca que las fuerzas sísmicas se aplican en el **Centro de Masa**, CM, y que lo ideal es que CM coincida o se encuentre lo más cerca posible del CR para evitar problemas de torsión en planta.

Sean  $e_x, e_y$  la distancia en sentido X y en sentido Y del CM con relación al CR. Para su evaluación en forma matricial se parte de la ecuación básica de estructuras para el análisis estático siguiente pero orientada al análisis sísmico con tres grados de libertad por planta.

$$Q = KE \ q$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$K_{00} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_\theta \end{bmatrix} \quad (17.5)$$

### 17.5.1 Análisis en Sentido X

Para el análisis sísmico en sentido X, solo existe las fuerzas sísmicas en dicho sentido es decir solo existe  $Q_X$  el vector  $Q_Y$  es nulo y el vector  $Q_\theta$  se debe calcular ya que son los momentos que van a ser que se cumpla con la condición de que exista traslación únicamente en sentido X, es decir  $q_Y$  es igual a cero y  $q_\theta$  es cero. Luego la ecuación ( 17.5 ) queda:

$$\begin{bmatrix} Q_X \\ \mathbf{0} \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz de rigidez  $KE$  por el vector  $q$  e igualar al vector de cargas  $Q$  pero trabajando con las sub matrices indicadas se tiene:

$$\begin{aligned} Q_X &= K_{XX} q_X & \Rightarrow q_X &= K_{XX}^{-1} Q_X \\ Q_\theta &= K_{\theta X} q_X & Q_\theta &= K_{\theta X} K_{XX}^{-1} Q_X \end{aligned} \quad (17.6)$$

Para calcular  $Q_\theta$  con la ecuación (17.6) se supone conocido el vector  $Q_X$  que son las fuerzas sísmicas en sentido X.

Al analizar en sentido X, se halla la excentricidad en sentido Y que se ha denominado  $e_y$ , en cada piso se debe dividir el momento de torsión del piso  $M_t$  para la fuerza de corte  $V$ , las mismas que se obtienen por estática a continuación se escribe lo indicado sin negrillas porque es a nivel de piso.

$$e_Y = \frac{M_t}{V_X} \quad (17.7)$$

### 17.5.2 Análisis en Sentido Y

Para el sentido Y se tiene que  $Q_X = \mathbf{0}$  en este caso solo existe  $Q_Y$  y los momentos  $Q_\theta$  que permiten la traslación únicamente en sentido Y, que hacen que solo exista  $q_Y$ . Con todo lo indicado el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ Q_Y \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q_Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} Q_Y &= K_{YY} q_Y & \Rightarrow q_Y &= K_{YY}^{-1} Q_Y \\ Q_\theta &= K_{\theta Y} q_Y & \Rightarrow Q_\theta &= K_{\theta Y} K_{YY}^{-1} Q_Y \end{aligned} \quad (17.8)$$

Finalmente:

$$e_X = \frac{M_I}{V_Y} \quad (17.9)$$

#### • EJEMPLO 4

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejemplo 2. Si las fuerzas que se obtienen del análisis sísmico en sentido X y en sentido Y, son:

$$Q_X = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix} \quad Q_Y = \begin{bmatrix} 1.68 \\ 1.68 \end{bmatrix}$$

#### • SOLUCIÓN

- Análisis en sentido X

En el ejemplo anterior se aprecia que  $K_{\theta X} = 0$  en consecuencia el vector  $Q_{\theta} = 0$ . Luego los cortantes en sentido X valen:

$$V_{2X} = 1.68 \text{ T.} \quad V_{1X} = 3.36 \text{ T.}$$

En la figura 17.6 se indica el centro de masas de cada uno de los pisos y en ella se aprecia que los momentos de torsión son nulos de tal manera que no existe excentricidad  $e_Y$  en ninguno de los dos pisos.

- Análisis en sentido Y

Para el sentido Y se tiene que:  $K_{\theta Y} = \begin{bmatrix} 20213.0 & -8435.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$ . Nótese que  $K_{\theta Y}$  es la matriz transpuesta de  $K_{Y\theta}$ . Por otra parte  $K_{YY} = \begin{bmatrix} 12618.3 & -4217.6 \\ -4217.6 & 2229.8 \end{bmatrix}$ . Al reemplazar estos valores en la ecuación (17.8) se obtiene:

$$Q_{\theta} = \begin{bmatrix} -1.90 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

En la figura 17.7 se indican los vectores  $Q_Y$  y  $Q_{\theta}$  con los cuales se procede al cálculo de los cortantes de piso y momentos de torsión en cada piso con respecto al centro de masas.

Como es negativo el momento de 1.90 Tm. se lo ha colocado con sentido horario en la primera planta. Nótese que la distancia del centro de masas entre los pisos 2 y 1 es de (2.50 – 0.50) que da 2.0 m. En base a las fuerzas y momentos que actúan en la figura 17.7 se tiene que los cortantes y momentos de torsión valen:

$$\begin{aligned} V_{2Y} &= 1.68 & V_{1Y} &= 3.36 \\ M_{2T} &= Q_2 + V_{2Y} * 0 = 0 & M_{1T} &= M_{2T} + Q_1 + V_{1Y} * 2 \end{aligned}$$

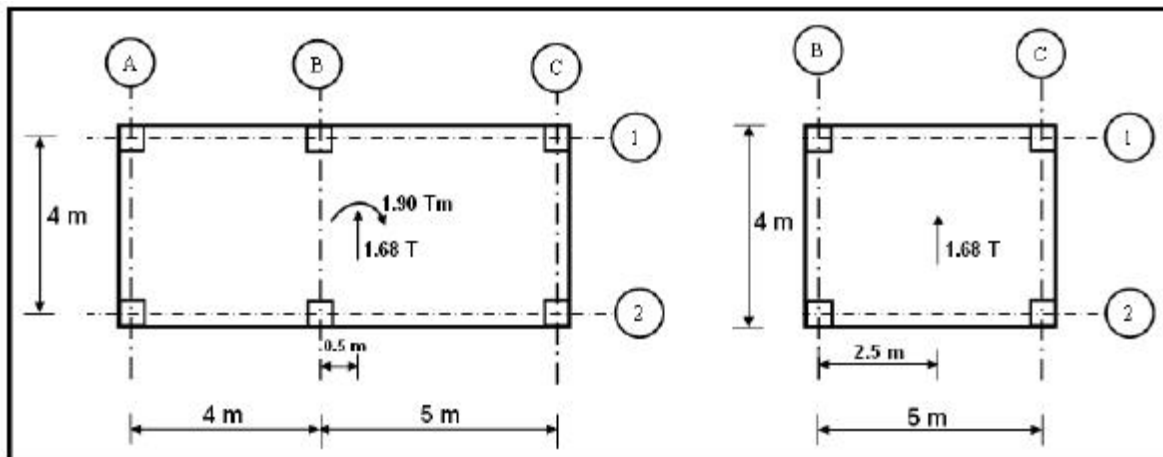


Figura 17.7 Fuerzas y momentos en el centro de masas para el caso de traslación pura en Y.

$$M_{1T} = -1.90 + 1.68 * 2 = 1.46 \text{ Tm.}$$

$$e_{2X} = \frac{M_{2T}}{V_{2Y}} = 0 \quad e_{1X} = \frac{M_{1T}}{V_{1Y}} = \frac{1.46}{3.36} = 0.435 \text{ m.}$$

En la figura 17.8 se indica la ubicación del Centro de Rigidez de cada uno de los pisos.

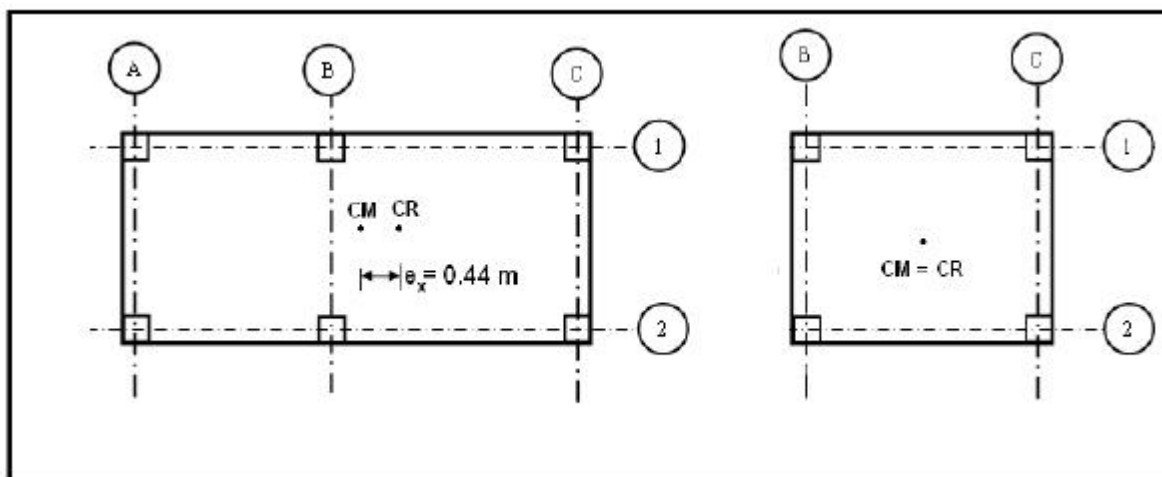


Figura 17.8 Centro de masa y de rigidez de cada uno de los pisos en estructura analizada.

## 17.6 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN RIGIDEZ LATERAL

En el planteamiento teórico desarrollado en el apartado 17.5 se observa que el cálculo del centro de rigidez depende de la acción sísmica ya que es función de los vectores  $Q_x$  y  $Q_y$ . Esto ya es una limitante al cálculo pero la mayor controversia que existe es que al ingresar la estructura en el rango no lineal la rigidez de los elementos cambia. En el apartado 17.5 se ha calculado con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11, es decir se trabajó con  $I_V = 0.5 * I_o$  y con  $I_C = 0.8 * I_o$ . Al trabajar con inercias agrietadas se tiene una mejor aproximación en el cálculo del centro de rigidez en cada uno de los pisos.

Lo importante es reconocer que ante un sismo muy severo es filosofía de diseño que la estructura ingrese en el rango no lineal, que sufra daño y consecuentemente la rigidez de cada uno de los elementos de la estructura va a ir cambiando de acuerdo al grado de daño que se va presentando. Este cambio de rigidez no se lo toma en cuenta en la forma presentada por este motivo es que



actualmente en lugar de calcular el Centro de Rigidez se está calculando el Centro de Resistencia, tema que no viene al caso presentarlo ya que el centro de resistencia depende de la cantidad de armadura que tiene la estructura es el punto en el cual se considera concentrada toda la resistencia de una estructura.

De tal manera que si es aproximado el cálculo del Centro de Rigidez conviene ver un procedimiento más fácil del cálculo de dicho centro, un procedimiento que sea más conceptual que se visualice mejor lo que se está realizando en lugar de presentar un procedimiento matricial como el realizado en el apartado anterior.

En este apartado se presenta el cálculo del Centro de Rigidez, en función de la matriz de rigidez lateral, para una estructura de un piso.

### • EJEMPLO 5

En la figura 17.9, se tiene una estructura de un piso, con dos pórticos débiles que son el "1" y el "A", conformado por columnas y vigas de 20/20. A pesar de que la estructura es simétrica tiene problemas de torsión ya que los restantes pórticos tienen mayor rigidez. El módulo de elasticidad del material  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ ; la altura del piso es de 3.0m. Se pide:

- 1.- Elabore un programa de computación utilizando la librería de programas de **CEINCI-LAB** para hallar la matriz de rigidez lateral de cada uno de los pórticos.
- 2.- Mediante equilibrio de fuerzas y momentos determinar las coordenadas del Centro de Rigidez.
- 3.- Determinar las excentricidades estáticas.

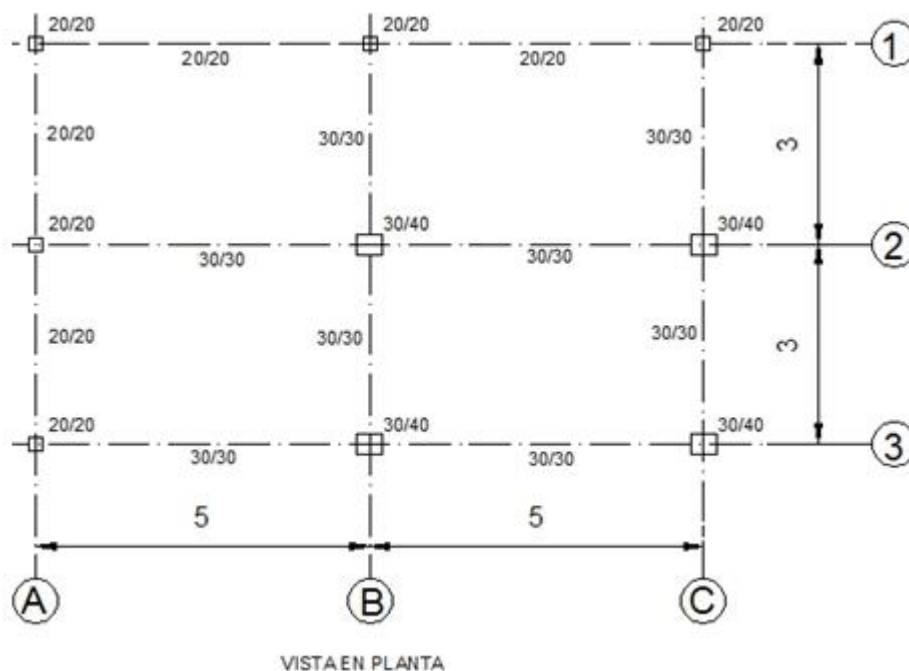


Figura 17.9 Vista en Planta de una estructura de 1 piso con altura de piso de 3 m.

### • SOLUCIÓN

A continuación se indica el Programa de computación desarrollado y en la Tabla 17.3 se presentan las rigideces laterales de los pórticos calculando con inercias gruesas.

1.- Programa de computación

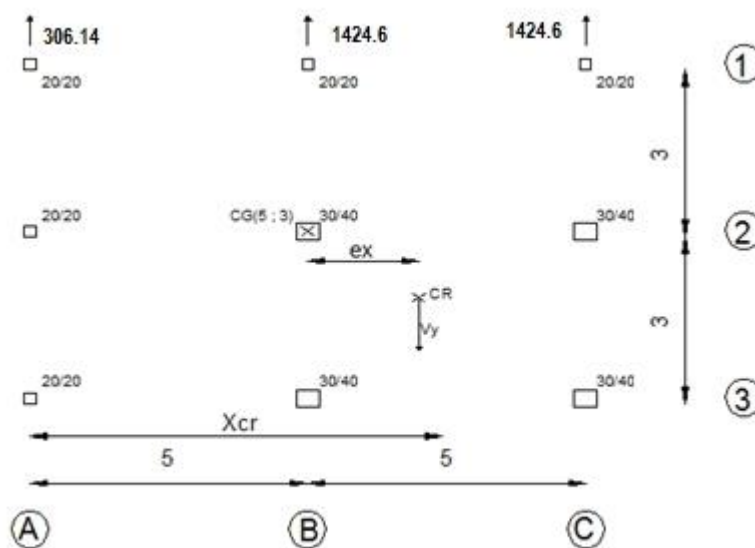
```

1   %Programa Eje5_libro Capítulo 17
2   nod=6;np=1;nr=3:[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);% Coordenadas Generalizadas
3   GEN=[1 1 4 2 1 1 1;4 4 5 1 1 1];
4   [NI,NJ]=gn_portico(GEN); % Vector de Nudo Inicial y nudo final
5   [VC]=vc(NI,NJ,CG); %Matriz con los vectores de colocación
6   NUDOS=[1 0.0 0.0 2 1 5.0 0.0;4 0.0 3.0 2 1 5.0 0.0];
7   [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);% Coordenadas de los nudos
8   %dibujo(X,Y,NI,NJ)
9   ELEM=[0.20 0.20:0.20 0.20:0.20 0.20:0.20 0.20 0.20];
10  [L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);nb=1;
11  E=2400000;[K1]=krigidez (ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
12  [KL1]=kcondensada (K1,nb)
13  %Pórtico 2
14  ELEM2=[0.20 0.20:0.30 0.40:0.30 0.40:0.30 0.30 0.30 0.30 0.30];
15  [K2]=krigidez (ngl,ELEM2,L,seno,coseno,VC,E);
16  [KL2]=kcondensada (K2,nb)
17  %Portico A
18  NUDOSA=[1 0.0 0.0 2 1 3.0 0.0;4 0.0 3.0 2 1 3.0 0.0];
19  [XA,YA]=glinea_portico(NUDOSA);% Coordenadas de los nudos
20  [LA,senoA,cosenoA]=longitud (XA,YA,NI,NJ);
21  [KA]=krigidez (ngl,ELEM,LA,senoA,cosenoA,VC,E);
22  [KLA]=kcondensada (KA,nb)
23  %Portico B
24  ELEMB=[0.40 0.30:0.40 0.30:0.20 0.20:0.30 0.30 0.30 0.30 0.30];
25  [KB]=krigidez (ngl,ELEMB,LA,senoA,cosenoA,VC,E);
26  [KLB]=kcondensada (KB,nb)
    
```

Tabla 17.3 Rigidez lateral de los pórticos

Pórtico	1	2	3	A	B	C
$K_l \begin{pmatrix} \tau \\ m \end{pmatrix}$	270.60	1788.20	1788.20	306.14	1424.6	1424.6

2.- Coordenadas del Centro de Rigidez



VISTA EN PLANTA  
Figura 17.10 Cálculo de  $X_r$

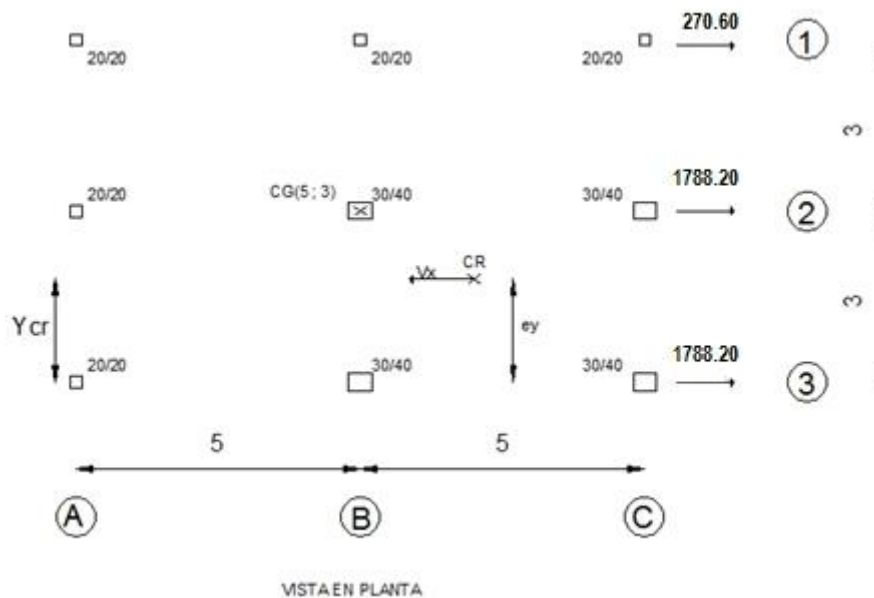
- Equilibrio de fuerzas

$$V_y = 306.14 + 1424.6 + 1424.6 = 3155.3 \text{ T/m}$$

- Equilibrio de Momentos

$$1424.6 * 5 + 1424.6 * 10 = V_y * X_{cr} \quad \rightarrow X_{cr} = 6.77 \text{ m}$$

A continuación se repite el mismo procedimiento de cálculo pero en el sentido X.



VISTA EN PLANTA

Figura 17.11 Cálculo de  $V_y$

- Equilibrio de Fuerzas

$$V_x = 270.6 + 2 * 1788.20 = 3847 \text{ T/m}$$

- Equilibrio de momentos

$$270.6 * 6 + 1788.2 * 3 = V_x * Y_{cr} \quad \rightarrow Y_{cr} = 1.83 \text{ m}$$

Los momentos se obtuvieron con respecto a la intersección de los ejes A-3. Por lo tanto, con respecto a este punto se obtuvieron las coordenadas del Centro de Rigidez.

$$X_{cr} = 6.77 \text{ m} \quad Y_{cr} = 1.83 \text{ m}$$

En la figura 17.12 se indica el Centro de Masa CM, que coincide con el Centro de Gravedad cuando las masas están distribuidas en forma simétrica. Además se muestra la ubicación del Centro de Rigidez CR.

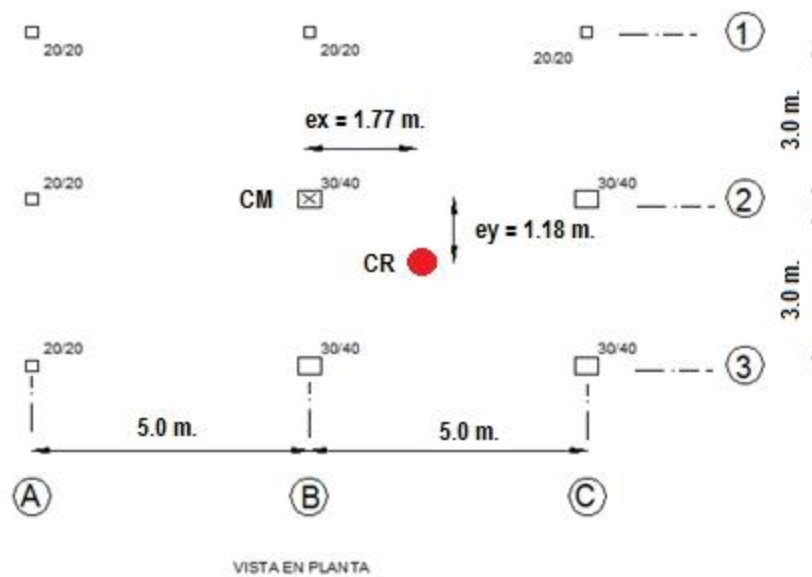


Figura 17.12 Ubicación del Centro de Masas y Centro de Rigidez.

### 3.- Excentricidades estáticas

$$e_x = 6.77 - 5 = 1.77 \text{ m.}$$

$$e_y = 3 - 1.82 = 1.18 \text{ m.}$$

Es fundamental determinar el Centro de Rigidez en cada planta de una estructura, utilizando para el efecto la rigidez de piso; es un procedimiento aproximado para varios pisos pero exacto para 1 piso.

La estructura que se ha analizado tiene problemas de torsión y en caso de estar construida se debe pesar en encamisar las columnas de los pórticos "1" y "A" para aumentar su rigidez y de esa forma el CR se va a aproximar al Centro de Masas, CM.

#### • EJEMPLO 6

Presentar un programa de computación para determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura del Ejemplo 5, en base a los resultados obtenidos determinar las excentricidades estáticas.

#### • SOLUCIÓN

```

1  %Programa Eje6_libro Capitulo 17
2  -  KL1=270.6;KL2=1788.20;KL3=KL2;KLA=306.14;KLB=1424.6;KLC=KLB;
3  -  r1=-3;r2=0;r3=3;rA=-5;rB=0;rC=5;
4  -  Kxx=KL1+KL2+KL3;Kyy=KLA+KLB+KLC;Kxt=KL1*r1+KL2*r2+KL3*r3;
5  -  Kyt=KLA*rA+KLB*rB+KLC*rC;
6  -  Ktt=KL1*r1^2+KL2*r2^2+KL3*r3^2+KLA*rA^2+KLB*rB^2+KLC*rC^2;
7  -  KE=[Kxx 0 Kxt;0 Kyy Kyt; Kxt Kyt Ktt]
8  -  ey=Kxt/Kxx
9  -  ex=Kyt/Kyy

```

$$K_t = \begin{bmatrix} 3847 & 0 & 4553 \\ 0 & 3155 & 5592 \\ 4553 & 5592 & 61798 \end{bmatrix}$$

Las excentricidades que reporta el programa, son las ya anotadas en el Ejemplo anterior.

## 17.7 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ “t”

En capítulos anteriores se vio que la rigidez  $t$  es la fuerza necesaria para que un elemento se desplace horizontalmente la unidad y todas las demás coordenadas nulas. Esta rigidez al no considerar el efecto de corte es:

$$t = \frac{12EI}{H^3} \quad (17.10)$$

Se calcula el Centro de Rigidez, en función de la rigidez “ $t$ ” en forma similar al desarrollado en el apartado anterior. Pero ahora se calcula la rigidez solo en las columnas, de tal forma que es aproximado.

### • EJEMPLO 7

Encontrar el centro de rigidez en función de la rigidez “ $t$ ” de la estructura irregular en elevación de 2 pisos del Ejemplo 2 y se presenta en la figura 17.13. El valor de  $t = 2173706.513 \frac{T}{m}$ .

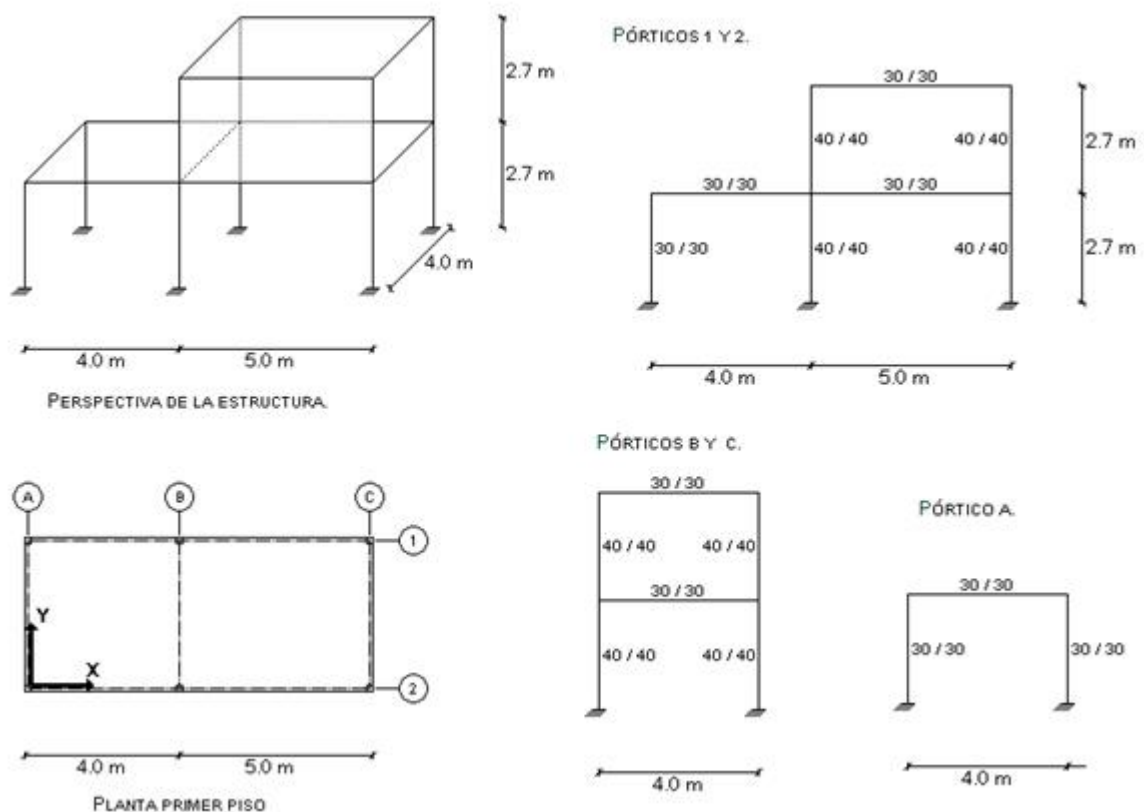


Figura 17.13 Estructura irregular de 2 pisos.

### • SOLUCIÓN

Da igual trabajar con inercias gruesas o con inercias agrietadas ya que con éstas últimas todas las columnas quedan multiplicadas por 0.8 que es el factor que considera el NEC-11. En el ejemplo se

trabaja con inercias agrietadas. El procedimiento de cálculo está basado en un principio básico de las estructuras y que es el equilibrio de fuerzas y momentos.

Al igual que en el ejemplo anterior el análisis se realiza en dos sentidos X e Y pero para el presente ejemplo no existe excentricidad en sentido X, razón por la que no se presenta el cálculo en dicho sentido solo existe excentricidad en sentido Y.

Las columnas del pórtico A son de 30 x 30 y todas las restantes columnas en el primer piso y en el segundo piso son de 40 x 40. En la figura 17.14 se indican la rigidez  $t$  de cada una de las columnas.

- Análisis en sentido Y

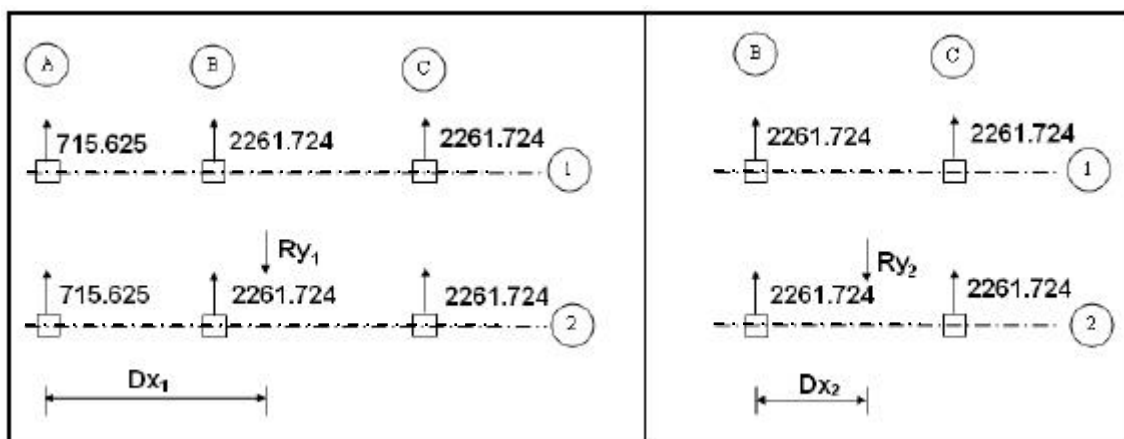


Figura 17.14 Rigidez "t" en las columnas para el análisis en sentido Y.

El análisis se realiza por separado en cada uno de los pisos. Sea  $R_{Y2}$  la resultante de las fuerzas en sentido Y en el segundo piso. Por equilibrio de fuerzas se tiene:

$$R_{Y2} = 2261.724 * 4 = 9046.896 T$$

Por otra parte del equilibrio de momentos con respecto al eje B2 se tiene:

$$2261.724 * 4 + 2261.724 * 4 = R_{Y2} * D_{X2} \quad \Rightarrow D_{X2} = 2.5 m.$$

$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0 m.$$

Para el primer piso el equilibrio de fuerzas en sentido Y, el de momentos con respecto al eje A2, reporta:

$$R_{Y1} = 2261.724 * 4 + 715.625 * 2 = 10478.146 T.$$

$$2261.724 * 4 * 2 + 2261.724 * 9 * 2 = 10478.146 * D_{X1} \quad \Rightarrow D_{X1} = 5.612 m.$$

$$e_{X1} = 5.612 - 4.5 = 1.11 m.$$

Nótese que la distancia  $D_{X1}$  es medida con respecto al punto A2 y que la distancia  $D_{X2}$  es medida con relación al punto B2. Por ese motivo para calcular las excentricidades se restan las distancias correspondientes al Centro de Masa. Por otra parte se aprecia que existe una diferencia considerable en la excentricidad del primer piso en relación a la que se obtuvo del planteamiento matricial ya que el cálculo en función de la matriz  $t$  es aproximado, más exactitud se tiene si se calcula en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos como se ilustra a continuación.

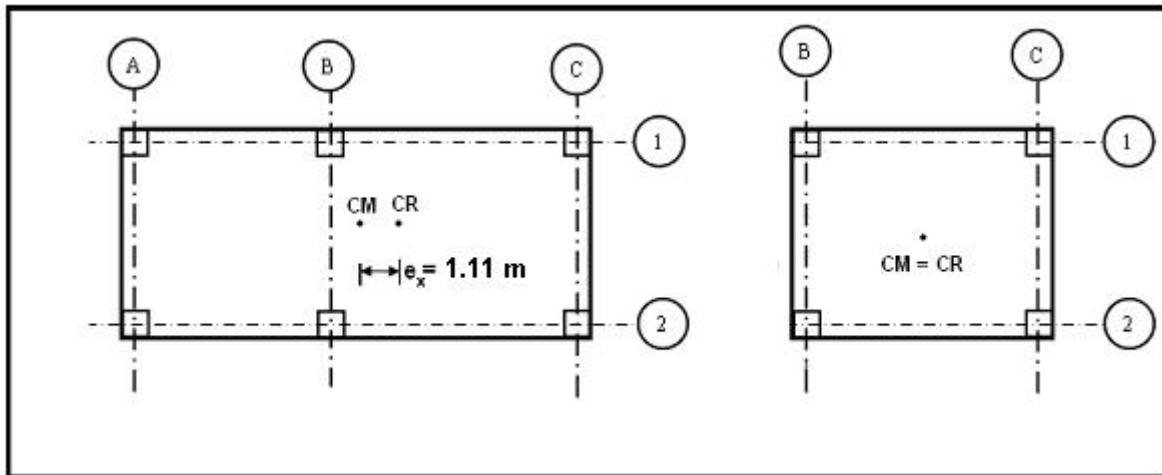


Figura 17.15 Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez "t".

## 17.8 CENTRO DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE RIGIDEZ DE PISO

Se define la rigidez de piso  $K_i$  como la relación entre el cortante de piso  $V_i$  dividido para el desplazamiento relativo de piso.

$$K_i = \frac{V_i}{q_i - q_{i-1}} \quad (17.11)$$

En este caso tanto el cortante de piso como los desplazamientos laterales de piso se obtienen en función de una acción sísmica. Existen fórmulas aproximadas para determinar la rigidez de piso sin tener en cuenta la acción sísmica, es más se puede hallar a partir de la matriz de rigidez lateral.

Una vez que se tiene la rigidez de piso de cada uno de los pórticos se obtiene el centro de rigidez en forma similar a la realizada en los dos ejercicios anteriores, es decir se realiza primero el equilibrio de fuerzas y después el equilibrio de momentos en cada X y en Y.

### • EJEMPLO 8

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejemplo 2 en función de la rigidez de piso de cada uno de los pórticos, que se indican en la figura 17.16.

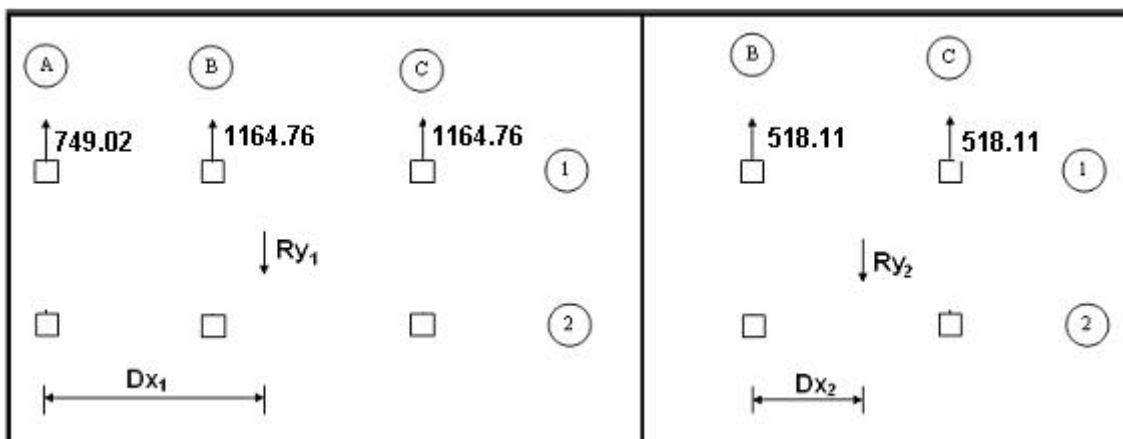


Figura 17.16 Rigidez de piso de cada uno de los pórticos. Tomado de Roberto Aguiar Noury (2002)

- SOLUCIÓN**

En sentido X no hay excentricidad pero si lo hay en sentido Y.

Para el segundo piso se tiene:

$$R_{Y2} = 518.11 + 518.11 = 1036.22$$

$$D_{X2} = \frac{518.11 \cdot 5}{1036.22} = 2.5 \text{ m.}$$

$$e_{X2} = 2.5 - 2.5 = 0.0 \text{ m.}$$

Para el primer piso se tiene:

$$R_{Y1} = 1164.76 + 1164.76 + 749.02 = 3078.54$$

$$D_{X1} = \frac{1164.76 \cdot 9 + 1164.76 \cdot 4}{3078.54} = 4.92 \text{ m.}$$

$$e_{X1} = 4.92 - 4.5 = 0.42 \text{ m.}$$

En la figura 17.17 se indica la ubicación del centro de rigidez que se obtiene en función de la rigidez de piso. Los resultados obtenidos son muy similares a los que se encontraron al aplicar el método matricial y cuyos resultados se indican en la figura 17.7

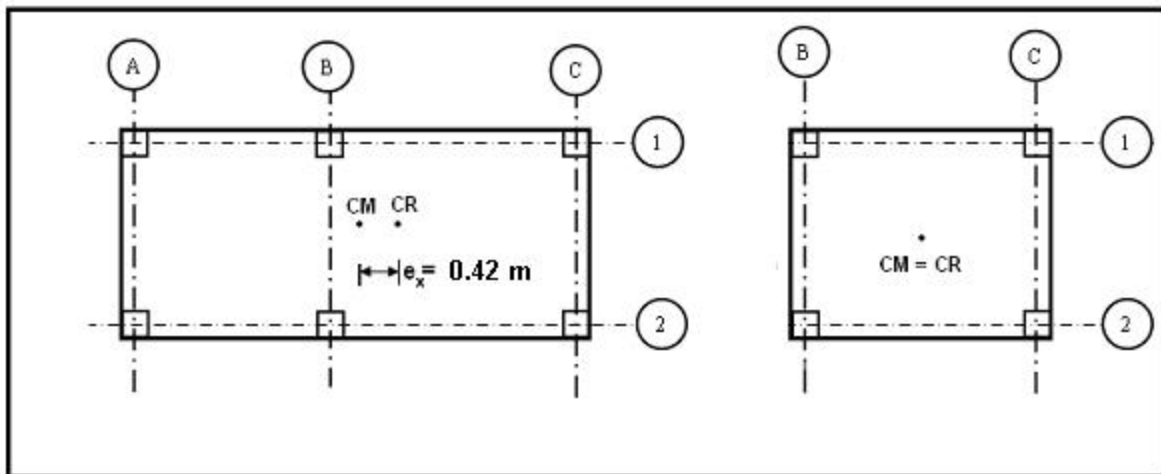


Figura 17.17 Ubicación del Centro de Masa al calcularlo en función de la rigidez de piso.

## 17.9 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

- EJEMPLO 9**

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura irregular en elevación mostrada en la figura 17.18. Las columnas son de 40/40 cm., y las vigas de 30/30 cm. El módulo de elasticidad del material es  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ . Las luces son de 5 m., y la altura del entrepiso de 3 m.

- SOLUCIÓN**

En la figura 17.19 se presentan las coordenadas de piso, en el centro de masas. La forma más fácil de resolver es haciendo regular la estructura con elementos ficticios de sección transversal cero.



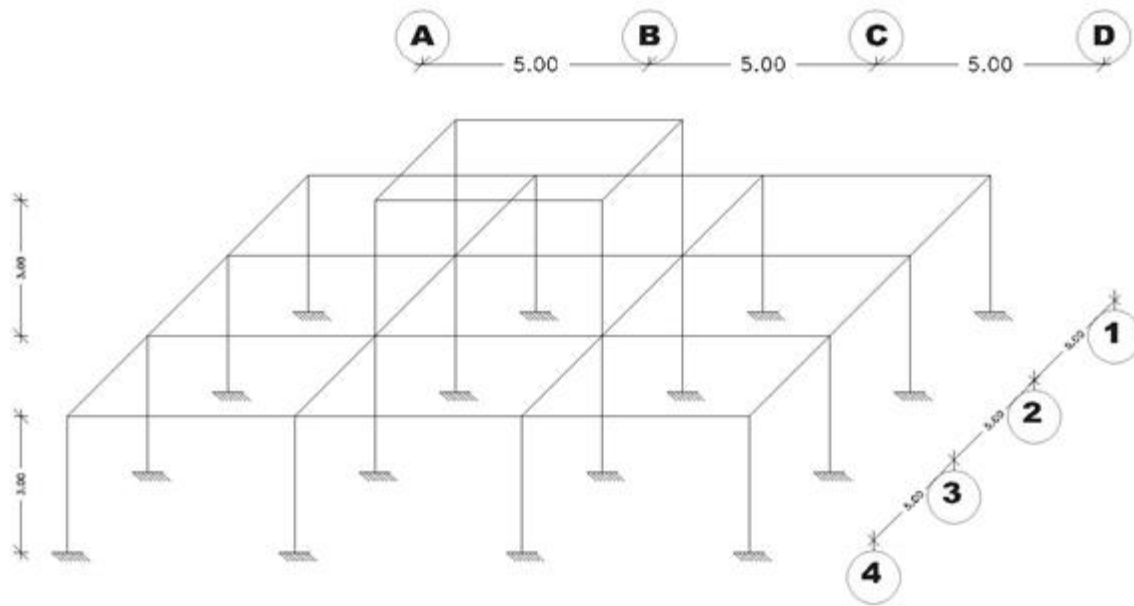


Figura 17.18 Estructura irregular en elevación de dos pisos.

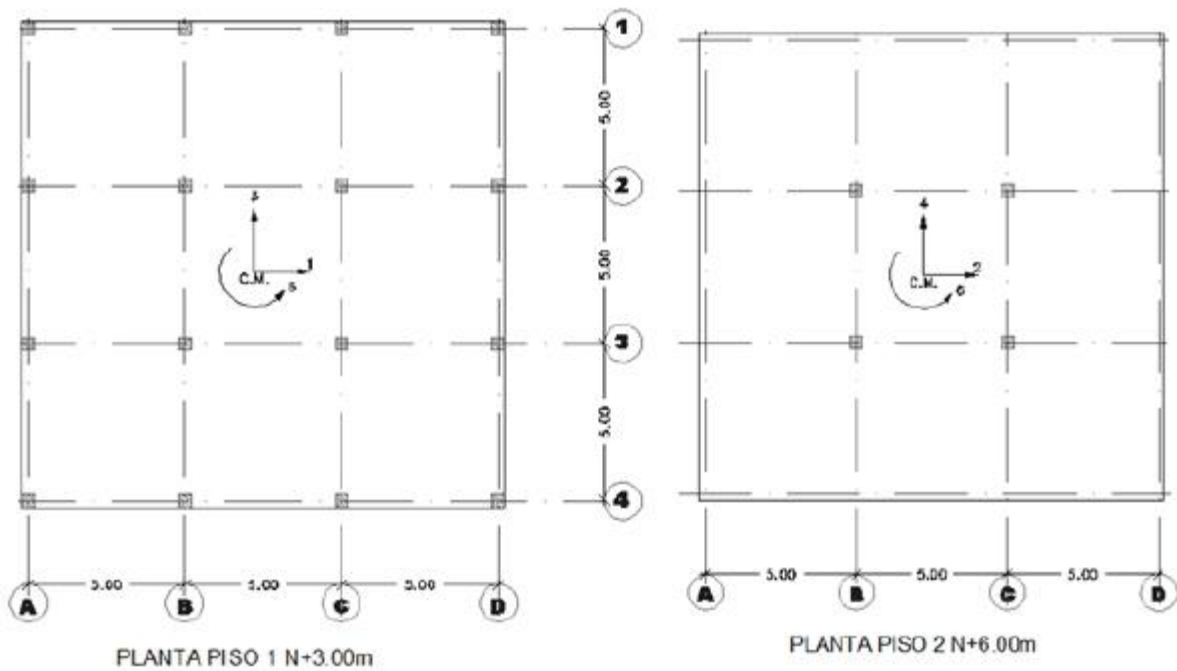


Figura 17.19 Coordenadas de piso

En la parte superior de la figura 17.20 se presenta un pórtico exterior; nótese que en el segundo piso se han colocado columnas y vigas de dimensiones muy pequeñas por que no existen. En la parte inferior se muestra un pórtico central que solo tiene columnas y vigas en el tramo central del segundo piso, en los extremos se ha puesto elementos ficticios.

Tanto para los pórticos exteriores como para los interiores, la numeración de los nudos y elementos es la misma y es la presentada en la figura 17.21.

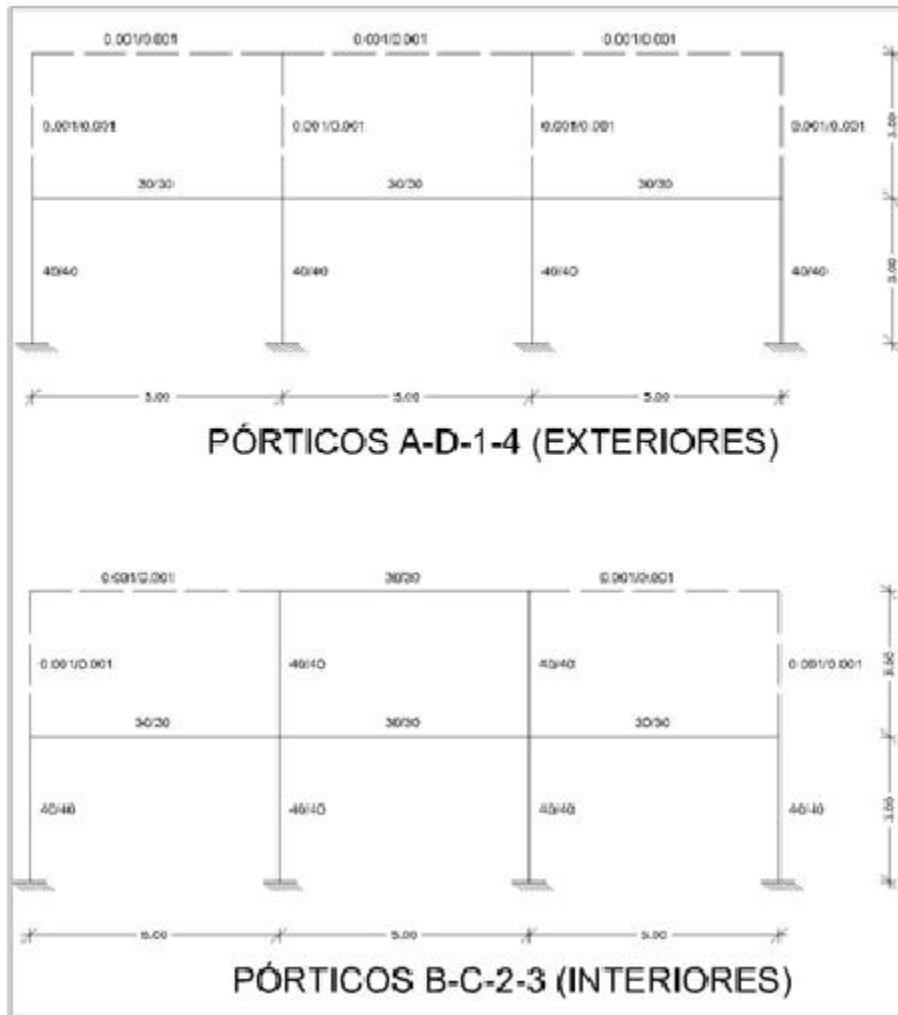


Figura 17.20 Geometría de los Pórticos de la Estructura.

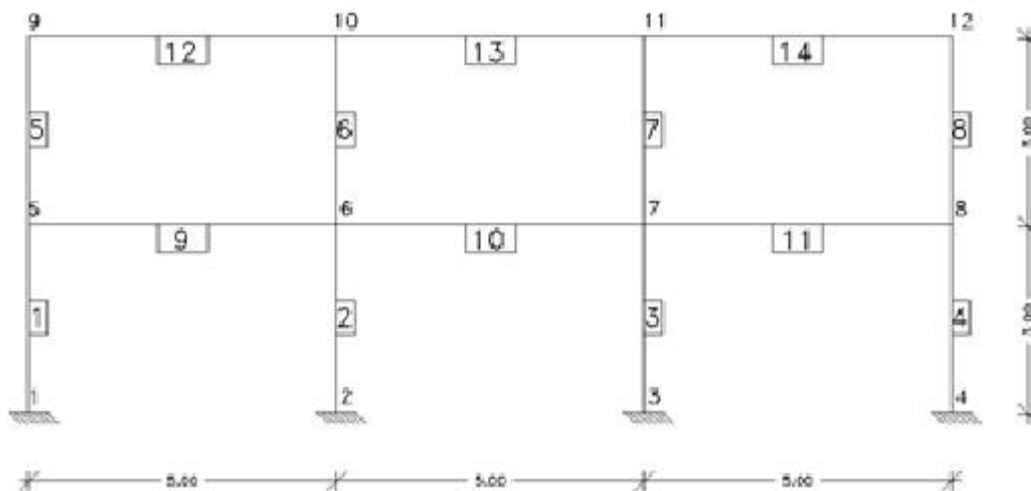


Figura 17.21 Numeración de nudos y elementos.

```

1   %Programa Eje9_libro Capítulo 17
2 -  nod=12;np=2;nr=4:[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
3 -  GEN=[1 1 5 3 1 1 1;5 5 9 3 1 1 1;9 5 6 2 1 1 1;12 9 10 2 1 1 1];
4 -  [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
5 -  NUDOS=[1 0.0 0.0 3 1 5 0;5 0.0 3.0 3 1 5 0;9 0.0 6.0 3 1 5 0.0];
6 -  [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
7 -  dibujo(X,Y,NI,NJ)
8 -  [VC]=vc(NI,NJ,CG);
9   % Porticos Exteriores
10 - SECCION=[1 0.4 0.4 3 1;5 0.0001 0.0001 3 1;9 0.30 0.30 2 1;
11 -         12 0.0001 0.0001 2 1];
12 - [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
13 - [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
14 - E=2400000;[KE]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
15 - nb=2;[KLE]=kcondensada(KE,nb) % Matriz de rigidez lateral
16 % Porticos Interiores
17 - SECCI=[1 0.4 0.4 3 1;5 0.0001 0.0001 1 3;6 0.4 0.4 1 1;
18 -       9 0.30 0.30 2 1; 12 0.0001 0.0001 1 2; 13 0.30 0.30 0 0];
19 - [ELE]=gelem_portico(SECCI);
20 - [KI]=krigidez(ngl,ELE,L,seno,coseno,VC,E);
21 - [KLI]=kcondensada(KI,nb) % Matriz de rigidez lateral
22 % Matriz de rigidez en coordenadas de piso
23 - rA=[-7.5 0;0 0];r1=rA;rB=[-2.5 0;0 -2.5];r2=rB;rC=[2.5 0;0 2.5];r3=rC;
24 - rD=[7.5 0;0 0];r4=rD;
25 - kxx=(KLE+KLI)*2;kyy=kxx;ktt=(KLE*r1^2+KLI*r2^2)*4;
26 - KE=[kxx zeros(2,2) zeros(2,2);zeros(2,2) kyy zeros(2,2);
27 -     zeros(2,2) zeros(2,2) ktt]

```

Se denomina  $K_E$  a la matriz de rigidez de un pórtico exterior;  $K_I$  a la matriz de rigidez de un pórtico interior y  $K_f$  a la matriz de rigidez en coordenadas de piso.

$$K_E = \begin{bmatrix} 4142.7 & 0 & & -2097.3 \\ & & & 7692 \\ & & & -2097.3 \\ & & & 1295.9 \end{bmatrix}$$

$$K_f = 10^6 \begin{bmatrix} 0.0237 & -0.0042 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0026 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0237 & -0.0042 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0042 & 0.0026 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1244 & -0.0524 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0524 & 0.0324 \end{bmatrix}$$

El programa desarrollado sirve para entender la forma como se obtuvo en primer lugar las matrices de rigidez lateral y en segundo lugar la matriz de rigidez en coordenadas de piso. La estructura es irregular en elevación pero a la vez es simétrica.

### • EJEMPLO 10

A la izquierda de la figura 17.22 se presenta una estructura irregular de 2 pisos que se encuentra sobre aisladores sísmicos elastoméricos que tiene una rigidez horizontal  $k_{ef} = 60 T/m$  y una rigidez vertical  $k_v = 30000 T/m$ . En total se han colocado 8 aisladores de 15 cm., de alto. La estructura tiene columnas de 30/40 cm. y vigas de 30/30 cm. La dimensión mayor de las columnas es en la dirección de los ejes "A", "B". El módulo de elasticidad del hormigón es  $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$ . Se pide:

1. Presentar rápidamente el marco teórico para considerar al aislador un elemento corto.

2. Elaborar un programa de computación, utilizando la librería de **CEINCI-LAB** para hallar la matriz de rigidez lateral de los pórticos y de la estructura en coordenadas de piso.
3. Presentar las matrices indicadas al final del párrafo anterior.

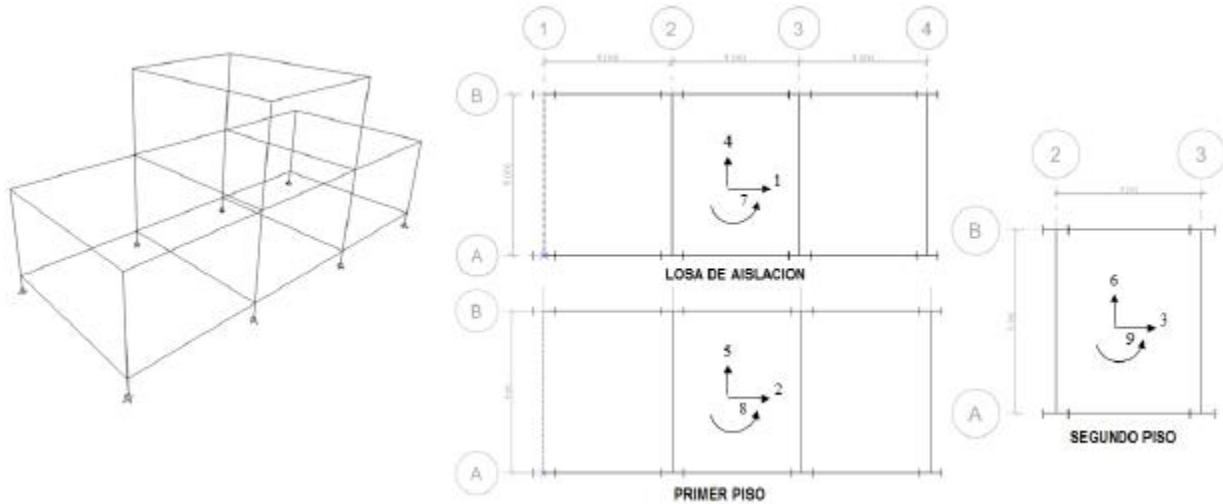


Figura 17.22 Estructura Irregular sobre aisladores sísmicos.

• **SOLUCIÓN**

1. **Marco Teórico**

A la izquierda de la figura 17.23 se observa un aislador sísmico colocado entre dos vigas; a la derecha se muestra la viga superior e inferior de hormigón armado y el aislador. Se ha denominado \$l\_j\$ a las longitudes desde el centro de gravedad del aislador hasta el punto central de las vigas inferior y superior, respectivamente. El aislador va a ser modelado como un elemento corto de altura \$l\_j + l\_i\$

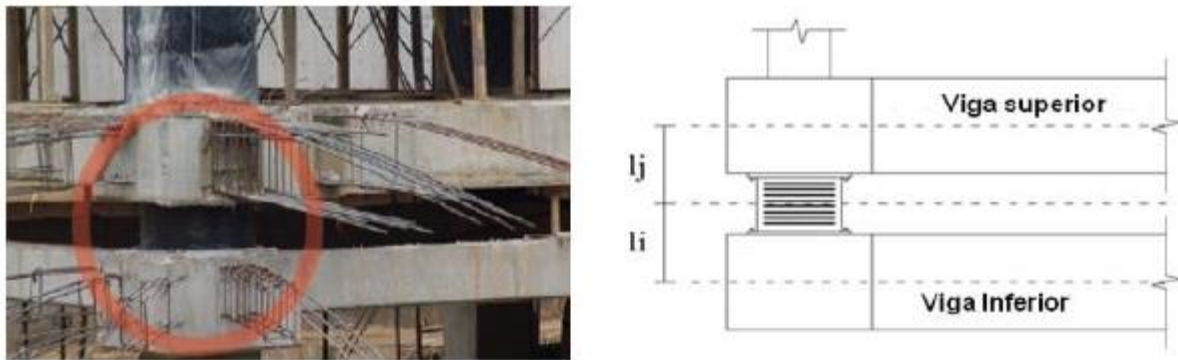


Figura 17.23 Estructura con aisladores y modelo de análisis.

A la izquierda de la figura 17.24, se presenta las coordenadas locales para aislador modelado como un elemento corto, la matriz de rigidez en coordenadas locales \$k\_0\$ es.

$$k_0 = \begin{bmatrix} k_{ef} & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix} \quad (17.12)$$

Donde \$k\_{ef}\$ es la rigidez horizontal del aislador (rigidez secante); \$k\_r\$ es la rigidez vertical del aislador. En el libro: "Microzonificación Sísmica de Quito", Aguiar (2013) se presenta la forma como se obtiene estas rigideces para un aislador elastomérico con núcleo de plomo.

A la derecha de la figura 17.24 se muestra el elemento corto en coordenadas globales, se tiene 6 grados de libertad, 3 en el nudo inicial y 3 en el nudo final. La matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales  $k_3$  se obtiene con la siguiente ecuación.

$$k_3 = T^t k_0 T \quad (17.13)$$

Donde  $T$  es la matriz de paso de coordenadas locales a globales.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

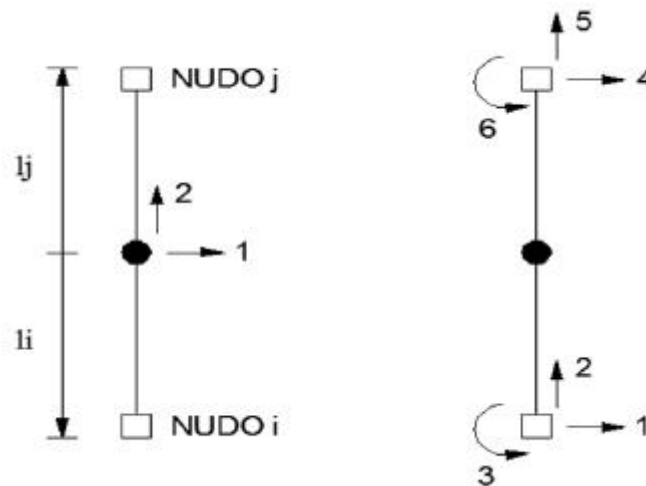


Figura 17.24 Coordenadas locales y globales de un elemento aislador.

Una vez que se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales  $k_3$  se realiza el ensamblaje directo para hallar la contribución del elemento aislador a la matriz de rigidez de la estructura, utilizando el respectivo vector de colocación. El programa **kaislador** encuentra la contribución de todos los aisladores a la matriz de rigidez de la estructura. La entrada de datos de este programa es la siguiente.

- **[K]=kaisladores (ngl,nais,Ko,T,VCAIS)**

ngl Número de grados de libertad de la estructura.

nais Número de aisladores.

$K_0$  Matriz que contiene en la diagonal la matriz de rigidez de un aislador en coordenadas locales.

T Es la matriz de paso de locales a globales, en algunos libros de aislación la denominan  $L_0$

VCAIS Matriz que contiene a los vectores de colocación de los elementos aisladores.

Cuando estaba escribiendo este capítulo, se registró un sismo de 5.1, en el norte de Quito, asociado a un segmento de las fallas ciegas de Quito, que hasta el momento ha dejado 3 muertos. Los sismos asociados a estas fallas son de tipo impulsivo, es decir son sismos cortos, que liberan una gran cantidad de energía en el campo cercano y son muy destructivos.

La capital del Ecuador se encuentra sobre fallas geológicas, en estas condiciones es importante que se diseñen estructuras con sistemas de protección sísmica como disipadores de energía o aisladores sísmicos. Al 2014 hay muy pocas estructuras con estos dispositivos de control pasivo pero esto tiene que cambiar por este motivo se realizó este ejemplo, como una introducción en esta temática.

## 2. Programa en CEINCI-LAB

En la figura 17.25 se presenta la numeración de nudos y elementos del Pórtico 1 que es de 2 pisos, incluyendo el sistema de aislación, en líneas entrecortadas se ha colocado los elementos ficticios necesarios para utilizar el programa **cg\_sismo\_gaus**. También se indica del Pórtico 2 y del Pórtico A. Nótese que en todos los casos primero se ha numerado a los elementos de hormigón armado y al final los elementos aisladores.

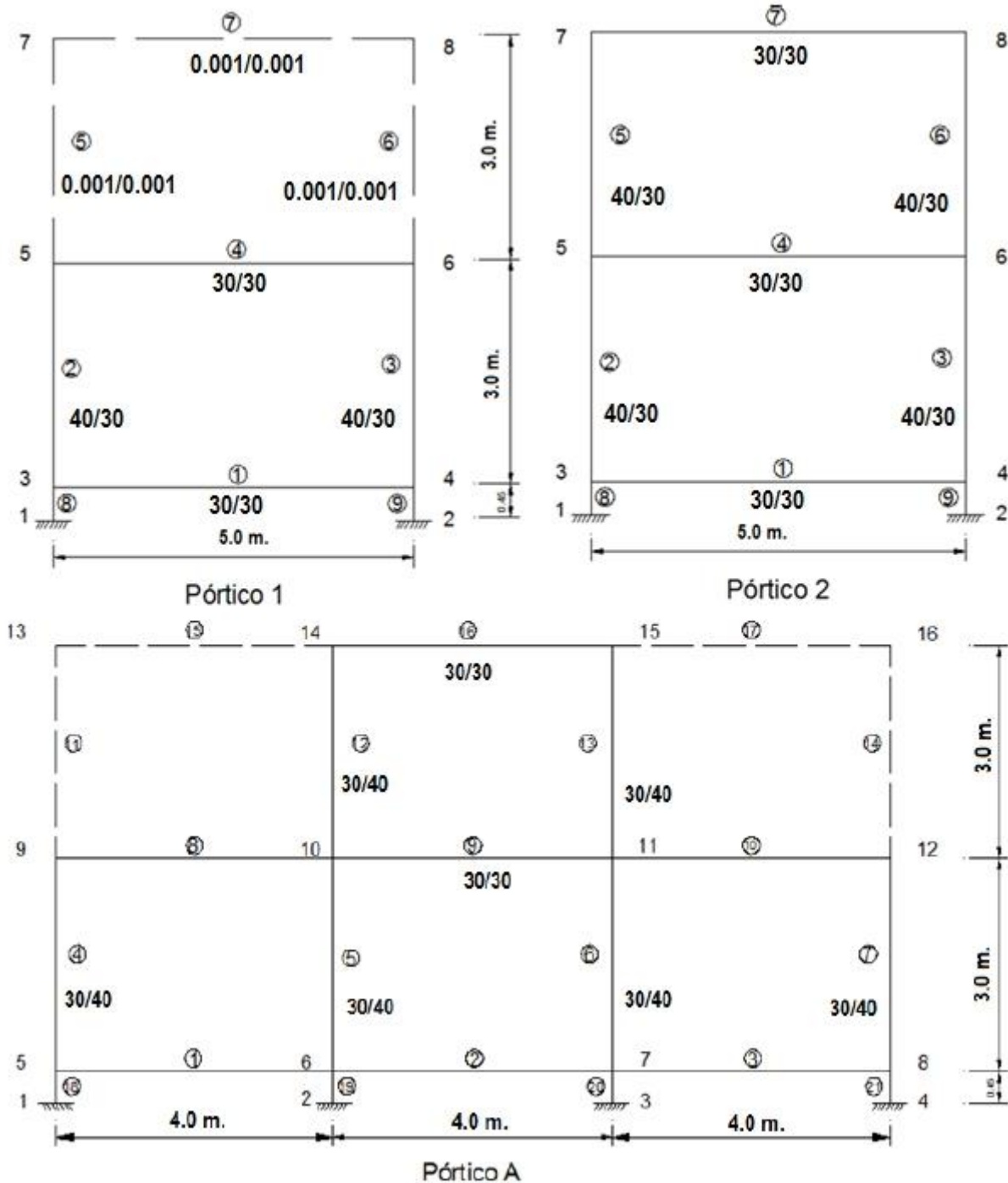


Figura 17.25 Numeración de nudos y elementos.

La altura del elemento aislador es 15 cm de alto más 30 cm., que es la altura de la viga de aislación. Se supone que en la base se tiene una viga de igual dimensión que la del sistema de aislación. Es hipótesis de cálculo.

En la figura 17.25 es importante tener en cuenta la base y la altura de la sección transversal de las columnas. A continuación se presenta el programa desarrollado, como se sabe que no hay torsión no se calcula  $k_{\theta x}$ ,  $k_{\theta y}$ .



```

1   %Programa Eje10_libro Capitulo 17
2   %Pórtico 1
3   - nod=8;np=3;nr=2;[CG,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
4   - GEN=[1 3 4 2 3 2 2;2 3 5 1 1 1 1;5 5 7 1 1 1 1;8 1 3 1 1 1 1];
5   - [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
6   - NUDOS=[1 0.0 0.0 1 1 5 0;3 0 0.45 1 1 5 0;5 0 3.45 1 1 5 0;
7     7 0 6.45 1 1 5 0];
8   - [X,Y]=glinea_portico(NUDOS); % dibujo(X,Y,NI,NJ)
9   - [VC]=vc(NI,NJ,CG);
10  - SECCION=[1 0.3 0.3 1 3;2 0.4 0.3 1 1;5 0.0001 0.0001 4 1];
11  - [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
12  - [L,seno,coseno]=longitud(X,Y,NI,NJ);
13  - E=2400000;[KH1]=krigidez(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
14  - kef=60;kv=30000;ko=[kef 0;0 kv];Ko=[ko zeros(2,2);zeros(2,2) ko];
15  - li=0.225;lj=0.225;Lo=[-1 0 li 1 0 lj;0 -1 0 0 1 0];
16  - VCAIS=VC(8:9,:);nais=2;
17  - [KAIS1]=kaisladores(ngl,nais,Ko,Lo,VCAIS);
18  - KT1=KAIS1+KH1;
19  - nb=3;[KL1]=kcondensada(KT1,nb) % Matriz de rigidez lateral pórtico 1
20  % Portico 2
21  - SECCION2=[1 0.3 0.3 2 3;2 0.4 0.3 1 1;5 0.4 0.3 1 1;
22    8 0.0001 0.0001 1 1];
23  - [ELEM2]=gelem_portico(SECCION2);
24  - [KH2]=krigidez(ngl,ELEM2,L,seno,coseno,VC,E);
25  - KT2=KAIS1+KH2;
26  - [KL2]=kcondensada(KT2,nb) % Matriz de rigidez lateral pórtico 2
27  % Portico A
28  - nod=16;nr=4;[CGA,ngl]=cg_sismo_gaus(nod,np,nr);
29  - GENA=[1 5 6 2 1 1 1;4 5 9 3 1 1 1;8 9 10 2 1 1 1;11 9 13 3 1 1 1;
30    15 13 14 2 1 1 1;18 1 5 3 1 1 1];
31  - [NIA,NJA]=gn_portico(GENA);
32  - NUDOSA=[1 0.0 0.0 3 1 4.0 0.0;5 0.0 0.45 3 1 4.0 0.0;9 0.0 3.45 3 1 4.0 0;
33    13 0.0 6.45 3 1 4.0 0.0];
34  - [XA,YA]=glinea_portico(NUDOSA); % dibujo(XA,YA,NIA,NJA)
35  - [VCA]=vc(NIA,NJA,CGA);
36  - SECCIONA=[1 0.3 0.3 2 1;4 0.3 0.4 3 1;8 0.3 0.3 2 1;11 0.0001 0.0001 1 3;
37    12 0.3 0.4 1 1;15 0.0001 0.0001 1 2;16 0.3 0.3 0 0;18 0.0001 0.0001 3 1];
38  - [ELEMA]=gelem_portico(SECCIONA);
39  - [LA,senoA,cosenoA]=longitud(XA,YA,NIA,NJA);
40  - [KHA]=krigidez(ngl,ELEMA,LA,senoA,cosenoA,VCA,E);
41  - Ko=[ko zeros(2,2) zeros(2,2) zeros(2,2);
42    zeros(2,2) ko zeros(2,2) zeros(2,2);
43    zeros(2,2) zeros(2,2) ko zeros(2,2);
44    zeros(2,2) zeros(2,2) zeros(2,2) ko];
45  - VCAISA=VCA(18:21,:);nais=4;
46  - [KAISA]=kaisladores(ngl,nais,Ko,Lo,VCAISA);
47  - KTA=KHA+KAISA;[KLA]=kcondensada(KTA,nb);
48  % Matriz de rigidez en coordenadas de piso
49  - r1=[-6 0 0;0 -6 0;0 0 0];r2=[-2 0 0;0 -2 0;0 0 -2];r3=-1*r2
50  - r4=-1*r1;rB=[-2.5 0 0;0 -2.5 0;0 0 -2.5];rA=-1*rB
51  - kxx=KLA+KLA;kyy=(KL1+KL2)*2;ktt=(KLA*rA^2+KL1*r1^2+KL2*r2^2)*2;
52  - KE=[kxx zeros(3,3) zeros(3,3);zeros(3,3) kyy zeros(3,3);
53    zeros(3,3) zeros(3,3) ktt]

```

3. Resultados

$$K_i^{(1)} = \begin{bmatrix} 709.93 & -583.81 & 0 \\ -583.81 & 577.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_i^{(2)} = \begin{bmatrix} 877.2 & -1048 & 297.6 \\ -1048 & 2077.2 & -1037.2 \\ 297.6 & -1037.2 & 740.7 \end{bmatrix}$$

$$K_i^{(A)} = \begin{bmatrix} 2534.4 & -2709.8 & 427.9 \\ -2709.8 & 4293.1 & -1596.6 \\ 427.9 & -1596.6 & 1169.4 \end{bmatrix}$$

$$KE = 10^5 * \begin{bmatrix} 0,0507 & -0,0542 & 0,0086 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0542 & 0,0859 & -0,0319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0086 & -0,0319 & 0,0234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0317 & -0,0326 & 0,0060 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0326 & 0,0531 & -0,0207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0060 & -0,0207 & 0,0148 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8981 & -0,8429 & 0,0773 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8429 & 1,1187 & -0,2825 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0773 & -0,2825 & 0,2054 \end{bmatrix}$$

17.10 ESTRUCTURACIÓN SÍSMICA

Para que una estructura sea resistente a la torsión es necesario que la sub matriz  $K_{\theta\theta}$  sea lo más grande posible y para que ello se cumpla es conveniente que en una edificación se coloquen en el perímetro las líneas más resistentes para que su matriz de rigidez lateral  $K_L$  sea lo más grande posible ya que  $K_{\theta\theta}$  es igual a la sumatoria de  $K_L$  por el vector  $(r)$ , cuando los centros de masas son colineales o  $K_{\theta\theta}$  es igual a la sumatoria de  $r^T K_L r$ .

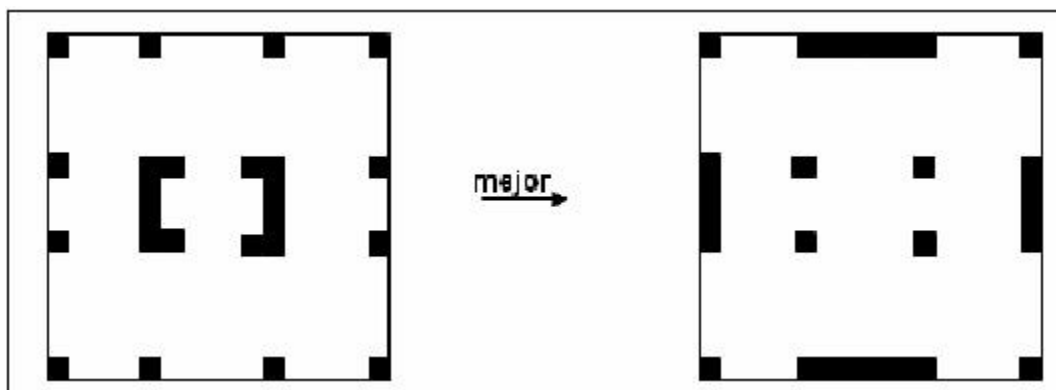


Figura 17.26 Mala y Buena Estructuración Sísmica desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.26 se tienen dos estructuraciones para un mismo edificio en el de la izquierda los muros de corte se hallan en el centro del edificio en consecuencia las líneas resistentes de los pórticos centrales tendrán mayor rigidez lateral. En cambio en el edificio de la derecha los muros de corte se han colocado en los pórticos perimetrales luego son éstos pórticos los que tienen mayor rigidez lateral.



Por otra parte para los dos edificios el Centro de Masa se encuentra en su centro de gravedad. Por lo tanto la sub matriz  $K_{\theta\theta}$  será mayor en el edificio de la derecha de la figura 17.26 ya que los pórticos exteriores tienen mayor rigidez lateral y  $K_{\theta\theta}$  es igual al producto de  $K_L$  por la distancia al cuadrado, por  $r^2$ .

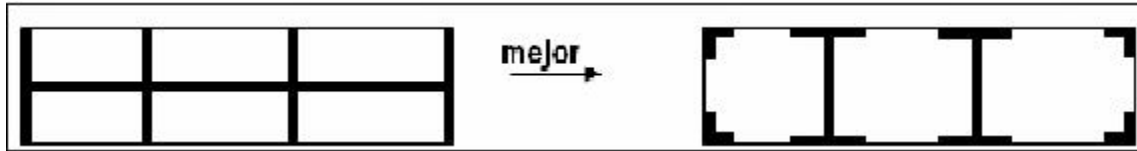


Figura 17.27 Mala y Buena estructuración desde el punto de vista torsional.

En la figura 17.27 se presentan dos casos de distribución de los elementos estructurales con problema similar al que se presentó en la figura 17.26. En la figura de la izquierda de 17.27 se aprecia que solo existe un pórtico en sentido X y que este pasa por el centro de masa en consecuencia no va a aportar a  $K_{\theta\theta}$  ya que su matriz  $r$  será nula para evitar esto se recomienda estructurar el edificio como se indica a la derecha de la figura 17.27, donde se tienen dos líneas resistentes en los pórticos exteriores que no pasan por el centro de masa luego aportan a la sub matriz  $K_{\theta\theta}$ .

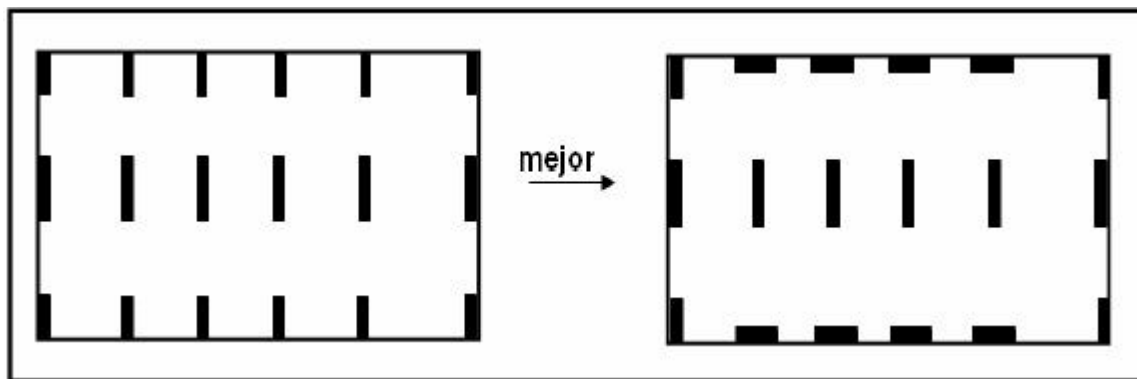


Figura 17.28 Mala y Buena estructuración desde el punto de vista trasnacional

En realidad uno de los problemas más críticos en un edificio es el problema torsional pero a más de ello se debe tener especial cuidado en tener un equilibrio entre las sub matrices  $K_{XX}$  y  $K_{YY}$ , equilibrio en el sentido de que las dos tengan valores similares. A la izquierda de la figura 17.28 se aprecia un edificio en el cual solo existen líneas resistentes en sentido Y, y no existen líneas resistentes en sentido X de tal forma que en sentido Y va a ser muy rígido se va a desplazar muy poco en ese sentido pero es muy flexible en sentido X y tendrá grandes desplazamientos en X. Para evitar esto se recomienda la estructuración indicada a la derecha de la figura 17.28 ya que existen líneas resistentes en sentido X.

Con los tres ejemplos que se han indicado en el presente apartado se pretende que el lector en la distribución de los elementos resistentes dentro de un edificio tenga en cuenta lo siguiente:

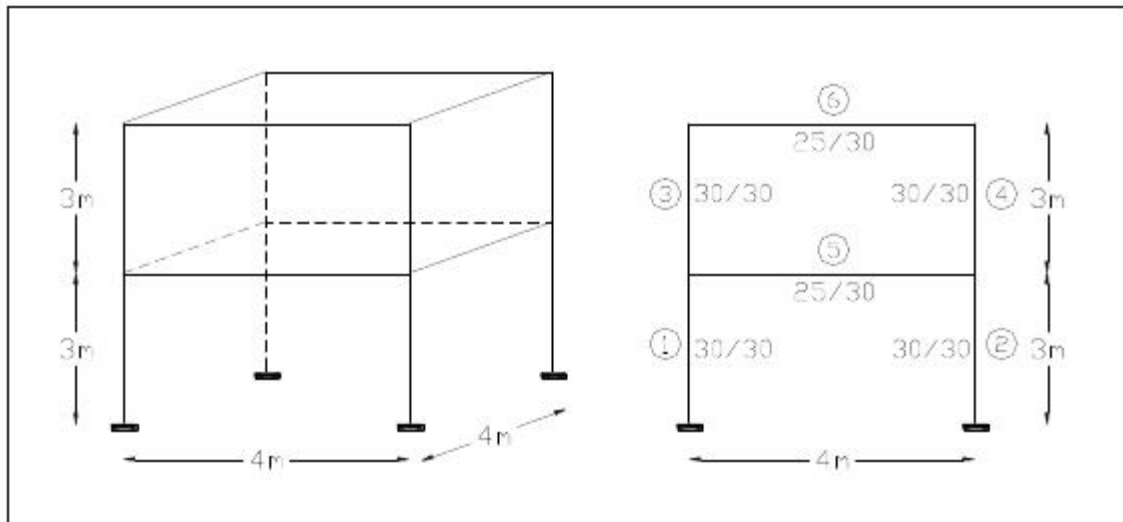
- ❖ Que la sub matriz  $K_{XX}$  tenga valores similares a la sub matriz  $K_{YY}$ .
- ❖ Que la sub matriz  $K_{\theta\theta}$  sea lo más grande posible.
- ❖ Que se distribuya en forma simétrica las líneas resistentes en los dos sentido en X, Y.
- ❖ Que las líneas resistentes de los pórticos exteriores sean mayores que las líneas resistentes de los pórticos interiores.

## 17.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIO N.- 1

Encontrar la matriz de rigidez en coordenadas de pisos de la estructura de dos pisos que se indica a continuación, si todos los pórticos son iguales y tienen las dimensiones indicadas en la figura que está a la derecha. Calcular con un  $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$  y de la siguiente manera:

- Con inercias gruesas y en base a la matriz de compatibilidad.
- Con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11 y en base a la matriz de compatibilidad.
- Con inercias agrietadas de acuerdo al NEC-11 y utilizando las sub matrices de la matriz de rigidez  $KE$ .
- Colocar una losa de aislación cuyas vigas sean de las mismas dimensiones de las vigas del primer piso; la altura del aislador es 15 cm., las rigideces de los aisladores son  $k_{ef} = 20 T/m$ , y la rigidez vertical  $k_v = 20000 T/m$ .



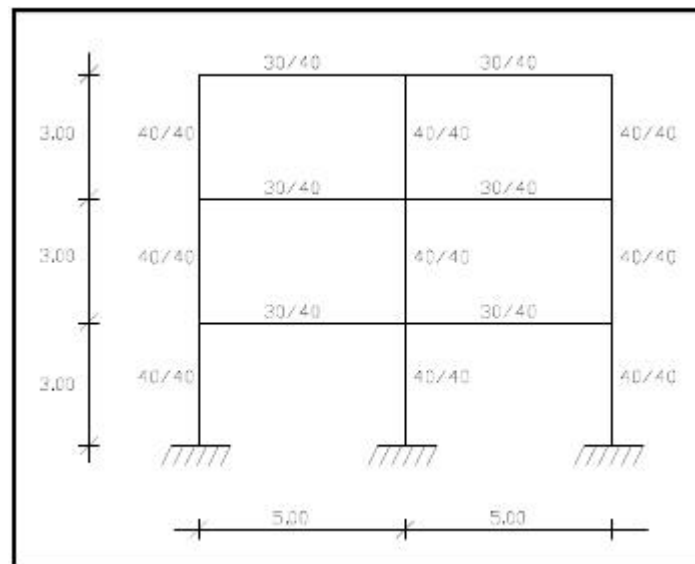
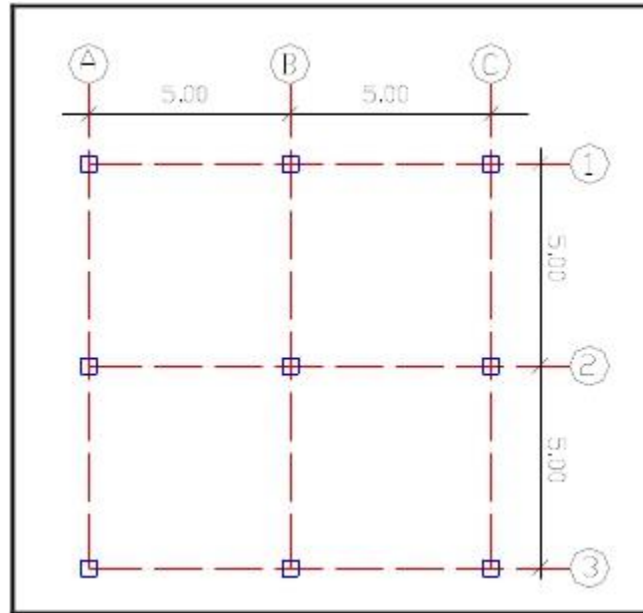
### EJERCICIO N.- 2

Encontrar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 1 de las siguientes maneras:

- En base al planteamiento matricial con  $Q_x = Q_y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} 1$ .
- En base a la rigidez "t".

### EJERCICIO N.- 3

Determinar la matriz de rigidez en coordenadas de piso de la estructura de tres pisos que se indica a continuación, en la cual todos los pórticos son iguales. Calcular con inercias agrietadas de acuerdo a lo estipulado por el NEC-11. Considerar  $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$ .



Pórtico Tipo

**EJERCICIO N.- 4**

Determinar el Centro de Rigidez de la estructura del Ejercicio N.- 3 si  $Q_x = Q_y = 1.0 \text{ T.}$

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$
**EJERCICIO N.- 5**

Resolver el ejercicio anterior si  $Q_x = Q_y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \end{bmatrix} \text{ T.}$

## CAPITULO 18

---

### MALLAS ESPACIALES

#### RESUMEN

El Método de los Desplazamientos se aplica a cualquier tipo de estructura, para ello lo que se debe definir en primer lugar es como trabaja la estructura que se está analizando, en este caso una malla espacial y determinar un modelo de cálculo de las deformaciones en el sistema 1, que no considera los desplazamientos como cuerpo rígido. Posteriormente se halla la matriz de rigidez en coordenadas locales y globales y se resuelve como se realizó en pórticos planos y armaduras planas.

La primera parte del capítulo está dedicada a reforzar los conocimientos de cálculo en el sistema 1, por ese motivo se trabaja con elementos totalmente flexibles, luego con elementos torsionalmente rígidos y con elementos transversalmente rígidos. Se determina la matriz de compatibilidad de deformaciones, el vector de cargas generalizadas y se resuelve una estructura en forma manual.

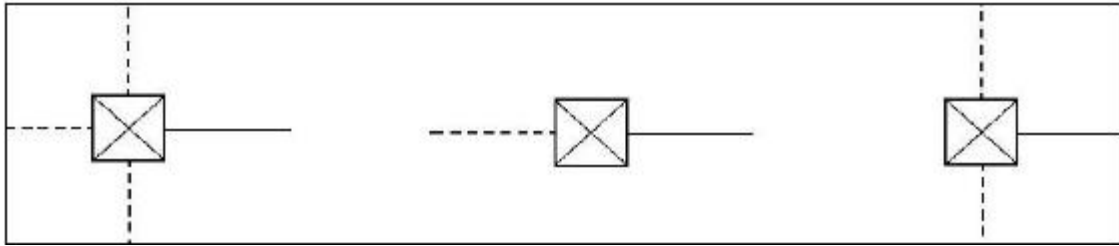
Se presenta la librería de programas de **CEINCI-LAB** que permite resolver de una manera muy fácil cualquier armadura espacial con elementos totalmente flexibles.

El último de los ejercicios propuestos es parte de una consultoría que realizó el autor del libro para diseñar una Bodega, donde se tenía que cubrir luces de 10 m., se desea que los estudiantes resuelvan este ejercicio fundamentalmente utilizando los programas de **CEINCI-LAB** por este motivo se ha dado una gran cantidad de información para facilitar la tarea y se indican los resultados en términos de fuerzas y momentos en los extremos de los elementos.

#### 18.1 INTRODUCCIÓN

Las Mallas Espaciales, también se conocen con el nombre de Parillas, son estructuras que se hallan en el plano horizontal y sobre las cuales gravita una carga en el plano vertical. Los elementos de una malla espacial trabajan a flexión, corte y torsión.

En la figura 18.1 se indica la simbología a emplearse para definir las restricciones de los nudos, a la izquierda se presenta un empotramiento perfecto, el rectángulo con dos diagonales significa que no existe desplazamiento vertical, la línea entrecortada axial al eje significa que no hay giro de torsión y la línea entrecortada perpendicular al eje significa que no existe giro a flexión.



**Figura 18.1** Simbología utilizada para definir las restricciones de los nudos.

En la parte central de la figura 18.1 se presenta un nudo que no puede desplazarse verticalmente y tampoco puede rotar con respecto al eje del elemento. Finalmente a la derecha de la figura 18.1 se tiene un nudo que únicamente admite un giro con respecto al eje del elemento.

Cada nudo interior de una malla espacial tiene tres grados de libertad, que para el caso general, son: rotación con respecto al eje X, rotación con respecto al eje Y, desplazamiento vertical con relación al eje Z.

## 18.2 ESTUDIO EN SISTEMA 1

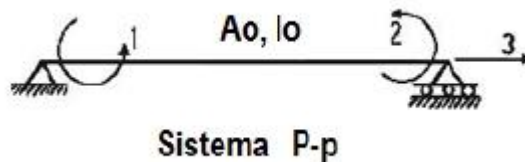
En el Capítulo 6 se desarrolló el modelo numérico de cálculo que se indica en la figura 18.2, en el cual no se considera los movimientos como cuerpo rígido y se tienen tres deformaciones en el elemento, dos a flexión y una deformación axial; las mismas que se encuentran con las siguientes ecuaciones.

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

Donde  $u_1, v_1, \theta_1$  son las componentes de desplazamiento axial, transversal y rotación del nudo inicial;  $u_2, v_2, \theta_2$  las componentes de desplazamiento axial, transversal y rotación del nudo final. Las deformaciones se agrupan en el vector  $p$ . Por otro lado el momento en el nudo inicial  $p_1$ , en el nudo final  $p_2$  y la fuerza axial  $p_3$  se agrupan en el vector  $P$



**Figura 18.2** Modelo de cálculo de pórticos planos sin considerar movimientos como cuerpo rígido.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

La relación entre las cargas  $P$  y las deformaciones  $p$ , viene dada por la matriz de rigidez del elemento en el sistema uno, que se denominó  $k_1$ . Cuando no se considera el efecto del corte, se tiene.

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $I$  es el momento de inercia a flexión;  $J$  es el momento de inercia a torsión;  $l$  es la longitud del elemento.

Ahora bien el modelo numérico de cálculo en el sistema 1 para un elemento de una malla espacial, es el indicado en la figura 18.3. En el nudo inicial no se considera el desplazamiento vertical y la rotación axial (a torsión) y en el nudo final no se toma en cuenta el desplazamiento vertical; estas tres vienen a ser los desplazamientos como cuerpo rígido. Las deformaciones  $p$  son dos de flexión y una de torsión; las deformaciones de flexión se obtienen con el mismo formulario para el caso de pórticos planos, por lo que no se vuelve a copiar las ecuaciones y la de torsión en forma análoga a la deformación axial pero con los giros de torsión del nudo final e inicial.

$$p_3 = \theta_{t2} - \theta_{t1} \tag{18.1}$$

Donde  $\theta_{t2}$ ,  $\theta_{t1}$ , son los giros de torsión del nudo final e inicial del elemento. El valor de  $p_3$  será positivo si el elemento se alarga torsionalmente y será negativo si se acorta torsionalmente.

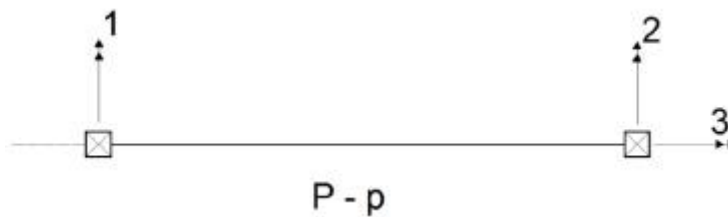


Figura 18.3 Sistema 1, para un elemento de una malla espacial.

Es importante destacar en la figura 18.3, que las deformaciones por flexión  $p_1, p_2$  son positivas si rotan en forma horaria, al contrario de lo que se tiene en pórticos planos, ver figura 18.2 pero las ecuaciones de cálculo de las deformaciones a flexión son las mismas, claro está que ahora los giros a flexión  $\theta_1, \theta_2$ , serán positivos si rotan en forma horaria; los desplazamientos verticales  $v_2, v_1$  son positivos si van hacia arriba pero en el plano horizontal.

El vector  $P$  para el caso de un elemento de una malla espacial, está compuesta por los momentos a flexión del nudo inicial y final denominados  $p_1, p_2$  y por el momento a torsión del nudo final  $p_3$ . Ahora la matriz de rigidez del elemento, en sistema 1, es:

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

Las variables todavía no definidas son:  $G$  que es el módulo de corte  $G \approx 0.4 E$ ;  $J$  es el momento de inercia a torsión.

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad J = \beta h b^3 \quad \beta \approx \frac{1}{3} - 0.21 \frac{h}{b} \tag{18.3}$$

Donde  $b, h$  son la base y la altura de la sección transversal de la viga.

### 18.2.1 Matriz de compatibilidad A

Al igual que en pórticos y armaduras planas, se define la matriz  $A$  de la forma:

$$p = A q$$

Donde  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas y  $p$  el vector de deformaciones.

El objetivo de ver mallas espaciales, en este libro, es con dos propósitos, primero como una introducción paulatina al análisis espacial y segundo para que el lector vea que los conceptos y definiciones básicas estudiadas en pórticos y armaduras planas se aplican a otro tipo de estructuras. En este caso concreto se va a calcular la matriz de compatibilidad  $A$  de mallas espaciales con elementos totalmente flexibles; con elementos transversalmente rígidos y con elementos torsionalmente rígidos y se verá que el cálculo es similar al desarrollado en pórticos planos.

### • EJEMPLO 1

Determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ , de la malla indicada en la figura 18.4, si sus elementos son totalmente flexibles.

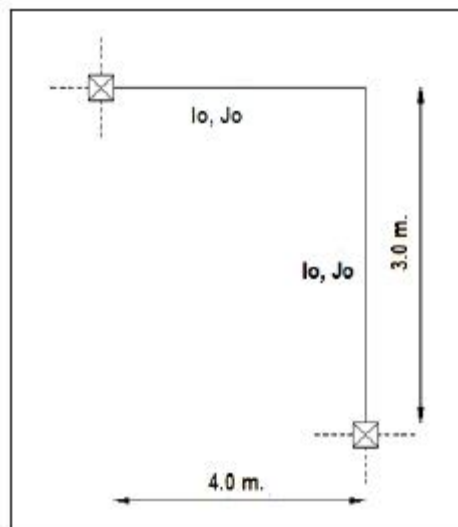


Figura 18.4 Malla Espacial de Ejemplo 1.

### • SOLUCIÓN

En la figura 18.5 se presentan los sistemas  $Q - q$  de la estructura y  $P - p$  de los elementos, respectivamente. La estructura tiene 3 grados de libertad y 6 deformaciones de los elementos.

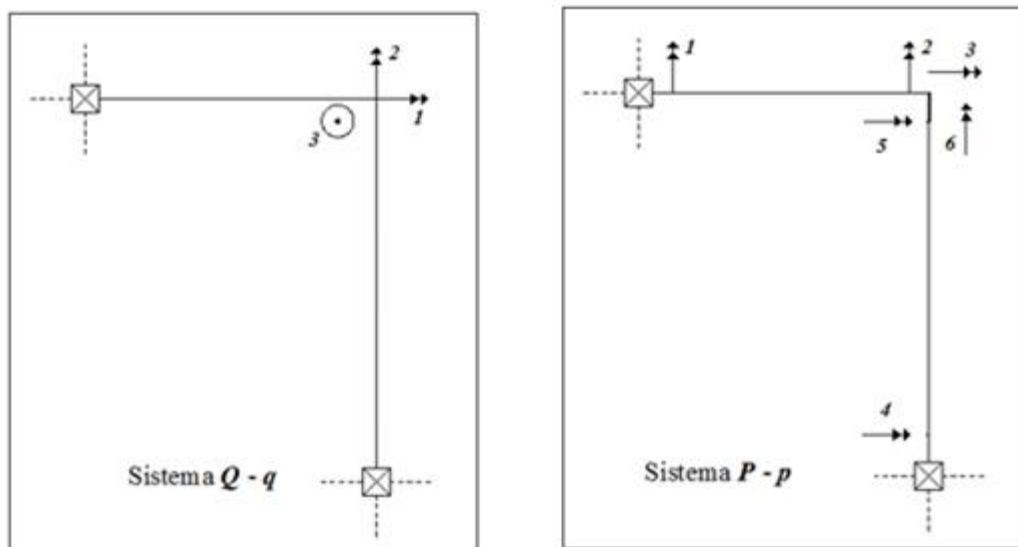
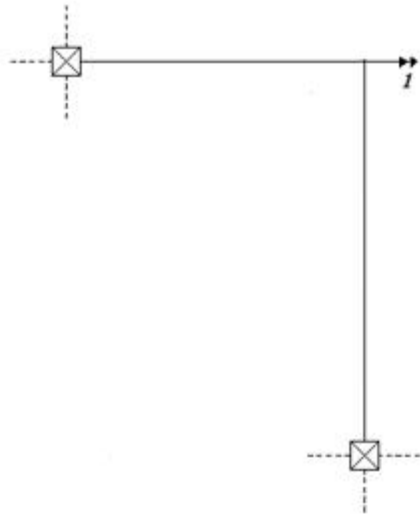


Figura 18.5 Sistemas  $Q - q, P - p$ .

- Primera columna de la Matriz A

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 1$$



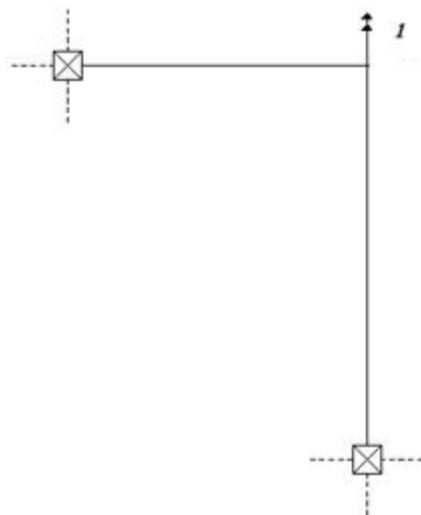
Deformada elemental  $q_1$

En este caso existe torsión en el elemento en sentido X, y flexión en el elemento en sentido Y.

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 1 \\ p_4 = 0 & p_5 = 1 & p_6 = 0 \end{array}$$

- Segunda columna de la Matriz A

$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 2$$



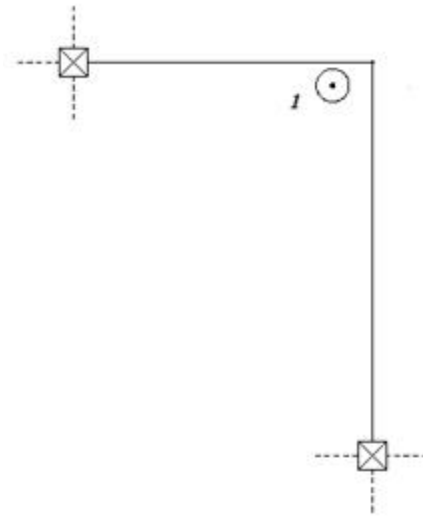
Deformada elemental  $q_2$

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 1 & p_3 = 0 \\ p_4 = 0 & p_5 = 0 & p_6 = 1 \end{array}$$



- Tercera columna de la Matriz A

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0; \quad i \neq 3$$

Deformada elemental  $q_3$ 

En este caso el nudo sube verticalmente la unidad, en esa deformada se traza la cuerda y las tangentes, para el elemento en sentido X, el ángulo entre la cuerda y la tangente es horario por lo tanto son positivas  $p_1$  y  $p_2$ . Para el elemento en sentido Y el ángulo es negativo por lo tanto  $p_4$  y  $p_5$  son negativas.

$$p_1 = \frac{1}{4} \quad p_2 = \frac{1}{4} \quad p_3 = 0$$

$$p_4 = -\frac{1}{3} \quad p_5 = -\frac{1}{3} \quad p_6 = 0$$

## Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 2

En la malla espacial presentada en la figura 18.6, el elemento AD es  $I = \infty$ , torsionalmente rígido y el elemento EC es  $I = \infty$ , transversalmente rígido, los demás elementos completamente flexibles, se pide seleccionar sistemas  $Q - q$ ,  $P - p$ , y determinar la matriz A.

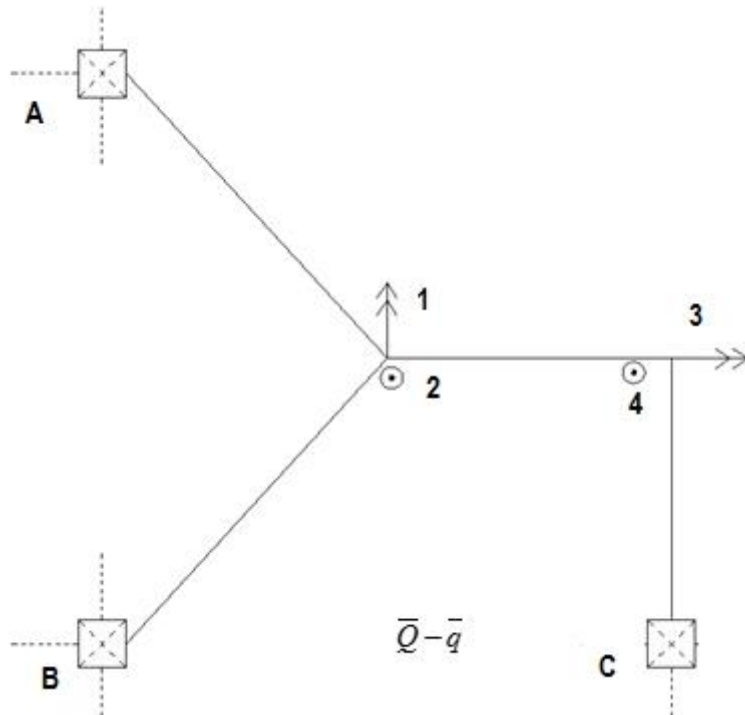


Figura 18.6 Malla espacial con elementos torsionalmente rígido y transversalmente rígido.

• SOLUCIÓN

El nudo C admite giro con respecto a un eje en sentido X. Se tiene tres grados de libertad por nudo interior más la rotación de C, lo que da 7 grados de libertad; ahora bien el elemento  $l = \infty$ , disminuye 2 grados de libertad y el  $j = \infty$ , un grado de libertad. Por lo tanto el sistema tiene 4 grados de libertad que son los indicados a la izquierda de la figura 18.7. Se destaca que el giro 4 en el nudo C es igual al giro a flexión del nudo E por que el elemento es  $l = \infty$ .

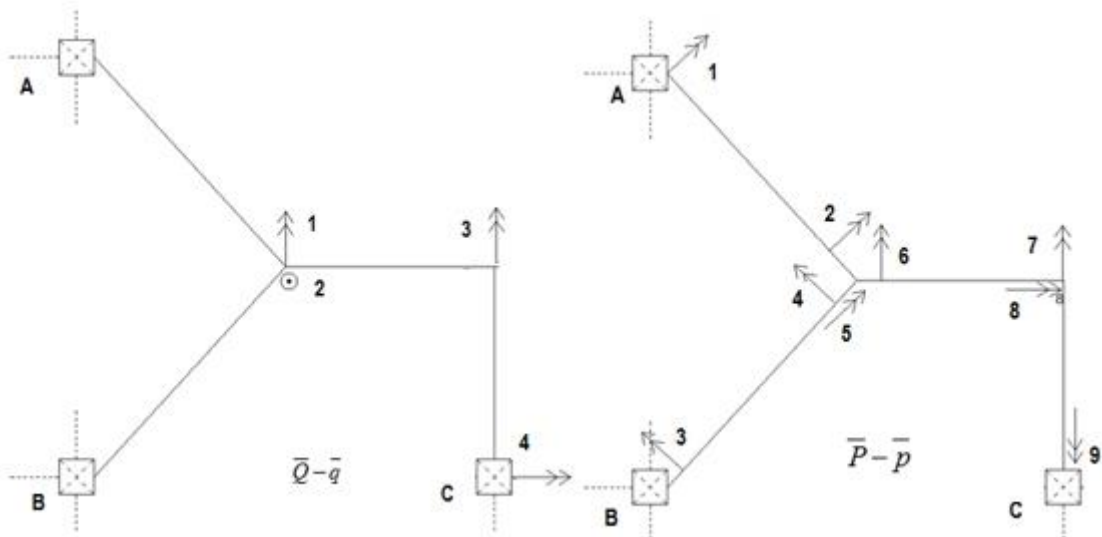
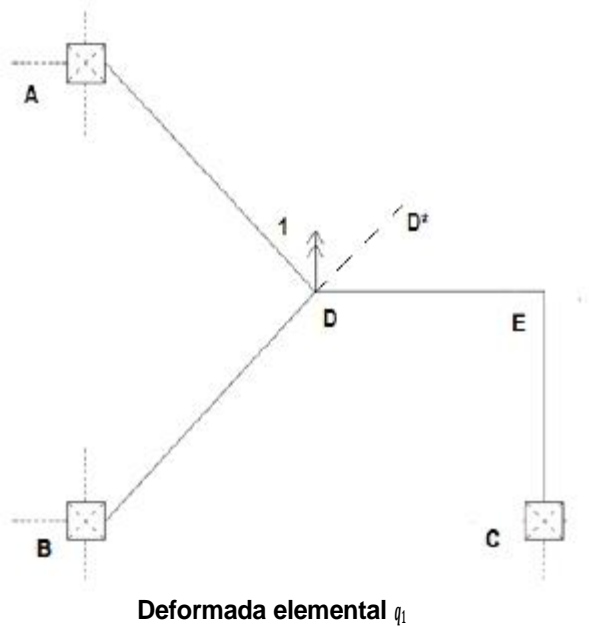


Figura 18.7 Sistemas de coordenadas de la estructura  $Q - q$ , y de elementos  $P - p$

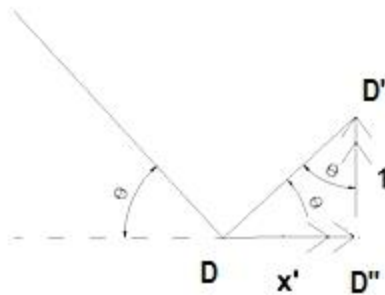
A la derecha de la figura 18.7 se tiene el sistema de coordenadas  $P - p$ . En el elemento  $j = \infty$  solo existen las deformaciones a flexión, mientras que en el elemento  $l = \infty$  solo hay la deformación a torsión.

• Primera columna de la matriz A

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 1$$

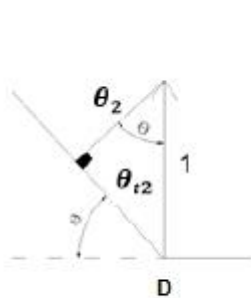


La posición final del nudo D, debe encontrarse en una perpendicular que pasa por el nudo D, ya que el elemento AD es torsionalmente rígido. La recta DD\* es perpendicular al eje AD, a lo largo de esta recta se encuentra D' posición final de D. Para que eso suceda se debe existir un giro en sentido X, y esto es factible porque no existe coordenada en ese sentido. Sea  $\chi'$  este giro como se observa en la siguiente figura. Por la geometría de la malla  $\theta = 45^\circ$ . Por lo tanto  $\chi' = 1$

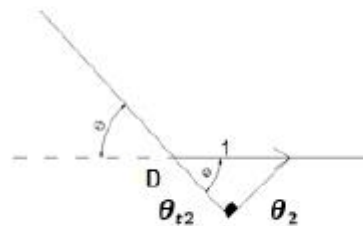


En consecuencia en el nudo D se tienen dos giros unitarios en las direcciones X, Y. Ahora en base a estos giros se calcula las deformaciones en los elementos AD y BD. Para que sea más fácil su explicación se lo realiza por separado y luego se aplica el principio de superposición.

**Elemento AD**



$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\theta_{t2}}{1} \\ \theta_{t2} &= -\frac{3}{\sqrt{18}} \\ \text{Sen}\theta &= \frac{\theta_2}{1} \\ \theta_2 &= -\frac{3}{\sqrt{18}} \end{aligned}$$

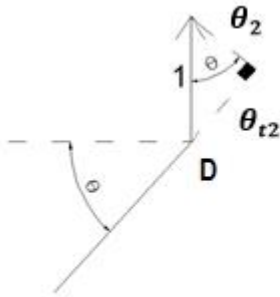


$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\theta_{t2}}{1} \\ \theta_{t2} &= \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \text{Sen}\theta &= \frac{\theta_2}{1} \\ \theta_2 &= \frac{3}{\sqrt{18}} \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

$$p_1 = 0 \quad p_2 = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

**Elemento BD**

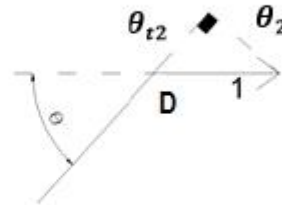


$$\cos\theta = \frac{\theta_2}{1}$$

$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\sin\theta = \frac{\theta_{t2}}{1}$$

$$\theta_{t2} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$



$$\cos\theta = \frac{\theta_{t2}}{1}$$

$$\theta_{t2} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\sin\theta = \frac{\theta_2}{1}$$

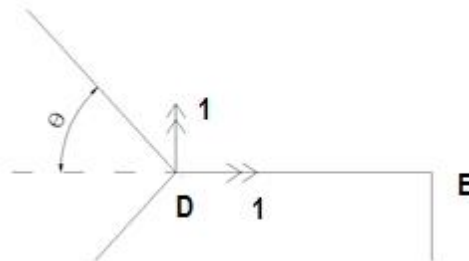
$$\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$p_2 = \frac{3}{\sqrt{18}} - \frac{3}{\sqrt{18}} = 0$$

$$p_2 = \frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

$$p_3 = 0 \quad p_4 = 0 \quad p_5 = \frac{6}{\sqrt{18}}$$

**Elemento DE**



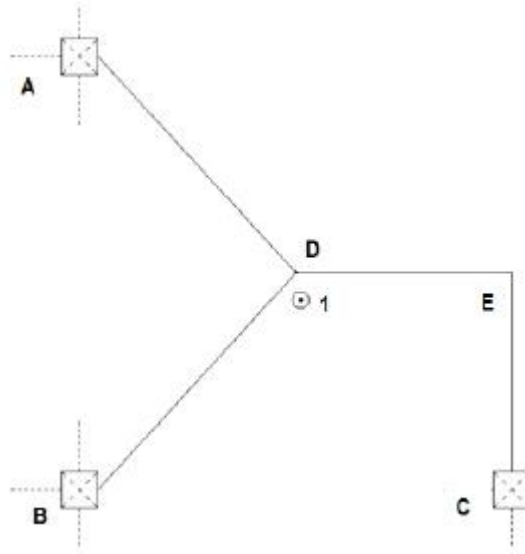
$$p_6 = 1 \quad p_7 = 0 \quad p_8 = -1$$

**Elemento EC**

$$p_9 = 0$$

- Segunda columna de la matriz  $A$

$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 2$$

Deformada elemental  $q_2$ 

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} = p_2$$

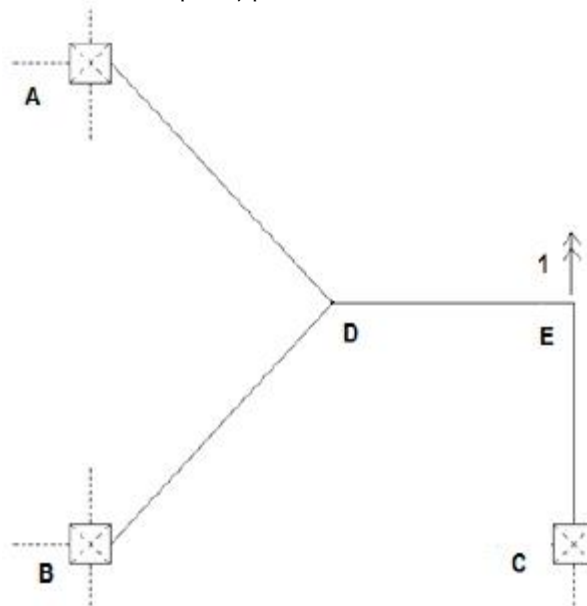
$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} = p_4 \quad p_5 = 0$$

$$p_6 = -\frac{1}{3} = p_7 \quad p_8 = 0$$

$$p_9 = 0$$

- Tercera columna de la matriz  $A$

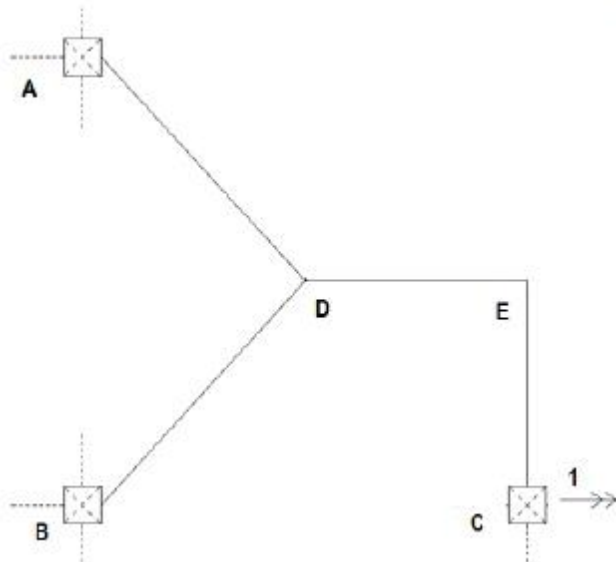
$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 3$$

Deformada elemental  $q_3$

$$\begin{aligned}
 p_1 = 0 & \quad p_2 = 0 & \quad p_3 = 0 & \quad p_4 = 0 & \quad p_5 = 0 \\
 p_6 = 0 & \quad p_7 = 1 & \quad p_8 = 0 & \quad p_9 = 1
 \end{aligned}$$

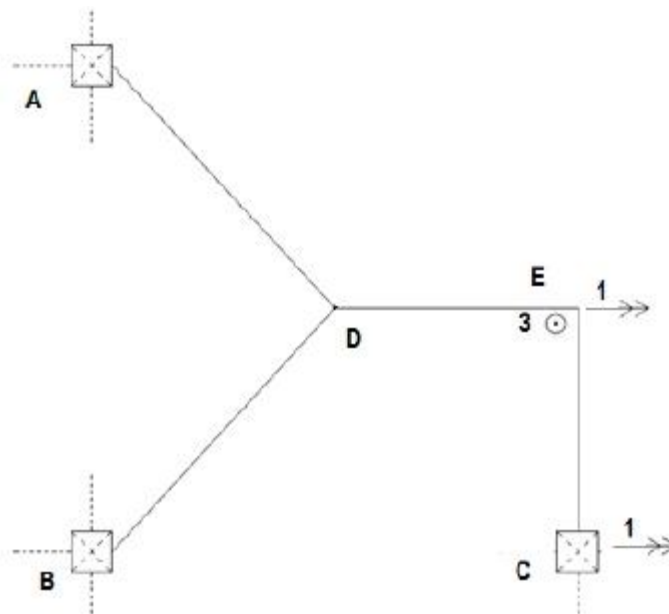
• Cuarta columna de la matriz A

$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 4$$



Deformada elemental  $q_4$

Al rotar el nudo C la unidad, por ser el elemento CE transversalmente rígido, el nudo E también gira la unidad y sube 3 m. (arco para radio igual ángulo) De tal manera que se tiene.



$$\begin{aligned}
 p_1 = 0 & \quad p_2 = 0 & \quad p_3 = 0 & \quad p_4 = 0 & \quad p_5 = 0 \\
 p_6 = \frac{3}{3} & \quad p_7 = \frac{3}{3} & \quad p_8 = 1 & \quad p_9 = 0
 \end{aligned}$$

Las deformaciones a flexión del elemento DE son debidas a que el nudo E sube 3.

- Matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 6 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{18}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{1} & \frac{1}{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} A(1) \\ \\ \\ A(2) \\ \\ \\ A(3) \\ A(4) \end{matrix}$$

### 18.2.2 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez de una estructura  $K$  se halla con la siguiente ecuación.

$$K = \sum_{i=1}^n A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$$

Donde  $A^{(i)}$  es la matriz de compatibilidad del elemento  $i$ ;  $k^{(i)}$  es la matriz de rigidez del elemento  $i$ ;  $n$  es el número de elementos de la estructura.

- EJEMPLO 3

Encontrar la matriz de rigidez de la malla espacial indicada en la figura 18.8. La matriz de compatibilidad de deformación se encontró en el Ejemplo 1. Considerar  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$

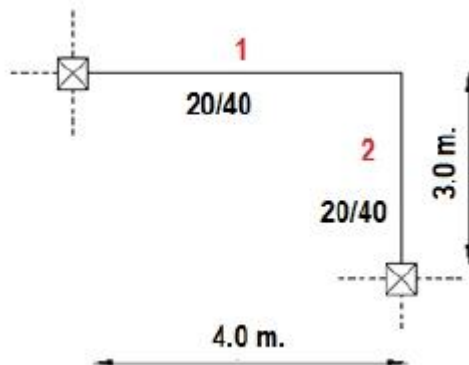


Figura 18.8 Malla Espacial de Ejemplo 3

- SOLUCIÓN

- Matrices de rigidez de los Elementos

$$k_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2560 & 1280 & 0 \\ 1280 & 2560 & 0 \\ 0 & 0 & 175.8 \end{bmatrix}$$

$$k_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 3413.3 & 1706.7 & 0 \\ 1706.7 & 3413.3 & 0 \\ 0 & 0 & 234.4 \end{bmatrix}$$





• **SOLUCIÓN**

La malla espacial tiene 6 grados de libertad, los mismos que se indican en la figura 18.10.

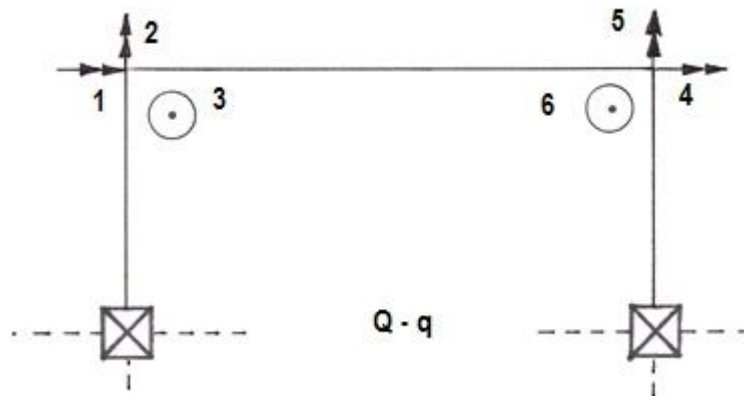
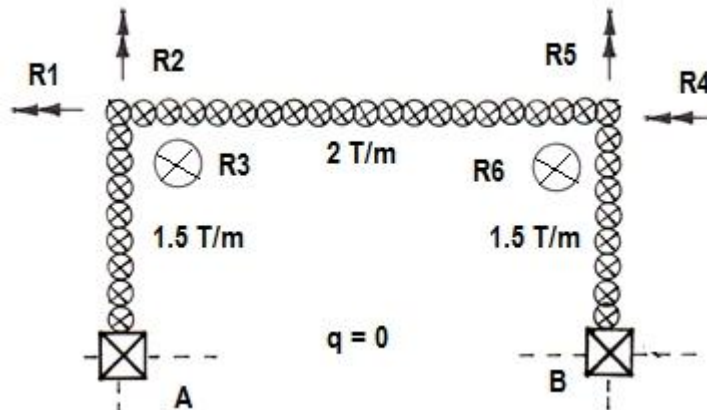


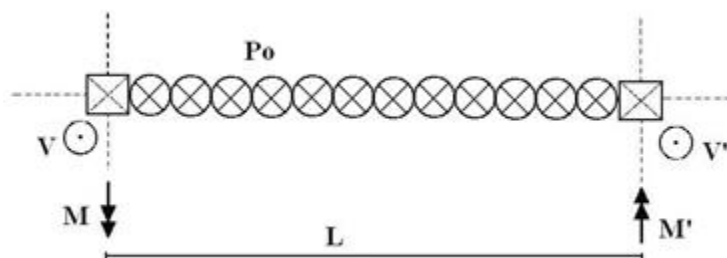
Figura 18.10 Coordenadas Generalizadas.

• **Problema Primario**



• **Equilibrio de elementos**

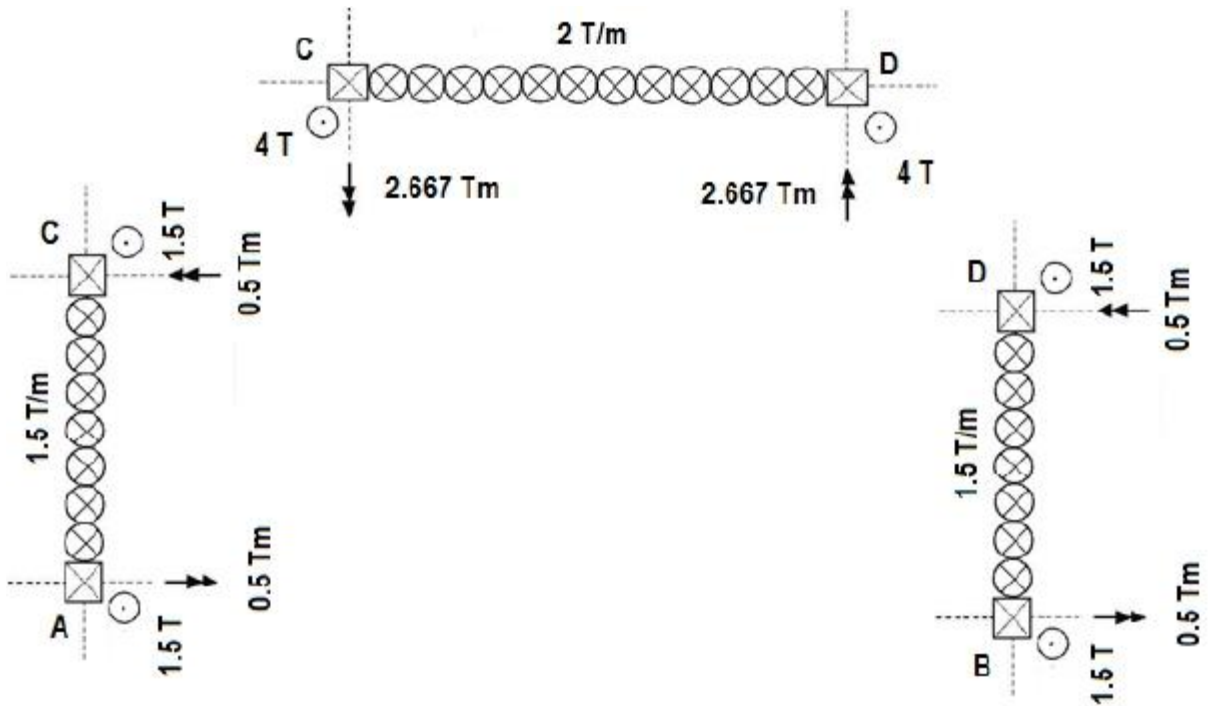
Para un elemento de sección constante las acciones de empotramiento perfecto ante una carga uniforme distribuida son.



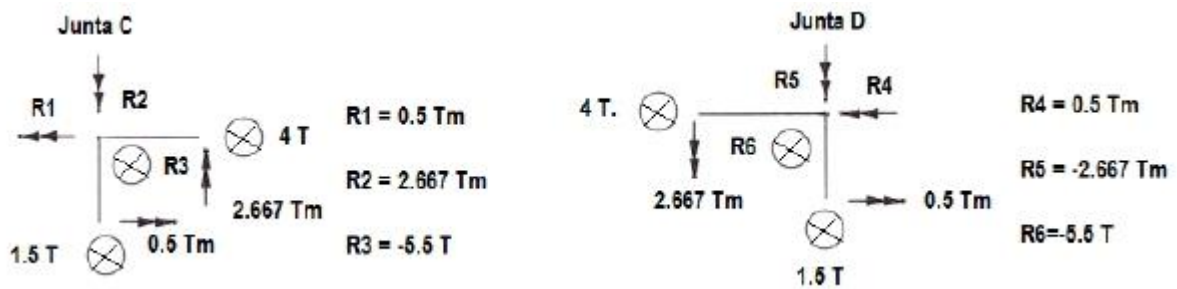
Acciones de empotramiento perfecto.

$$M = M' = -\frac{P_o L^2}{12}$$

$$V = V' = \frac{P_o L}{2}$$



Equilibrio de Elementos



Equilibrio de Nudos

• Problema Complementario

$$q = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.667 \\ -5.5 \\ 0.5 \\ -2.667 \\ -5.5 \end{bmatrix}$$

18.2.4 Método de los desplazamientos

Con el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura y el vector de cargas generalizadas, el lector se habrá podido dar cuenta que la base teórica es la misma lo que cambia son las aplicaciones al nuevo tipo de estructura; por esto es muy empleado el Método de los Desplazamientos ya que su formulación es muy general, con el desarrollo del siguiente ejemplo se aspira aclarar cualquier inquietud que se tenga al respecto.

- **EJEMPLO 5**

Resolver completamente, la malla espacial de la figura 18.11, si sus elementos son completamente flexibles y sobre ella actúa un momento vertical de  $4 \text{ Tm.}$ , en la parte central del elemento AD y una carga uniforme distribuida de  $2 \text{ Tm}$  sobre el elemento DE. Todas las vigas son de  $30/30 \text{ cm.}$ ; el módulo de elasticidad del hormigón  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ . Considerar  $G = 0.4 E$ .

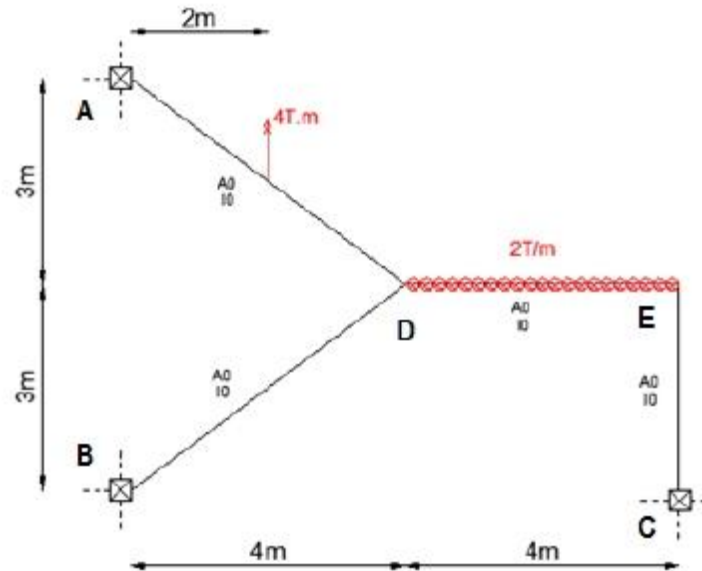


Figura 18.11 Malla Espacial de Ejemplo 5

- **SOLUCIÓN**

La estructura tiene 6 grados de libertad y son los indicados a la izquierda de la figura 8.12. A la derecha de la misma gráfica se presenta el sistema de coordenadas  $P - p$ , para el modelo que se está estudiando.

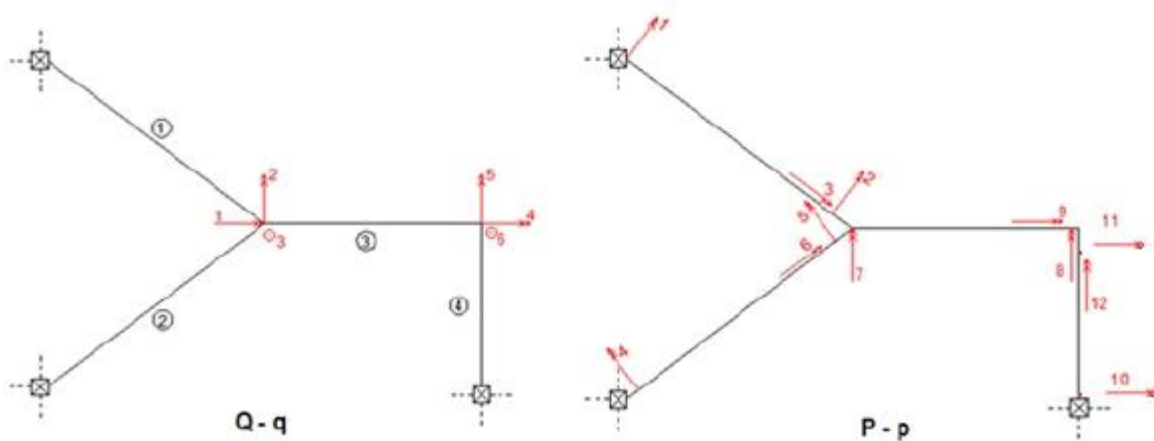


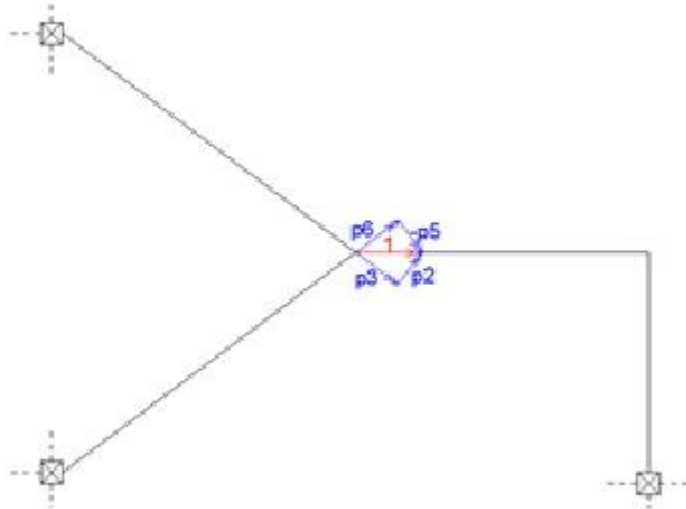
Figura 18.12 Sistema de coordenadas de la estructura  $Q-q$  y de los elementos  $P-p$

- **Matriz de compatibilidad de deformaciones**

Para encontrar la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ , se construyen las deformadas elementales en el sistema  $q$  y se miden las deformaciones  $p$ .

- Primera columna de la matriz  $A$

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 1$$



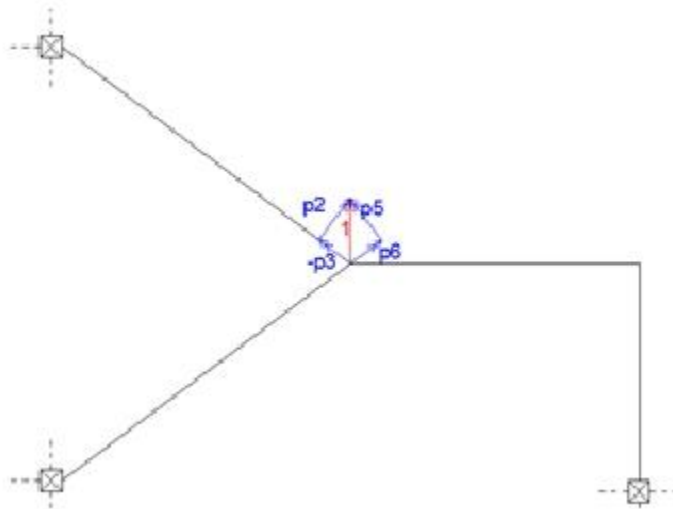
Deformada elemental  $q_1$

El giro unitario en sentido X, se descompone de acuerdo a cada uno de los elementos en uno axial y en otro transversal.

$p_1=0$	$p_4=0$	$p_7=0$	$p_{10}=0$
$p_2=3/5$	$p_5=-3/5$	$p_8=0$	$p_{11}=0$
$p_3=4/5$	$p_6=4/5$	$p_9=-1$	$p_{12}=0$

- Segunda columna de la matriz  $A$

$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 2$$



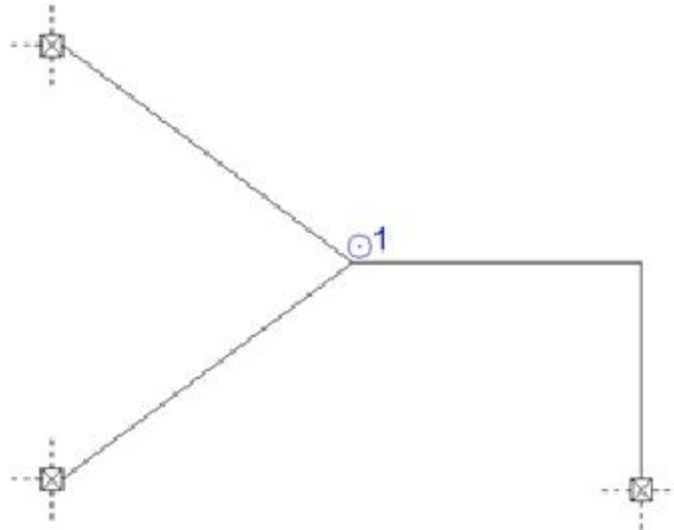
Deformada elemental  $q_2$

Se procede de igual manera a la primera deformada elemental, descomponiendo el giro en sentido Y. Las deformaciones  $p$  que se obtienen, son.

$p_1=0$	$p_4=0$	$p_7=1$	$p_{10}=0$
$p_2=4/5$	$p_5=4/5$	$p_8=0$	$p_{11}=0$
$p_3=-3/5$	$p_6=3/5$	$p_9=0$	$p_{12}=0$

• Tercera columna de la matriz A

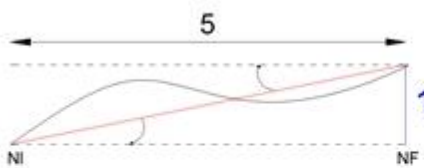
$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 3$$



Deformada elemental  $q_3$

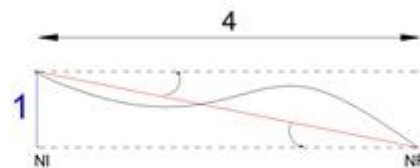
La longitud de los elementos inclinados en el plano horizontal es de 5 m., y del elemento en sentido X es 4 m. Para calcular las deformaciones a flexión se encuentra el ángulo que se forma desde la cuerda a la tangente considerando que el giro si es horario es positivo.

Deformada para elementos 1 y 2



$p_1=1/5$	$p_4=1/5$
$p_2=1/5$	$p_5=1/5$
$p_3=0$	$p_6=0$

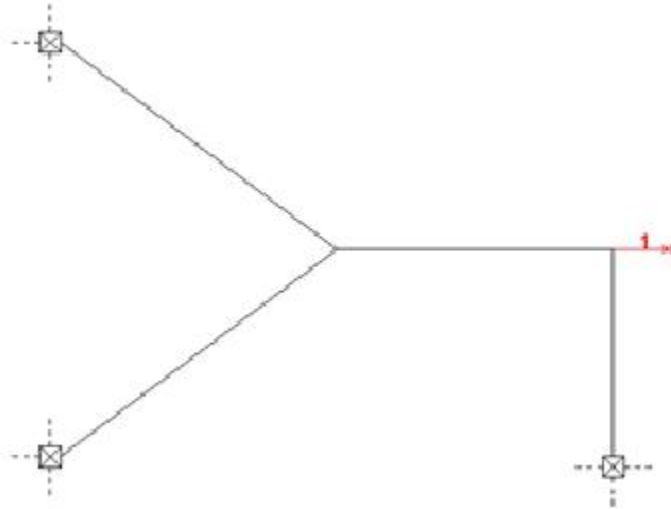
Deformada para elemento 3



$p_7=-1/4$	$p_{10}=0$
$p_8=-1/4$	$p_{11}=0$
$p_9=0$	$p_{12}=0$

- Cuarta columna de la matriz  $A$

$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 4$$



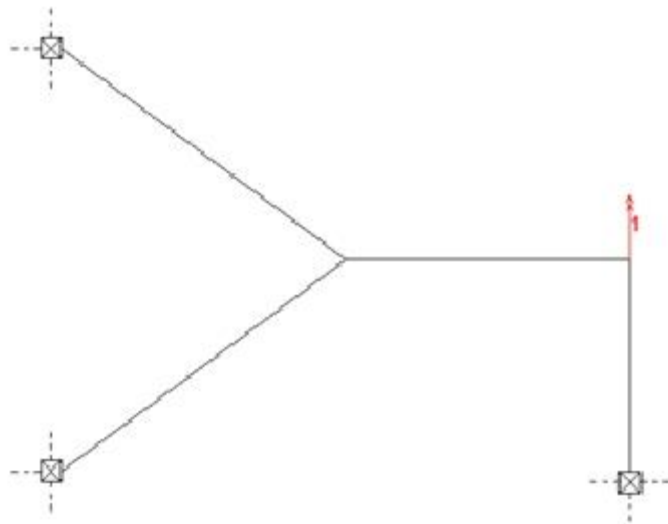
Deformada elemental  $q_4$

$p_1=0$	$p_4=0$	$p_7=0$	$p_{10}=0$
$p_2=0$	$p_5=0$	$p_8=0$	$p_{11}=1$
$p_3=0$	$p_6=0$	$p_9=1$	$p_{12}=0$

Nótese que  $p_{11}$  es positivo ya que está rotando en forma horaria.

- Quinta columna de la matriz  $A$

$$q_5 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 5$$

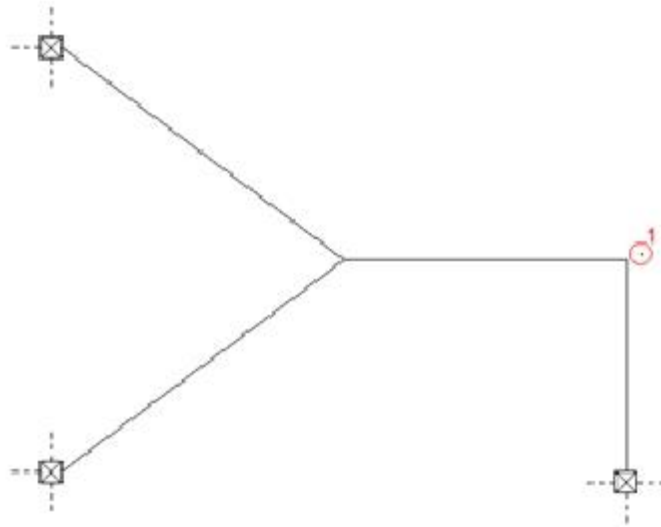


Deformada elemental  $q_5$

$p_1=0$	$p_4=0$	$p_7=0$	$p_{10}=0$
$p_2=0$	$p_5=0$	$p_8=1$	$p_{11}=0$
$p_3=0$	$p_6=0$	$p_9=0$	$p_{12}=1$

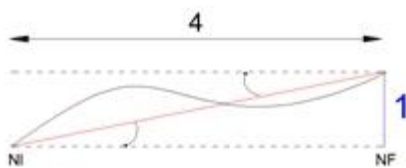
- Sexta columna de la matriz  $A$

$$q_6 = 1 \text{ y } q_i = 0; i \neq 6$$



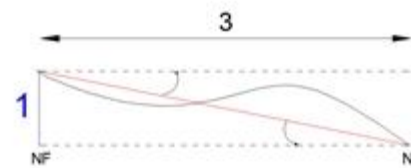
Deformada elemental  $q_6$

Deformada para elemento 3



$p_1=0$	$p_4=0$
$p_2=0$	$p_5=0$
$p_3=0$	$p_6=0$

Deformada para el elemento 4



$p_7=1/4$	$p_{10}=-1/3$
$p_8=1/4$	$p_{11}=-1/3$
$p_9=0$	$p_{12}=0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1 & 1/4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} A^{(1)}$   
 $\left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right\} A^{(2)}$   
 $\left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right\} A^{(3)}$   
 $\left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right\} A^{(4)}$

- Matriz de rigidez de elemento considerando efecto de corte

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI(1-2\nu)}{L} & 0 \\ \frac{2EI(1-2\nu)}{L} & \frac{2EI(1+\nu)}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Tabla 18.1 Descripción de los elementos de Ejemplo 5.

Elemento	b	h	A=b.h	I=b.h <sup>3</sup> /12	β	J=βhb <sup>3</sup>
	[m]	[m]	[m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]		
1	0.30	0.30	0.09	0.00068	0.1408	0.0011
2	0.30	0.30	0.09	0.00068	0.1408	0.0011
3	0.30	0.30	0.09	0.00068	0.1408	0.0011
4	0.30	0.30	0.09	0.00068	0.1408	0.0011

$$k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1285.6 & 637.6 & 0 \\ 637.6 & 1285.6 & 0 \\ 0 & 0 & 219 \end{bmatrix}$$

$$k_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1599.8 & 789.8 & 0 \\ 789.8 & 1599.8 & 0 \\ 0 & 0 & 273.8 \end{bmatrix}$$

$$k_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 2112.8 & 1032.8 & 0 \\ 1032.8 & 2112.8 & 0 \\ 0 & 0 & 365 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez de la estructura

$$K = A^{(1)T} k_1^{(1)} A^{(1)} + A^{(2)T} k_1^{(2)} A^{(2)} + A^{(3)T} k_1^{(3)} A^{(3)} + A^{(4)T} k_1^{(4)} A^{(4)} \quad (4)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1479.8 & 0 & 0 & -273.8 & 0 & 0 \\ 0 & 3403.1 & 18 & 0 & 789.8 & 597.4 \\ 0 & 18 & 606.4 & 0 & -597.4 & -298.7 \\ -273.8 & 0 & 0 & 2386.6 & 0 & -1048.5 \\ 0 & 789.8 & -597.4 & 0 & 1964.9 & 597.4 \\ 0 & 597.4 & -298.7 & -1048.5 & 597.4 & 997.7 \end{bmatrix}$$

- Vector de cargas generalizadas

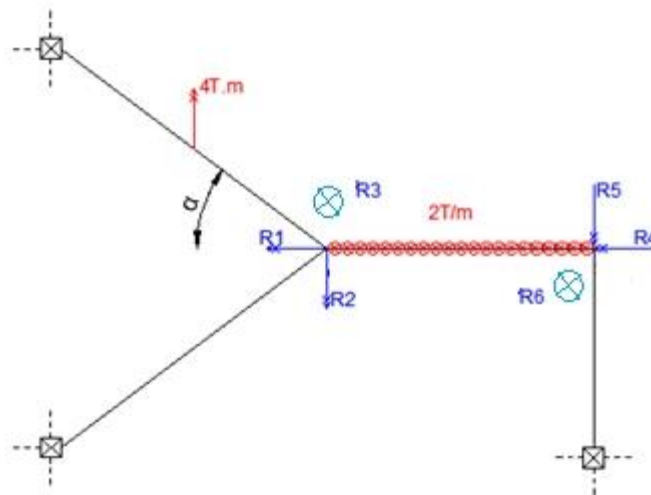
El momento de 4 Tm, debe descomponerse en un perpendicular al eje del elemento y en un axial al eje del elemento.



$$M_x = 4 * \text{Sen } \alpha = 4 * \frac{3}{5} = 2.4 \text{ T.m}$$

$$M_y = 4 * \text{Cos } \alpha = 4 * \frac{4}{5} = 3.2 \text{ T.m}$$





**Problema Primario**

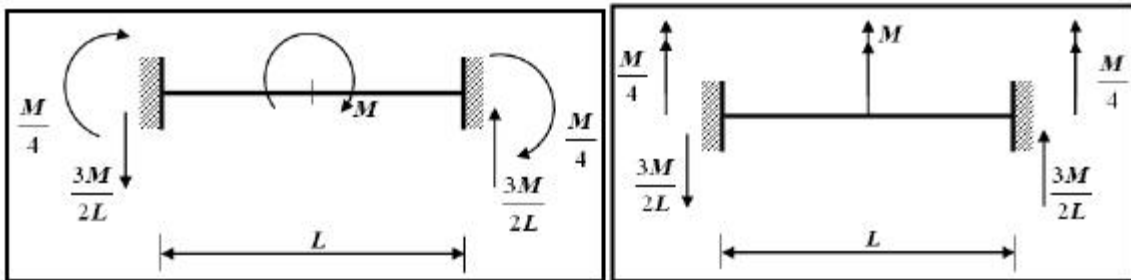
Para hallar las acciones de empotramiento perfecto que produce el momento  $M$ , se recuerda las fórmulas de cálculo que fueron presentadas en el Capítulo 3. Se destaca que primero se deben derivar las funciones de forma y encontrar su valor en el punto de aplicación del momento que es perpendicular al eje del elemento.

$$V = M \phi_2'(x) = -\frac{3M}{2L}$$

$$M = M\phi_3'(x) = -\frac{M}{4}$$

$$V' = M\phi_5'(x) = \frac{3M}{2L}$$

$$M' = M\phi_6'(x) = -\frac{M}{4}$$



**Acciones de empotramiento perfecto para momento actuando en la mitad**

Al remplazar valores se tiene:



**Acciones de empotramiento perfecto para un momento de 3.2 Tm.**

Para el momento de torsión se debe calcular con las siguientes ecuaciones.

$$MT = \Phi_1(x) * M_x = 0.5 * M_x = 1.2$$

$$MT' = \Phi_4(x) * M_x = 0.5 * M_x = 1.2$$



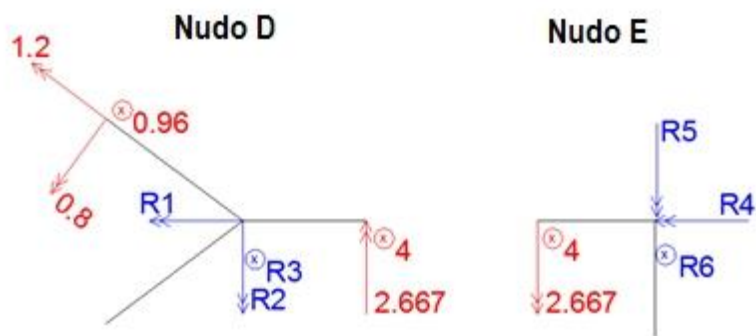
**Acciones de empotramiento para momento de torsión de 2.4 Tm**

Para carga uniforme distribuida, se deja al estudiante la deducción de los siguientes valores.



**Acciones de empotramiento perfecto para carga uniforme distribuida.**

- Equilibrio de nudos



**Nudo D**

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow 1.2 \cos \alpha + 0.8 \sin \alpha + R_1 = 0 \quad \rightarrow 0.96 + 0.48 + R_1 = 0 \quad \rightarrow R_1 = -1.44 \text{ Tm}$$

$$\sum M_y = 0 \quad \rightarrow 1.2 \sin \alpha - 0.8 \cos \alpha - R_2 + 2.667 = 0 \quad \rightarrow 0.72 - 0.64 - R_2 + 2.667 = 0$$

$$\rightarrow R_2 = 2.75 \text{ Tm}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow 0.96 + R_3 + 4 = 0 \quad \rightarrow R_3 = -4.96 \text{ T}$$

**Nudo E**

$$\sum M_x = 0 \quad \rightarrow R_4 = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad \rightarrow R_5 = -2.667$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow R_6 = -4$$

- Vector de cargas  $Q$

$$Q^i = [-1.44 \quad 2.75 \quad -4.96 \quad 0 \quad -2.667 \quad -4]$$

- Vector de coordenadas  $q$

$$K q = Q$$

$$q^i = [-0.0030 \quad 0.0060 \quad -0.0238 \quad -0.0108 \quad -0.0038 \quad -0.0238]$$

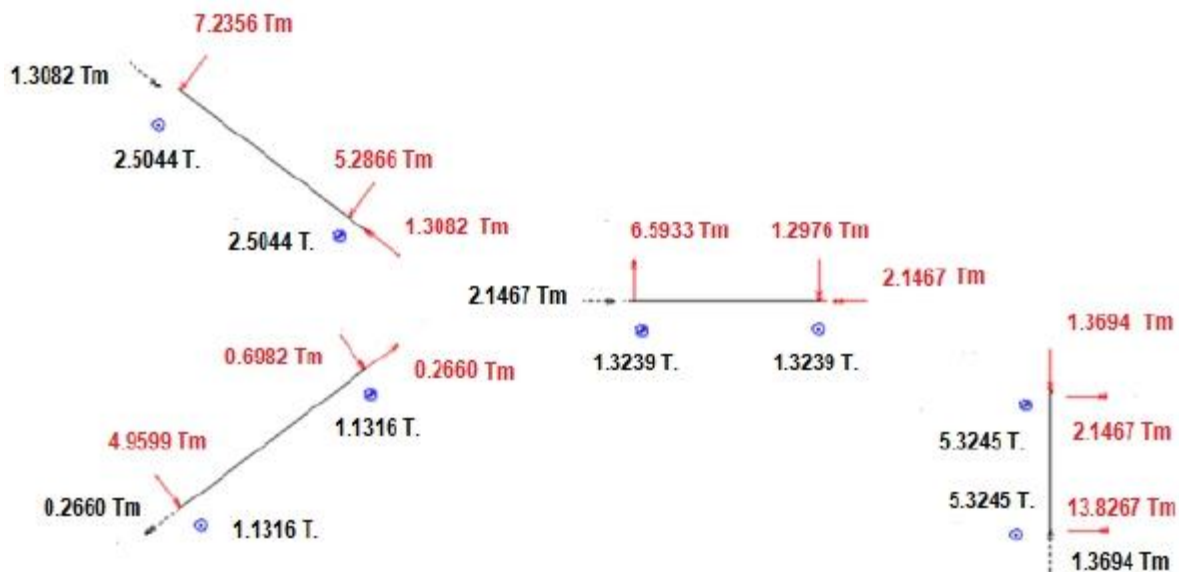
- Vector de deformaciones y cargas en los elementos

En la segunda columna de la tabla 18.2 se presenta el cálculo de las deformaciones de los elementos para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de cada elemento por el vector de coordenadas generalizadas. En la tercera columna se indica las cargas en los elementos que se halla multiplicando la rigidez del elemento por el vector de deformaciones, se obtiene el momento a flexión en nudo inicial, el momento a flexión en nudo final y el momento de torsión en el nudo final.

Tabla 18.2 Deformaciones y fuerzas en los elementos

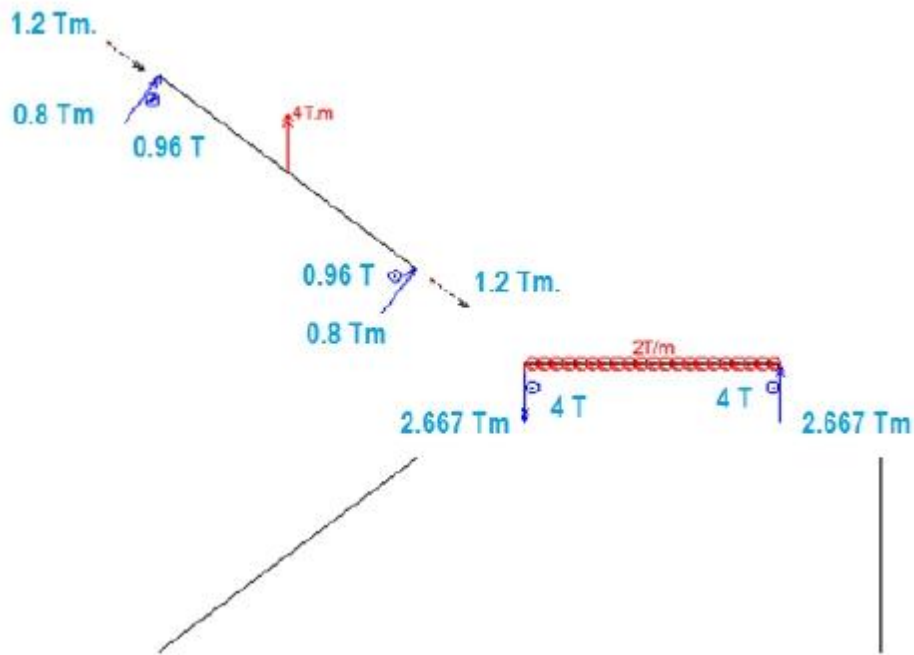
Elemento	Deformaciones	Cargas
	$p^{(i)} = A^{(i)} q$	$P^{(i)} = k^{(i)} p^{(i)}$
1	-0.0048 $p^{(1)} = [-0.0018]$ -0.0060 -0.0048	-7.2356 $P^{(1)} = [-5.2866]$ -1.3082 -4.9599
2	$p^{(2)} = [0.0018]$ 0.0012 0.0060	$P^{(2)} = [-0.6982]$ 0.2660 6.5933
3	$p^{(3)} = [-0.0038]$ -0.0078 0.0079	$P^{(3)} = [-1.2976]$ -2.1467 13.8267
4	$p^{(4)} = [-0.0029]$ -0.0038	$P^{(4)} = [2.1467]$ -1.3694

A continuación se indican los momentos encontrados en cada uno de los elementos, de acuerdo al sistema  $P - p$  mostrado en la figura 18.12. Con estos valores se realiza el equilibrio en cada elemento, con los momentos de flexión se encuentran los cortantes por equilibrio.



Solución del Problema Complementario

La solución total es igual a la suma del Problema Primario más el Problema Complementario. El Problema Primario son las acciones de empotramiento perfecto que se indica a continuación.



Problema Primario

La suma algebraica del Problema Primario más el Problema Complementario se indica a continuación. Se deja al lector la comprobación del equilibrio de los nudos.

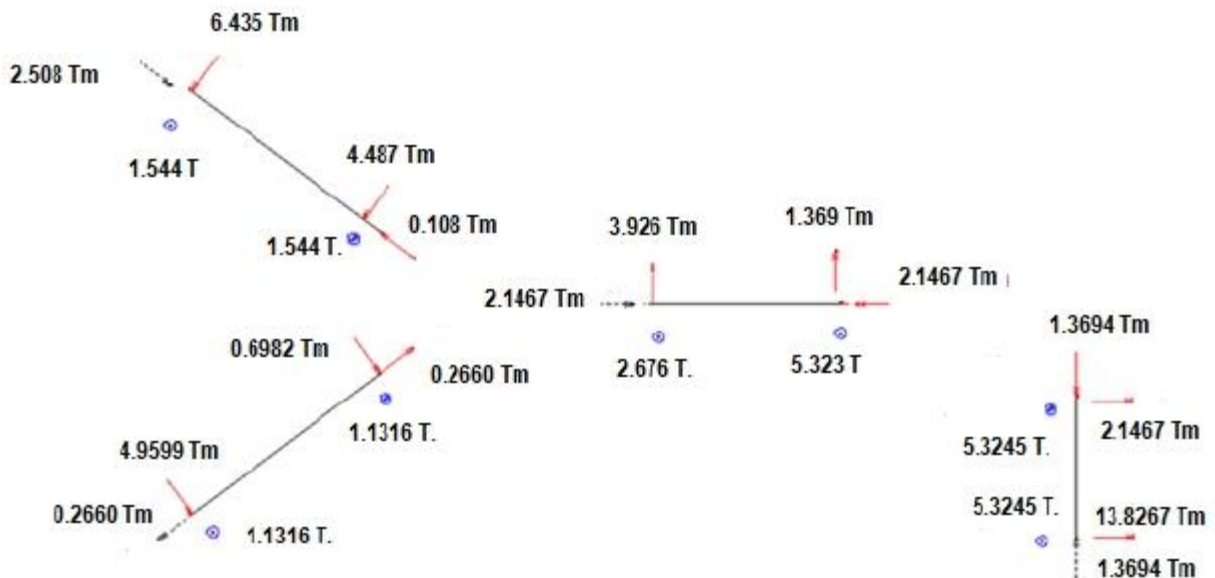


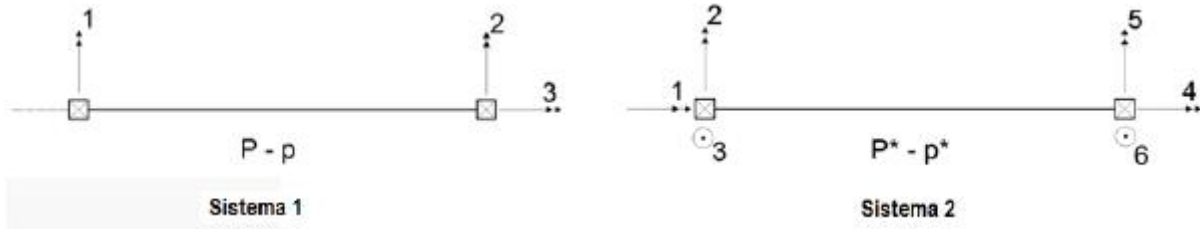
Figura 18.13 Solución Final

### 18.3 MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES

Para poder aplicar el ensamblaje directo de la matriz de rigidez, se debe encontrar la matriz de rigidez de un elemento de la malla espacial, en coordenadas locales y en coordenadas globales. Esto se lo obtiene con las matrices de paso  $T_{1-2}$  y  $T_{2-3}$ , igual que en pórticos planos y armaduras planas.

**18.3.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales**

A la izquierda de la figura 18.14 se presenta el sistema 1, con el cual se trabajó en el apartado anterior; en este sistema no se consideran los desplazamientos como cuerpo rígido. A la derecha se indica el sistema 2 que corresponde a las Coordenadas locales. Únicamente por didáctica se han llamado sistemas  $P - p$  a las coordenadas del sistema 1 y  $P^* - p^*$  a las coordenadas locales.



**Figura 18.14** Sistemas 1 y 2 para un elemento de una malla espacial.

No está por demás indicar que  $p_{1*}$  es el momento de torsión en el nudo inicial, positivo si es horario;  $p_{2*}$  es el momento de flexión en el nudo inicial, positivo si es horario;  $p_{3*}$  es el cortante en el nudo inicial, positivo si va hacia arriba;  $p_{4*}, p_{5*}, p_{6*}$  similar pero en el nudo final.

Se define la matriz de paso del sistema 1 al sistema 2, de la siguiente manera.

$$p = T_{1-2} p^*$$

Se deja al lector que deduzca la matriz de paso, que resulta.

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 1 & \frac{1}{L} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea  $k_2$  la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales, la misma que se halla con la siguiente ecuación.

$$k_2 = T_{1-2}^{-1} k_1 T_{1-2}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{18.4}$$

El significado de las variables ha sido ya definido. Se destaca que no se considera el efecto de corte en la ecuación (18.4).

**18.3.2 Matriz de rigidez en coordenadas globales**

Para un elemento en sentido X, como el mostrado a la derecha de la figura 18.14, las coordenadas locales y globales son iguales; para un elemento inclinado, en el plano horizontal, como

el presentado en la figura 18.15 ya son diferentes.

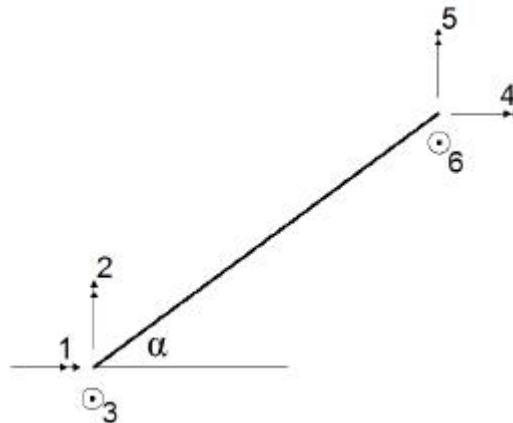


Figura 18.15 Coordenadas globales para un elemento inclinado en el plano horizontal.

Se deja al lector la deducción de la matriz de paso de coordenadas locales a globales, que es la siguiente.

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ [ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix}$$

Sea  $k_3$  la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, que se encuentra con la siguiente ecuación.

$$k_3 = T_{2-3}^T k_2 T_{2-3}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} Cx^2 + \frac{4EI}{L} Cy^2 & ( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} ) CxCy & \frac{6EI}{L^2} Cy & - \frac{GJ}{L} Cx^2 + \frac{4EI}{L} Cy^2 & - \frac{GJ}{L} Cy & - \frac{6EI}{L^2} Cy \\ ( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} ) CxCy & \frac{GJ}{L} Cy^2 + \frac{4EI}{L} Cx^2 & - \frac{6EI}{L^2} Cx^2 & - ( \frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} ) CxCy & - \frac{GJ}{L} Cy^2 + \frac{2EI}{L} Cx^2 & \frac{6EI}{L^2} Cx \\ \frac{6EI}{L^2} Cy & - \frac{6EI}{L^2} Cx^2 & \frac{1EI}{2} & \frac{EI}{L} & \frac{6EI}{L^3 L^2} & \frac{EI}{L^2 - Cx} \\ - \frac{GJ}{L} Cx^2 + \frac{4EI}{L} Cy^2 & - ( \frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} ) CxCy & \frac{EI}{L} & \frac{GJ}{L} & ( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} ) CxCy & - \frac{4EI}{L} \frac{6EI}{L} \\ & & & & & & & Cx^2 \\ & & & & & & & + \frac{6}{L} \\ & & & & & & & Cy^2 \end{bmatrix}$$

—  $12EI$

$$\begin{bmatrix}
 L^3 & & & & & \\
 & L^3 & & & & \\
 & & L^3 & & & \\
 & & & L^3 & & \\
 & & & & L^3 & \\
 & & & & & L^3
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_y \\
 C_x \\
 C_y \\
 C_x \\
 C_y \\
 C_x
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{6EI}{L^3} C_y \\
 \frac{6EI}{L^3} C_x \\
 \frac{6EI}{L^3} C_y \\
 \frac{6EI}{L^3} C_x \\
 \frac{6EI}{L^3} C_y \\
 \frac{6EI}{L^3} C_x
 \end{bmatrix}$$

$$C_x = \cos \alpha \quad C_y = \sin \alpha$$

### 18.4 PROGRAMAS DE CEINCI-LAB PARA MALLAS

Una buena parte de los programas utilizados para resolver Pórticos Planos, se utilizan para resolver Mallas Espaciales. Los nuevos programas que se requieren son.

$$\begin{bmatrix}
 - & \hat{C}_j & - & \hat{C}_j & - & 6EI & \hat{C}_j & - & \hat{C}_j \\
 - & 6EI & - & 6EI & - & 12EI & \hat{C}_j & - & \hat{C}_j
 \end{bmatrix}$$

- **[K3]=kmiembro\_malla(b,h,L,E,seno,coseno)**

Determina la matriz de rigidez de un elemento de una malla espacial en coordenadas globales,  $k_3$  considera el efecto del corte. Los datos de entrada son.

<b>b,h</b>	Son la base y la altura de la sección transversal de un elemento.
<b>L</b>	Longitud del elemento.
<b>E</b>	Es el módulo de elasticidad del material.
<b>seno</b>	Es el seno del ángulo $\alpha$
<b>coseno</b>	Es el coseno del ángulo $\alpha$ .

- **[K]=krigidez\_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E)**

El programa **krigidez\_malla** encuentra la matriz de rigidez de la estructura  $K$ , por ensamblaje directo. Los datos de entrada del programa son los mismos que para pórticos planos. Únicamente para tener completo se vuelve a repetir.

<b>ngl</b>	Número de grados de libertad de la estructura.
<b>ELEM</b>	Matriz que contiene la base y la altura de los elementos de la Malla Espacial.
<b>L</b>	Vector con las longitudes de los elementos de la Malla Espacial.
<b>seno</b>	Vector que contiene los senos del ángulo $\alpha$ de cada elemento de la Malla Espacial.
<b>coseno</b>	Vector que contiene los cosenos del ángulo $\alpha$ de cada elemento de la Malla.
<b>VC</b>	Matriz con los vectores de colocación de cada elemento de la Malla.
<b>E</b>	Módulo de elasticidad del material.

- **[Q,Q2]=cargas\_malla(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)**

El vector de cargas generalizadas  $Q$  se encuentra con el programa **cargas\_malla**, los datos de entrada son:

<b>njc,nmc</b>	Número de nudos y elementos cargados.
<b>ngl,L,seno</b>	Número de grados de libertad; vector con longitudes y vector con seno de $\alpha$ .
<b>coseno</b>	Vector con el coseno de $\alpha$ de todos los elementos de la malla espacial.
<b>CG,VC</b>	Matrices con las coordenadas generalizadas y vectores de colocación.
<b>F</b>	Matriz que contiene el nudo cargado, momento en sentido X, momento en Y, y cortante. Positivos, de acuerdo al sistema de coordenadas generalizadas.
<b>Fm</b>	Matriz que tiene el número del elemento cargado, valor del momento actuante, código de carga, número de elementos con igual carga e incremento en la numeración de los elementos. Si el momento es uniforme distribuido el código es uno, si el usuario va a suministrar las acciones de empotramiento perfecto el código es 4.
<b>datos</b>	solo para código de carga igual a 4; contiene: momento de torsión en el nudo inicial, momento de flexión en nudo inicial, cortante en nudo final, momento de torsión en nudo final, momento de flexión en nudo final y cortante en nudo final.

El programa reporta el vector de cargas  $Q$  y la matriz que contiene las acciones de empotramiento perfecto de los elementos  $Q_2$

- **[FF]=fuerzas\_malla(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)**

Programa para hallar las cargas finales en los elementos en coordenadas locales. La matriz **FF** contiene para cada elemento: momento a torsión, flexión y corte en nudo inicial y final, respectivamente; son 6 cantidades por fila. Los datos de entrada son:

<b>ngl, ELEM</b>	Número de grados de libertad y matriz con la base y altura de las vigas de la malla.
<b>L, seno</b>	Vectores con las longitudes y el valor de seno de $\alpha$ , de cada elemento.
<b>coseno</b>	Vector con el coseno de $\alpha$ de cada elemento.



$VC, E$  Matriz con los vectores de colocación de los elementos y módulo de elasticidad.  
 $q$  Vector de coordenadas generalizadas, contiene giros y desplazamientos verticales.  
 $Q2$  Matriz con las acciones de empotramiento perfecto en coordenadas locales, halladas con el programa *cargas\_malla*.

### • EJEMPLO 6

Presentar un programa de computación para resolver la malla espacial del Ejemplo 5 que se dibuja a continuación; las vigas son de 30/30 cm. El valor de  $E = 24000000 \frac{T}{m^2}$ .

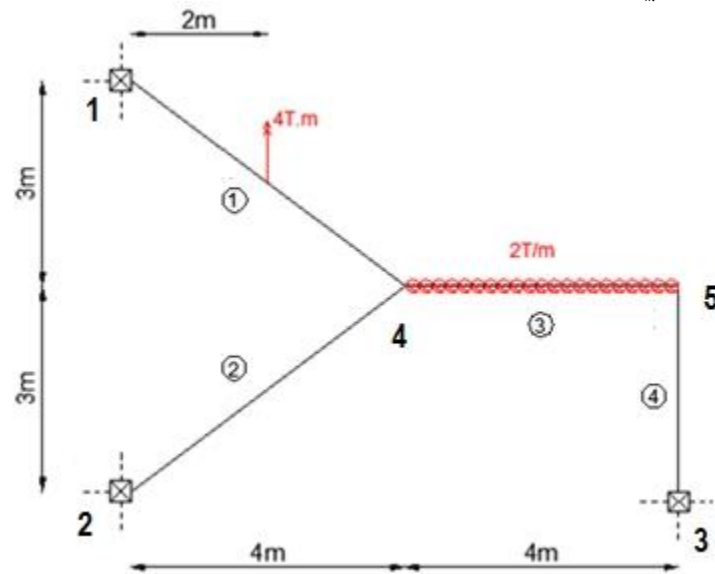


Figura 18.16 Numeración de nudos y elementos de estructura de Ejemplo 6.

### • SOLUCIÓN

```

1      % Programa Ejemp_6 de libro de Capitulo 18
2 -    nod=5;nr=3;RES=[1 1 1 1; 2 1 1 1; 3 1 1 1];
3 -    [CG,ngl]=cg (nod,nr,RES);
4 -    GEN=[1 1 4 0 0 0 0;2 2 4 0 0 0 0;3 4 5 0 0 0 0;4 3 5 0 0 0 0];
5 -    [NI,NJ]=gn_portico(GEN);
6 -    NUDOS=[1 0.0 6.0 0 0 0 0;2 0.00 0.0 1 1 8 0;4 4.0 3.0 1 1 4.0 0];
7 -    [X,Y]=glinea_portico(NUDOS);
8 -    % dibujo(X,Y,NI,NJ);
9 -    SECCION=[1 0.3 0.3 3 1];
10 -   [ELEM]=gelem_portico(SECCION);
11 -   [L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
12 -   [VC]=vc (NI,NJ,CG)
13 -   E=2400000;
14 -   [K]=krigidez_malla (ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E);
15 -   njc=0;F=0;nmc=2;Fm=[3 2 1 0 0;1 2 4 0 0];
16 -   datos=[1.2 0.8 -0.96 1.2 0.8 0.96];
17 -   [Q,Q2]=cargas_malla (njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
18 -   q=K\Q
19 -   [FF]=fuerzas_malla (ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)

```

Los resultados del Ejemplo 6, son los mismos que los del Ejemplo 5. Razón por la cual se copia a continuación únicamente los momentos y fuerzas finales en coordenadas locales que reporta el programa *fuerzas\_malla* esto se presenta en la tabla 18.3, se deja al lector la interpretación.

Tabla 18.3 Momentos y Fuerzas en Coordenadas Locales

Elemento	Nudo Inicial			Nudo Final		
	Momento Torsión (Tm.)	Momento Flexión (Tm.)	Cortante (T.)	Momento Torsión (Tm.)	Momento Flexión (Tm.)	Cortante (T.)
1	2.5080	-6.4352	1.5445	-0.1080	-4.4872	-1.5445
2	-0.2659	-4.9599	1.1319	0.2659	-0.6995	-1.1319
3	2.1463	3.9251	2.6764	-2.1463	1.3694	5.3236
4	1.3694	-13.8246	5.3236	-1.3694	-2.1463	-5.3236

### 18.5 EJEMPLOS COMPLEMENTARIOS

• EJEMPLO 7

Seleccionar sistema de coordenadas  $Q - q$  y sistema de coordenadas  $P - p$ , para el sistema de coordenadas 1, para la malla espacial indicada en la figura 18.17, cuyos elementos son totalmente flexibles y determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ , tal que  $p = A q$

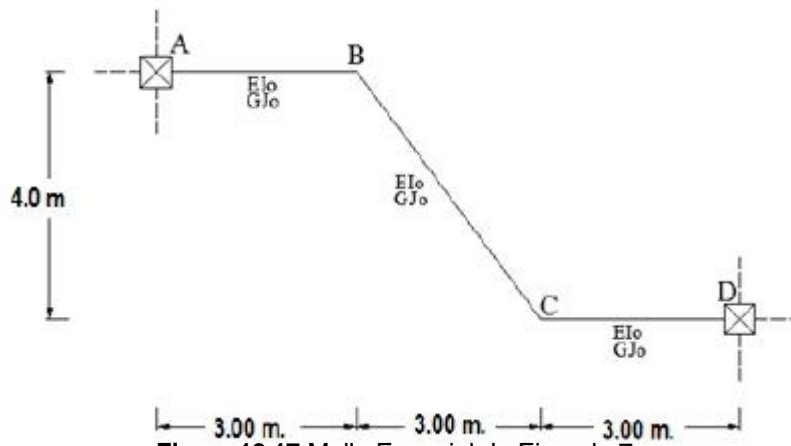


Figura 18.17 Malla Espacial de Ejemplo 7

• SOLUCIÓN

A la izquierda de la figura 18.18 se indican los 6 grados de libertad que tiene la malla y a la derecha se presenta el sistema de coordenadas  $P - p$ , en el sistema 1.

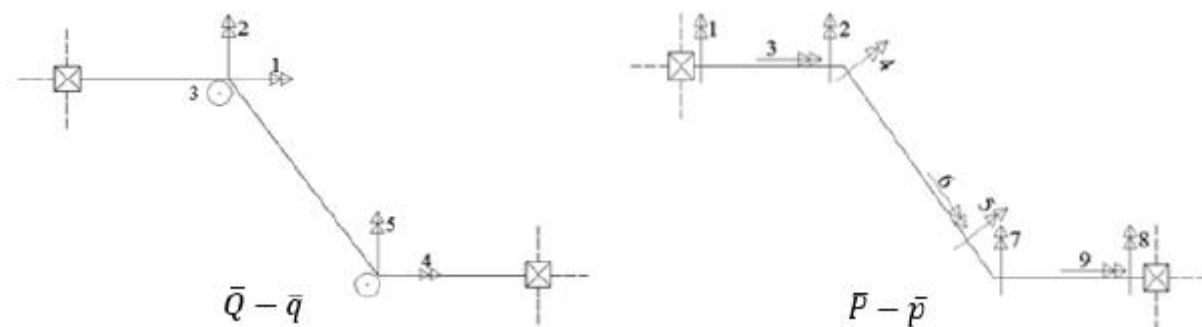


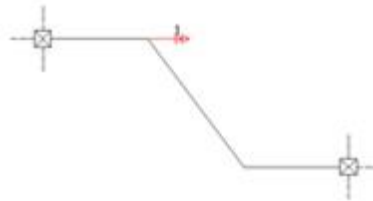
Figura 18.18 Sistema de coordenadas de la estructura y de los elementos

Sea  $\alpha$  el ángulo que forma el elemento inclinado en el nudo C. Tal que

$$\text{sen} \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{cos} \alpha = \frac{3}{5}$$

- Primera columna de matriz  $A$

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 1$$

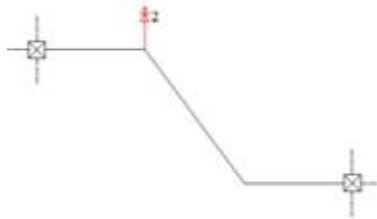
Deformada elemental  $q_1$ 

Para el elemento inclinado, en el plano horizontal se debe descomponer el giro en una componente axial y una transversal.

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 1 \\ p_4 = \frac{4}{5} & p_5 = 0 & p_6 = -3/5 \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- Segunda columna de matriz  $A$

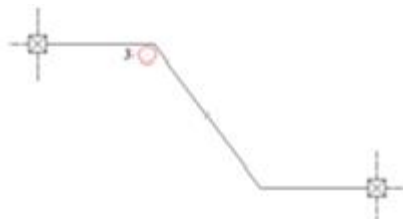
$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 2$$

Deformada elemental  $q_2$ 

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0 & p_2 = 1 & p_3 = 0 \\ p_4 = \frac{3}{5} & p_5 = 0 & p_6 = 4/5 \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- Tercera columna de matriz  $A$

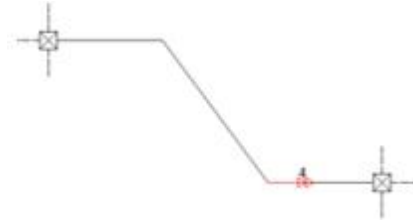
$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 3$$

Deformada elemental  $q_3$ 

$$\begin{array}{lll} p_1 = \frac{1}{3} & p_2 = \frac{1}{3} & p_3 = 0 \\ p_4 = -\frac{1}{5} & p_5 = -\frac{1}{5} & p_6 = 0 \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- Cuarta columna de matriz  $A$

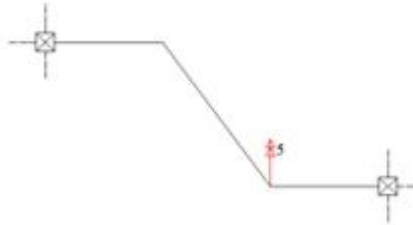
$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 4$$

Deformada elemental  $q_4$ 

$$\begin{array}{ccc} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 \\ p_4 = 0 & p_5 = \frac{4}{5} & p_6 = \frac{3}{5} \\ p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = -1 \end{array}$$

- Quinta columna de matriz  $A$

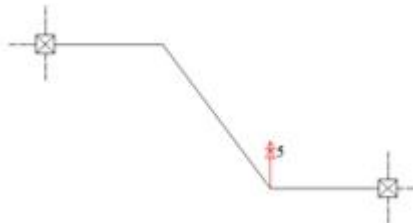
$$q_5 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 5$$

Deformada elemental  $q_5$ 

$$\begin{array}{ccc} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 \\ p_4 = 0 & p_5 = \frac{3}{5} & p_6 = -\frac{4}{5} \\ p_7 = 1 & p_8 = 0 & p_9 = 0 \end{array}$$

- Sexta columna de matriz  $A$

$$q_6 = 1 \text{ y } q_i = 0, i \neq 6$$

Deformada elemental  $q_6$ 

$$\begin{array}{ccc} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 \\ p_4 = \frac{1}{5} & p_5 = \frac{1}{5} & p_6 = 0 \\ p_7 = -\frac{1}{3} & p_8 = -\frac{1}{3} & p_9 = 0 \end{array}$$

- Matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4/5 & 3/5 & -1/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & 4/5 & 3/5 & 1/5 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A^{(1)} \\ \\ \\ A^{(2)} \\ \\ \\ A^{(3)} \end{matrix}$$

### 18.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

- EJERCICIO N.- 1

En la malla espacial, presentada a la izquierda de la figura 100, determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ , si el sistema de coordenadas generalizadas se encuentra en la parte central y el sistema de deformaciones de los elementos a la derecha de la figura 18.19. Posteriormente calcular la matriz de rigidez de la estructura si  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$  y  $G = 0.4 E$ .

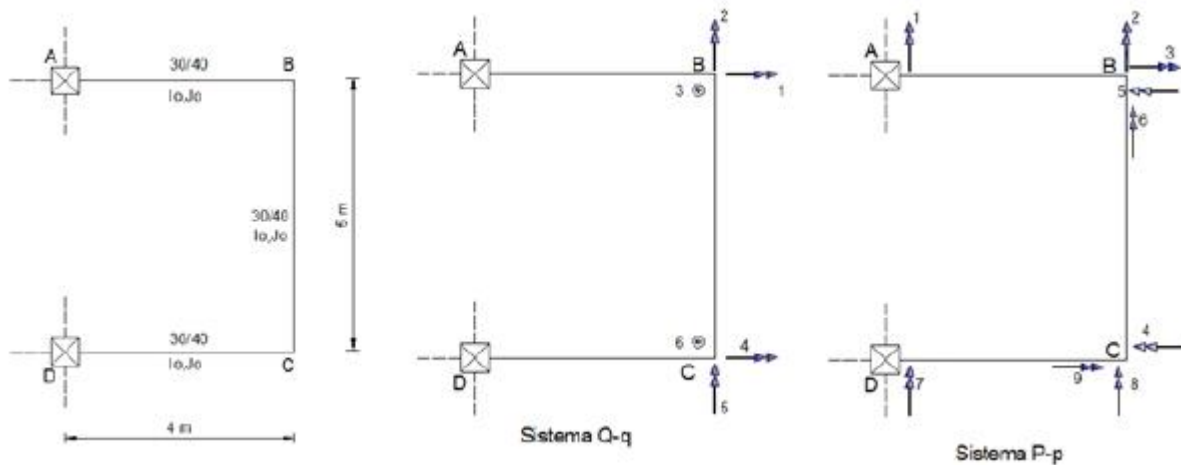


Figura 18.19 Malla de Ejercicio 1.

- EJERCICIO N.- 2

El elemento AB es torsionalmente rígido y el elemento DC es transversalmente rígido, de la estructura indicada en la figura 18.20. Se pide seleccionar sistemas de coordenadas de y de elementos en sistema 1 y determinar la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ .

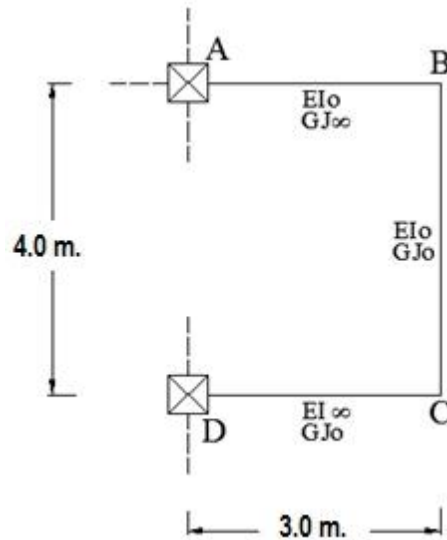


Figura 18.20 Malla espacial con elemento torsionalmente rígido y transversalmente rígido.

• EJERCICIO N.- 3

Realizar el análisis estático de una bodega que solo tiene columnas en su periferia y se desea cubrir una luz de 10 m., en los dos sentidos como se observa en la figura 18.21. Las vigas en el tramo de 3 m., tienen altura variable de 60 cm., en el extremo a 40 cm., en el centro como se aprecia en la parte inferior de 18.21. Para el análisis en la luz de 3 m., considerar una viga de 40/50 cm.; las centrales que cubren una luz de 4 m., son de 40/40 cm.

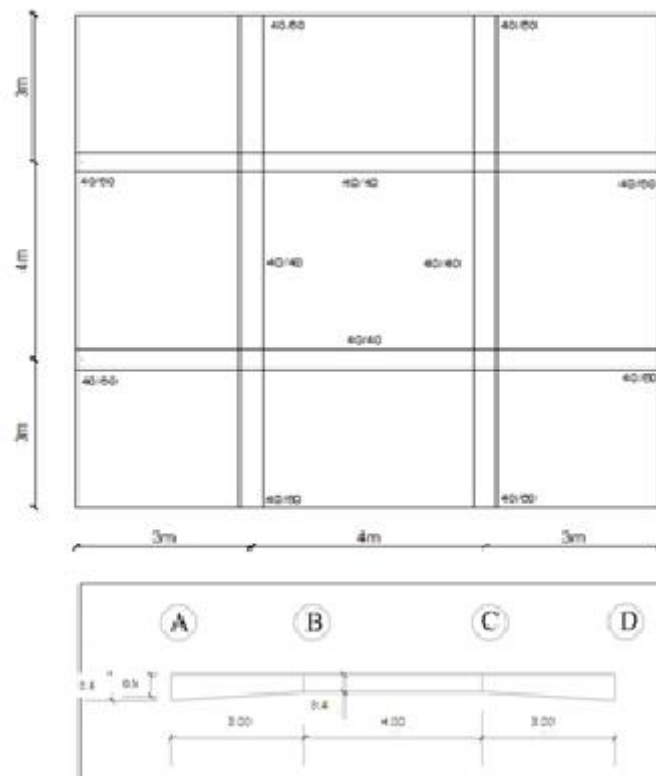


Figura 18.21 Malla Espacial de una Bodega.

En la figura 18.22 se indica el modelo de cálculo y las cargas verticales que gravitan sobre las vigas. La armadura longitudinal de las vigas se anclará en las vigas de la periferia que no se han dibujado para que exista empotramiento. En la figura 18.23 se indica la numeración de los nudos y

elementos de la malla y en la figura 18.24 los grados de libertad.

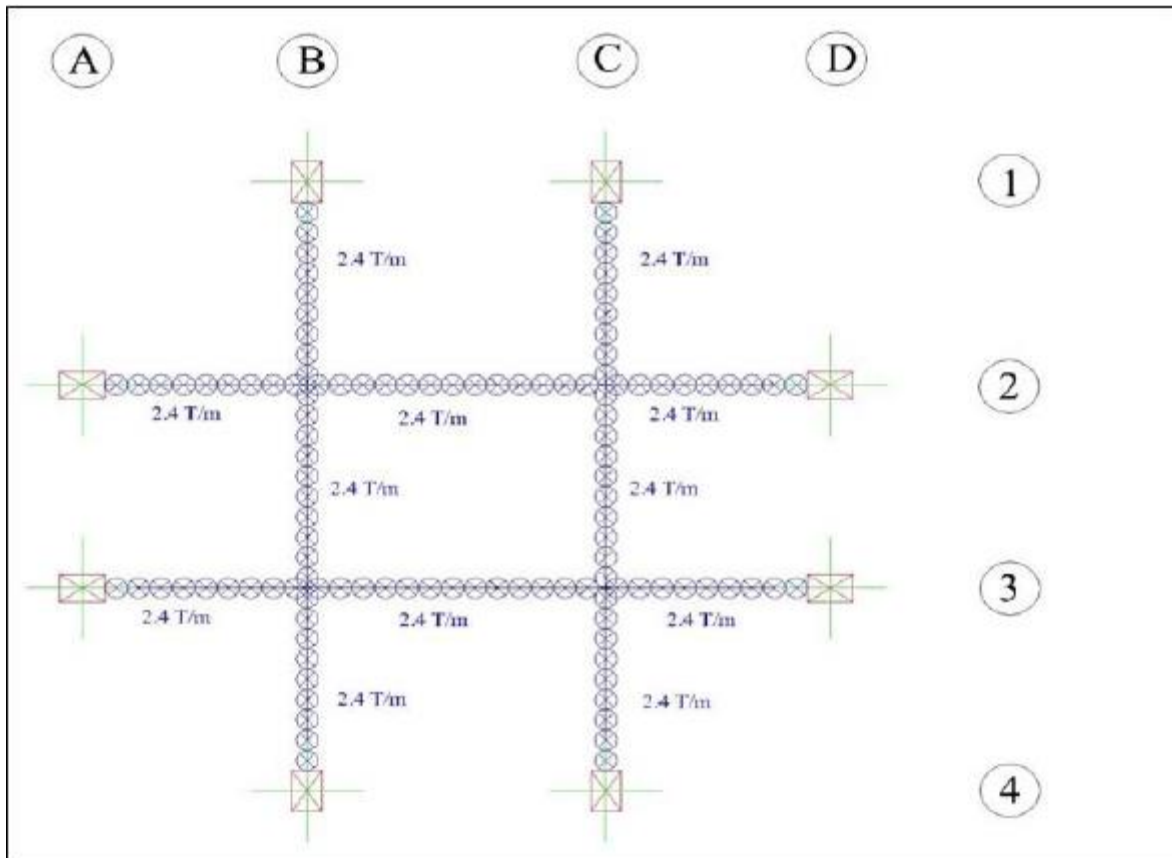


Figura 18.22 Modelo y cargas verticales.

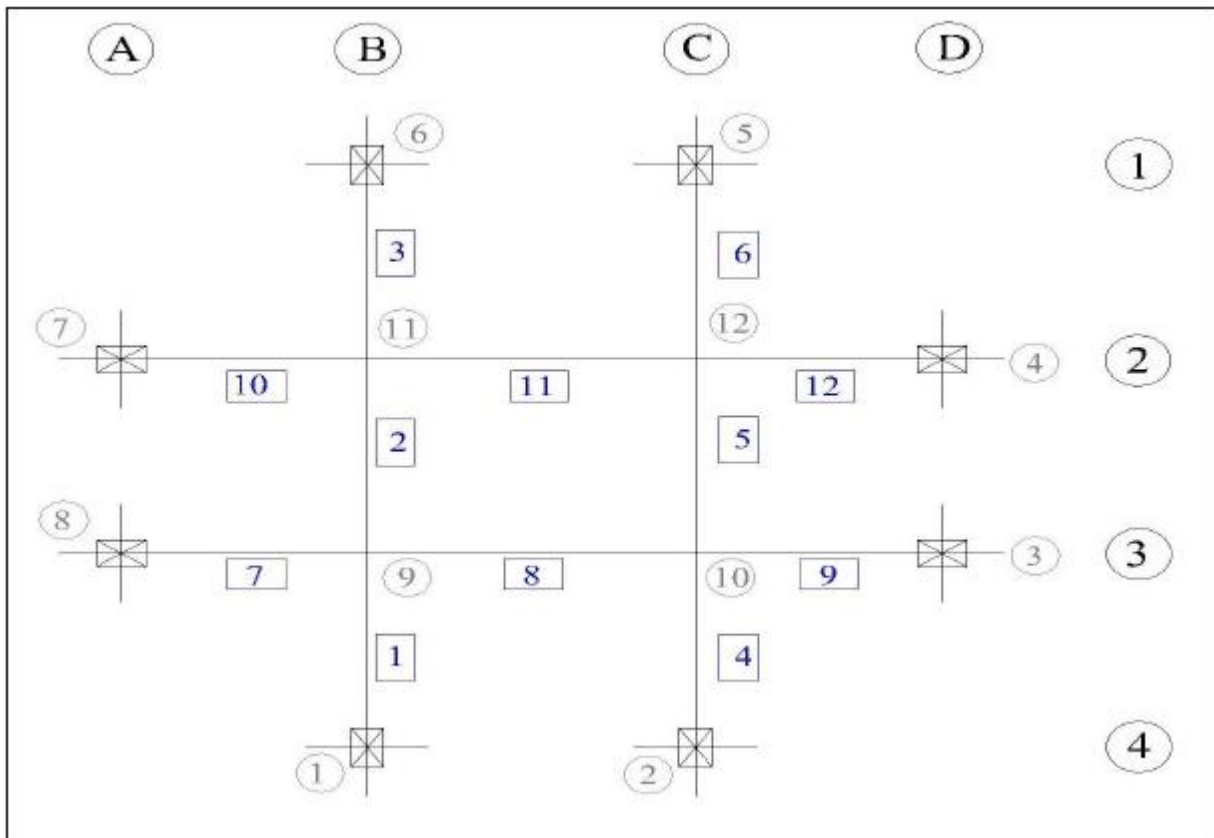


Figura 18.23 Numeración de nudos y elementos.

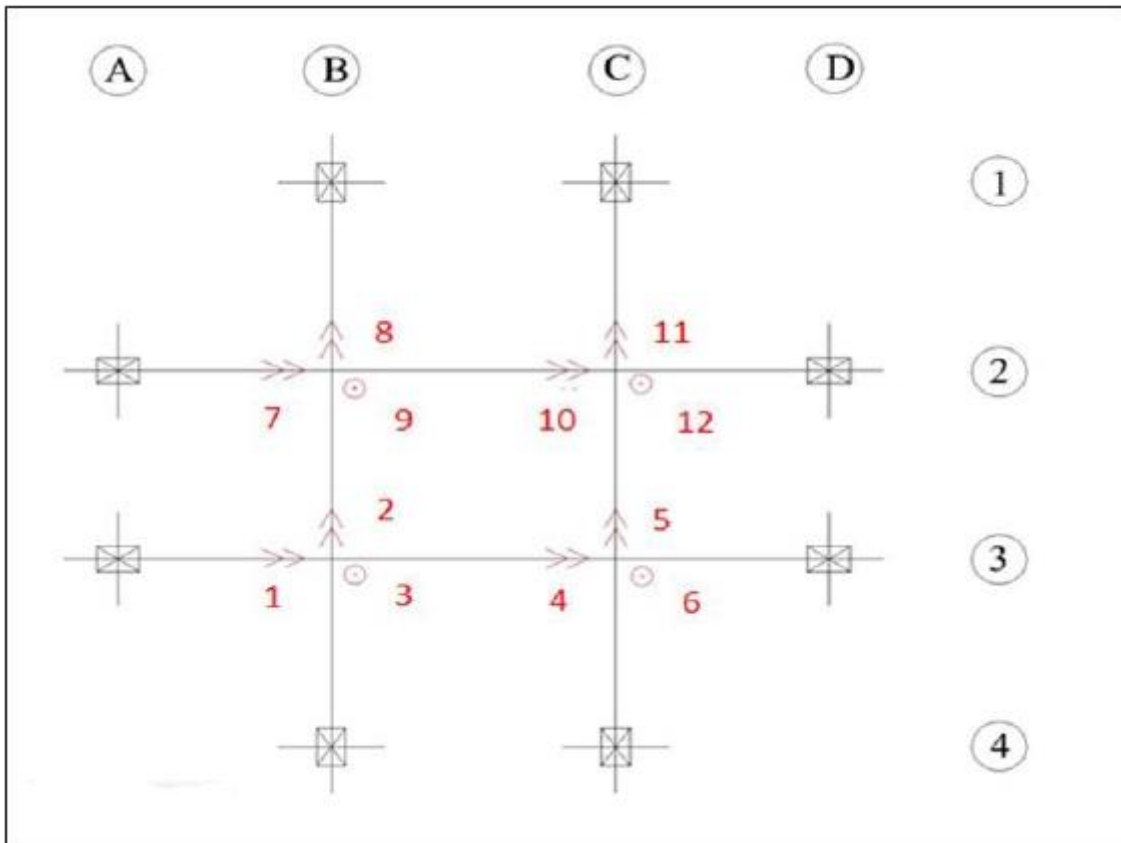


Figura 18.24 Grados de libertad de la Malla.

Calcular con un módulo de elasticidad de  $E = 1800000 \text{ T/m}^2$ . Los resultados en términos de fuerzas y momentos en los extremos de los elementos se indican en la figura 18.25. Utilizar la librería de programas de **CEINCI-LAB**.

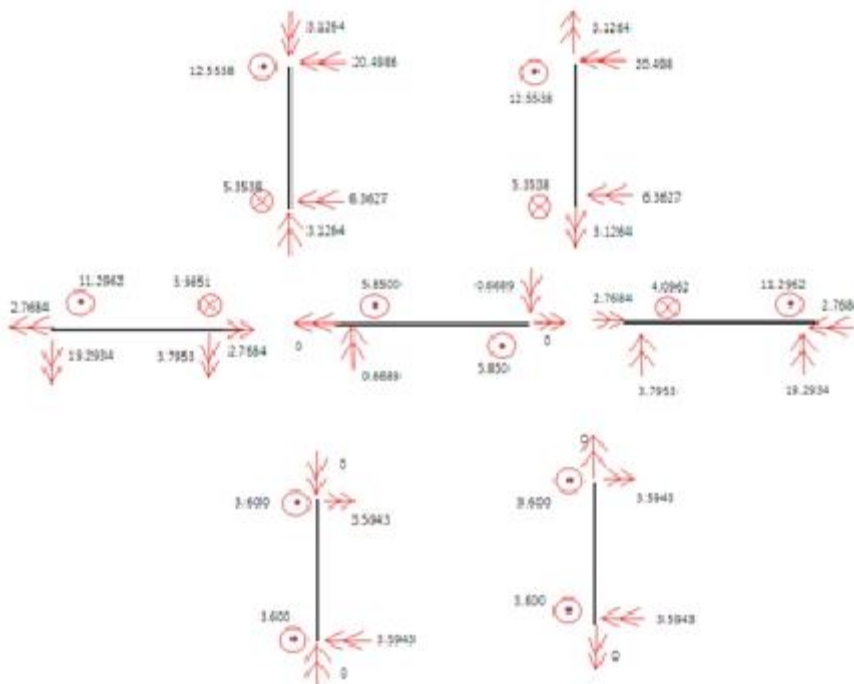


Figura 18.25 Resultados en términos de fuerzas y momentos en los elementos.