

• SOLUCIÓN

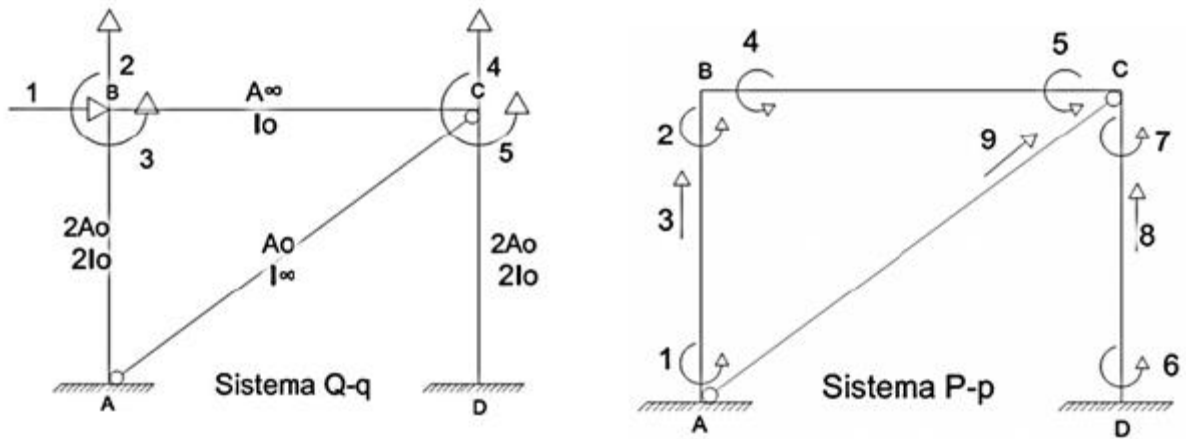
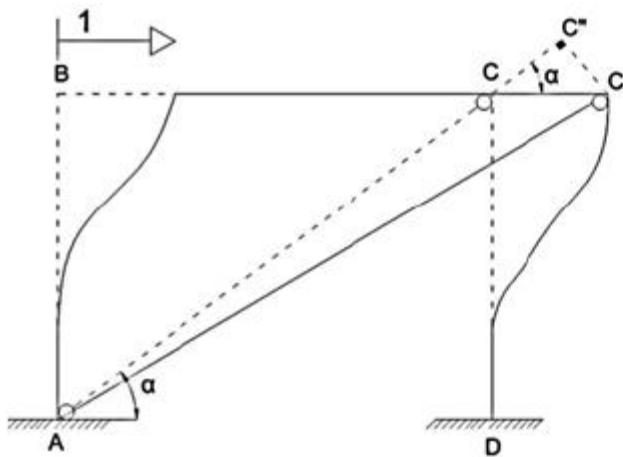


Figura 10.5 Sistema de coordenadas  $Q - q$  y  $P - p$

• Primera columna de matriz  $A$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$



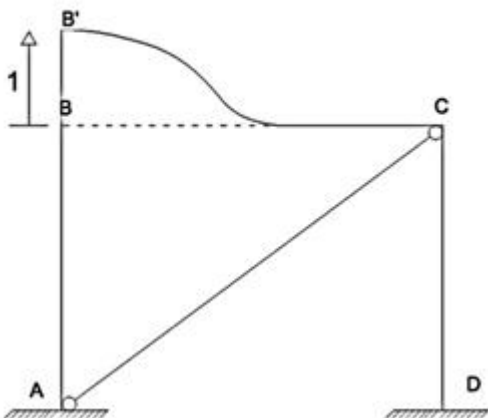
$$\cos \alpha = \frac{U_2}{1}$$

$$U_2 = \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$p_1 = \frac{1}{3}$	$p_4 = 0$	$p_7 = \frac{1}{3}$
$p_2 = \frac{1}{3}$	$p_5 = 0$	$p_8 = 0$
$p_3 = 0$	$p_6 = \frac{1}{3}$	$p_9 = \frac{4}{5}$

• Segunda columna de matriz  $A$

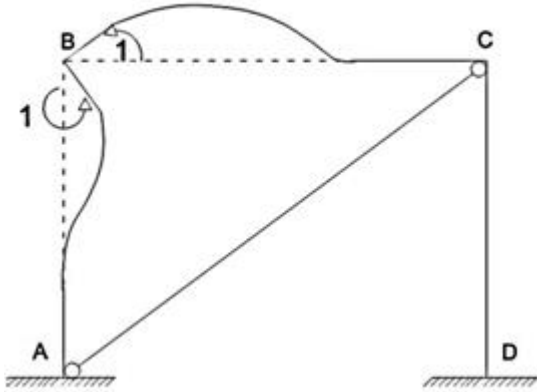
$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$



$p_1 = 0$	$p_4 = \frac{1}{4}$	$p_7 = 0$
$p_2 = 0$	$p_5 = \frac{1}{4}$	$p_8 = 0$
$p_3 = 1$	$p_6 = 0$	$p_9 = 0$

- Tercera columna de matriz  $A$

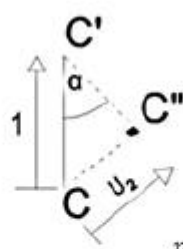
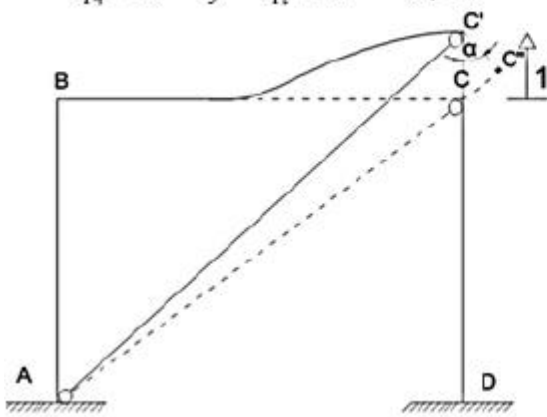
$$q_3 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$



$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = 1 & p_7 = 0 \\ p_2 = 1 & p_5 = 0 & p_8 = 0 \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 \end{matrix}$$

- Cuarta columna de matriz  $A$

$$q_4 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 4$$



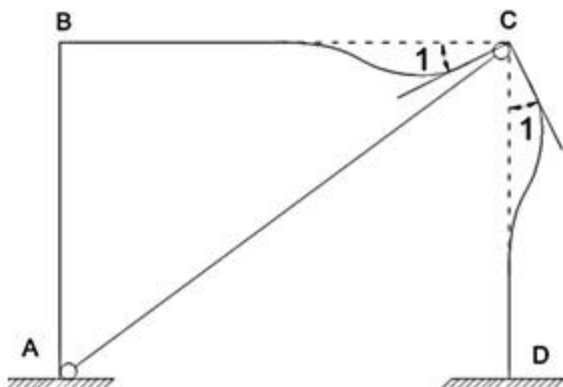
$$\text{Sen } \alpha = \frac{U_2}{1}$$

$$U_2 = \text{Sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = -\frac{1}{4} & p_7 = 0 \\ p_2 = 0 & p_5 = -\frac{1}{4} & p_8 = 1 \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = \frac{3}{5} \end{matrix}$$

- Quinta columna de matriz  $A$

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$



$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 1 \\ p_2 = 0 & p_5 = 1 & p_8 = 0 \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3} \\
 0 \\
 - \\
 0 \\
 0 \\
 - \\
 \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3} \\
 0 \\
 - \\
 \frac{4}{5} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\
 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- Matriz de rigidez de las columnas de hormigón

$$\begin{array}{c}
 \frac{8E_{c0}}{3} \quad \frac{4E_{c0}}{3} \\
 \frac{4E_{c0}}{3} \quad \frac{8E_{c0}}{3} \\
 0 \quad 0 \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & \frac{2E_{c0}}{3} \\
 0 & 0 & -\frac{2E_{c0}}{3} \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- Matriz de rigidez de la viga de hormigón

$$\begin{array}{c}
 \frac{E_{c0}}{2} \\
 \frac{E_{c0}}{2} \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 \frac{E_{c0}}{2} & \frac{E_{c0}}{2} \\
 \frac{E_{c0}}{2} & \frac{E_{c0}}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- Matriz de rigidez de la diagonal de acero

$$\begin{array}{c}
 \frac{E_s A_s}{5} \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 \frac{E_s A_s}{5} & 0 \\
 0 & \frac{E_s A_s}{5}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

- Matriz de rigidez de la estructura

$$K = \sum_{i=1}^n A^{(i)T} k^{(i)} A^{(i)}$$

$$K = A^{(1)T} k^{(1)} A^{(1)} + A^{(2)T} k^{(2)} A^{(2)} + A^{(3)T} k^{(3)} A^{(3)} + A^{(4)T} k^{(4)} A^{(4)}$$

$$A^{(1)t_k(1)}A^{(1)}$$

			$\frac{1}{3}$		0		0		0		0
			$\frac{1}{3}$		0		1		0		0
			[ 0		1		0		0		0 ]
$\frac{8El}{3}$	$\frac{4E_{c0}}{3}$	0	$\frac{4E_{c0}}{3}$		0		$-\frac{4E_{c0}}{3}$		0		0
$\frac{4E_{c0}}{3}$	$\frac{8E_{c0}}{3}$	0	$\frac{4E_{c0}}{3}$		0		$-\frac{8E_{c0}}{3}$		0		0
n	n	$\frac{2E_{c0}}{3}$	[ 0		$-\frac{2E_{c0}}{3}$		0		0		0 ]
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		$\frac{8E_{c0}}{9}$		$-\frac{4E_{c0}}{3}$		0		0
	0	0	1		0		$-\frac{2E_{c0}}{3}$		0		0
	0	1	0		$\frac{4E_{c0}}{3}$		$-\frac{8E_{c0}}{3}$		0		0
	0	0	0		0		0		0		0
	[ 0	0	0 ]		[ 0		0		0		0 ]

$$A^{(2)t_k(2)}A^{(2)}$$

			0		1		1		$-\frac{1}{4}$		0
			[ 0		1		0		$-\frac{1}{4}$		1 ]
$\frac{E_{c0}}{2}$	$\frac{E_{c0}}{2}$	0	0		$\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$		$-\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$
$\frac{E_{c0}}{2}$	$\frac{E_{c0}}{2}$	0	0		$\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$		$-\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$
0	0	0	0		0		0		0		0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0		$\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{3E_{c0}}{8}$		$-\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{3E_{c0}}{8}$
$\frac{1}{4}$	0	0	0		$\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$		$-\frac{3E_{c0}}{8}$		$\frac{E_{c0}}{2}$
4	$-\frac{1}{4}$	0	0		$-\frac{3E_{c0}}{4}$		$-\frac{3E_{c0}}{4}$		$\frac{3E_{c0}}{4}$		$-\frac{3E_{c0}}{4}$
[ 0	[ 0	1 ]	0		[ 0		$\frac{3E_{c0}}{4}$		$-\frac{3E_{c0}}{4}$		[ 0 ]
			0		$\frac{3E_{c0}}{4}$		$\frac{E_{c0}}{2}$		$-\frac{3E_{c0}}{4}$		$\frac{E_{c0}}{2}$

$$A^{(3)t_k(3)}A^{(3)}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\
 \frac{1}{3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 1 \\
 [ \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 1 \quad | \quad 0 \quad ] \\
 \frac{8E_{c0}^I}{3} \quad \frac{4E_{c0}^I}{3} \quad 0 \quad \frac{4E_{c0}^I}{3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 4E_{c0}^I \\
 \frac{4E_{c0}^I}{3} \quad \frac{8E_{c0}^I}{3} \quad 0 \quad \frac{4E_{c0}^I}{3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 8E_{c0}^I \\
 \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{8E_{c0}^I}{9} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 2E_{cA_0} \quad | \quad 0 \\
 \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{8E_{c0}^I}{9} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad -3 \quad | \quad 4E_{c0}^I \\
 \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad -3 \quad | \quad -3 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 2E_{cA_0} \quad | \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad -3 \quad | \quad -3 \\
 [0 \quad 1 \quad 0] \quad \frac{4E_{c0}^I}{3} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 8E_{c0}^I \\
 [ \quad 3 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad -3 \quad ]
 \end{array}$$

$$A^{(4)t_k(4)}A^{(4)}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{4}{5} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \frac{3}{5} \quad | \quad 0 \\
 [ \quad \frac{E_{cA_0}}{5} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \frac{3E_{cA_0}}{5} \quad | \quad 0 \\
 [ \quad \frac{4E_{cA_0}}{25} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \frac{12E_{cA_0}}{25} \quad | \quad 0 \\
 \frac{4}{5} \quad \frac{16E_{cA_0}}{125} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \frac{12E_{cA_0}}{125} \quad | \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\
 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \\
 \frac{3}{5} \quad \frac{12E_{cA_0}}{125} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad \frac{9E_{cA_0}}{125} \quad | \quad 0 \\
 [0] \quad [ \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \quad ]
 \end{array}$$

Al sumar los triples productos matriciales indicados se encuentra, la siguiente matriz de rigidez.

$$K = \begin{matrix} \frac{16E_{d0}}{l} & \frac{12E_{d0}}{l} & \frac{4E_{d0}}{l} \\ + & 16E_{d0} & 4E_{d0} \\ 0 & 2E_{d0} & 0 \\ \frac{4E_{d0}}{l} & \frac{3E_{d0}}{l} & \frac{11E_{d0}}{l} \\ + & \frac{3}{6} & \frac{16}{8} \\ 3 & 8 & 2 \\ \frac{12E_{d0}}{l} & \frac{9E_{d0}}{l} & 11 \\ - & 3E_{d0} & -3E_{d0} \\ \frac{4E_{d0}}{l} & \frac{3E_{d0}}{l} & \frac{11E_{d0}}{l} \\ - & 3E_{d0} & -3E_{d0} \\ + & 2E_{d0} & + 3E_{d0} \\ - & 3E_{d0} & -3E_{d0} \end{matrix}$$

### 10.3 CÁLCULO DE K CON CUALQUIER SISTEMA P - p

En los ejercicios que se han resuelto en éste capítulo, se ha venido trabajando con el siguiente sistema de coordenadas de elemento.

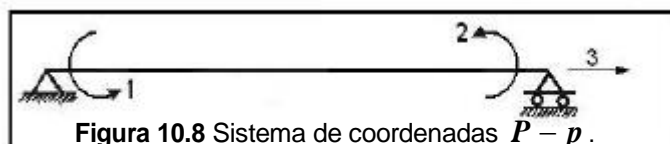


Figura 10.8 Sistema de coordenadas  $P - p$ .

Lo más común es trabajar con el sistema  $P - p$  indicado en la figura 10.8. En general, se puede calcular la matriz de rigidez de una estructura con cualquier sistema de coordenadas de miembro como se ha indicado en los capítulos anteriores. Con el propósito de ilustrar lo anotado en este apartado se repasa lo estudiado para el sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 10.9 para posteriormente realizar ejercicios con éste sistema.

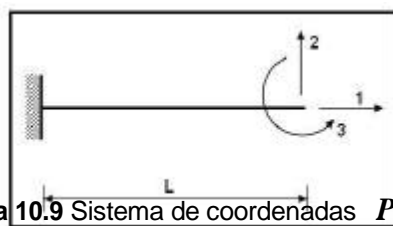


Figura 10.9 Sistema de coordenadas  $P - p$

Para éstas coordenadas, las deformaciones de un elemento, son:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= u_2 - u_1 \\
 p_2 &= v_2 - v_1 - L\theta_1 \\
 p_3 &= \theta_2 - \theta_1
 \end{aligned}$$

La matriz de rigidez para el sistema indicado en la figura 10.9 al no considerar el efecto de corte es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

A manera de repaso se presenta a continuación los valores con los cuales se obtienen las deformaciones de un elemento y la respectiva matriz de rigidez para el caso de un elemento axialmente rígido que se indica en la figura 10.10 y para el caso de un elemento transversalmente rígido que se indica en la figura 10.11.

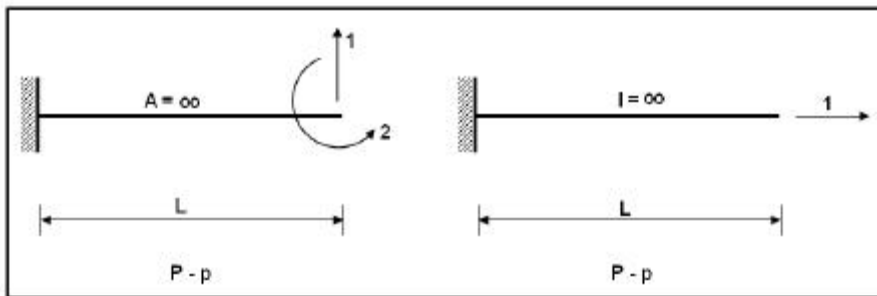


Figura 10.10 Elemento  $A = \infty$

Figura 10.11 Elemento  $I = \infty$ .

$$p_1 = v_2 - v_1 - L\theta_1$$

$$p_1 = u_2 - u_1$$

$$p_2 = \theta_2 - \theta_1$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO N.- 3

Calcular la matriz de rigidez para la estructura indicada en la figura 10.1, para el sistema de coordenadas  $Q - q$  indicado en la figura 10.2, si ahora el sistema de coordenadas de los elementos es el indicado en la figura 10.12.

• SOLUCIÓN

Por ser el sistema  $P - p$  muy poco usual se procede a calcular los términos de la primera columna de la matriz  $A$  para el efecto en la figura 10.13 se presenta la deformada elemental  $q_1$ . Es conveniente que el lector analice elemento por elemento para el cálculo de las deformaciones.

Para el elemento AB, las condiciones de borde que únicamente  $\theta_2 = I$ , las restantes coordenadas del elemento son nulas. Las deformaciones del elemento AB son:

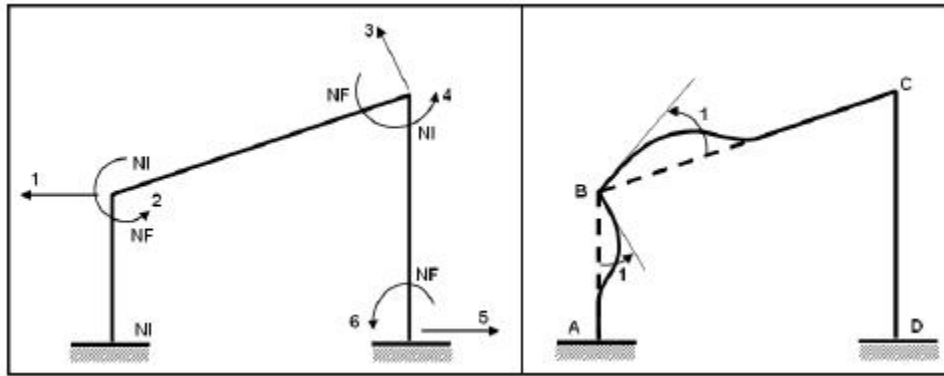


Figura 10.12 Sistema  $P - p$

Figura 10.13 Deformada elemental  $q_1$

$$p_1 = v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 - 0 - 0 \cdot 6 = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \theta_1 = 1 - 0 = 1$$

De la figura 10.13 se observa que para el elemento BC solamente  $\theta_1 = 1$  y las demás coordenadas son nulas. Luego las deformaciones valen:

$$p_3 = 0 - 0 - 1 \cdot 4 \cdot 10 = -4 \cdot 10$$

$$p_4 = 0 - 1 = -1$$

Para el elemento CD las deformaciones son nulas, lo que se aprecia en la figura 10.13. Por lo tanto  $p_5 = p_6 = 0$ .

Se han utilizado las fórmulas indicadas para elementos axialmente rígidos. Se deja al lector el cálculo de la segunda y tercera columna de la matriz de compatibilidad de deformaciones que resulta.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 \cdot 10 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se evalúa la matriz de rigidez de cada elemento con la siguiente ecuación:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:



$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 18 & 6 \\ -1 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad k^{(2)} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 160 & 10 & -80 \\ -9 & 3 \\ 80 & 10 \end{bmatrix} \quad k^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 125 & 25 \\ -5 & 4 \\ 25 & 5 \end{bmatrix}$$

Los resultados del triple producto matricial son:

$$A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.167 & 0.000 & 0.056 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.949 & 0.474 & 0.000 \\ 0.474 & 0.949 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.800 & 0.120 \\ 0.000 & 0.120 & 0.024 \end{bmatrix}$$

$$K = \sum_{i=1}^3 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)} = A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} + A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} + A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}$$

Nótese que se obtuvo el mismo resultado en el ejemplo 1 esto no es una casualidad. La matriz de rigidez es la misma por que el sistema de coordenadas de la estructura  $Q - q$  es el mismo. Para terminar con éste sub apartado se menciona el hecho de que se puede calcular  $K$  empleando diferentes sistemas de coordenadas de elemento como se verá en el siguiente ejemplo.

- **EJEMPLO N.- 4**

Para la estructura del ejemplo 3, calcular la matriz de rigidez de la estructura  $K$  usando el sistema  $P - p$  que se indica en la figura 10.14

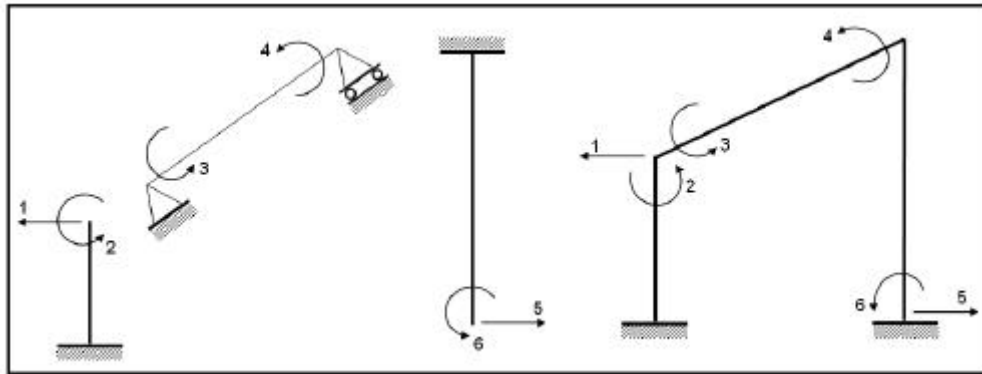


Figura 10.14 Sistema  $P - p$  para cada elemento.

• SOLUCIÓN

Con el sistema  $P - p$  de la figura 10.14 la matriz de compatibilidad de deformaciones resulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & \\ 1 & & & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \\ \hline 0 & & -10 & & -1 \\ 0 & -1 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Las diferentes matrices de rigidez de los elementos son:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{L}$$

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{125} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{3}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Si se observa con detenimiento los ejemplos 1 y 3, se ve que  $A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)}$  y  $A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)}$  se realizó en el ejemplo 3 y que el producto  $A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)}$  se lo ejecutó en el ejemplo 1. Por lo tanto la matriz de rigidez de la estructura  $K$  tiene que ser la misma.

### 10.4 EDIFICIO DE CORTE

Por ser importante dentro del Análisis Sísmico de Estructuras y por considerar que es oportuno tratarlo en este punto se procede a calcular la matriz de rigidez para el modelo numérico de cálculo que se conoce con el nombre de Edificio de Corte, previamente se describe el modelo. El edificio de corte está constituido por vigas infinitamente rígidas y columnas axialmente rígidas, en los cuales la masa está concentrada a nivel de entrepiso. Su denominación proviene de la analogía de éste con la viga en voladizo de masa y rigidez uniforme distribuida cuyas deformaciones se deben exclusivamente al esfuerzo de corte.

• **EJEMPLO N.- 5**

Para la estructura de la figura 10.15, edificio de corte de dos pisos, se presenta en las figuras 10.16 y 10.17 los sistemas de coordenadas de la estructura  $\bar{Q} - \bar{q}$  y de elemento  $\bar{P} - \bar{p}$ . Se desea encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

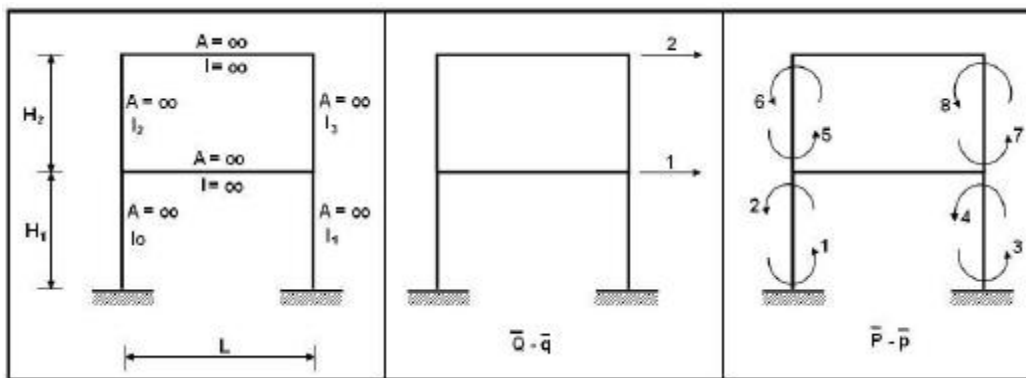


Figura 10.15

Figura 10.16

Figura 10.17

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{H_1} & 0 \\
 \frac{1}{H_1} & 0 \\
 \hline
 \frac{1}{H_1} & 0 \\
 \frac{1}{H_1} & 0 \\
 \hline
 -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
 -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
 \hline
 -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2} \\
 -\frac{1}{H_2} & \frac{1}{H_2}
 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

Nótese que los elementos horizontales no contribuyen a la formación de la matriz de rigidez de la estructura. De acuerdo a la matriz  $A$  se tiene que los elementos 1 y 2 corresponden a las columnas de la planta baja y los elementos 3 y 4 a las columnas de la primera planta alta.

$$k^{(1)} = \frac{2EI_0}{H_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad k^{(2)} = \frac{2EI_1}{H_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k^{(3)} = \frac{2EI_2}{H_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad k^{(4)} = \frac{2EI_3}{H_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego de efectuar  $K = \sum_{i=1}^4 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$  se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} \left( \frac{12EI_0}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3} \right) & - \left( \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3} \right) \\ - \left( \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3} \right) & \left( \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3} \right) \end{bmatrix}$$

Por otra parte se define a  $k_n$  como la rigidez del piso  $n$ , de la siguiente manera:

$$k_n = \sum_i \frac{12EI_i}{H_n^3}$$

Donde  $H_n$  es la altura del entrepiso  $n$ ;  $I_i$  es el momento de inercia de la columna  $i$  en el piso  $n$ ;  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $j$  es el número de columnas en el piso  $n$ . Para la estructura que se analiza se tiene que la rigidez del piso 1 es:

$$k_1 = \frac{12EI_0}{H_1^3} + \frac{12EI_1}{H_1^3}$$

Para el piso 2, la rigidez de piso vale:

$$k_2 = \frac{12EI_2}{H_2^3} + \frac{12EI_3}{H_2^3}$$

Con ésta notación la matriz de rigidez de la estructura para el pórtico de la figura 10.15, es:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Al generalizar los resultados obtenidos en el ejemplo 5, para un edificio de corte de  $n$  pisos como el mostrado en la figura 10.18, para el sistema de coordenadas de la figura 10.19, la matriz de rigidez es la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n k_n & \dots \end{bmatrix}$$

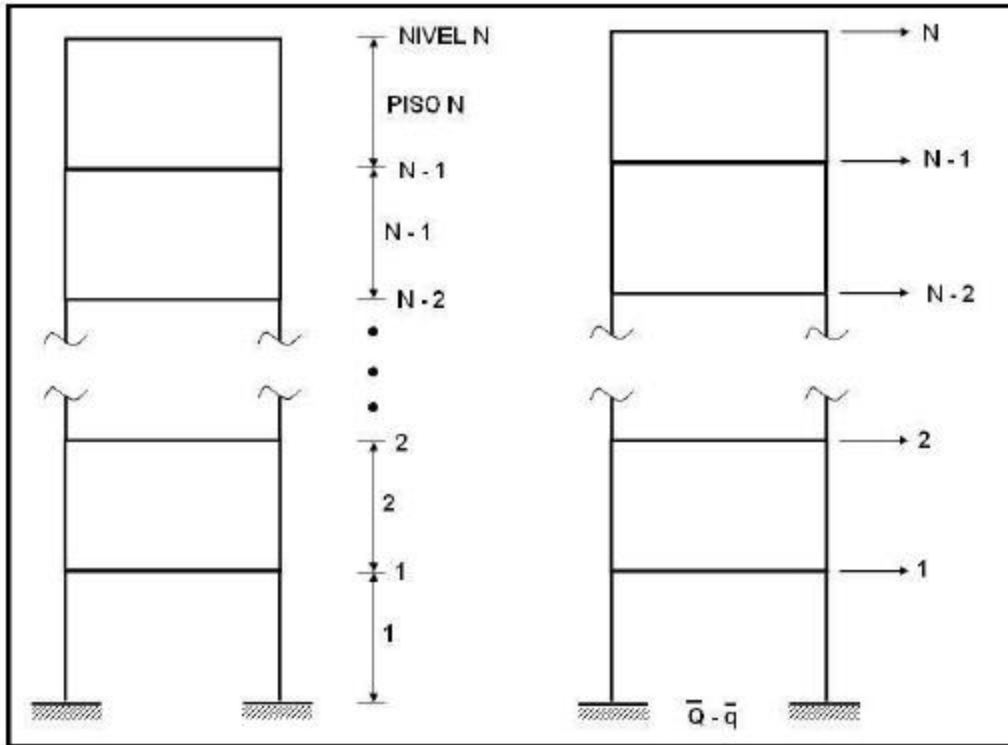


Figura 10.18 Edificio de Corte

Figura 10.19 Sistema de coordenadas.

La matriz de rigidez es simétrica, en la cual los términos de la diagonal son  $k_1 + k_2$ ;  $k_2 + k_3$ ;  $k_3 + k_4$ ;  $k_4 + k_5$ ; .... hasta  $k_n$  y los elementos de las diagonales adyacentes son  $-k_2$ ;  $-k_3$ ;  $-k_4$ ; ..... hasta  $-k_n$ .

### 10.5 EJERCICIOS RESUELTOS

- EJEMPLO N.- 7

La estructura de la figura 10.20 está compuesta por elementos totalmente flexibles de igual longitud y sección transversal. En las figuras 10.21 y 10.22 se presentan los sistemas  $Q - q$  y  $P - p$  respectivamente. Se pide obtener la matriz de rigidez de la estructura.

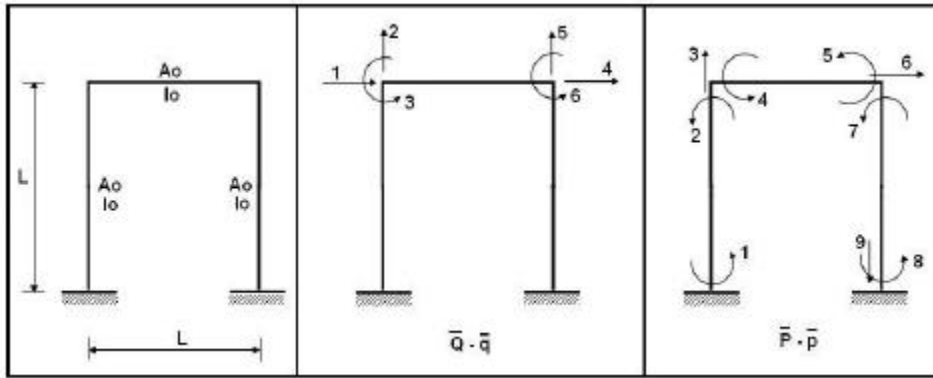


Figura 10.20

Figura 10.21

Figura 10.22

• SOLUCIÓN

Para el sistema  $P - p$  indicado en la figura 10.22, la matriz  $A$  resulta.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tres primeras filas corresponden a la matriz  $A^{(1)}$ , las tres siguientes son  $A^{(2)}$  y las tres últimas son  $A^{(3)}$ .

Por otra parte como los elementos son de igual longitud y de igual sección transversal, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma. Luego se tiene:

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} & \frac{2EI_o}{L} & 0 \\ \frac{2EI_o}{L} & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} \end{bmatrix}$$

La contribución de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez de la estructura se presenta a continuación.

$$\mathbf{A}^{(1)t} \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)t} \mathbf{k}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} \\ -\frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{4EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_o}{L^3} & 0 & \frac{12EI_o}{L^2} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene sumando la contribución de cada uno de los elementos.

$$K = A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} + A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} + A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & & & & \\ \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L} & & & \\ \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI_o}{LE} + \frac{EA_o}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI_o}{L^3} & -\frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_o}{L} & \\ 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{2EI_o}{L} & 0 & -\frac{6EI_o}{L^2} & \frac{8EI_o}{L} \end{bmatrix} \quad \text{SIMETRICA}$$

- EJEMPLO N.- 8**

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico plano de la figura 10.23, si los sistemas  $Q - q$  y  $P - p$  son los presentados en las figuras 10.24 y 10.25.



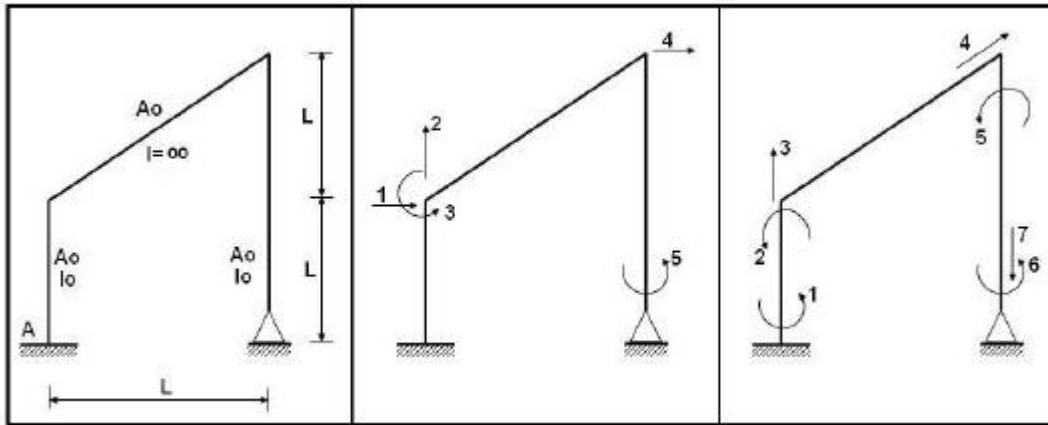


Figura 10.23

Figura 10.24 Sistema  $Q - q$ Figura 10.25 Sistema  $P - p$ .

- SOLUCIÓN**

Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos son:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 4EI_o & 2EI_o & 0 \\ 2EI_o & 4EI_o & 0 \\ 0 & 0 & EA_o \\ -L & L & L \end{bmatrix} \quad k^{(2)} = \begin{bmatrix} EA_o \\ -2L \end{bmatrix} \quad k^{(3)} = \begin{bmatrix} 4EI_o & 2EI_o & 0 \\ 2EI_o & 4EI_o & 0 \\ 0 & 0 & EA_o \\ -2L & 2L & 2L \end{bmatrix}$$

La matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2L}{2} & 0 & 2L & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2L} & 1 \\ -1 & 1 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L^2} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & L^2 & L & 0 \\ -1 & 0 & L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2EA_o \\ L \\ \end{matrix}$$

$$A^{(3)t} k^{(3)} A^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{2L} & -\frac{EA_o}{2L} & -EA_o & -\frac{EA_o}{2L} & 0 \\ -\frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & EA_o & \frac{EA_o}{2L} & 0 \\ -EA_o & EA_o & \frac{2EI_o}{L} + 2LEA_o & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{EI_o}{L} \\ \frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{3EI_o}{2L^3} + \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

Al sumar las tres matrices correspondientes a los triples productos matriciales se obtiene **K**.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA_o}{L} & 0 & \frac{12EI_o}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_o}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -EA_o & EA_o & \frac{2EI_o}{L} + 2LEA_o & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{EI_o}{L} \\ \frac{EA_o}{2L} & \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} + EA_o & \frac{3EI_o}{2L^3} + \frac{EA_o}{2L} & \frac{3EI_o}{2L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EI_o}{L} & \frac{3EI_o}{2L^2} & \frac{EI_o}{L} \end{bmatrix}$$

(  
)  
**L** |

• EJEMPLO N.- 9

Para la armadura plana indicada en la figura 10.26, calcular la matriz de rigidez  $K$  si todos los elementos tienen la misma rigidez axial  $EA$ .

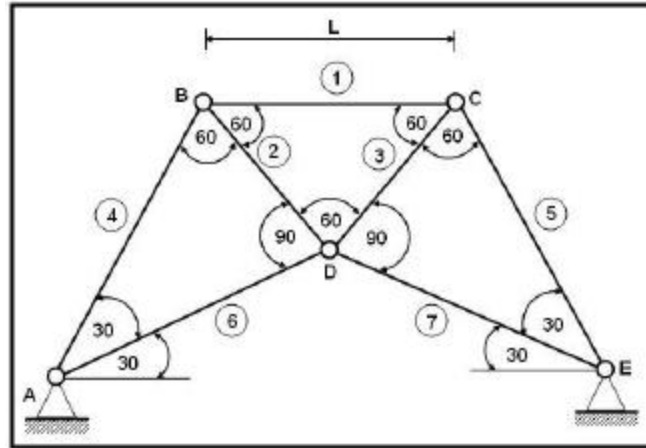


Figura 10.26

• SOLUCIÓN

En primer lugar se procede a calcular la longitud de cada uno de los elementos el resultado se indica en la tabla 1.

Tabla 1 Longitudes de las barras de Ejemplo 9

Elemento	Longitud
1=2=3	L
4=5	2L
6=7	3L

En segundo lugar se determina un sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$  y un sistema de coordenadas de los elementos  $P - p$ , los mismos que se indican en las figuras 10.27 y 10.28, respectivamente.

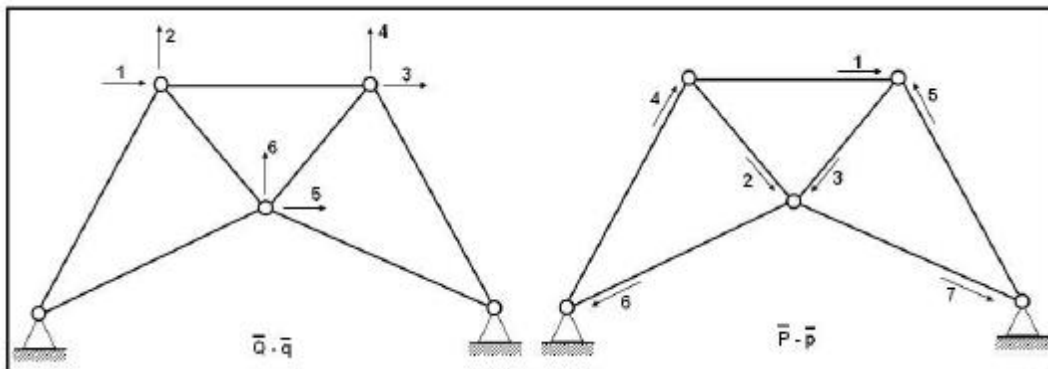


Figura 10.27

Figura 10.28

En tercer lugar se determina la matriz  $A$  tal que  $p = A q$ . Nótese que la matriz  $A$  que se ha escrito está multiplicada por  $\frac{1}{2}$ .

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

. En cuarto lugar se obtiene la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la armadura

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix}$$

$$k^{(4)} = k^{(5)} = \begin{bmatrix} EA \\ 2L \end{bmatrix}$$

$$k^{(6)} = k^{(7)} = \begin{bmatrix} EA \\ 3L \end{bmatrix}$$

Finalmente se efectúa el triple producto matricial con cada uno de los elementos y se determina la matriz de rigidez de la estructura. El resultado que se obtiene es:

$$K = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 7 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 & 6+2 \cdot 3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & -3 & 0 & 6+2 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

A pesar de que en éste capítulo no se ha hecho referencia a las armaduras planas, se ha obtenido la matriz de rigidez para una de ellas siguiendo los mismos lineamientos que se han formulado para los pórticos planos. Esto se debe a que los conceptos son generales, se aplican a cualquier tipo de estructura. Únicamente por facilidad se ha trabajado con pórticos planos y ahora se empieza con armaduras planas.

- EJEMPLO N.- 10

Una estructura articulada consta de tres elementos conectados en la unión A como se indica en la figura 10.29. El elemento AC es vertical. Las secciones rectas  $A_1$  y  $A_3$  son de  $50 \text{ mm}^2$  y  $A_2$  es de  $100 \text{ mm}^2$ . El valor de  $E = 200 * 10^3 \text{ N/mm}^2$ . Calcular la matriz de rigidez de la estructura  $K$  de acuerdo a lo formulado en el apartado 10.1, para el sistema  $Q - q$  que se indica en la figura 10.30.

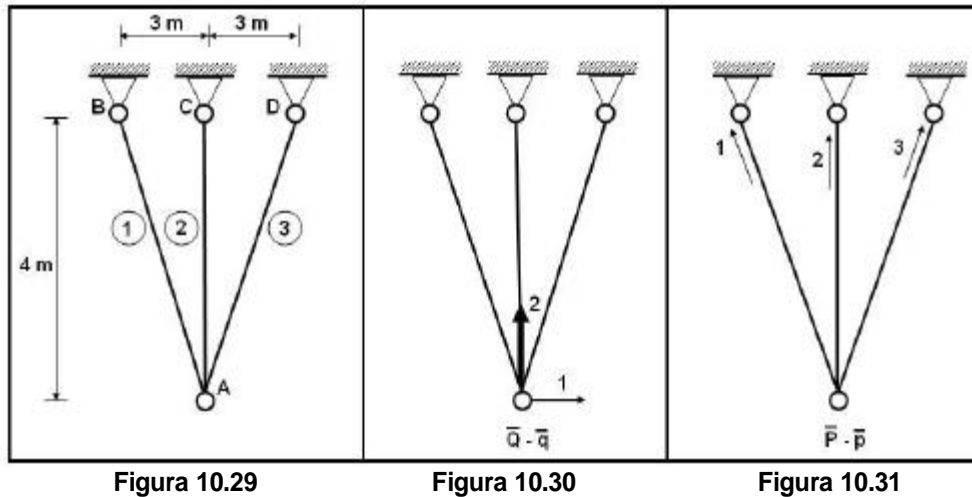


Figura 10.29

Figura 10.30

Figura 10.31

### • SOLUCIÓN

Considerando el sistema  $P - p$  mostrado en la figura 10.31, la matriz  $A$  es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.0 & -1.0 \\ -0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez de los elementos son:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} A_1 E \\ -L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 * 200 \\ -5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ KN} \\ -5 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} A_2 E \\ -L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 * 200 \\ -4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ KN} \\ -5 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & k^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se realiza el triple producto matricial con la matriz  $A$  completa.

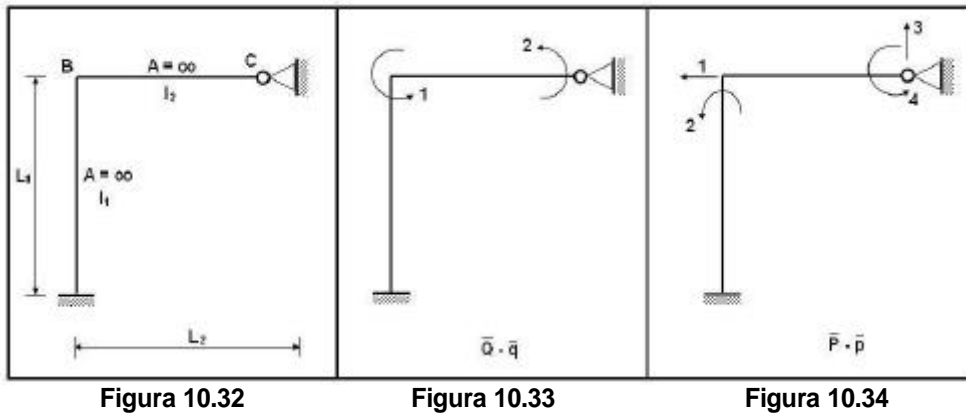
$$K = A^t k A$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ -0.8 & -1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.0 \\ -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8 \\ -1.0 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.44 & 0.00 \\ 0.00 & 7.56 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO N.- 11

Calcular la matriz de rigidez  $K$  para el pórtico plano indicado en la figura 10.32, trabajando con los sistemas  $Q - q$  y  $P - p$  indicados en las figuras 10.33 y 10.34.



• SOLUCIÓN

Por trabajar con un sistema de coordenadas de elemento no tan común se procede a detallar el cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ .

- Primera columna de  $A$

$$q_1 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

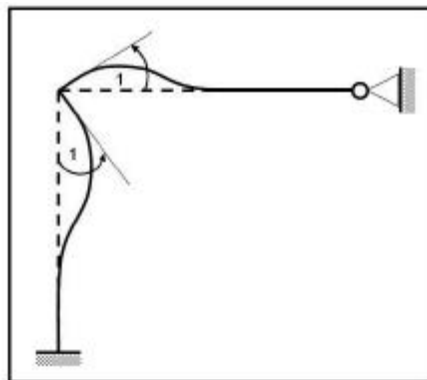


Figura 10.35 Deformada elemental  $q_1$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 \\
 p_2 &= \theta_2 - \theta_1 = 1 \\
 p_3 &= v_2 - v_1 - \theta_1 L = -L_2 \\
 p_4 &= \theta_2 - \theta_1 = -1
 \end{aligned}$$

- Segunda columna de  $A$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

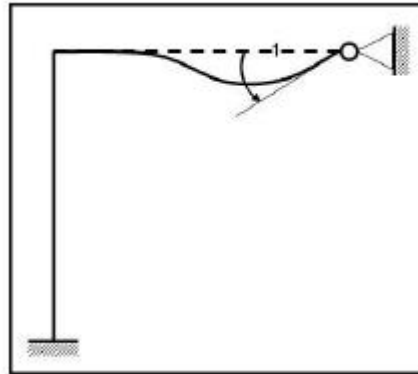


Figura 10.36 Deformada elemental  $q_2$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 \\
 p_2 &= \theta_2 - \theta_1 = 0 \\
 p_3 &= v_2 - v_1 - \theta_1 L = 0 \\
 p_4 &= \theta_2 - \theta_1 = 1
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \text{-----} & \text{-----} \\ -L_2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz de rigidez de miembro para el sistema  $P - p$  con el que se está trabajando es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Al sustituir valores se tiene:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix} \quad k^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} \\ \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$



El resultado de los triples productos matriciales es:

$$A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$K = A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} + A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

### • EJEMPLO N.- 12

Si en la estructura del problema anterior se trabaja con el sistema  $Q - q$  presentado en la figura 10.37. Calcular la matriz de rigidez utilizando los resultados obtenidos en el ejemplo 11.

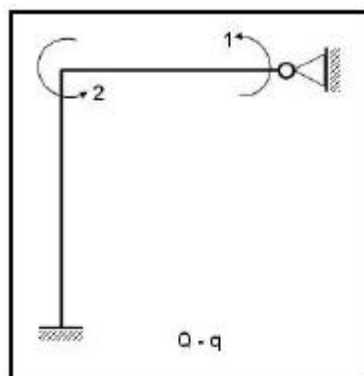


Figura 10.37

### • SOLUCIÓN

Al comparar las figuras 10.33 y 10.37 se encuentra que únicamente se ha cambiado la numeración del sistema de coordenadas generalizadas, concretamente se cambió el 2 por el 1. Esto significa por ejemplo que en este ejercicio  $q_1$  es la rotación del nudo C, mientras que en el problema anterior  $q_1$  es la rotación del nudo B. Para encontrar la nueva matriz de rigidez se procede de la siguiente manera:

- ♣ En la matriz encontrada en el ejemplo anterior se cambia la fila 1 por la fila 2, quedando:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} \\ \frac{4EI_2}{L_2} + \frac{4EI_1}{L_1} & \frac{2EI_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

- Finalmente se cambia la columna 1 por la columna 2, encontrando de ésta manera la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  para el sistema de coordenadas de la figura 10.37.

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{L_2} & & \\ \frac{2EI_2}{L_2} & \frac{4EI_2}{L_2} & \frac{4EI_1}{L_1} \\ & & \end{bmatrix}$$

El fundamento de lo expuesto se debe a la matriz de transformación de coordenadas  $\mathbf{T}$ .

• EJEMPLO N.- 13

Escribir directamente la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 10.38 si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado en la figura 10.39.

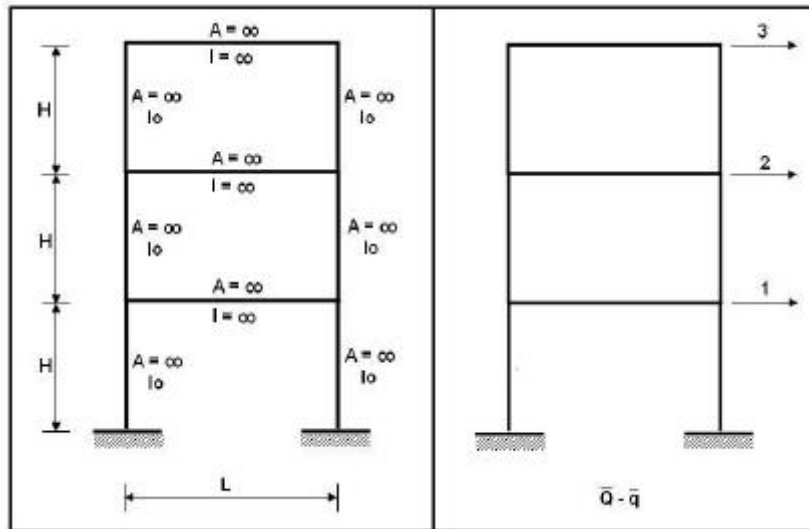


Figura 10.38

Figura 10.39

• SOLUCIÓN

La forma de la matriz de rigidez para el edificio de corte presentado es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Donde  $k_i$  es la rigidez del piso  $i$ . De acuerdo a lo indicado en el apartado 10.4 se tiene:

$$k_1 = \frac{12 EI_o}{H^3} + \frac{12 EI_o}{H^3} = \frac{24 EI_o}{H^3}$$

En el ejercicio se considera que todas las columnas tienen la misma sección transversal y altura de piso. Por lo tanto:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{24 EI_o}{H^3}$$

Luego

$$K = \begin{bmatrix} \frac{48 EI_o}{H^3} & -\frac{24 EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24 EI_o}{H^3} & \frac{48 EI_o}{H^3} & -\frac{24 EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24 EI_o}{H^3} & \frac{24 EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

#### • EJEMPLO N.- 14

Si en el problema anterior la matriz  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  define una matriz de transformación

de coordenadas de la forma  $q = T q^*$ . Se pide calcular  $K^*$ .

#### • SOLUCIÓN

$$K^* = T^T K T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48 EI_o}{H^3} & -\frac{24 EI_o}{H^3} & 0 \\ -\frac{24 EI_o}{H^3} & \frac{48 EI_o}{H^3} & -\frac{24 EI_o}{H^3} \\ 0 & -\frac{24 EI_o}{H^3} & \frac{24 EI_o}{H^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{24 EI_o}{H^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24 EI_o}{H^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{24 EI_o}{H^3} \end{bmatrix}$$

Como se verá en los próximos capítulos es conveniente que la matriz de rigidez sea diagonal debido a que es más fácil obtener su inversa. Por lo que se recomienda resolver el edificio de corte en las coordenadas asterisco.

- **EJEMPLO N.- 15**

Demostrar que si una matriz cuadrada  $k$  de orden  $m$  es simétrica y que si  $A$  es de orden  $m \times n$ . Entonces el producto  $A^t k A$  es simétrico.

- **SOLUCIÓN**

Sea  $B = A^t k A$  para demostrar que la matriz resultante del triple producto es simétrica bastará probar que  $B^t = B$ . Al obtener la matriz transpuesta de  $B$  se tiene:

$$B^t = (A^t k A)^t = A^t k^t A^t$$

Pero  $(A^t)^t = A$  (Propiedad de las matrices) y  $k^t = k$  (Por ser simétrica la matriz de rigidez). Luego se tiene que:

$$B^t = A^t k A$$

Con lo que se ha probado que  $B = B^t$  que era lo que se quería demostrar.

Esta propiedad que se ha demostrado, ayudará al lector a comprobar los resultados cuando calcule la matriz de rigidez de una estructura que debe salir simétrica.

- **EJEMPLO N.- 16**

Demostrar que en estructuras isostáticas se cumple la siguiente propiedad:

$$K^{-1} = (A^t k A)^{-1} = A^{-1} k^{-1} (A^t)^{-1}$$

- **SOLUCIÓN**

Si la estructura es isostática se tiene que la matriz  $A$  es cuadrada y regular. En consecuencia existe  $A^{-1}$ . En estructuras hiperestáticas no se puede encontrar la inversa de la matriz  $A$ . Con ésta introducción todo lo que se indica a continuación es válido para estructuras isostáticas.

Se sabe que:

$$p = A q \quad \Rightarrow \quad q = A^{-1} p$$

$$P = k p \quad \Rightarrow \quad p = k^{-1} P$$

$$Q = A^t P \quad \Rightarrow \quad$$

Al reemplazar la última ecuación en la anterior y el resultado en la primera se tiene:

$$q = A^{-1} k^{-1} (A')^{-1} Q$$

Por otra parte se conoce que:

Al igualar éstas dos últimas ecuaciones y simplificar  $Q$  se tiene:

$$K^{-1} = A^{-1} k^{-1} (A')^{-1}$$

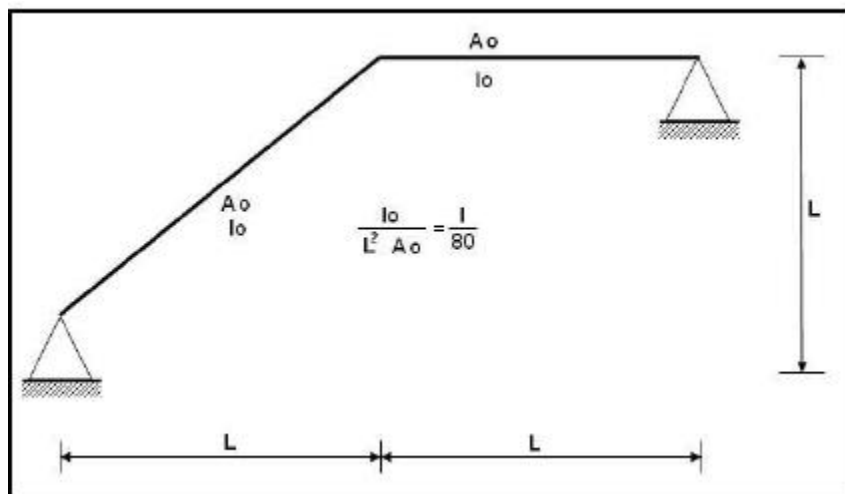
Pero

$$K = A' k A \quad \Rightarrow \quad K^{-1} = (A' k A)^{-1} = A^{-1} k^{-1} (A')$$

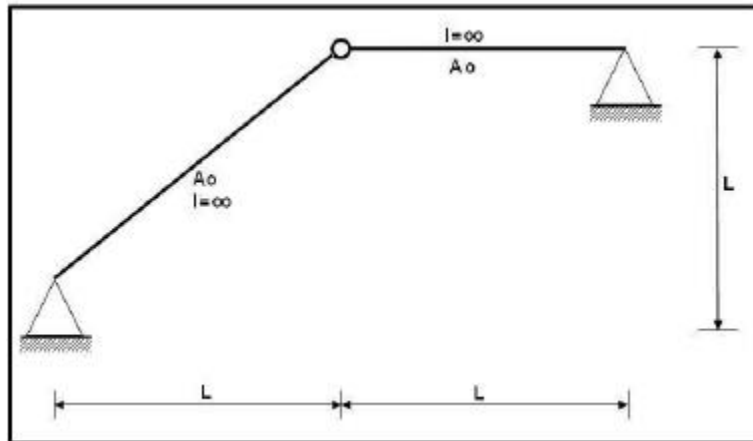
## 10.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Trabajando con la matriz de compatibilidad completa en los ejercicios 1 y 2 encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

### Ejercicio N.- 1

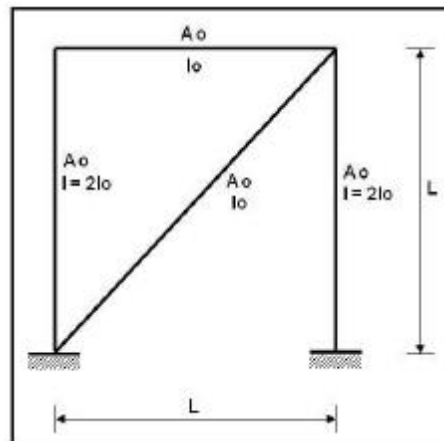


## Ejercicio N.- 2



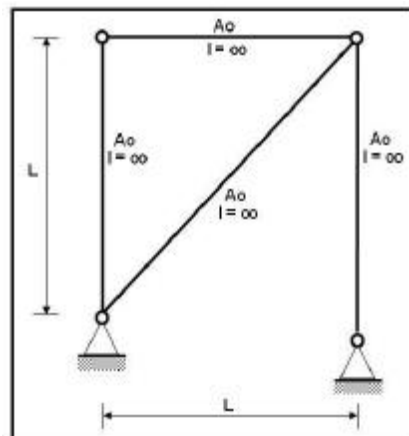
En los ejercicios 3 y 4 calcular la matriz de rigidez de la estructura trabajando con sub matrices.

## Ejercicio N.- 3



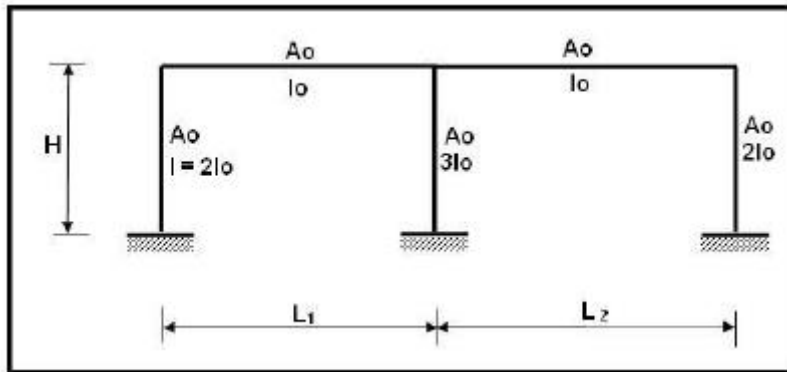
$$\frac{I_0}{A_0 L^2} = \frac{1}{100}$$

## Ejercicio N.- 4



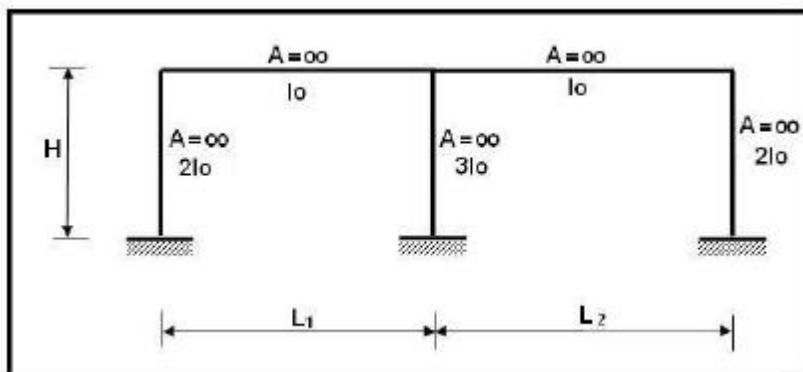
Calcular la matriz de rigidez de las estructuras de los ejercicios 5 y 6 empleando dos sistemas de coordenadas de elemento y comprobar que sale la misma matriz de rigidez.

Ejercicio N.- 5



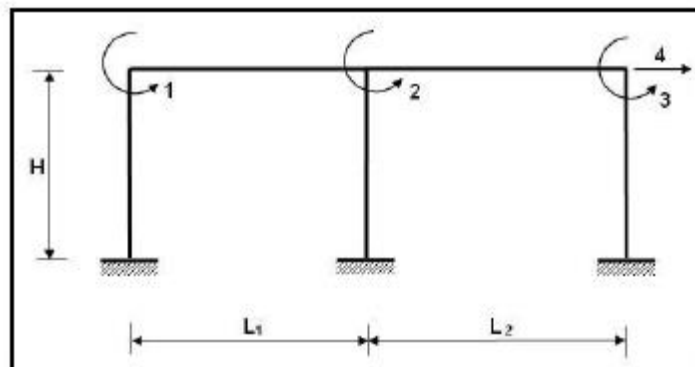
$$\frac{I_0}{A_0 H^2} = \frac{1}{90}$$

Ejercicio N.- 6

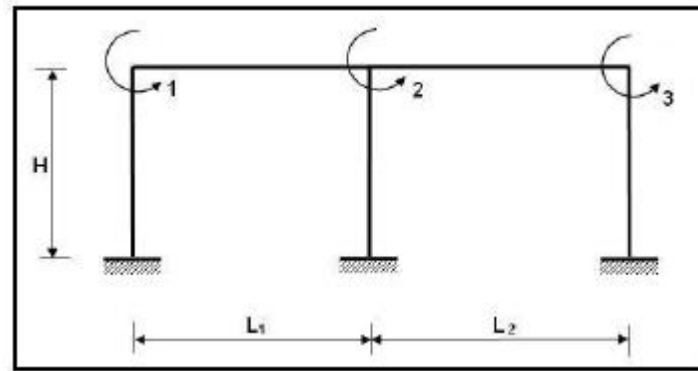


Ejercicio N.- 7

Calcular la matriz de rigidez de la estructura del ejercicio 6 considerando los siguientes sistemas de coordenadas generalizadas.



Caso a



Caso b

En el caso b no se ha considerado el desplazamiento lateral del pórtico. El objetivo del ejercicio es que el lector reconozca la forma de las matrices que resultan.

### Ejercicio N.- 8

Utilizando cualquier algoritmo o método encontrar la matriz de rigidez del ejercicio anterior. Se recomienda el Método de las Rigideces sucesivas si desea impóngase alguna carga y encuentre el desplazamiento y giros.

### Ejercicio N.- 9

Para el ejercicio resuelto N.-8 interpretar cual es el sistema  $Q^* - q^*$  y obtener la matriz triangular inferior unitaria.

### Ejercicio N.- 10

Demostrar que  $(A^t)^t = A$  y demostrar que  $(A B C)^t = C^t B^t A^t$ . En el ejemplo resuelto N.- 16 se consideró ya demostradas estas propiedades.

### Ejercicio N.- 11

Demostrar que la matriz de rigidez de una estructura es simétrica de dos formas. La primera por medio de la teoría de estructuras y la segunda con álgebra lineal, probando que  $K = K^t$ .

### Ejercicio N.- 12

Elaborar un diagrama de flujo que permita obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano cuyos elementos se consideran totalmente flexibles, siendo dato la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$



## CAPITULO 11

---

# EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

## RESUMEN

Se presenta la solución manual de pórticos planos y armaduras planas por el Método de los Desplazamientos, en forma matricial. Por otra parte con el propósito de que el lector siga paso a paso los cálculos efectuados se presentan programas desarrollados en **MATLAB**.

La solución del sistema de ecuaciones lineales es un aspecto muy importante a considerar en el Método de los Desplazamientos razón por la cual en éste capítulo se presenta en forma detenida su teoría, diagramas de flujo y tres programas de computación uno para ecuaciones asimétricas, otro para simétricas trabajando únicamente con arreglos de una dimensión y otro para ecuaciones simétricas con ancho de banda constante, todos ellos en **MATLAB**. Se destaca que la librería de **MATLAB** tiene un programa para resolver ecuaciones pero trabaja con toda la matriz de coeficientes lo cual limita el número de ecuaciones a resolver; en este caso para grandes sistemas de ecuaciones es muy eficiente el uso de los dos últimos programas que se presentan en este capítulo.

### 11.1 CONSIDERACIONES GENERALES

#### 11.1.1 Reseña Histórica

En 1954, Turner, Clough, Martin y Topp presentaron el Método de los Desplazamientos, también conocido como Método de las Rigideces pero no fue utilizado por cuanto en esa época el desarrollo informático era incipiente. La teoría general por ellos formulada dio origen a una serie de algoritmos para resolver estructuras con una simple regla de cálculo que era lo que se disponía por aquella época.

En el Ecuador en los años 1970 y 1980 se contaba con computadoras que ocupaban un gran espacio pero con muy poca capacidad de memoria en los cuales cada línea de instrucción se perforaba en una tarjeta de 80 caracteres, de tal manera que un simple programa era escrito en un paquete de unas 50 o 100 tarjetas las mismas que debían ser entregadas al operador del sistema para su procesamiento. Con ésta limitación no quedaba otra alternativa que usar algoritmos aproximados para resolver las estructuras en lugar de aplicar el Método de los Desplazamientos que estaba orientado al uso del ordenador.

Uno de esos algoritmos fue el Método de las Rigideces Sucesivas desarrollado por el Ing. Alejandro Segovia Gallegos con el cual se podía resolver pórticos planos con una regla de cálculo y los resultados obtenidos eran muy satisfactorios. Este Método fue muy utilizado no solo en el Ecuador sino en otros Países como Venezuela.

Entre 1980 y 1985 empieza el gran desarrollo informático, se suprime la entrada de datos por tarjetas, ahora los programas se graban en casetes y los computadores se conectan a un televisor. Realmente fue un gran avance en comparación con la forma con que se trabajaba antes, ahora es posible tener un ordenador en casa aunque sea muy primitivo con relación a los que se cuentan en el siglo XXI. Este avance informático obligó a incluir en las materias de Ingeniería Civil la cátedra de “Análisis Matricial de Estructuras” puesto que ya se vislumbraba que la Informática tendría gran desarrollo.

En la Escuela Politécnica del Ejército en 1982 se incluye la materia de “Análisis Matricial de Estructuras” en la carrera de Ingeniería Civil. En otras Universidades Ecuatorianas fue incluida años antes o años después lo cierto es que ya era factible pensar en programar una estructura en el computador.

Entre 1985 y 1995 hay un gran avance tecnológico en los computadores personales los famosos PC. Se cuenta con computadores con gran capacidad de memoria en los cuales uno ya no tiene que estar pensando en resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales por bloques debido a que no se tenía suficiente memoria en el ordenador. Se cuenta con computadores muy rápidos en los que ya no importa mucho el número de operaciones que se realicen porque las máquinas son muy rápidas.

A partir de 1995 continúa en forma vertiginosa el desarrollo informático de las PC cada vez son más poderosas. A fines del siglo XX las Pentium III son toda una sensación y dos años después pasan a ser obsoletas porque ya se tienen las Pentium IV. A partir de 1995 también se da el gran desarrollo de los computadores personales, cada año aparecen nuevas máquinas más pequeñas y por ende más livianas pero con mayor capacidad de memoria y rapidez de ejecución.

Todo éste desarrollo informático llevó a que la materia de Análisis Matricial de Estructuras sea una de las más importantes, a que el Método de los Desplazamientos sea estudiado con más detenimiento toda vez que permite programar la solución de estructuras en forma sencilla, empleando matrices.

El gran desarrollo informático no solo se tiene en los ordenadores también se tiene en los programas de computación. Por ejemplo antes de 1980 no se conocía el **MATLAB**, ahora es muy utilizado ya que permite programar con bastante facilidad. Pero aparte de que **MATLAB** es muy sencillo, el autor de este libro ha desarrollado el sistema de computación denominado **CEINCILAB** utilizando la librería de programas de **MATLAB** simplificando notablemente el cálculo de estructuras, en un capítulo posterior se indicará el uso de **CEINCILAB**.

### 11.1.2 Ideas generales del Método de los Desplazamientos

Para elaborar los diagramas de corte, momento y carga axial de un pórtico plano, por ejemplo, es necesario conocer el vector de coordenadas  $q$  y para ello se debe resolver la ecuación básica de estructuras, definida de la siguiente manera:

$$Q = K q \quad (11.1)$$

Donde  $Q$  es el vector de cargas generalizadas, estudiado en el capítulo IV;  $K$  es la matriz de rigidez de la estructura que se ha venido estudiando en los últimos capítulos.

La ecuación (11.1) representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales donde el vector  $Q$  es el término independiente, la matriz  $K$  es la matriz de coeficientes y el vector  $q$  es el vector de las incógnitas.

Al resolver una estructura en el computador la solución del sistema de ecuaciones es lo que más tiempo de máquina demanda, aproximadamente del 50% al 80% del tiempo total. Por lo tanto es indispensable que el lector al programar el método utilice el algoritmo más adecuado para resolver ecuaciones tomado en consideración que la ecuación (11.1) es un conjunto de ecuaciones simétricas y bandedas. La verdad es que con las computadoras tan rápidas con que se cuenta actualmente ya no es tan importante buscar el algoritmo más idóneo cuando se tienen pórticos de pocos pisos, con **MATLAB** la solución se halla de la siguiente manera.

$$q = K \backslash Q$$

De tal manera que es muy elemental resolver ecuaciones lineales con **MATLAB** pero el número de ecuaciones que se puede resolver es limitado. Cuando uno resuelve una estructura cuya matriz de rigidez tiene más de 1000 grados de libertad, no va a poder resolver en la forma indicada con **MATLAB** por lo que se debe conocer y programar otros algoritmos de solución, que se presentan más adelante.

Con el Método de los Desplazamientos se analizan estructuras formadas por barras que pueden ser lineales o especiales (subestructuras). Por otra parte, se puede resolver medios continuos por elementos finitos usando éste método. En éste último caso la solución del sistema de ecuaciones tiene más importancia toda vez que el número de ecuaciones a resolver estará de acuerdo con el grado de exactitud deseado en la solución. En efecto para un tipo de elemento dado la convergencia a la respuesta exacta se garantiza refinando la malla usada en el modelo y esto implica un mayor número de ecuaciones.

### 11.1.3 Comentarios del Método de los Desplazamientos

En base a lo anotado en los párrafos anteriores se debe manifestar lo siguiente:

- i) El Método de los Desplazamientos no es un método nuevo de cálculo fue desarrollado hace más de medio siglo pero que gracias al gran desarrollo informático de los últimos 30 años ha tenido gran actualidad.
- ii) Es un Método orientado a resolver estructuras usando el computador. Sin embargo en el presente capítulo y en algunos restantes los cálculos se harán a mano, esto con el propósito de que el lector tenga un conocimiento profundo del mismo para que posteriormente elabore sus propios programas o use en forma eficiente programas ya elaborados.
- iii) En éste libro se resuelven por éste método estructuras que tienen elementos lineales únicamente. Sin embargo el lector debe conocer que se pueden resolver estructuras compuestas por elementos que son subestructuras usando el método de los desplazamientos.
- iv) Problemas continuos, por ejemplo una Presa, pueden ser resueltos empleando el Método de los Desplazamientos, para esto se debe discretizar el dominio en un número finito de elementos. A ésta técnica se la conoce con el nombre de Elementos Finitos.
- v) El lector debe escoger el método más apropiado para la solución del sistema de ecuaciones que permite calcular el vector  $q$ . Es recomendable que en ciertos problemas se vea la forma de disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez de la estructura numerando en forma adecuada los nudos y por ende los grados de libertad.
- vi) Si el problema amerita se puede emplear la Técnica del Skyline para la solución del sistema de ecuaciones. Esta técnica se presentará en el capítulo.
- vii) En general para resolver una estructura existen dos métodos que son: el Método de las Fuerzas y el Método de los Desplazamientos. Siendo éste último el que se analiza en éste capítulo.
- viii) En el Análisis No Lineal Estático y Dinámico se presenta la solución de la ecuación (11.1) de tal manera que es importante su estudio.

## 11.2 SISTEMAS CINEMATICAMENTE DETERMINADOS

### 11.2.1 Indeterminación estática y cinemática

Para una estructura hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de lo que se ha fijado como incógnita. Cuando las acciones o cargas son las incógnitas como sucede en el Método de las Fuerzas se debe tener en cuenta la Indeterminación Estática. Ahora cuando los desplazamientos y giros son las incógnitas como sucede en el Método de los Desplazamientos se habla de Sistemas Cinemáticamente Determinados o Indeterminados.

Por estar estudiando el Método de los Desplazamientos, se debe explicar en primer lugar que es un Sistema Cinemáticamente Determinado y que es un Sistema Cinemáticamente Indeterminado. De ésta manera se deja la Indeterminación Estática para cuando se analice el Método de las Fuerzas.

### 11.2.2 Definición de la matriz $A$

En el capítulo IX se indicó que cuando la matriz  $A$  se puede determinar utilizando únicamente la geometría se dice que el sistema es "Cinemáticamente Determinado". Esto sirve de base para determinar si un sistema es cinemáticamente determinado o no.

Con el objeto de entender lo expuesto, se analiza la estructura indicada a la izquierda de la figura 11.1, es un pórtico formado por elementos totalmente flexibles. En la parte central y a la derecha se presentan los posibles sistemas de coordenadas  $Q - q$  con los cuales se puede resolver la estructura.

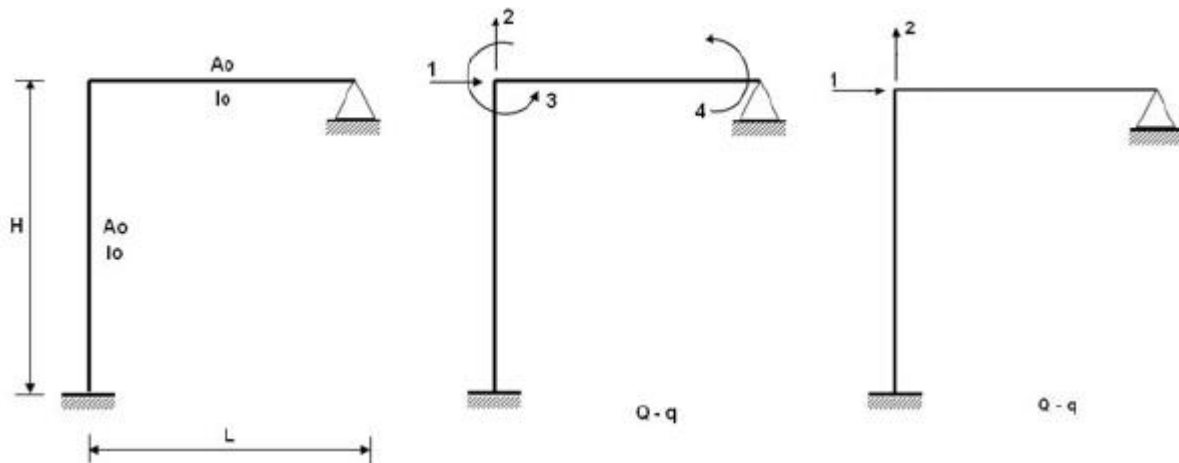


Figura 11.1 Pórtico con dos posibles sistemas de coordenadas.

La estructura en estudio tiene cuatro grados de libertad, en consecuencia aparentemente se dice que el sistema  $Q - q$  indicado en la parte central de la figura 11.1 es correcto y que el sistema  $Q - q$  indicado a la derecha de 11.1, es incorrecto. Ahora bien cuando se trabaja con el sistema presentado en la parte central de la figura 11.1 se dice que el sistema es estáticamente determinado ya que la matriz  $A$  se puede determinar usando solo la geometría.

En la gráfica de la derecha de la figura 11.1 se ha considerado dos coordenadas generalizadas menos. En éste caso se dice que el sistema es cinemáticamente indeterminado con dos grados de indeterminación. Aquí la matriz  $A$  no se la puede determinar directamente usando solo la geometría de la estructura. Evidentemente que para trabajar con éste sistema de coordenadas deben existir ciertas condiciones por ejemplo que las cargas que actúan en la estructura se encuentren únicamente en la dirección del sistema  $Q - q$  de la gráfica de la derecha de la figura 11.1. Nótese que los elementos son totalmente flexibles y sin embargo se puede trabajar con el sistema  $Q - q$  de la derecha de la figura 11.1 pero la solución es más complicada y con restricciones por lo que no se recomienda

este sistema, se ha presentado únicamente para explicar que es un sistema cinemáticamente indeterminado. En éste libro solo se resuelven estructuras cinemáticamente determinadas.

### 11.2.3 Procedimiento de solución

La forma como se resuelve una estructura cinemáticamente determinada por el Método de los Desplazamientos ya se lo ha estudiado en los capítulos anteriores, faltando únicamente indicar el procedimiento para resolver un problema completamente. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Seleccionar un sistema  $Q - q$  completo, sin considerar menos grados de libertad y un sistema  $P - p$  que sean apropiados.
2. Determinar la matriz  $A$  tal que  $p = A q$ .
3. Calcular la matriz de rigidez de la estructura  $K = \sum A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$ .
4. Obtener el vector de cargas generalizadas  $Q$ .
5. Resolver el sistema de ecuaciones  $Q = K q$  y encontrar el vector que contiene a los desplazamientos y giros  $q$ .
6. Utilizando la matriz  $A$  determinada en el paso 2. y el vector  $q$  encontrado en el paso anterior calcular las deformaciones para cada uno de los elementos  $p$  para lo cual se multiplica la matriz de compatibilidad de deformaciones por el vector de coordenadas generalizadas:  $A q$ .
7. Calcular las cargas internas en los elementos  $P$  utilizando la relación:  $P = k p$ . Donde  $k$  es la matriz de rigidez del elemento. Hasta aquí se ha resuelto el problema complementario.
8. Para obtener las fuerzas y momentos finales de la estructura, a los valores obtenidos en el paso anterior se debe sumar los correspondientes al problema primario. Por lo tanto la solución total es igual a la solución del Problema Primario más la solución del Problema Complementario.

Se puede apreciar que nada nuevo se ha definido en el presente apartado, hasta el numeral 4 se ha estudiado con bastante detenimiento en los capítulos anteriores. Por consiguiente en los ejercicios que se realicen se colocará cual es el resultado que se obtiene y cuando se crea conveniente se detallará un poco más su cálculo. Sobre la solución del sistema de ecuaciones el lector puede hacerlo utilizando cualquier método que se conozca o utilizando el programa **MATLAB**. Finalmente del paso 6 al 8, son únicamente operaciones matriciales las que se deben realizar. Por ahora se terminará el cálculo con la obtención de los momentos y fuerzas en el nudo inicial y final de un elemento, igualmente solo se calculan los desplazamientos y giros en los nudos, para obtener las ordenadas de la elástica en cualquier punto de un elemento se aplican las funciones de forma estudiadas en el capítulo III.

## 11.3 SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

### 11.3.1 Método de Gauss

Existen algunos métodos para resolver ecuaciones siendo el más empleado el de Gauss el mismo que se explica en dos etapas mediante la solución de un ejemplo. Previamente se advierte que en cualquier libro de Álgebra Lineal o de Métodos Numéricos el lector puede encontrar un desarrollo de la teoría de éste método. El autor lo que pretende es dar todas las facilidades para que el lector pueda elaborar su propio programa de computación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de ésta forma podrá seguir con la solución completa de una estructura cuando se desarrolle manualmente como en el presente capítulo.

- **EJEMPLO 1**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, paso a paso, por el Método de Gauss.

$$8 X_1 + 2 X_2 + 3 X_3 = 42 \quad \text{Ec (1)}$$

$$2 X_1 + 10 X_2 + X_3 = 50 \quad \text{Ec (2)}$$

$$3 X_1 + X_2 + 5 X_3 = 40 \quad \text{Ec (3)}$$

- **SOLUCIÓN**

Se denomina  $A$ , a la matriz de los coeficientes de las incógnitas;  $B$  el vector que contiene al término independiente y  $X$  al vector de las incógnitas. De tal manera que el sistema de ecuaciones se representa de la forma

$$A X = B$$

Al escribir en forma matricial el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Al emplear el Método de Gauss en una primera etapa se debe triangularizar el sistema es decir formar una matriz triangular superior de los coeficientes de las incógnitas, esto se logra de la siguiente manera:

- i) Obtener ceros en la primera columna. Para el efecto la primera ecuación se copia tal como ésta y luego se hace la Ec (2) -  $\frac{2}{8}$  de Ec (1).

$$\begin{array}{r} 2 X_1 + 10 X_2 + X_3 \\ = 50 \\ -2 X_1 - 0.5 X_2 - 0.75 X_3 = -10.5 \\ \hline 0 X_1 + 9.5 X_2 + 0.25 X_3 = 39.5 \end{array}$$

$$\frac{3}{8} \text{ Ec (1).}$$

Siendo ésta última la nueva ecuación (2). Ahora se realiza: Ec (3) -

$$\begin{array}{r} 3 X_1 + \\ X_2 + 5 X_3 = 40.0 \\ -3 X_1 - 0.75 X_2 - 1.125 X_3 = -15.75 \\ \hline 0 X_1 + 0.25 X_2 + 3.875 X_3 = 24.25 \end{array}$$

- ii) En una segunda sub etapa se obtienen ceros en la segunda columna del nuevo sistema de ecuaciones que después de la primera sub etapa ha quedado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 3.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 24.25 \end{bmatrix}$$

A partir del término  $A(2,2) = 9.5$  se obtendrá un cero en la segunda columna para lo cual se realiza Ec (3) -  $\frac{0.25}{9.5}$  Ec (2).

$$\begin{array}{r} 0.25 X_2 + 3.875 X_3 = 24.25 \\ -0.25 X_2 - 0.007 X_3 = -1.039 \\ \hline 0 X_2 + 3.868 X_3 = 23.211 \end{array}$$

Para el ejemplo se ha terminado la etapa de triangularización, el resultado obtenido es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta un diagrama de flujo de la primera etapa de triangularización del sistema pero para el caso de que se tengan N ecuaciones lineales.

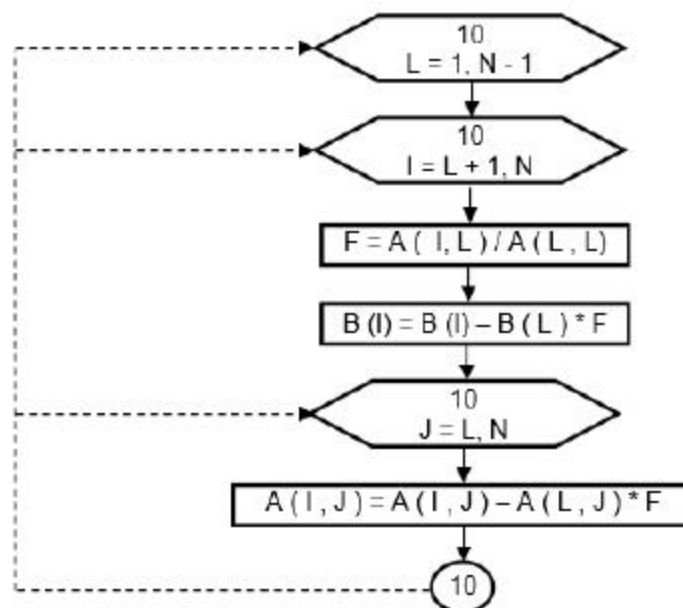


Diagrama de flujo para triangularizar el sistema

La segunda etapa corresponde a la solución del sistema para lo cual se calculan las incógnitas desde abajo hacia arriba, es decir usando la última ecuación se halla  $X_3$

$$X_3 = \frac{23.211}{3.868} = 6$$

El valor de  $X_3$

$$= 6 \quad X_2$$

se sustituye en la ecuación (2) y se obtiene

$$X_2 = \frac{-0.25 * 6 + 39.5}{9.5} = 4.0$$

Finalmente se reemplaza  $X_2$  y  $X_3$  en la ecuación (1) para calcular  $X_1$

$$X_1 = \frac{-2 * 4 - 3 * 6 + 42}{8} = 2.0$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$X = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 4.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo para la solución propiamente dicha se indica a continuación para el caso general de un sistema de N ecuaciones.

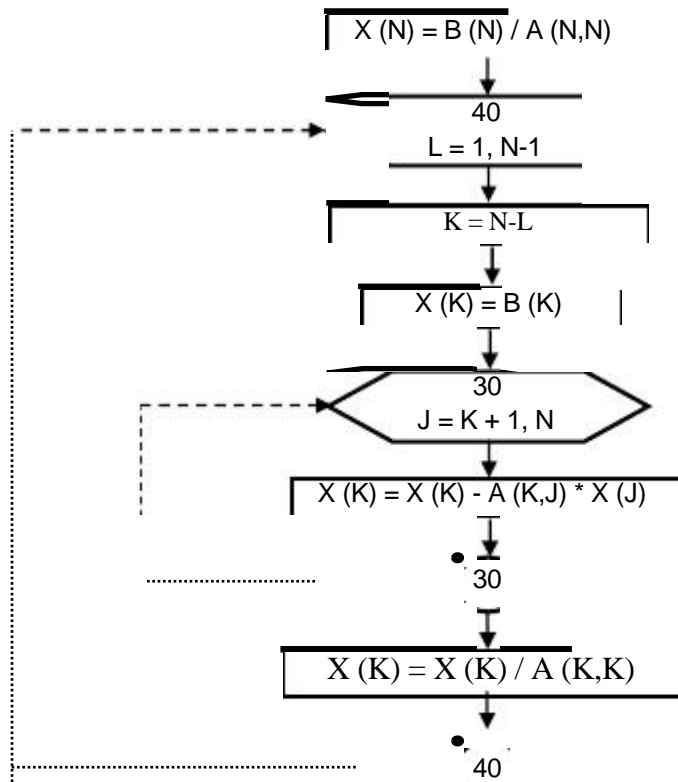


Diagrama de flujo para resolver el sistema triangularizado.

El diagrama de flujo presentado sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricas o asimétricas. Por otra parte si el lector en base a lo expuesto quiere implementar un programa de computación en cualquier lenguaje debe tener en cuenta es que se va a trabajar con los siguientes arreglos:  $A(N, N)$ ,  $B(N)$ ,  $X(N)$  donde N corresponde al número de ecuaciones a resolver. Nótese que la matriz de coeficientes es de N por N eso implica la utilización de bastante memoria, para resolver grandes sistemas de ecuaciones se va a tener problemas ya que ocupan mucho espacio de memoria.

A continuación se presenta un programa en **MATLAB** para resolver un sistema de ecuaciones lineales asimétrico.



```

function [X]=gaus (A,B)
% Programa para resolver ecuaciones lineales asimétricas
% de la forma: A X =B
% La matriz A es una arreglo de (n,n). Se resuelve con Método de Gauss
%
%           Dr. Roberto Aguiar
%           12 de junio de 2014
%.....
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, arreglo de (n,n)
% B   Es el termino independiente,un vector de n elementos
% X   Vector solución
N=length(B); %Numero de ecuaciones
% Triangularizacion del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:N
        F=A (I, L) /A (L, L) ;
        B (I)=B (I) -B (L) *F;
        for J=L:N
            A (I, J)=A (I, J) -A (L, J) *F;
        end
    end
end
% Solución del sistema
X (N)=B (N) /A (N, N) ;
for L=1:N-1
    K=N-L;
    X (K)=B (K) ;
    for J=K+1:N
        X (K)=X (K) -A (K, J) *X (J) ;
    end
    X (K)=X (K) /A (K, K) ;
end

```

La forma de uso del programa **gaus** con los datos del Ejemplo 1, es la siguiente:

- [X]=gaus (A,B)

```

>> A=[8 2 3; 2 10 1; 3 1 5]; B=[42 50 40];
>>[X]=gaus(A,B)

```

El programa reporta:  $X = [2 \quad 4 \quad 6]$

### 11.3.2 Matriz Simétrica

Cuando se tienen ecuaciones simétricas no es necesario introducir toda la matriz de coeficientes únicamente se da como datos la matriz triangular superior o la matriz triangular inferior de los coeficientes. Además se deberán crear los elementos que no se han leído.

Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales simétricas a más de trabajar con la matriz triangular superior no es necesario trabajar con un arreglo de dos dimensiones para la matriz  $A$  sino con un arreglo de una dimensión, para ello se debe reenumerar la posición de los elementos. Para explicar lo indicado se analiza a continuación la nomenclatura de una matriz  $A$  de 4 x 4 en los dos casos, trabajando con un arreglo de dos dimensiones y trabajando con un arreglo de una dimensión.

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & A(1,4) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) \\ A(4,1) & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}$$

Matriz  $A$  como un arreglo de dos dimensiones

$$\begin{bmatrix} A(1) & & & & \\ & A(2) & & & \\ & & A(3) & & \\ & & & A(4) & \\ & & & & A(5) \\ & & & & & A(6) \\ & & & & & & A(7) \\ & & & & & & & A(8) \\ & & & & & & & & A(9) \\ & & & & & & & & & A(10) \end{bmatrix}$$

Matriz  $A$  como un arreglo de una dimensión

Para el ejemplo analizado al trabajar con un arreglo de dos dimensiones se necesitan 16 posiciones de memoria para la matriz  $A$  en el segundo caso con un arreglo de una dimensión solo se necesitan 10 posiciones de memoria. En general se concluye que para un sistema de  $N$  ecuaciones se necesitan  $N \times N$  posiciones de memoria cuando se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y  $N \times (N+1) / 2$  para un arreglo de una dimensión.

Sea  $N$  el orden de la matriz de coeficientes de las incógnitas,  $I$  el número de fila de un término  $A(I,J)$ ,  $J$  el número de columna de un término  $A(I,J)$ .  $IJ$  es la numeración de la matriz de coeficientes de las incógnitas tratado como un arreglo de una dimensión.

Se define una fórmula que permite identificar la posición de los elementos de la matriz  $A$  en un arreglo de una dimensión a partir de la posición que tiene en el arreglo de dos dimensiones de la siguiente manera:

$$IJ = \frac{(I-1) * (2N-I)}{2} + J \quad (11.2)$$

En el Ejemplo 1 se terminó la triangularización del sistema de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

La variable  $X_3$  se obtiene directamente como  $X_3 = 23.211 / 3.868 = 6.00$  Pero para la variable  $X_2$  habría que proceder de la siguiente forma:

$$9.5 X_2 + 0.25 X_3 = 39.5 \quad \Rightarrow X_2 = \frac{39.5}{9.5} - \frac{0.25}{9.5} X_3$$

En consecuencia todos los términos de la derecha están divididos para 9.5 que es el término de la diagonal. Para el cálculo de  $X_1$  todos los términos de la derecha están divididos para 8.

$$X_1 = \frac{42}{8} - \frac{2}{8} X_2 - \frac{3}{8} X_3$$

Por éste motivo es mejor que la etapa de triangularización no termine en la forma indicada sino que termine así:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 9.5 & 0.25 \\ 0 & 0.0 & 3.868 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 39.5 \\ 23.211 \end{bmatrix}$$

En el programa **gaussim** que se presenta a continuación, la matriz **A** termina en la forma indicada en la etapa de triangularización esto se lo consigue con **A(LI)=F**, esto permite calcular directamente las incógnitas, pero el vector **B** de la etapa de triangularización no está dividido para el término de la diagonal en este programa. Por éste motivo en la etapa denominada *solución propiamente dicha* se tiene la instrucción **X(K)=X(K)/A(KK)**.

En **gaussim** se trabaja todo con arreglos de una dimensión de ésta forma se optimiza la cantidad de memoria. Se ha modificado un poco el programa **gaus** en lo referente a lo indicado en los párrafos anteriores para optimizar la solución. Nótese que básicamente es el mismo programa que **gaus** con dos salvedades la primera es que se trabaja únicamente con la matriz triangular superior y la segunda es que antes de usar una instrucción en que interviene la matriz **A** como un arreglo de una dimensión se debe colocar la fórmula de paso de 2 dimensiones a 1 dimensión.

```
function [X]=gaussim(A,B)
% Programa para resolver Ecuaciones Lineales Simétricas
% de la forma: A X =B
% La matriz A es un vector que contiene a los elementos de la matriz
% triangular superior. Se resuelve con Método de Gauss
%
%           Dr. Roberto Aguiar
%           13 de junio de 2014
%.....
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, arreglo de orden (n)
% B   Es el termino independiente, un vector de n elementos
% X   Vector solución
N=length(B); % Número de ecuaciones
NTOT=N*(N+1)/2;% Número total de elementos de la matriz A.
% Triangularización del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:N
        LI=((L-1)*(2*N-L)/2)+I;
        LL=((L-1)*(2*N-L)/2)+L;
        F=A(LI)/A(LL);
        B(I)=B(I)-B(L)*F;
        for J=I:N
            IJ=((I-1)*(2*N-I)/2)+J;
            LJ=((L-1)*(2*N-L)/2)+J;
            A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F;
            A(LI)=F;
        end
    end
end
% Solucion del sistema
X(N)=B(N)/A(NTOT);
for L=1:N-1
    K=N-L;
    X(K)=B(K);
    KK=((K-1)*(2*N-K)/2)+K;
```

```

X(K)=X(K)/A(KK);
for J=K+1:N
    KJ=(K-1)*(2*N-K)/2+J;
    X(K)=X(K)-A(KJ)*X(J);
end
end

```

Para el Ejemplo 1, la entrada de datos y uso del programa **gaussim** es la siguiente.

- $[X] = \text{gaussim}(A,B)$

```

>> A=[8;2;3;10;1;5];B=[42;50;40];
>> [X] = gaussim(A,B)

```

El programa reporta:  $X = [2 \quad 4 \quad 6]$

En el programa **gaussim** que se ha indicado, la matriz **A** muestra los términos de la matriz triangular superior, un término en cada fila de datos. En el análisis estructural la matriz **A** corresponde a la matriz de rigidez **K**. En un programa de ordenador se debe calcular **K** pensando en que algoritmo se va a utilizar en la solución del sistema de ecuaciones. Si se va a emplear un algoritmo similar al programa denominado en el libro **gaus** se debe programar **K** con un arreglo de dos dimensiones pero si se piensa utilizar el programa **gaussim** se debe programar **K** con un arreglo de una dimensión y solo se debe obtener la matriz triangular superior.

Si no se tiene en cuenta el método de solución del sistema de ecuaciones lineales, en la determinación de la matriz de rigidez de la estructura, no se optimiza el ahorro de memoria y el tiempo de solución.

### 11.3.3 Sistema de ecuaciones simétricas bandeadas

La explicación teórica se va a analizar en base al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 20 X_1 + 2 X_2 + X_3 &= 23 \\
 2 X_1 + 25 X_2 + 2 X_4 &= 29 \\
 X_1 + 30 X_3 - X_4 + 2 X_5 &= 32 \\
 2 X_2 - X_3 + 30 X_4 + X_5 &= 32 \\
 2 X_3 + X_4 + 18 X_5 &= 21
 \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial se tiene:

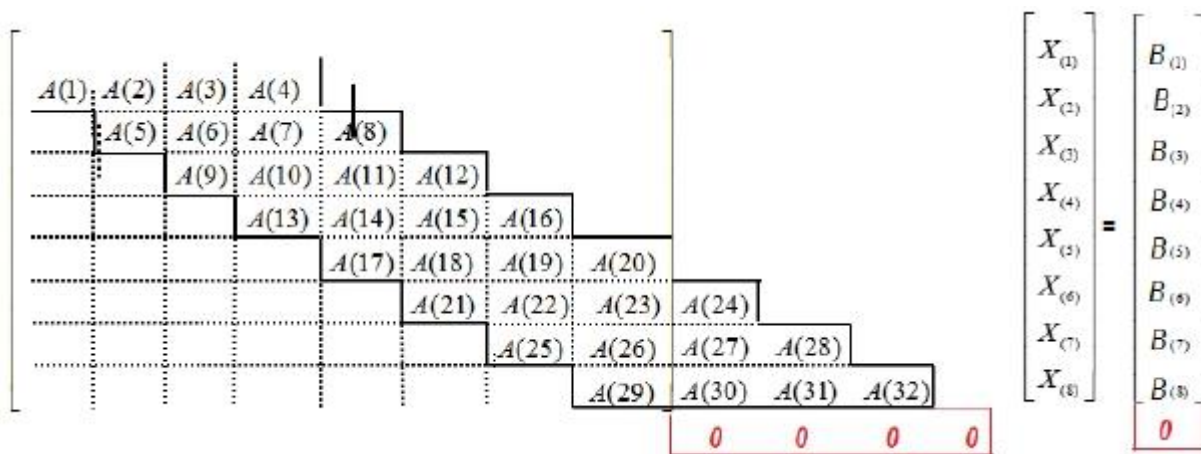
$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 25 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 30 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \\ 32 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo propuesto. Nótese:

- La matriz de coeficientes de las incógnitas **A** es simétrica con respecto a la diagonal principal.
- En la primera fila de la matriz **A** el último término diferente de cero, en éste caso el 1 se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal, incluye en el conteo al término de la diagonal principal.

- iii) En la segunda y tercera fila de la matriz  $A$  el último término diferente de 0 también se encuentra a tres posiciones de la diagonal principal. En la cuarta y quinta fila el último término diferente de cero se halla a 2 y 1 posición de la diagonal principal respectivamente.
- iv) El número de posiciones mayor de cada una de las diferentes filas, al que se encuentra un número diferente de 0 con respecto a la diagonal principal, define el ancho de banda de la matriz  $A$ . Para el presente caso éste valor es de 3.
- v) El ancho de banda de una matriz se lo representa con la letra **KB**.

En éste apartado se presentan ideas generales para resolver ecuaciones lineales con ancho de banda constante y un programa de computación. A continuación se analiza cómo se numeran los elementos para el caso de tener un sistema de 8 ecuaciones con ancho de banda de 4.



Identificación de la posición de los elementos.

En este punto es importante realizar las siguientes acotaciones:

- i) Los términos  $A(24)$ ,  $A(27)$ ,  $A(28)$ ,  $A(30)$ ,  $A(31)$ ,  $A(32)$  son nulos, se los crearon para tener un ancho de banda constante. Adicionalmente se crea una fila con ceros del mismo ancho de banda tanto en la matriz  $A$  y en el término independiente se coloca al final un cero.
- ii) Para identificar la posición (subíndice) de los elementos de la matriz  $A$  se utiliza la siguiente fórmula.

$$IJ = (KB - 1)(I - 1) + J \quad (11.3)$$

Donde  $I$  representa el número de la fila y  $J$  el número de la columna de la matriz  $A$  tratada como un arreglo de dos dimensiones. Por ejemplo en el sistema de 8 ecuaciones el último término se encuentra en la posición  $I = 8$ ,  $J = 8$  al trabajar con un arreglo de una dimensión corresponde al elemento de la posición  $IJ = 29$  que se obtiene con la ecuación presentada.  $IJ = (4 - 1)(8 - 1) + 8 = 29$ .

- iii) Si se calcula un pórtico plano de 10 pisos, por ejemplo, se estará pensando en resolver un sistema de 150 ecuaciones aproximadamente. Aquí se verá con mayor claridad la ventaja de utilizar un programa para armar la matriz de rigidez de la estructura con ancho de banda constante con un solo vector en el que añaden ceros en la última fila.

```

function [X]=gausbanda(A,B,KB,N)
% Programa para resolver ecuaciones lineales Simétricas con ancho de
% banda constante, de la forma: A X =B
% La matriz A es un vector que contiene a los elementos de la matriz
% triangular superior pero con ancho de banda constante que implica la
% creación de elementos ficticios, se debe indicar los elementos ficticios
% con ceros, a la derecha y una fila extra en la parte inferior.
% Se resuelve con Método de Gauss
%
%           Dr. Roberto Aguiar
%           13 de junio de 2014
%.....
% A   Es la matriz de coeficientes del sistema, se da como un vector con
%     los elementos ficticios de la derecha y parte inferior.
% B   Es el término independiente, un vector de n+1 elementos. El último
%     elemento del vector B es cero (elemento ficticio)
% KB  Es el ancho de banda de la matriz de coeficientes
% N   Número de ecuaciones
% X   Vector solución cuyo último valor es cero(elemento ficticio)
% Triangularización del sistema
for L=1:N-1
    for I=L+1:L+KB-1;
        LL=(KB-1)*(L-1)+L;
        LI=(KB-1)*(L-1)+I;
        F=A(LI)/A(LL);
        for J=I:L+KB-1
            IJ=(KB-1)*(I-1)+J;
            LJ=(KB-1)*(L-1)+J;
            A(IJ)=A(IJ)-A(LJ)*F;
        end
        A(LI)=F;
    end
end
for L=1:N-1
    for I=L+1:L+KB-1
        LI=(KB-1)*(L-1)+I;
        B(I)=B(I)-B(L)*A(LI);
    end
end
% Solución del sistema
for K=1:N
    L=N+1-K
    LL=(KB-1)*(L-1)+L
    B(L)=B(L)/A(LL)
    if(N-L>=KB)
        NN=KB+L-1;
    else
        NN=N;
    end
    for I=L+1:NN
        LI=(KB-1)*(L-1)+I
        B(L)=B(L)-A(LI)*B(I)
    end
end
end
X=B;

```

El programa **gausbanda** que se ha presentado sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales simétrico con ancho de banda constante y trabajando con arreglos de una dimensión. Se han hecho ligeras modificaciones al programa **gaussim** una de ellas es que la modificación del vector **B** en la etapa de triangularización se lo realiza aparte, esto es conveniente hacerlo para cuando se tiene

que resolver varios sistemas de ecuaciones en las cuales cambian únicamente los términos independientes.

Lo importante es darse cuenta en el programa **gausbanda** que la ecuación reductora, reduce las siguientes  $KB - 1$  ecuaciones.

Para el Ejemplo 1, los datos y uso del Programa **gausbanda** son:

- **[X] = gausbanda (A,B,KB,N)**

```
>> A=[8;2;3;10;1;0;5;0;0;0;0]; B=[42;50;40;0]; KB=3; N=3;
>> [X] = gausbanda (A,B,KB,N)
```

El programa reporta:  $X = [2 \ 4 \ 6 \ 0]$

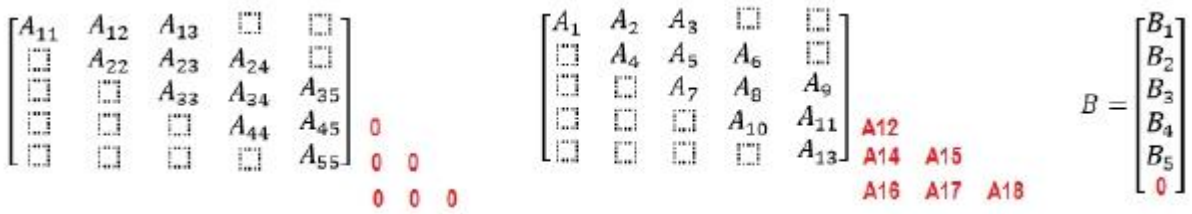
El último cero corresponde a la fila ficticia que se dio como dato.

• **EJEMPLO 2**

En el siguiente sistema de ecuaciones, presente dos arreglos de la matriz de coeficientes *A*, numerados con dos índices y con un índice, y un arreglo del vector *B* de acuerdo a la forma que considera **gausbanda**. Indique además los vectores *A*,*B* que se hallan al final de la etapa de triangularización y finalmente presente la entrada de datos y resultados del programa **gausbanda**.

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 25 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 30 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \\ 32 \\ 32 \\ 21 \end{bmatrix}$$

• **SOLUCION**



Arreglo con 2 Índices

Arreglo con 1 Índice

Vector B

Se aprecia que el ancho de banda  $KB = 3$  y que se debe dar como datos una fila adicional de ceros a más de los ceros que se encuentran a la derecha de la matriz *A*. En la parte central se indica el vector *A* y la numeración de los elementos del 1 al 18. Al observar estos dos arreglos y con la siguiente tabla se aspira a explicar la triangularización.

Descripción de la Triangularización		
Ecuación reductora	Ecuaciones Reducidas	Próxima ecuación reductora
1	2y3	2
2	3y4	3
3	4y5	4
4	5	

Cuando se está con la ecuación reductora 4 interviene la fila de elementos ficticios 0, ya que las filas reducidas deberían ser la 5 y 6 pero la sexta fila es la que tiene ceros.

Los vectores *A*,*B* que se hallan, luego de la etapa de triangularización, son:

$$A^t = [20 \quad 0.1 \quad 0.05 \quad 24.8 \quad -0.004 \quad 0.08 \quad 29.94 \quad -0.03 \quad 0.06 \quad 29.8 \quad 0.03 \quad 0 \quad 17.8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$B^t = [23 \quad 26.70 \quad 30.9577 \quad 30.8721 \quad 17.8283 \quad 0]$$

En el vector  $A$  no se escribió todos los decimales por falta de espacio. Finalmente a continuación se indica la entrada de datos y resultados, del programa.

```
>> A=[20; 2; 1; 25; 0; 2; 30; -1; 2; 30; 1; 0; 18; 0; 0; 0; 0; 0];
>> B=[23; 29; 32; 32; 21; 0];
>> KB=3;N=5
>> [X]=gausbanda(A,B,KB,N)
```

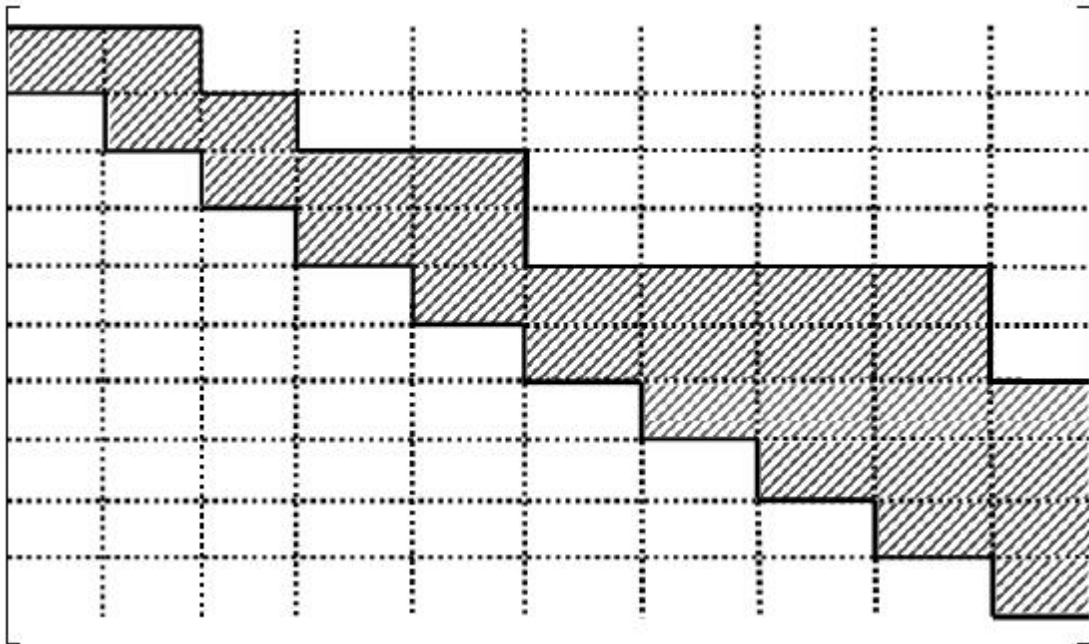
$$X^t = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

### 11.3.4 Otros métodos

Es importante conocer la forma del sistema de ecuaciones que se va a resolver para así seleccionar el algoritmo más adecuado, optimizando de ésta manera: capacidad de memoria y tiempo de ejecución. Por ejemplo si la matriz de coeficientes de un sistema de 10 ecuaciones tiene la forma que se indica a continuación y además es:

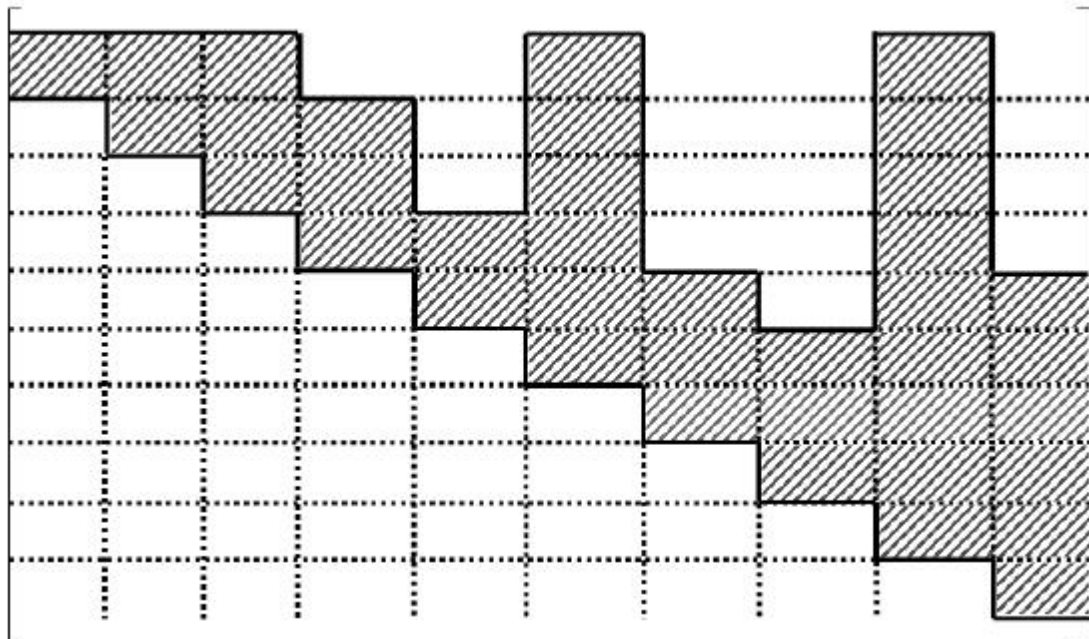
- i) Simétrica con respecto a la diagonal principal.
- ii) Ancho de banda variable que es el caso más común de solución.
- iii) Si el sistema se resuelve empleando el programa **gaus** que es para trabajar con toda la matriz se requiere 100 posiciones de memoria para la matriz  $A$  de un sistema de 10 ecuaciones. Si se utiliza el programa **gaussim** que es para matrices simétricas se necesitan 55 registros para la matriz  $A$ . Con el programa **gausbanda** se necesitan 50 posiciones de memoria toda vez que el ancho de banda es 5 y con el algoritmo de ancho de banda variable en el cual se han indicado las cantidades diferentes de cero se requieren 28 posiciones de memoria.
- iv) Al resolver con ancho de banda variable el usuario debe dar como dato el ancho de banda de cada una de las filas de la matriz  $A$ . Por lo tanto el usar este algoritmo supone conocer exactamente la forma del sistema de ecuaciones a resolver.





**Matriz de coeficientes, con ancho de banda variable, por filas**

Se considera otro ejemplo en el cual se tiene también 10 ecuaciones lineales pero la matriz  $A$  tiene la siguiente forma



**Matriz de coeficientes con ancho de banda variable por columnas**

- i) Simétrica con respecto a la diagonal.
- ii) En los métodos presentados tanto la triangularización como la solución se realizó por filas. Para sistemas de ecuaciones que tienen la forma presentada conviene resolver por columna.
- iii) Al resolver el sistema de ecuaciones por columnas los cambios que se deben hacer son mínimos con respecto a los programas presentados.

Es intención del autor dejar planteadas en el lector inquietudes sobre otras formas de solución de un sistema de ecuación por el Método de Gauss para que ampliara sus conocimientos consultando libros especializados de Métodos Numéricos.

Adicionalmente se desea que cuando se resuelve una estructura la elección del sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$  se la realice de la forma más óptima, que sepa que al usar un determinado sistema de coordenadas se tendrá una matriz de rigidez con determinado ancho de banda y de determinada forma para que utilice el programa de solución de ecuaciones más adecuado.

Como aclaración debe manifestarse que en el apartado 11.3 se ha utilizado la letra  $A$  para representar la matriz de coeficientes de las incógnitas, en lo posterior de éste capítulo la letra  $A$  será la matriz de compatibilidad de deformaciones definida de la siguiente manera:  $p = A q$

## 11.4 PÓRTICOS PLANOS

### 11.4.1 Cargas solo en los nudos

Cuando en la estructura solo actúan cargas en los nudos no existe el problema primario. Por lo tanto la solución del problema se reduce a la solución del problema complementario.

#### • EJEMPLO 3

Resolver el pórtico plano mostrado en la figura 11.2, que tiene solo cargas en las juntas; si las columnas son de 30 x 30 cm. y la viga de 20 x 30 cm. Se considera un módulo de elasticidad  $E=2173706.513 \text{ T/m}^2$ . Todos los elementos se consideran totalmente flexibles.

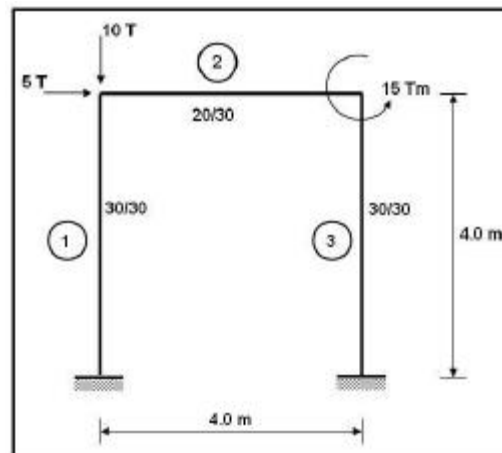


Figura 11.2 Estructura de ejemplo 3.

#### • SOLUCIÓN

El dígito que se encuentra dentro del círculo de la figura 11.3 corresponde a la numeración de los elementos. En la figura 11.3 se presenta a la izquierda el sistema  $Q - q$  y a la derecha el sistema  $P - p$ . En el elemento 1 el nudo inicial se ha considerado en la parte inferior y en el elemento 3 en la parte superior; en la viga el nudo inicial a la izquierda.

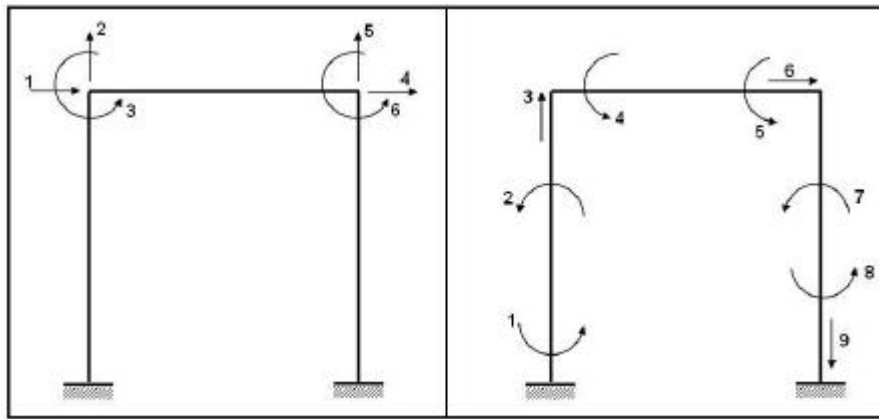


Figura 11.3 Coordenadas de la estructura  $Q - q$  y de los elementos  $P - p$

Las propiedades geométricas del pórtico se indican en la tabla 11.1

Tabla 11.1 Descripción de los elementos de ejemplo 4.

Elemento	b	h	$A = b h$	$I = \frac{b h^3}{12}$
	(m)	(m)	(m <sup>2</sup> )	(m <sup>4</sup> )
1	0.30	0.30	0.090	0.00068
2	0.20	0.30	0.060	0.00045
3	0.30	0.30	0.090	0.00068

La matriz  $A$  definida por la relación  $p = A q$  resulta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{I}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{I}{4} & 1 & 0 & -\frac{I}{4} & 0 \\ 0 & \frac{I}{4} & 0 & 0 & -\frac{I}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el sistema  $P - p$  de la figura 11.3, la matriz de rigidez de un elemento en el cual se desprecia el efecto del corte es la siguiente:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar valores se tiene:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura  $K = \sum_{i=1}^3 A^{(it)} k^{(i)} A^{(i)}$  resulta:

$$K = \begin{bmatrix} 32882.785 & & & & & & \\ & 0.000 & 49091.852 & & & & \\ & 554.296 & 366.813 & 2456.289 & & & \\ -32605.648 & & 0.000 & 0.000 & 32882.785 & & \\ & 0.000 & -183.407 & -366.814 & 0.000 & 49091.852 & \\ & 0.000 & 366.813 & 489.084 & 554.296 & -366.814 & 2456.289 \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

Para las cargas mostradas en la figura 11.2 el vector de cargas generalizadas resulta:

$$Q = \begin{bmatrix} 5.00 \\ -10.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$$

No se ha detallado el cálculo de las matrices  $A$ ,  $K$ ,  $Q$  debido a que en los capítulos anteriores se ha tratado cada uno de ellos en forma extensa. Sin embargo en futuros Ejemplos de este Capítulo si se lo realizará, no de todos pero de algunos para que el estudiante repase.

Para obtener el vector de coordenadas generalizadas  $q$  se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q = K q$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$q = \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

Para ahorrar espacio a futuro se escribirán la transpuesta de los vectores de cargas generalizadas  $Q$  y de coordenadas generalizadas  $q$

Ahora se va a calcular las deformaciones  $p$  que se producen en los elementos debido a las cargas exteriores para lo cual se multiplica la matriz  $A$  por el vector de coordenadas  $q$

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006271 \\ -0.000225 \\ -0.002422 \\ 0.006130 \\ 0.000020 \\ 0.005242 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \\ \hline -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \\ \hline 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix}$$

Nótese que el vector resultante  $p$  está compuesto por sub vectores. En efecto las tres primeras cantidades corresponden a las deformaciones del elemento 1, las tres siguientes al elemento 2 y las tres últimas al elemento 3.

Una vez encontradas las deformaciones  $p$  se pasa al cálculo de las cargas internas  $P$  de cada uno de los elementos multiplicando la matriz de rigidez del miembro  $k$  por el vector  $p$ .

▪ **Elemento 1**

$$P^{(1)} = k^{(1)} p^{(1)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001568 \\ -0.000854 \\ -0.000225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6865 \\ -0.1035 \\ -11.0044 \end{bmatrix}$$

▪ **Elemento 2**

$$P^{(2)} = k^{(2)} p^{(2)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 & 0.000 \\ 489.0840 & 978.1679 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 32605.5977 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.002483 \\ 0.005181 \\ -0.000141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1052 \\ 3.8535 \\ -4.5974 \end{bmatrix}$$

▪ **Elemento 3**

$$P^{(3)} = k^{(3)} p^{(3)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 & 0.000 \\ 739.0602 & 1478.1204 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 48908.3966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.006775 \\ 0.001533 \\ 0.000020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.1472 \\ 7.2731 \\ 0.9782 \end{bmatrix}$$

El significado y convención de signos de las cargas internas de los elementos  $P$  se indica en la figura 11.4. Con ésta indicación a continuación se indican en líneas continuas los valores encontrados y con líneas entrecortadas los valores de los cortantes y carga axial que se requiere para que exista equilibrio en los elementos.

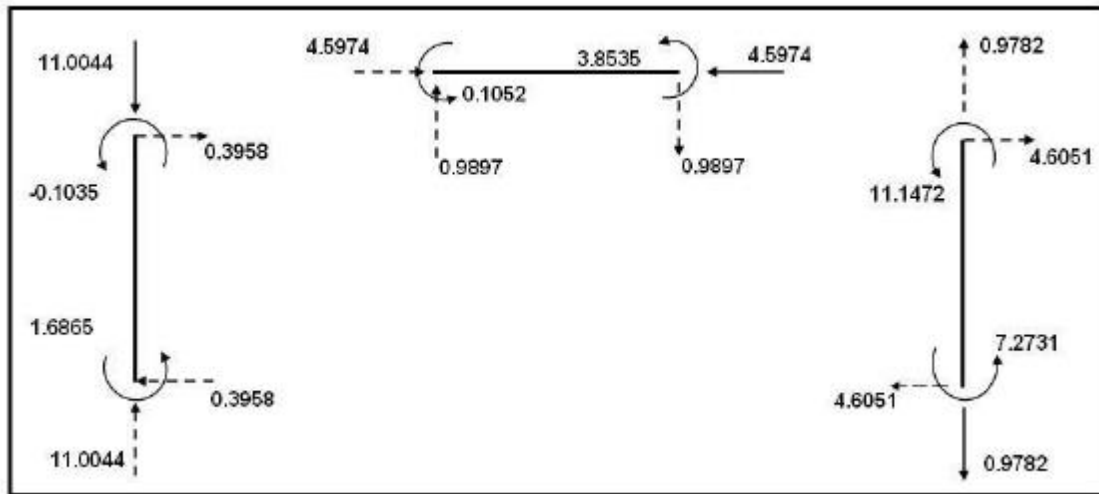


Figura 11.4 Solución de la estructura del Ejemplo 3.

Las fuerzas indicadas están en Toneladas y los momentos en Toneladas por metro. Como una comprobación del ejercicio realizado se debe verificar que en cada nudo exista equilibrio, como se ve en la figura 11.5

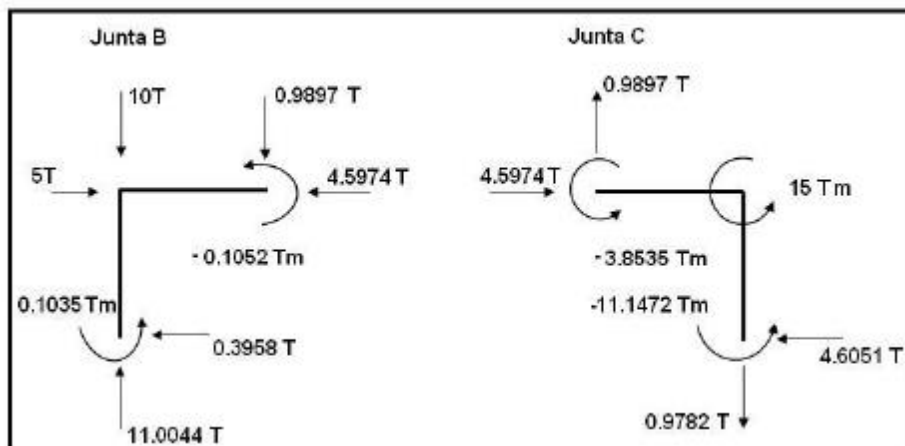


Figura 11.5 Equilibrio de los nudos.

Como se puede apreciar en cada junta o nudo existe equilibrio. Estrictamente no se tiene que  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M = 0$  por los decimales con que se ha trabajado al resolver con un computador el pequeño error desaparece. Se deja al lector obtener las reacciones exteriores del pórtico.

### 11.4.2 Cargas en los elementos

- EJEMPLO 5**

Resolver completamente la siguiente estructura, indicada en la figura 11.6, por el Método de los Desplazamientos, si las columnas son de 30/30 cm., y las vigas de 25/25 cm. El valor del módulo de elasticidad es  $E = 2400000 T/m^2$ .

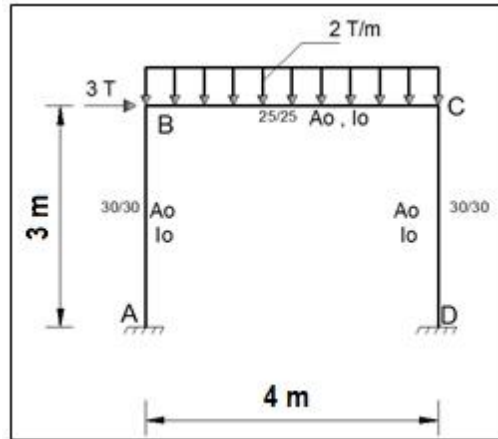


Figura 11.6 Estructura con carga en elemento y nudo.

▪ SOLUCIÓN

A la izquierda de la figura 11.7 se indica el sistema de coordenadas generalizadas de la estructura  $Q - q$ ; a la derecha se indica el sistema de coordenadas de los elementos,  $P - p$ .

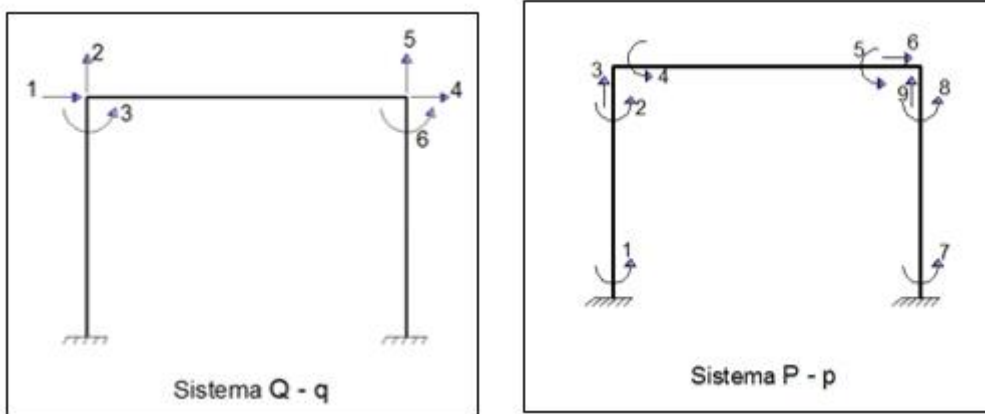


Figura 11.7 Sistemas de coordenadas de la estructura y de los elementos.

La matriz de compatibilidad de deformaciones es la siguiente.

$$A = \begin{bmatrix}
 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 0 \\
 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{matrix} \right\} \\
 \left. \begin{matrix} A^{(3)} \end{matrix} \right\}
 \end{matrix}$$

En la tabla 11.2 se indica el área y el momento de inercia de los elementos de la estructura.



Tabla 11.2 Area y Momento de Inercia de los elementos

Elemento	b	h	A=b*h	$I = \frac{b * h^3}{12}$
	(m)	(m)	(m <sup>2</sup> )	(m <sup>4</sup> )
1	0.3	0.3	0.09	0.000675
2	0.25	0.25	0.0625	0.000325
3	0.3	0.3	0.09	0.000675

Con los datos de la tabla 11.2 se obtuvo las matrices de rigidez de los elementos, que se han denominado  $k_c$  para las columnas y  $k_v$  para la viga.

$$k_c = \begin{bmatrix} 4EI_c L & 2EI_c L & 0 \\ 2EI_c L & 4EI_c L & 0 \\ 0 & 0 & EA_c L_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix}$$

$$k_v = \begin{bmatrix} 4EI_v L & 2EI_v L & 0 \\ 2EI_v L & 4EI_v L & 0 \\ 0 & 0 & EA_v L_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 781 & 391 & 0 \\ 391 & 781 & 0 \\ 0 & 0 & 37500 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura  $K$  se halla con la siguiente expresión.

$$K = \sum_{i=1}^3 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)}$$

$$K = A^{(1)t} k_c A^{(1)} + A^{(2)t} k_v A^{(2)} + A^{(3)t} k_c A^{(3)}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38220 & 0 & 1080 & -37500 & 0 & 0 \\ 0 & 72146 & 293 & 0 & -146 & 293 \\ 1080 & 293 & 2941 & 0 & -293 & 391 \\ -37500 & 0 & 0 & 38220 & 0 & 1080 \\ 0 & -146 & -293 & 0 & 72146 & -293 \\ 0 & 293 & 391 & 1080 & -293 & 2941 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas  $q$  se halla por medio del Problema Primario y Complementario.

$$q^i = [3 \quad -4 \quad 2.667 \quad 0 \quad -4 \quad 2.667]$$

De la solución del sistema de ecuaciones:

$$K q = Q$$

Se encuentra.

$$q^i = [0.0041 \quad 0 \quad -0.0024 \quad 0.0040 \quad -0.0001 \quad -0.0003]$$

Las deformaciones en cada uno de los elementos  $p$ , se halla de la siguiente manera

$$p^{(1)} = A^{(1)} q$$

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p^{(2)} = A^{(2)} q$$

$$p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0024 \\ -0.0003 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

$$p^{(3)} = A^{(3)} q$$

$$p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0 \\ -0.0024 \\ 0.0040 \\ -0.0001 \\ -0.0003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0011 \\ -0.0001 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas y momentos  $P$  en cada uno de los elementos se obtiene multiplicando la matriz de rigidez del elemento por las deformaciones; de esta forma finaliza el problema complementario.

$$P^{(1)} = k^{(1)} p^{(1)}$$

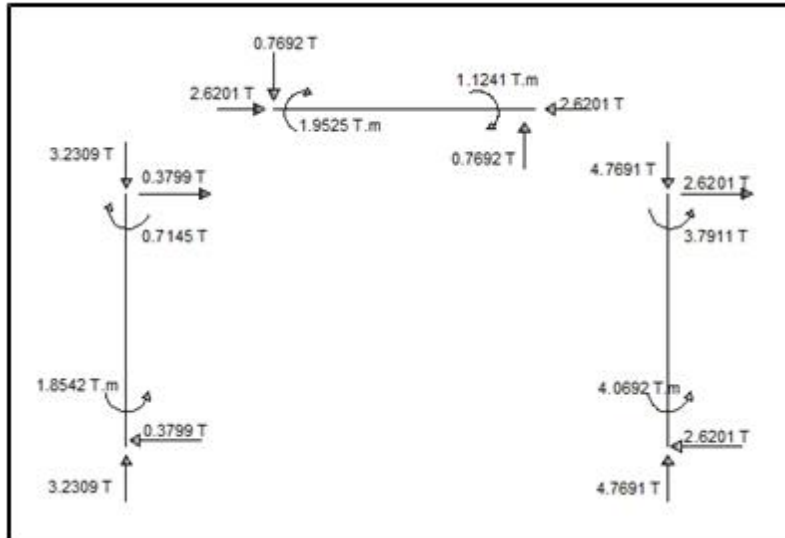
$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0014 \\ -0.0010 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8542 \\ -0.7145 \\ -3.2309 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = k^{(2)} p^{(2)}$$

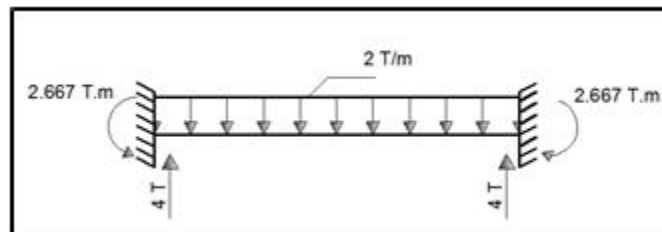
$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 781 & 391 & 0 \\ 391 & 781 & 0 \\ 0 & 0 & 37500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0024 \\ -0.0003 \\ -0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.9525 \\ -1.1241 \\ -2.6201 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = k^{(3)} p^{(3)}$$

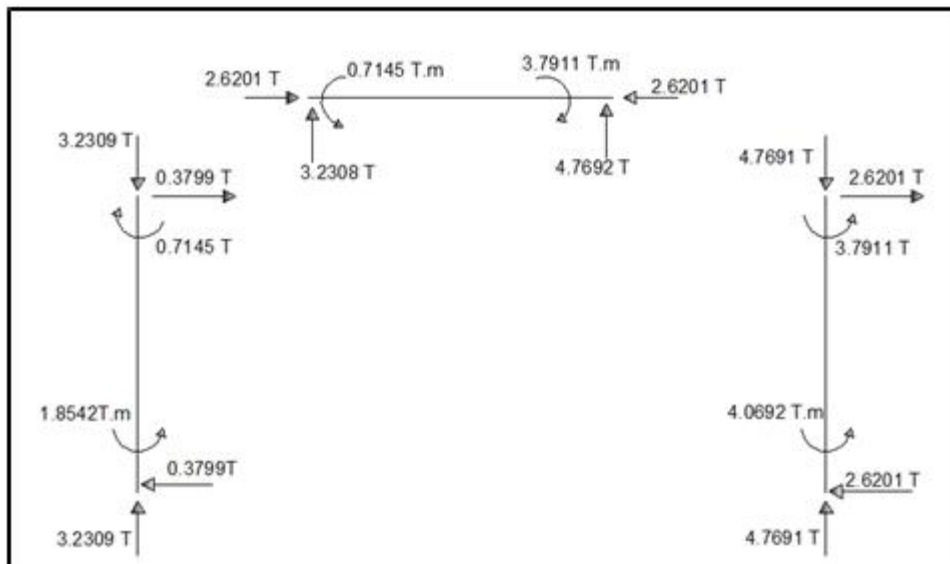
$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 2160 & 1080 & 0 \\ 1080 & 2160 & 0 \\ 0 & 0 & 72000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0011 \\ -0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0692 \\ 3.7911 \\ -4.7691 \end{bmatrix}$$



Problema Primario



Problema Complementario



Problema Primario más Problema Complementario.  
 Figura 11.8 Fuerzas y Momentos en los elementos

En la parte superior de la figura 11.8 se ha colocado la solución del Problema Complementario, que se ha resuelto, destacando que el vector  $P$  reporta el momento en el nudo inicial, final y la fuerza axial en el nudo final, el cortante y la fuerza axial en el nudo inicial se obtienen por equilibrio.

En la parte central de la figura 11.8 se tiene el Problema Primario, como el único elemento que tiene carga es la viga solo se indican sus valores en dicho elemento.

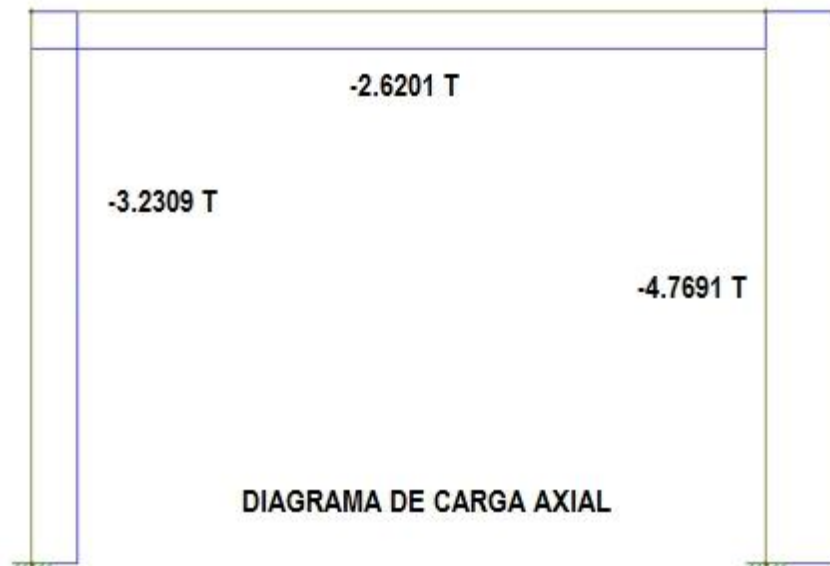
Finalmente en la parte inferior de la figura 11.8 se tiene la solución total, la misma que se halla sumando algebraicamente el Problema Primario más el Problema Complementario.



Figura 11.9 Equilibrio de nudos.

Para comprobar que está bien realizado el Ejemplo se debe verificar el equilibrio de los nudos, esto se presenta en la figura 11.9, a la izquierda del nudo B, donde actúa una fuerza horizontal de 3 T., y a la derecha del nudo C.

En la figura 11.10 se presentan los respectivos diagramas de carga axial, corte y momento, para la viga se debe considerar la carga uniforme distribuida. Finalmente se indica el programa que se realizó en **MATLAB** para resolver el Ejemplo.



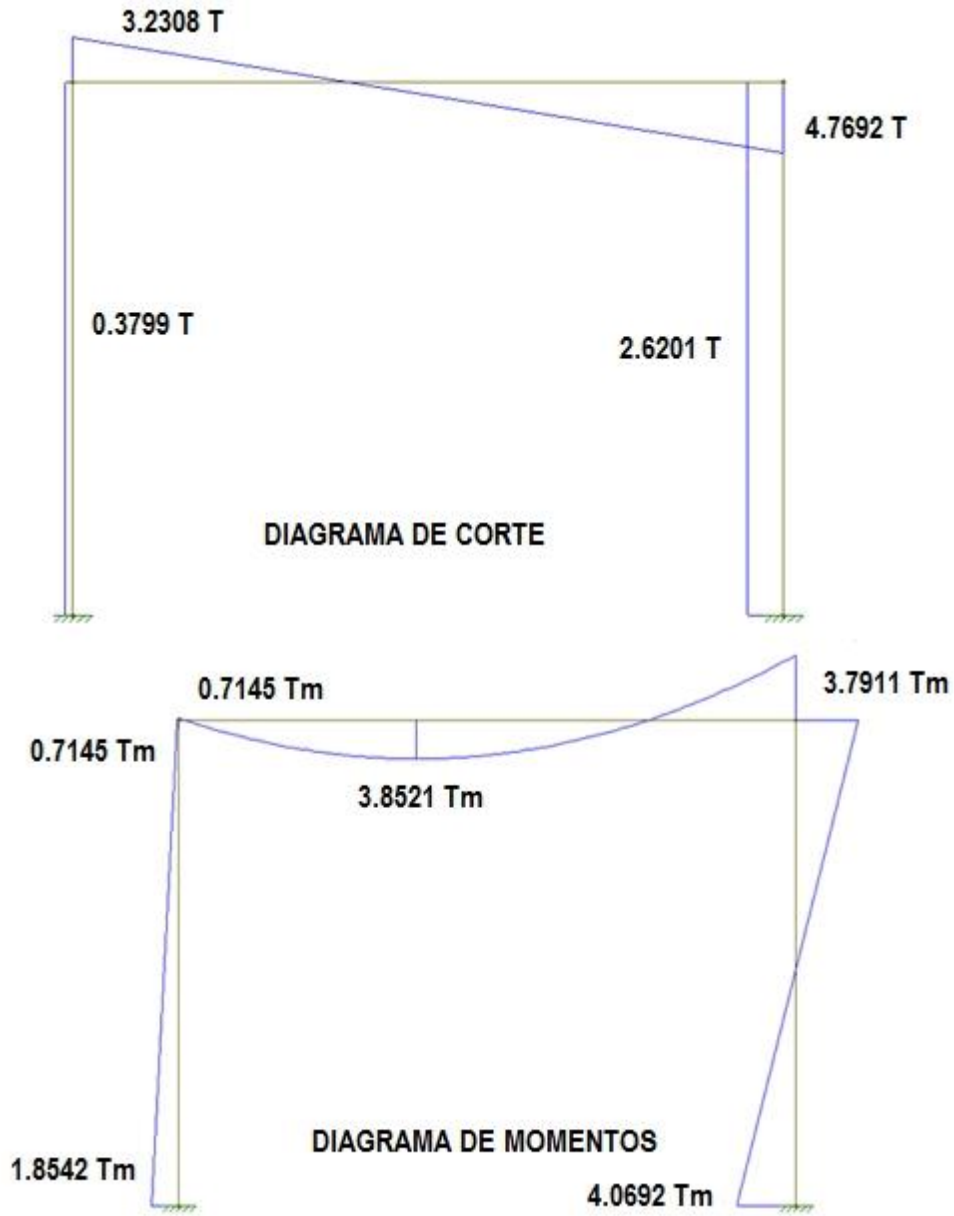


Figura 11.10 Diagrama de carga axial, corte y momento.

```

% Solución de pórtico por el Método de los Desplazamientos
%      Dr. Roberto Aguiar
%      5 de Junio de 2014
%.....Matriz A.....
A1=[1/3 0 0 0 0 0; 1/3 0 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 0];
A2=[0 1/4 1 0 -1/4 0; 0 1/4 0 0 -1/4 1; -1 0 0 1 0 0];
A3=[0 0 0 1/3 0 0; 0 0 0 1/3 0 1; 0 0 0 0 1 0];
%.....Matriz de rigidez de miembro.....
bc=0.3;hc=0.3;bv=0.25;hv=0.25;E=2400000;Lc=;Lv=4;
Ac=bc*hc;Ic=bc*hc^3/12; Av=bv*hv; Iv=bv*hv^3/12;
KC=[4*E*Ic/Lc   2*E*Ic/Lc   0;
    2*E*Ic/Lc   4*E*Ic/Lc   0;
    0           0           E*Ac/Lc];
KV=[4*E*Iv/Lv   2*E*Iv/Lv   0;
    2*E*Iv/Lv   4*E*Iv/Lv   0;
    0           0           E*Av/Lv];
%....Matriz de rigidez de la estructura...
    
```

```

K=A1'*KC*A1+A2'*KV*A2+A3'*KC*A3;
%...Vector de cargas generalizadas.....
Q=[3;-4;-2.667;0;-4;2.667];
%..Solucion de ecuaciones.....
q=K\Q;
%...Calculo de deformaciones p.....
p1=A1*q;p2=A2*q;p3=A3*q;
%...Problema Complementario. Fuerzas P...
P1=KC*p1;P2=KV*p2;P3=KC*p3;

```

## • EJEMPLO 6

En la figura 11.11 se tiene un pórtico con voladizos y varias cargas sobre la viga. Las columnas son de 30/40 cm., y las vigas de 30/30 cm. El módulo de elasticidad  $E = 2400000 \frac{T}{m^2}$ . Resolver el portico por el Método de los Desplazamientos considerando que los elementos son totalmente flexibles.

## ▪ SOLUCIÓN

Hay dos formas de resolver este ejemplo, la primera es encontrando los momentos y fuerzas de empotramiento de la carga que gravita en los volados, cambiarles de sentido para que actúen como cargas puntuales en el pórtico de esta manera no se considera el volado en el análisis estructural; la segunda forma es considerar los voladizos y para ello se tiene que definir grados de libertad en los extremos de los volados. Se va a resolver de la primera forma.

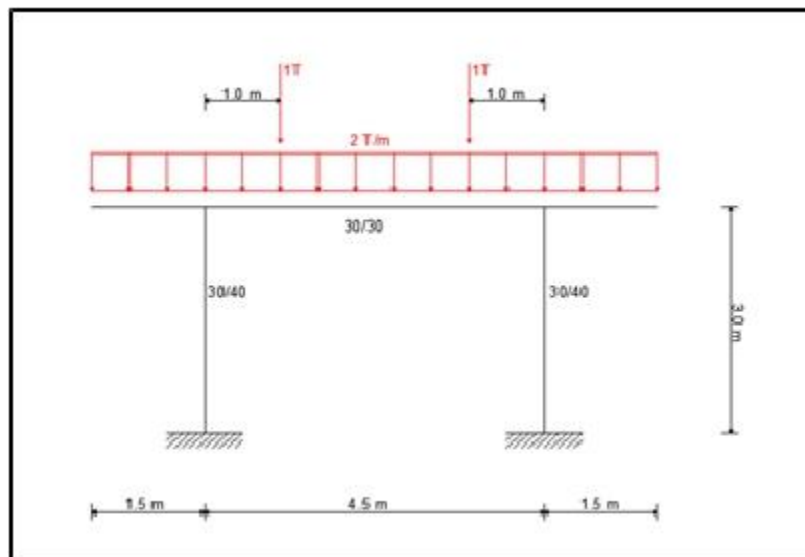


Figura 11.11 Pórtico con voladizo y varias cargas sobre elemento.

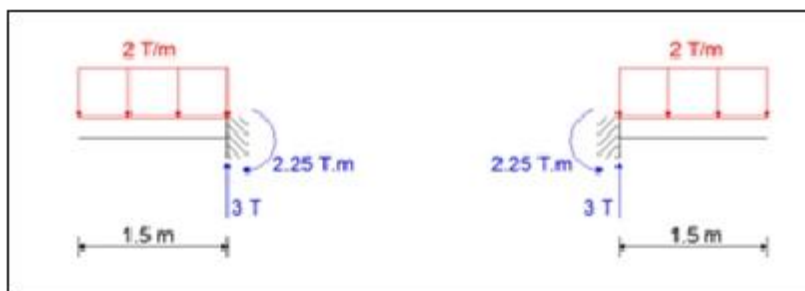


Figura 11.12 Acciones de empotramiento perfecto en los voladizos.

En la figura 11.12 se presentan las acciones de empotramiento perfecto del voladizo las mismas que pasan al pórtico como cargas puntuales, cambiando el signo como se indica en la figura 11.13.

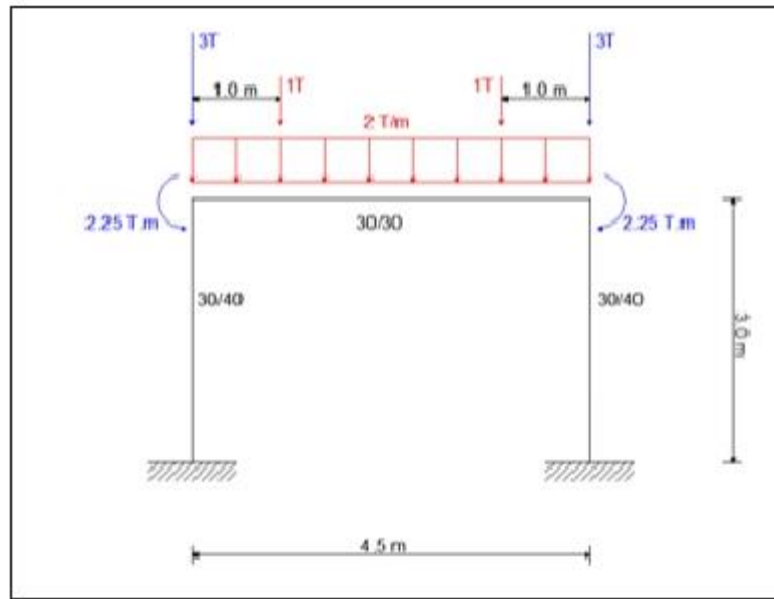


Figura 11.13 Estructura sin voladizos pero con cargas equivalentes.

A la izquierda de la figura 11.14 se presenta el sistema de coordenadas generalizadas de la estructura y a la derecha las coordenadas de los elementos.

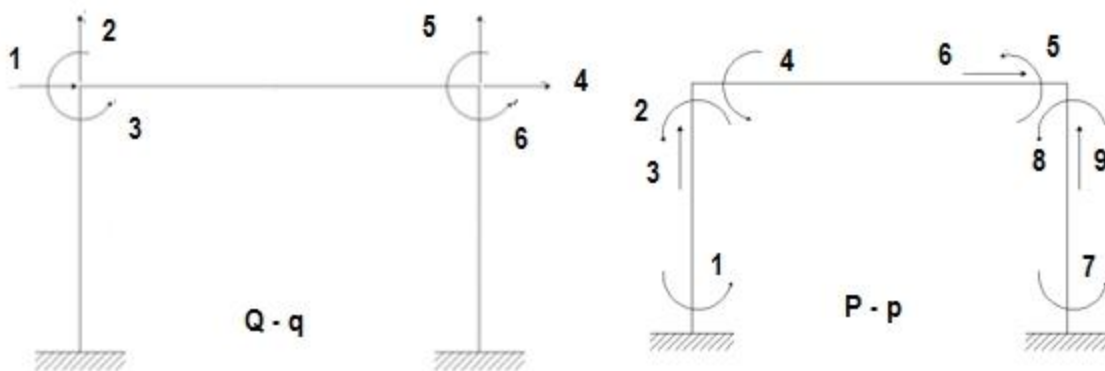


Figura 11.14 Coordenadas de la estructura y de los elementos.

Al mirar el sistema de coordenadas  $P - p$  se puede inferir que la columna izquierda es el elemento 1, la viga el elemento 2 y la columna derecha el elemento 3. Con esta acotación en la tabla 11.3 se indica el cálculo del área y el momento de inercia a flexión.

Tabla 11.3 Propiedades de los elementos de estructura de Ejemplo 6

Elemento	b	H	A=b.h	I=b.h <sup>3</sup> /12
	[m]	[m]	[m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]
1	0.30	0.40	0.12	0.0016
2	0.30	0.30	0.09	0.00068
3	0.30	0.40	0.12	0.0016

La matriz de compatibilidad de deformaciones,  $A$  es la siguiente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \frac{1}{4.5} & 1 & 0 & -\frac{1}{4.5} & 0 \\
 0 & \frac{1}{4.5} & 0 & 0 & -\frac{1}{4.5} & 1 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \left. \vphantom{\begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} \mathbf{A}^{(1)} \\
 \left. \vphantom{\begin{matrix} \frac{1}{4.5} \\ \frac{1}{4.5} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} \mathbf{A}^{(2)} \\
 \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{matrix}} \right\} \mathbf{A}^{(3)}
 \end{array}$$

La matriz de rigidez de los elementos al no considerar el efecto de corte  $\emptyset$ , son las siguientes.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\
 \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\
 0 & 0 & EA
 \end{bmatrix}$$

Al reemplazar los datos de la tabla 11.3, se tiene:

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix}
 5120 & 2560 & 0 \\
 2560 & 5120 & 0 \\
 0 & 0 & 96000
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix}
 1440 & 720 & 0 \\
 720 & 1440 & 0 \\
 0 & 0 & 48000
 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura  $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^{(i)T} \mathbf{k}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)}$  resulta:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 49907 & 0 & 2560 & -48000 & 0 & 0 \\
 0 & 96213 & 480 & 0 & -213 & 480 \\
 2560 & 480 & 6560 & 0 & -480 & 720 \\
 -48000 & 0 & 0 & 49707 & 0 & 2560 \\
 0 & -213 & -480 & 0 & 96213 & -480 \\
 0 & 480 & 720 & 2560 & -480 & 6560
 \end{bmatrix}$$

Con el propósito de tener el ejercicio completo, se indica a continuación el cálculo del vector de cargas generalizadas, estudiado en el Capítulo 4. Se lo va a determinar empleando el algoritmo denominado Problema Primario y Complementario, para lo cual en la figura 11.15 se indica el Problema Primario donde se aprecian las fuerzas de fijación  $R_i$  que hacen  $q = 0$ .



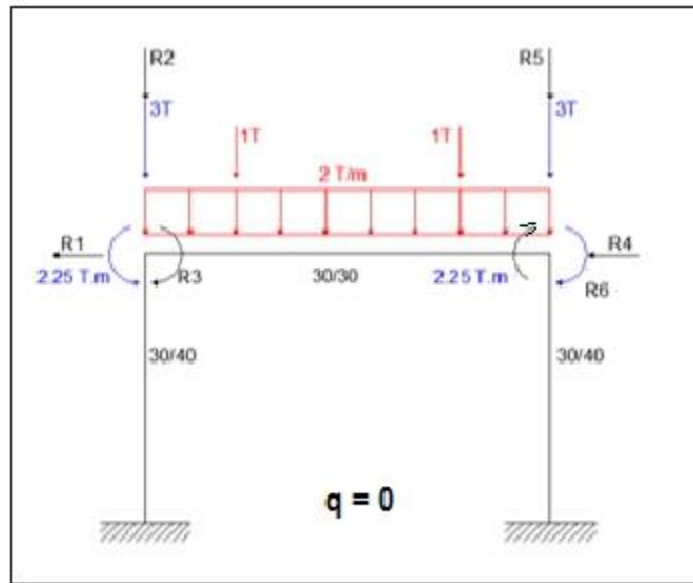


Figura 11.15 Problema Primario.

Sobre la viga gravita una carga uniforme distribuida de 2 T/m, y dos cargas puntuales de 1 T., a un metro del nudo inicial y final respectivamente. Para encontrar las acciones de empotramiento perfecto se aplica el principio de superposición, trabajando con cada una de las cargas por separado como se indica en la figura 11.16. Para las cargas puntuales lo mejor es utilizar las funciones de forma para hallar las fuerzas y momentos de empotramiento.

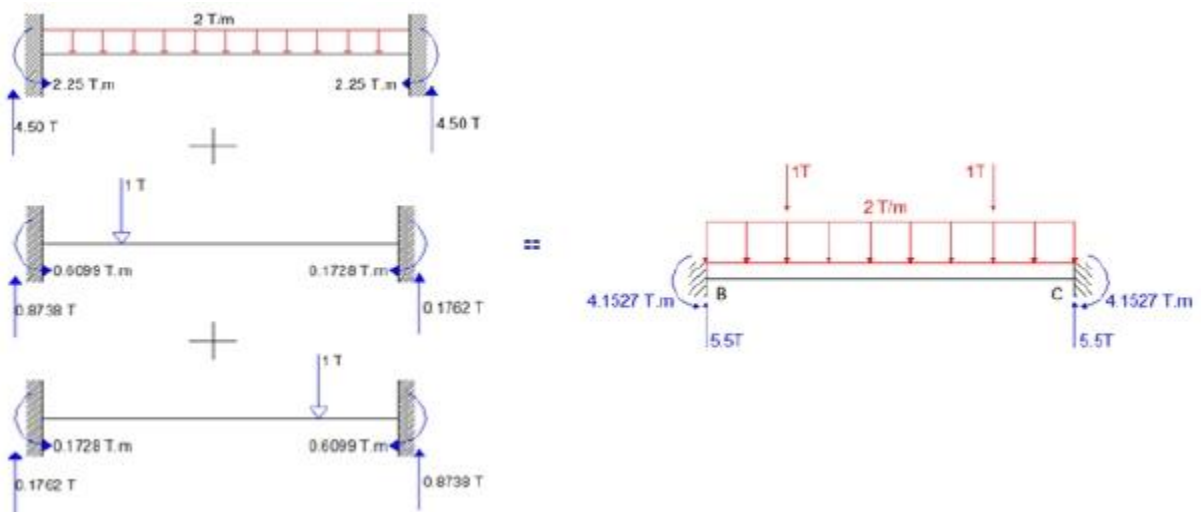


Figura 11.16 Cálculo de las acciones de empotramiento perfecto.

Para determinar las cargas de fijación  $R_i$  se debe efectuar el equilibrio de los nudos, los mismos que se indican en la figura 11.17.

**Equilibrio de nudo B**

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_1 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow R_2 = -8.5 T$$

$$\sum M = 0 \rightarrow R_3 = -1.9027 T.m$$

**Equilibrio de nudo C**

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_4 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow R_5 = -8.5 T$$

$$\sum M = 0 \rightarrow R_6 = 1.9027 T.m$$

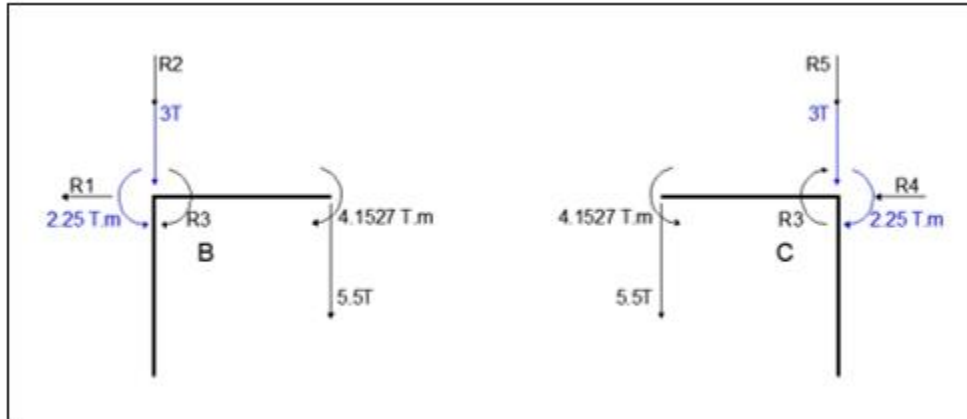


Figura 11.17 Fuerzas y momentos que gravitan en los nudos.

El vector de cargas  $Q$  resulta.

$$Q^i = [0 \quad -8.5 \quad -1.9027 \quad 0 \quad -8.5 \quad 1.9027]$$

La solución del sistema de ecuaciones:  $Kq = Q$ , reporta.

$$q^i = 10^{-3} [0.0086 \text{ m} \quad -0.0885 \text{ m} \quad -0.3296 \text{ rad} \quad -0.0086 \text{ m} \quad -0.0885 \text{ m} \quad 0.3296 \text{ rad}]$$

El cálculo de las deformaciones  $p$  y cargas en los elementos  $P$  se indica a continuación

$$p^{(1)} = A^{(1)} \cdot q = \begin{bmatrix} 0.0029 \\ -0.3267 \\ -0.0885 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$p^{(2)} = A^{(2)} \cdot q = \begin{bmatrix} -0.3296 \\ 0.3296 \\ -0.0173 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$p^{(3)} = A^{(3)} \cdot q = \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.3267 \\ -0.0885 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

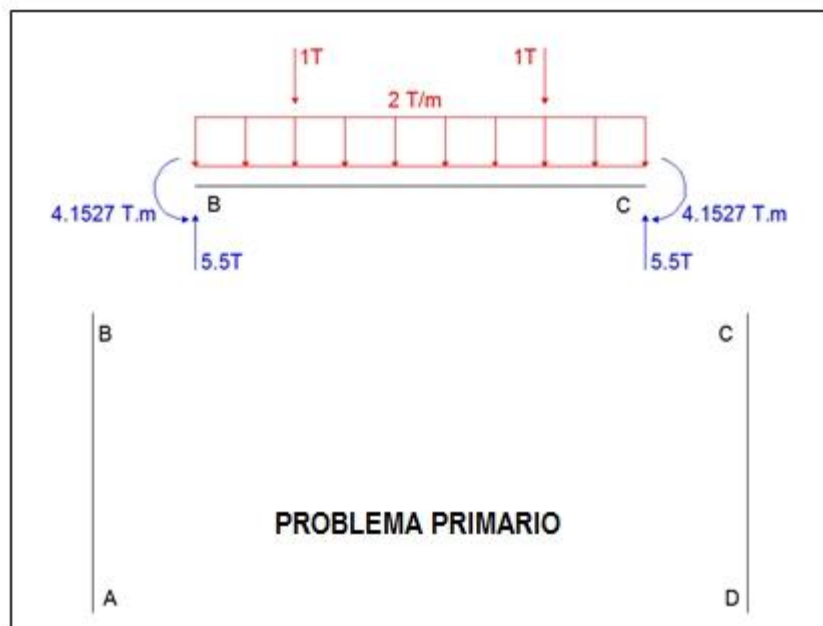
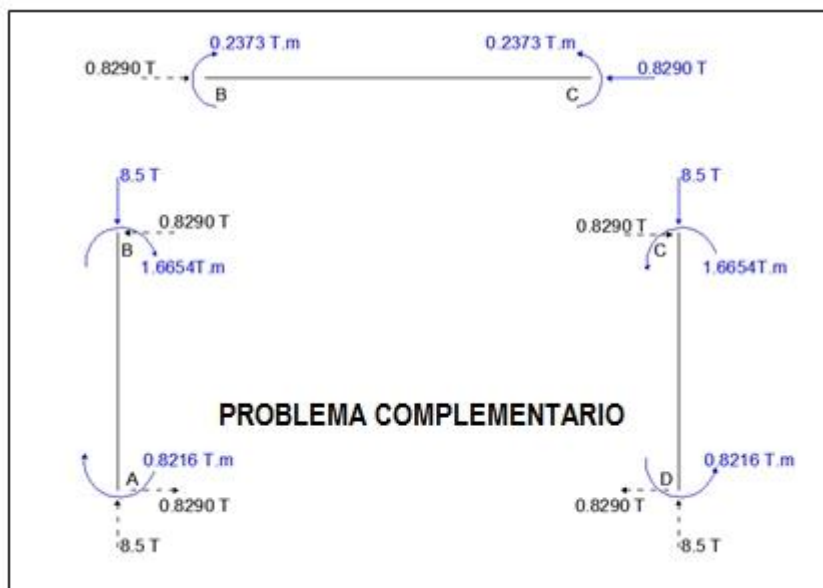
Para obtener las cargas  $P$  se trabaja con la matriz de rigidez de los elementos.

$$p^{(1)} = k^{(1)} \cdot p^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.8216 \text{ T.m} \\ -1.6654 \text{ T.m} \\ -8.5 \text{ T} \end{bmatrix}$$

$$p^{(2)} = k^{(2)} \cdot p^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.2373 \text{ T.m} \\ 0.2373 \text{ T.m} \\ -0.8290 \text{ T} \end{bmatrix}$$

$$p^{(3)} = k^{(3)} \cdot p^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.8216 \text{ T.m} \\ 1.6654 \text{ T.m} \\ -8.5 \text{ T} \end{bmatrix}$$

En la parte superior de la figura 11.18 se indican las cargas  $P$  encontradas, las mismas que se han presentado con línea continua; con entrecortada se indica el equilibrio de elementos. Posteriormente, se indican las cargas del Problema Primario y finalmente la solución final que es igual a la suma del Problema Primario más complementario.



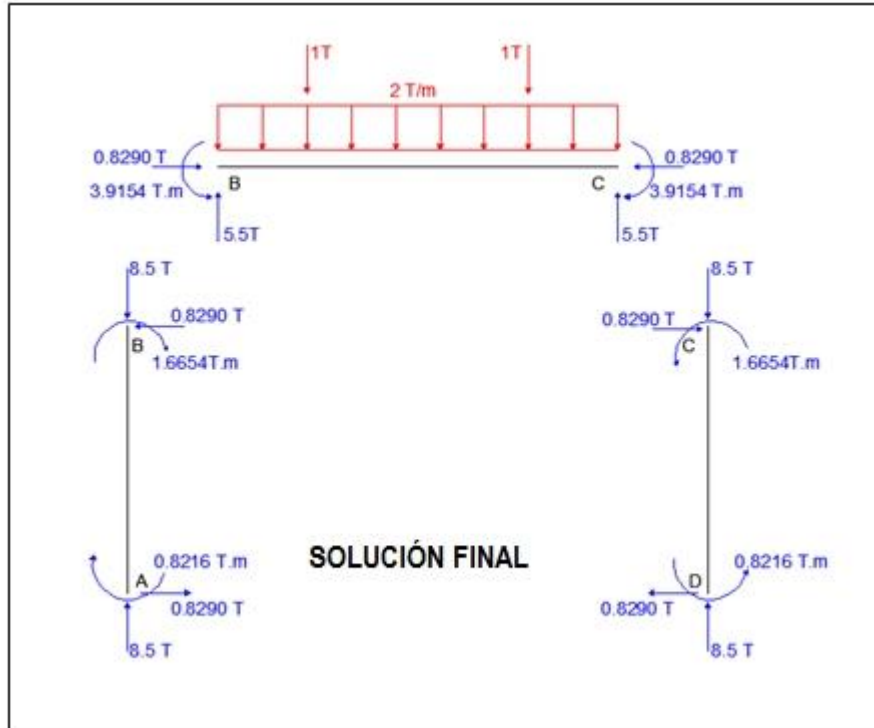


Figura 11.18 Solución de Problema Complementario, Primario y Solución Final.

### 11.4.3 Pórticos con elementos axialmente rígidos

Una hipótesis muy común dentro del cálculo estructural es considerar a los elementos de un pórtico plano como si fueran axialmente rígidos  $A = \infty$ . Esta hipótesis da buenos resultados con edificios de pequeña altura, al trabajar con ésta hipótesis se reduce notablemente el número de grados de libertad.

- EJEMPLO 7**

Resolver la estructura de la figura 11.19 pero considerando que todos sus elementos son axialmente rígidos. En la figura 11.20 se dibujan los sistemas  $Q - q$  y  $P - p$  respectivamente. El módulo de elasticidad del material es  $E = 2173706.513 \text{ T/m}$

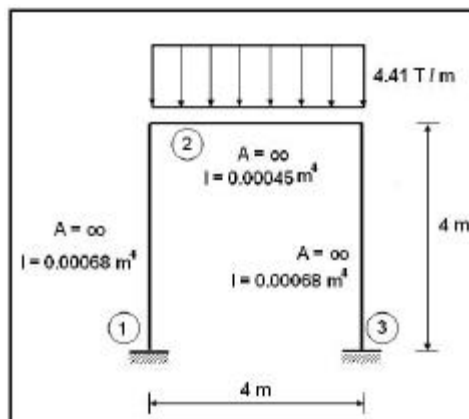


Figura 11.19 Pórtico con elementos axialmente rígidos

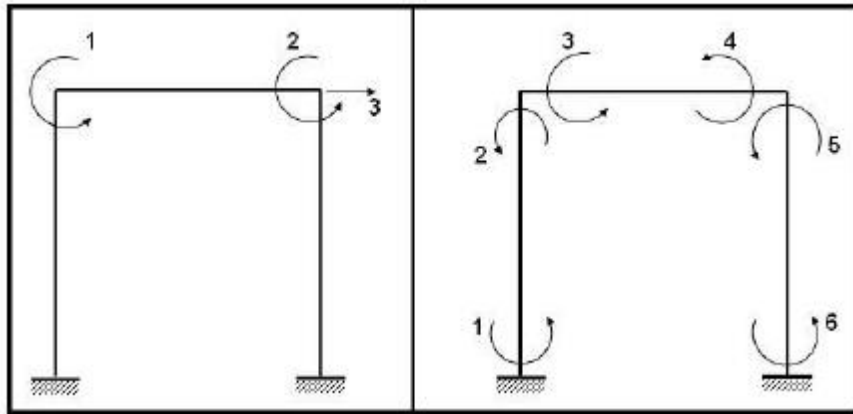


Figura 11.20 Sistema  $Q - q$  y sistema  $P - p$

• SOLUCIÓN

Se deja al lector la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas.

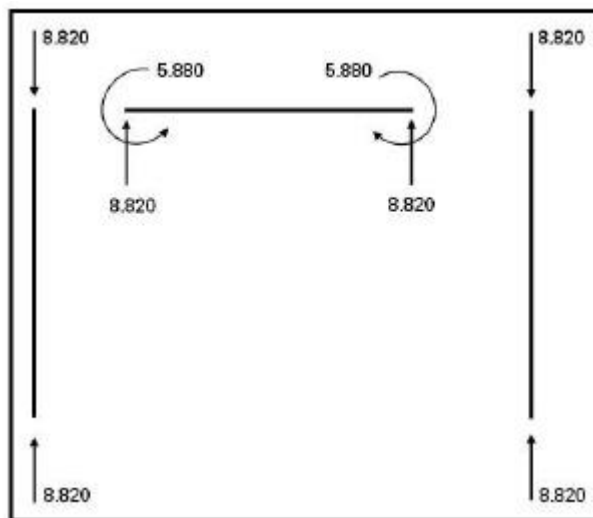
- Matriz de rigidez de la estructura

$$K = \sum_{i=1}^3 A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)} = \begin{bmatrix} 2456.28830 & 489.08400 & 554.29515 \\ 489.08400 & 2456.28830 & 554.29515 \\ 554.29515 & 554.29515 & 554.29515 \end{bmatrix}$$

- Vector de cargas generalizadas

$$Q = \begin{bmatrix} -5.880 \\ 5.880 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

Es importante que el lector preste atención al Problema Primario de éste ejemplo. Nótese que existen fuerzas axiales en los elementos debido a la condición de que son axialmente rígidos.



Problema Primario

- Matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$  tal que  $p = A q$

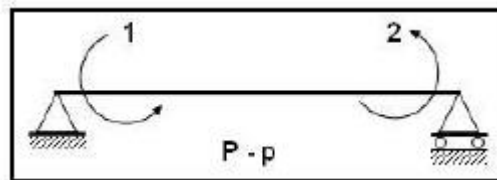
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ I & & 0 & & 0.25 \\ \hline I & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \hline 0 & & & I & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & & \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez de los elementos

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1478.1204 & 739.0602 \\ 739.0602 & 1478.1204 \end{bmatrix}$$

$$k^{(3)} = \begin{bmatrix} 978.1679 & 489.0840 \\ 489.0840 & 978.1679 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de un elemento axialmente rígido de sección constante,  $k$  en la cual no se considera el efecto de corte es la siguiente asociada al sistema  $P - p$  que se indica.



Deformaciones para un elemento axialmente rígido

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

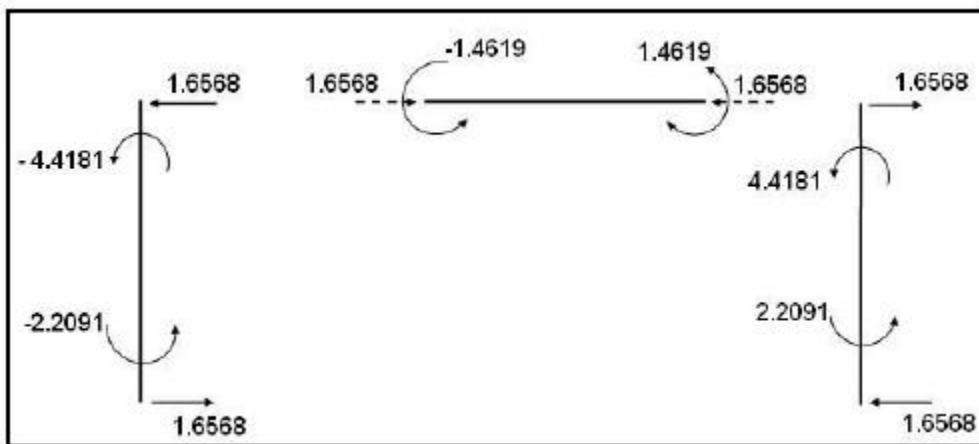
- Vector  $q$  que se obtiene de la solución de ecuaciones  $Q = K q$

$$q = \begin{bmatrix} -0.0029890 \\ 0.0029890 \\ -2.892 * 10^{-12} \end{bmatrix}$$

- Deformaciones  $p$  y cargas internas  $P$

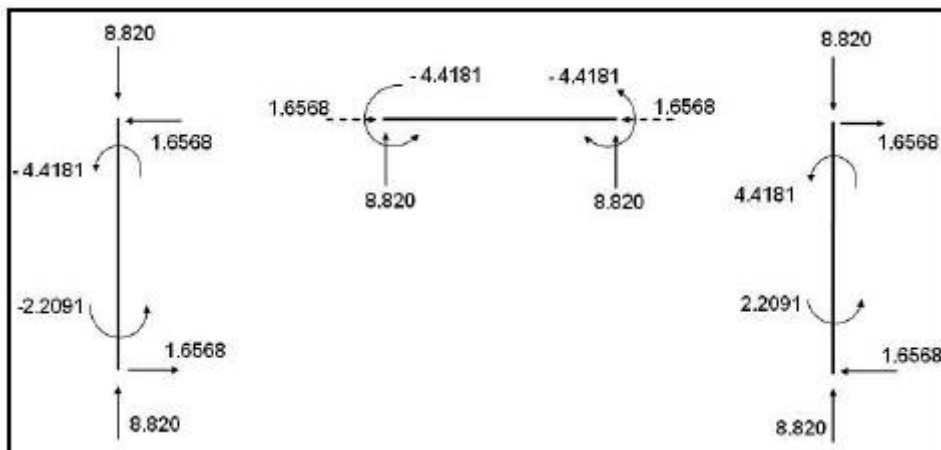
$$p = \begin{bmatrix} -7.232 * 10^{-13} \\ -0.002989 \\ -0.002989 \\ 0.002989 \\ 0.002989 \\ 7.232 * 10^{-13} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -2.2091 \\ -4.4181 \\ -1.4619 \\ 1.4619 \\ 4.4181 \\ 2.2091 \end{bmatrix}$$

▪ Solución del Problema Complementario

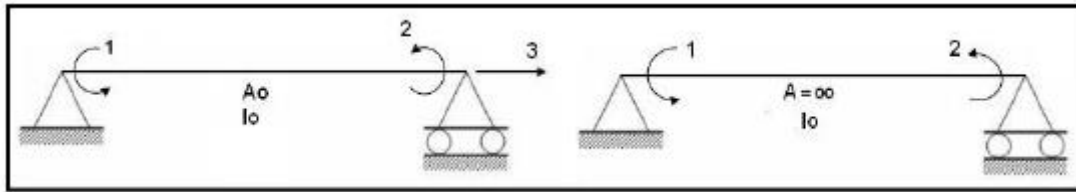


Al sumar el Problema Primario al Complementario se tiene la solución Final.

▪ Solución Final



En todos los ejemplos realizados en éste numeral se trabajó con el siguiente sistema de coordenadas para los elementos.



Modelos de deformaciones utilizados en este Capítulo.

## 11.5 ARMADURAS PLANAS

La figura 11.21 corresponde a una parte de la estructura del Aeropuerto “Adolfo Suárez - Barajas” de Madrid y tiene por objeto ilustrar que los nudos son conexiones simples; se aprecia que los apoyos permiten la rotación de las columnas. El marco teórico que se va a presentar a continuación es para uniones simples.



Figura 11.21 Aeropuerto Barajas de Madrid.

### 11.5.1 Cargas en los nudos

La forma más común de calcular una armadura plana es considerar que las cargas gravitan únicamente en los nudos. Es más cuando actúan cargas en los elementos se acostumbra encontrar cargas equivalentes en los nudos.

- **EJEMPLO 8**

La armadura presentada en la figura 11.22 está compuesta por varillas de acero de 16 mm., de diámetro y sobre ella se tienen dos cargas de 80 kg., y una carga de 120 kg. El módulo de elasticidad del acero  $E = 2100000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ . Se pide resolver la armadura por el Método de los Desplazamiento y presentar un programa en **MATLAB**

- **SOLUCIÓN**

A la derecha de la figura 1.23 se indica el sistema de coordenadas de la estructura  $Q - q$  por ser uniones simples se tienen 2 grados de libertad por nudo. A la derecha se presenta el sistema  $P - p$ .



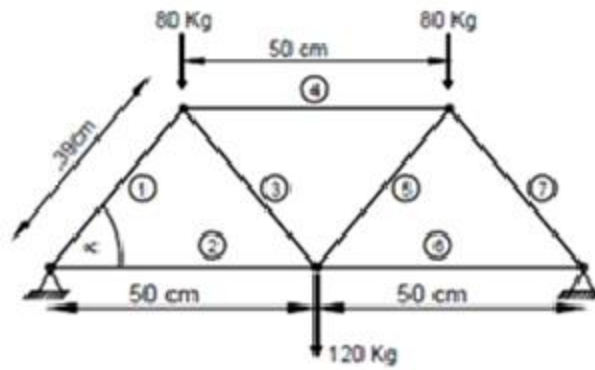


Figura 11.22 Armadura Plana con cargas en las juntas y uniones simples.

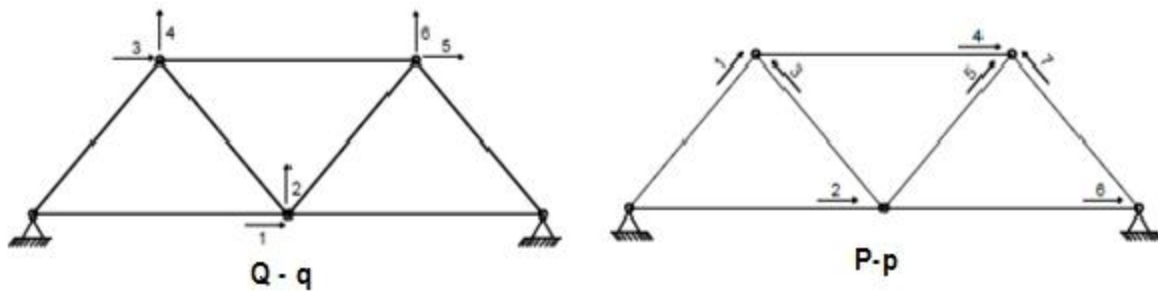
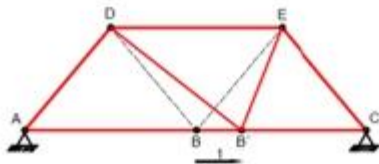


Figura 11.23 Sistema de coordenadas  $q - q$  y sistema  $P - p$

- Matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$

$$p = A q$$

Deformada elemental  $q_1$



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = \cos(\alpha) = \frac{25}{39.05}$$

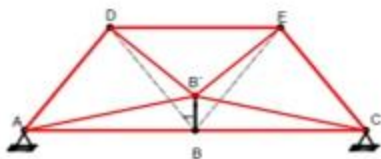
$$p_4 = 0$$

$$p_5 = u_2 - u_1 = -\cos(\alpha) = -\frac{25}{39.05}$$

$$p_6 = -1$$

$$p_7 = 0$$

Deformada elemental q2



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = -\text{sen}(\alpha) = -\frac{30}{39.05}$$

$$p_4 = 0$$

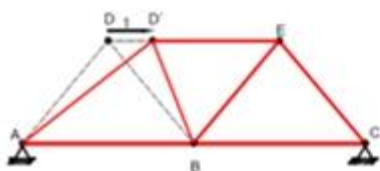
$$p_5 = u_2 - u_1 = -\text{sen}(\alpha) = -\frac{30}{39.05}$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$


---

Deformada elemental q3



$$p_1 = u_2 - u_1 = \cos(\alpha) = \frac{25}{39.05}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = -\cos(\alpha) = -\frac{25}{39.05}$$

$$p_4 = -1$$

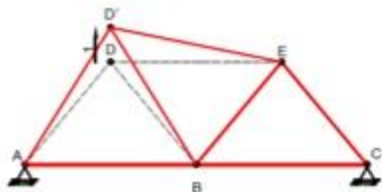
$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$


---

Deformada elemental q4



$$p_1 = u_2 - u_1 = \text{sen}(\alpha) = \frac{30}{39.05}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = \text{sen}(\alpha) = \frac{30}{39.05}$$

$$p_4 = 0$$

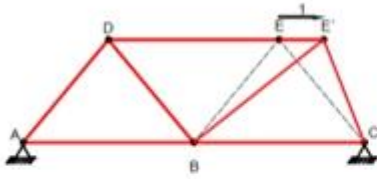
$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$


---

Deformada elemental q5



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = 0$$

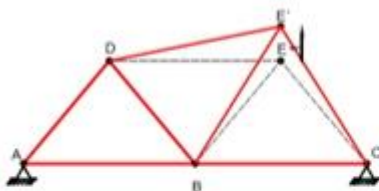
$$p_4 = 1$$

$$p_5 = u_2 - u_1 = \cos(\alpha) = \frac{25}{39.05}$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = u_2 - u_1 = -\cos(\alpha) = -\frac{25}{39.05}$$

Deformada elemental q6



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = 1$$

$$p_5 = u_2 - u_1 = \sin(\alpha) = \frac{30}{39.05}$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = u_2 - u_1 = -\sin(\alpha) = -\frac{30}{39.05}$$

Luego la matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25/39.05 & 30/39.05 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25/39.05 & -30/39.05 & -25/39.05 & 30/39.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -25/39.05 & -30/39.05 & 0 & 0 & 25/39.05 & 30/39.05 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -25/39.05 & 30/39.05 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \bar{A}^1 \\ \} \bar{A}^2 \\ \} \bar{A}^3 \\ \} \bar{A}^4 \\ \} \bar{A}^5 \\ \} \bar{A}^6 \\ \} \bar{A}^7 \end{matrix}$$

▪ Matriz de rigidez de los elementos

Se identifica por  $l_1$  a los elementos cuya longitud es 39.05 cm, y  $l_2$  a los elementos cuya longitud es 50 cm. Con esta acotación las matrices de rigidez de los elementos, son:

$$k^{(1)} = k^{(3)} = k^{(5)} = k^{(7)} = \left[ \frac{EA}{l_1} \right] = [108125.49 \text{ Kg/cm}]$$

$$k^{(2)} = k^{(4)} = k^{(6)} = \left[ \frac{EA}{l_0} \right] = [844446.010 \text{ Kg/cm}]$$

- Matriz de rigidez de la estructura

$$K = \sum_{i=1}^7 A^{(i)} k^{(i)} A^{(i)}$$

$$\bar{K} = 10^5 \begin{pmatrix} 2.5753 & 0 & -0.4432 & 0.5318 & -0.4432 & -0.5318 \\ 0 & 1.2763 & 0.5318 & -0.6382 & -0.5318 & -0.6382 \\ -0.4432 & 0.5318 & 1.7308 & 0 & -0.8445 & 0 \\ 0.5318 & -0.6382 & 0 & 1.2763 & 0 & 0 \\ -0.4432 & -0.5318 & -0.8445 & 0 & 1.7308 & 0 \\ -0.5318 & -0.6382 & 0 & 0 & 0 & 1.2763 \end{pmatrix}$$

- Vector de cargas  $q$

$$q^i = [0 \quad -120 \quad 0 \quad -80 \quad 0 \quad -80]$$

- Vector de coordenadas generalizadas  $q$

$$q^i = [0 \quad -0.0048 \quad 0.0010 \quad -0.0030 \quad -0.0010 \quad -0.0030]$$

- Deformaciones en los elementos  $p$

$$\begin{array}{ll} \bar{p}^{(1)} = \bar{A}^{(1)} * q; & \bar{p}^{(1)} = -0.0017 \\ \bar{p}^{(2)} = \bar{A}^{(2)} * q; & \bar{p}^{(2)} = 1.3674 * 10^{-19} \approx 0 \\ \bar{p}^{(3)} = \bar{A}^{(3)} * q; & \bar{p}^{(3)} = 7.2231 * 10^{-4} \\ \bar{p}^{(4)} = \bar{A}^{(4)} * q; & \bar{p}^{(4)} = -0.0020 \\ \bar{p}^{(5)} = \bar{A}^{(5)} * q; & \bar{p}^{(5)} = 7.2231 * 10^{-4} \\ \bar{p}^{(6)} = \bar{A}^{(6)} * q; & \bar{p}^{(6)} = 1.3674 * 10^{-19} \approx 0 \\ \bar{p}^{(7)} = \bar{A}^{(7)} * q; & \bar{p}^{(7)} = -0.0017 \end{array}$$

- Fuerzas en los elementos

$$\begin{array}{ll} \bar{P}^{(1)} = \bar{k}^{(1)} * \bar{p}^{(1)}; & \bar{P}^{(1)} = -182.2333 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(2)} = \bar{k}^{(2)} * \bar{p}^{(2)}; & \bar{P}^{(2)} = 1.1547 * 10^{-14} \approx 0 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(3)} = \bar{k}^{(3)} * \bar{p}^{(3)}; & \bar{P}^{(3)} = 78.1000 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(4)} = \bar{k}^{(4)} * \bar{p}^{(4)}; & \bar{P}^{(4)} = -1.6667 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(5)} = \bar{k}^{(5)} * \bar{p}^{(5)}; & \bar{P}^{(5)} = 78.1000 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(6)} = \bar{k}^{(6)} * \bar{p}^{(6)}; & \bar{P}^{(6)} = -1.1547 * 10^{-14} \approx 0 \text{ Kg} \\ \bar{P}^{(7)} = \bar{k}^{(7)} * \bar{p}^{(7)}; & \bar{P}^{(7)} = -182.2333 \text{ Kg} \end{array}$$

En la figura 11.24 se indican las fuerzas finales en los elementos, al no existir cargas en los elementos ha finaliza el Ejemplo.

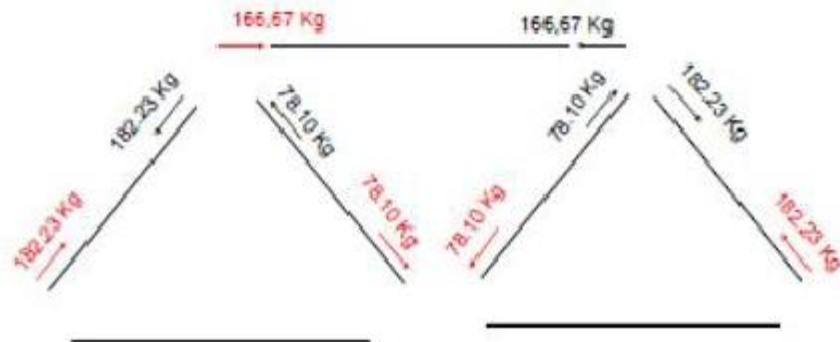


Figura 11.24 Fuerzas finales en los elementos.

```
% Solución de armadura por el Método de los Desplazamientos
%      Dr. Roberto Aguiar
%      5 de Junio de 2014
%.....Longitudes y Areas.....
L1=39.05;L2=50;L3=39.05;L4=50;L5=39.05;L6=50;L7=39.05;A=2;
%.....Matriz A.....
A1=[0 0 25/L1 30/L1 0 0];
A2=[1 0 0 0 0 0];
A3=[25/L1 -30/L1 -25/L1 30/L1 0 0];
A4=[0 0 -1 0 1 0];
A5=[-25/L1 -30/L1 0 0 25/L1 30/L1];
A6=[-1 0 0 0 0 0];
A7=[0 0 0 0 -25/L1 30/L1];
%.....Matriz de rigidez de miembro.....
Es=2100000;r1=Es*A/L1;r1=Es*A/L1;r2=Es*A/L2;r3=Es*A/L3;
r4=Es*A/L4;r5=Es*A/L5;r6=Es*A/L6;r7=Es*A/L7;
%...Matriz de rigidez de la estructura...
K=A1'*r1*A1+A2'*r2*A2+A3'*r3*A3+A4'*r4*A4+A5'*r5*A5+A6'*r6*A6+A7'*r7*A7
%...Vector de cargas generalizadas.....
Q=[0;-120;0;-80;0;-80];
%..Solución de ecuaciones.....
q=K\Q;
%...Calculo de deformaciones p.....
p1=A1*q;p2=A2*q;p3=A3*q;p4=A4*q;p5=A5*q;p6=A6*q;p7=A7*q;
%...Problema Complementario. Fuerzas P...
P1=r1*p1;P2=r2*p2;P3=r3*p3;P4=r4*p4;P5=r5*p5;P6=r6*p6;P7=r7*p7;
```

### 11.5.2 Cargas en nudos y miembros

Finalmente se desea ilustrar la forma de solución de una armadura plana que tiene cargas en los elementos y en los nudos.

- **EJEMPLO 9**

Resolver la estructura de la figura 11.25 en la cual se considera que todos los elementos tienen la misma rigidez axial  $EA$ .

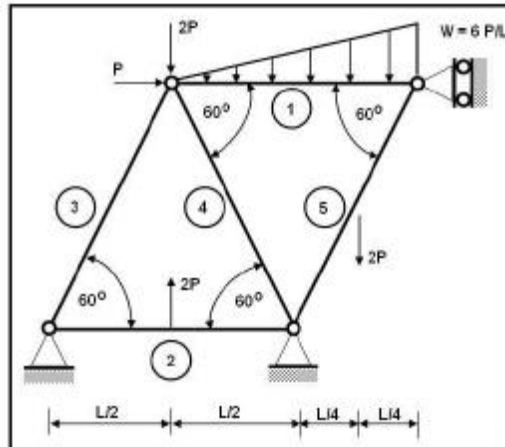


Figura 11.25 Armadura con cargas en elemento y nudos

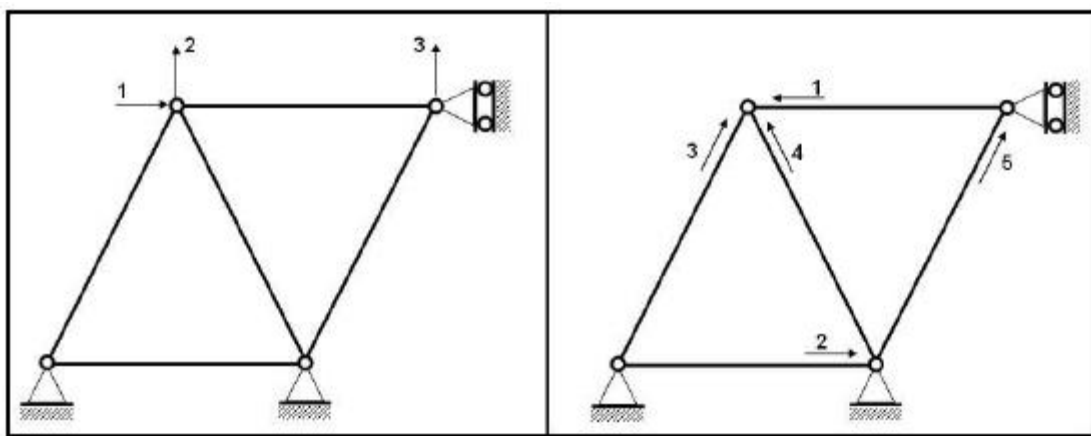


Figura 11.26 Sistema  $Q - q$  y Sistema  $P - p$

• **SOLUCIÓN**

Para los sistemas  $Q - q$  y  $P - p$  seleccionados en la figura 11.26, se tiene que la matriz  $A$  es:

$$A = \begin{bmatrix} -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ -0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.866 \end{bmatrix}$$

Todos los elementos de la estructura tienen la misma longitud  $L$  y rigidez axial  $EA$ . Por lo tanto:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = k^{(4)} = k^{(5)} = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura  $K$  se encuentra de  $K = \sum_{i=1}^5 A^{(i)T} k^{(i)} A^{(i)}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.75 \end{bmatrix} \frac{EA}{L}$$

Ahora se procede a calcular el vector de cargas  $\mathbf{Q}$ . Por definición el problema primario es aquel en el cual actúan todas las cargas y la condición es que el vector de coordenadas sea nulo, ver figura 11.27.

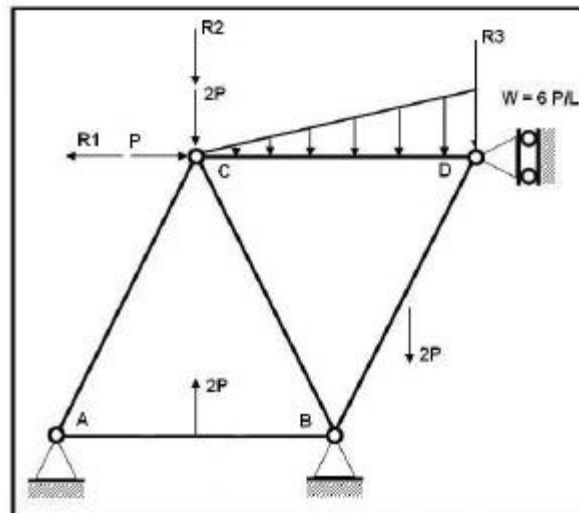


Figura 11.27 Problema Primario  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$

Se recuerda que las fuerzas de fijación  $\mathbf{R}$  son consecuencia de la condición  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  y esto a su vez significa que **cada elemento se encuentra apoyado-apoyado**, hay que poner atención en esto. Ya no está empotrado-empotrado como sucedía en los pórticos planos por lo tanto para el equilibrio de los elementos se tiene lo presentado en la figura 11.28

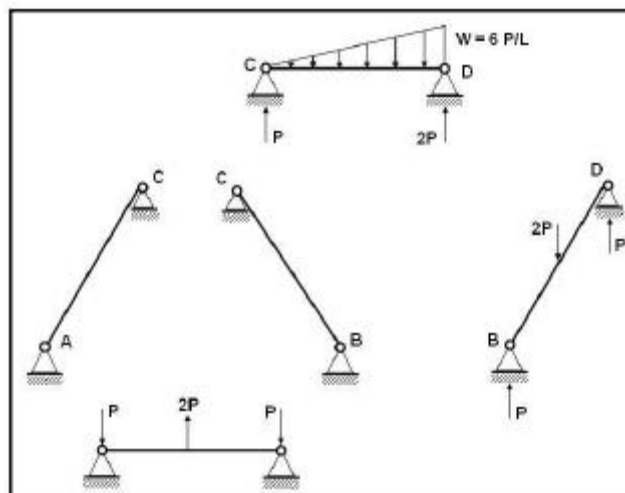


Figura 11.28 Problema Primario: Equilibrio de elementos

Al realizar el equilibrio en cada nodo se obtienen las fuerzas de fijación  $\mathbf{R}$  y con esto se encuentra el vector de cargas generalizadas  $\mathbf{Q}$ .

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ -3P \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones  $Q = K q$  se encuentra:

$$q = \begin{bmatrix} 0.667 \\ -2.000 \\ -4.000 \end{bmatrix} \begin{matrix} rL \\ EA \end{matrix}$$

El resto de cálculo ya es conocido, los resultados que se obtienen son:

$$\begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix} \cdot EA \quad P = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.000 \\ -1.399 \\ -2.066 \\ -3.464 \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución final se encuentra sumando el problema primario al complementario. Nótese que en el elemento 5, la reacción del problema primario se ha descompuesto en una fuerza axial y una fuerza transversal cuyos valores son  $0.866 P$  y  $0.5 P$  respectivamente, con esta aclaración será muy fácil para el lector obtener los valores finales que se indican a continuación.

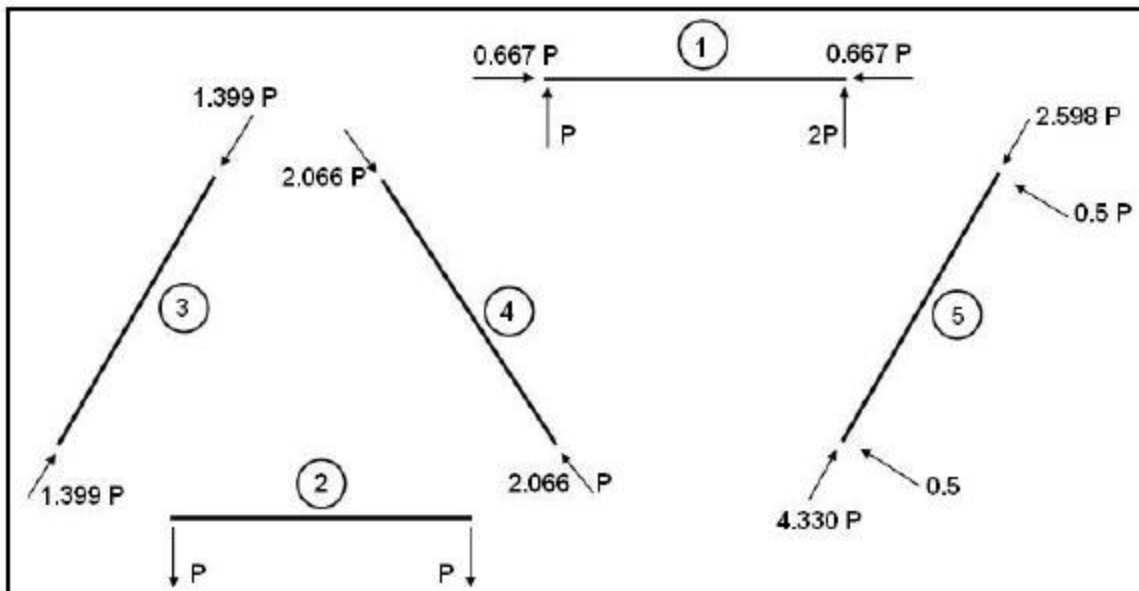
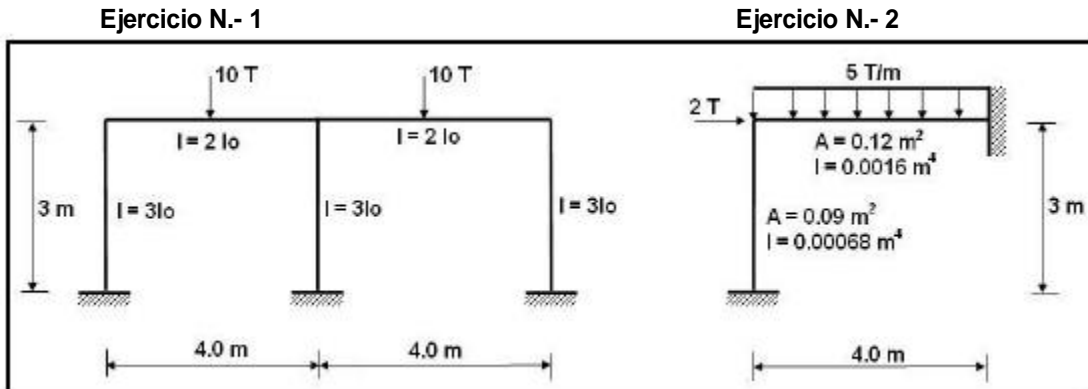


Figura 11.29 Solución Final



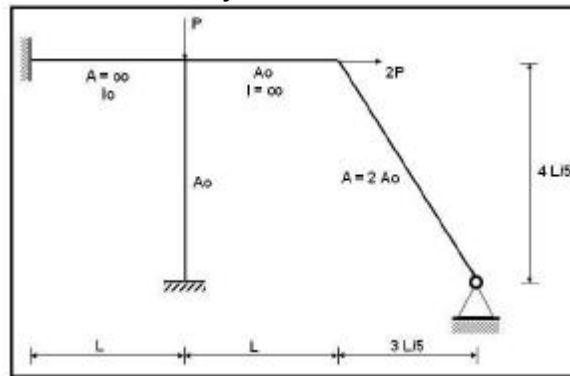
11.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver completamente las siguientes estructuras por el Método de los Desplazamientos.



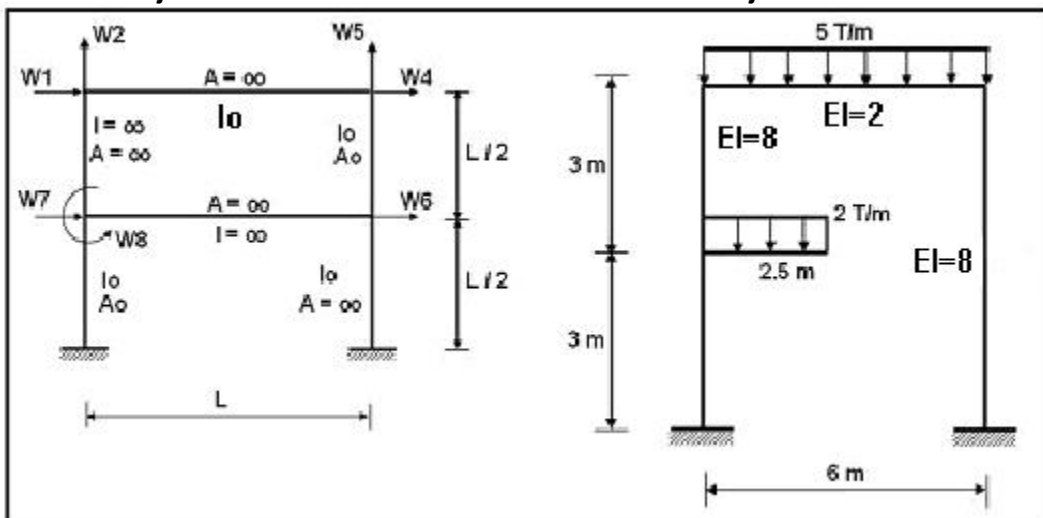
Para todos los elementos  $\frac{I}{A_o} = \frac{16}{100}$   $E = 1.$   $E = 2173706.51 \cdot \frac{T}{m^2}$

Ejercicio N.- 3



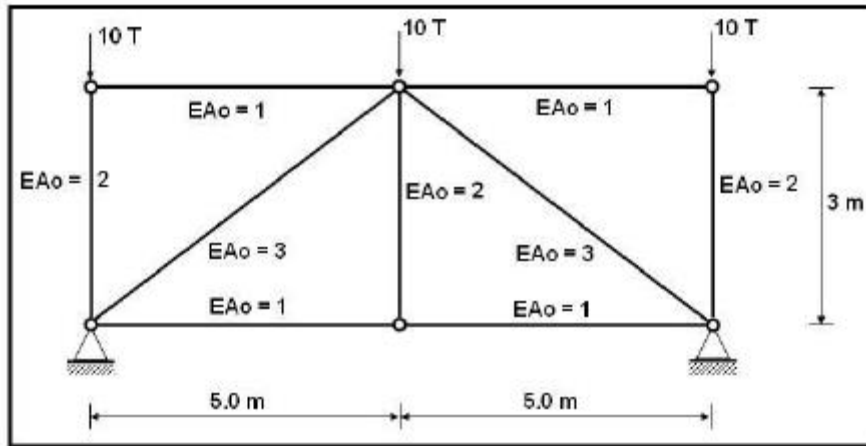
$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100}$   $E = 1$

Ejercicio N.- 4

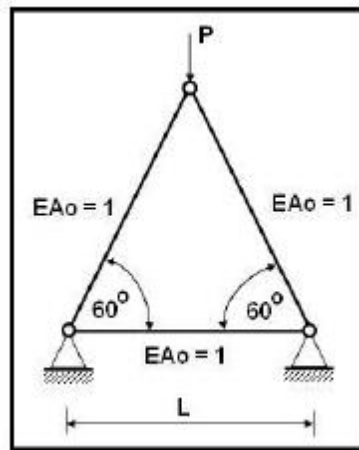


$\frac{I_o}{A_o L^2} = \frac{1}{100}$   $E = 1$

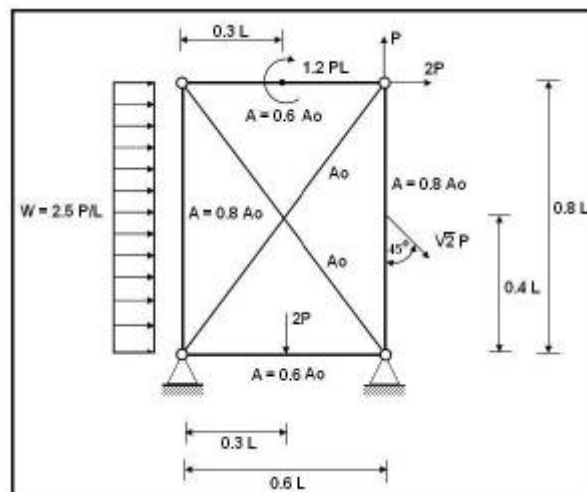
Ejercicio N.- 6

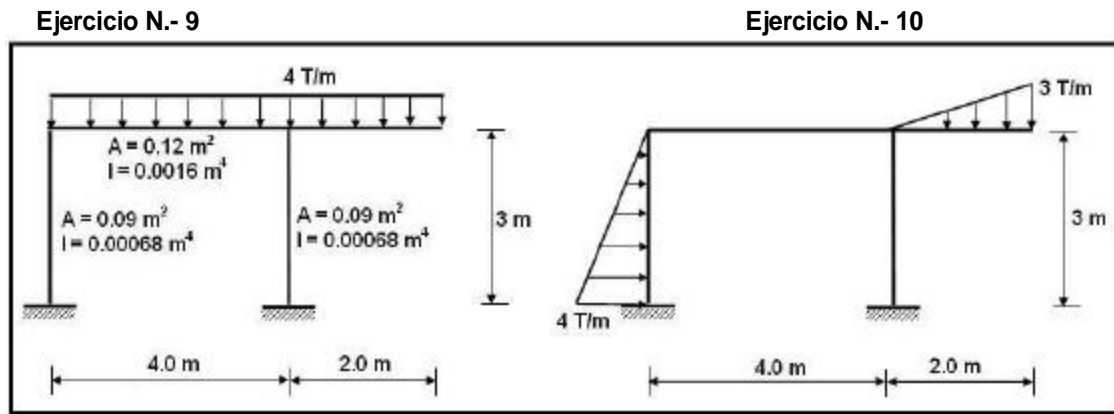


Ejercicio N.- 7



Ejercicio N.- 8





El módulo de elasticidad en estos dos ejercicios es  $E = 2173706.51 T/m^2$ . Por otra parte para el ejercicio N.- 10 los datos de la estructura son los mismos del ejercicio N.- 9.

## **CAPITULO 12**

---

### **MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO ORIENTADO AL USO DEL COMPUTADOR**

#### **RESUMEN**

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez de un elemento en coordenadas locales y globales para los siguientes modelos numéricos de cálculo:

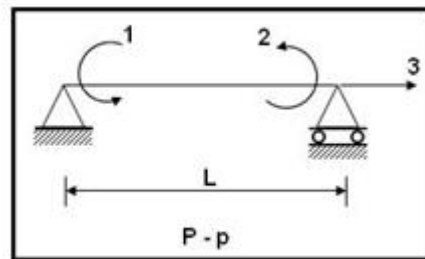
- i) Elemento lineal de un pórtico plano de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto.
- ii) Elemento lineal de una armadura plana de sección constante.
- iii) Elemento de sección constante o variable de un pórtico plano.
- iv) Elemento lineal de un pórtico plano considerando dos sectores de rigidez infinita.
- v) Elementos de un pórtico plano con inercia escalonada.

Todo esto orientado al uso del ordenador. Por hacerlo didáctico se presenta el cálculo mediante la transformación de coordenadas. La aplicación de los resultados obtenidos se realiza en el capítulo 13.

#### **12.1 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UN PÓRTICO PLANO**

##### **12.1.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales**

Al considerar como sistema  $P - p$  de un elemento el presentado en la figura 12.1, en donde no se incluyen los desplazamientos como cuerpo rígido. A éste sistema se denomina por didáctica sistema 1, el vector  $p$  mide las deformaciones con el siguiente formulario:



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

Figura 12.1 Sistema de coordenadas en el sistema 1.

Por otro lado la matriz de rigidez para elementos de sección constante en los cuales no se considera el efecto de corte es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Como la matriz de rigidez está asociada al sistema 1 se ha colocado el subíndice 1 en dicha matriz. Ahora se quiere calcular la matriz de rigidez para un elemento lineal en el cual se incluyan las deformaciones como cuerpo rígido. Por lo tanto el nuevo sistema  $P^* - p^*$  será el indicado en la figura 12.2. Por didáctica se ha colocado el asterisco debido a que se va a calcular la nueva matriz de rigidez por medio de la matriz de transformación de coordenadas  $T$ .

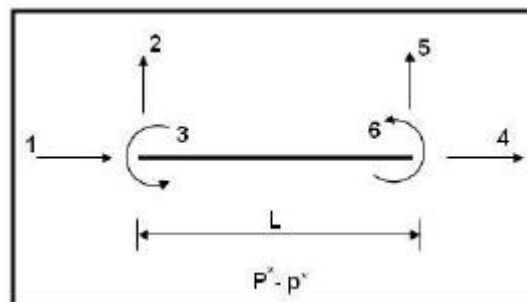


Figura 12.2 Coordenadas locales de un elemento.

Al sistema de coordenadas del elemento de la figura 12.2 se denomina sistema 2 y el significado de cada una de las deformaciones es el siguiente:

- $p_1^*$  es la componente de desplazamiento axial del nudo inicial del elemento.
- $p_2^*$  es la componente de desplazamiento transversal del nudo inicial del elemento.
- $p_3^*$  es la rotación de la elástica en el nudo inicial del elemento.
- $p_4^*$  es la componente de desplazamiento axial del nudo final del elemento.
- $p_5^*$  es la componente de desplazamiento transversal del nudo final del elemento.
- $p_6^*$  es la rotación de la elástica en el nudo final del elemento.

La convención de signos positiva de las deformaciones en el sistema de coordenadas 2 es la que se indica en la figura 12.2. A este sistema se denomina **Coordenadas Locales**.

Para los elementos del vector de cargas internas  $\mathbf{P}^*$  se tiene lo siguiente:

- $P_1^*$  es la fuerza longitudinal axial en el nudo inicial del elemento.
- $P_2^*$  es la fuerza transversal en el nudo inicial del elemento.
- $P_3^*$  es el momento a flexión en el nudo inicial del elemento.
- $P_4^*$  es la fuerza longitudinal axial en el nudo final del elemento.
- $P_5^*$  es la fuerza transversal en el nudo final del elemento.
- $P_6^*$  es el momento a flexión en el nudo final del elemento.

Evidentemente la matriz que relaciona las cargas  $\mathbf{P}^*$  con los desplazamientos  $\mathbf{p}^*$  es la matriz de rigidez de un elemento  $\mathbf{k}^*$ . En efecto se tiene que:

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{k}^* \mathbf{p}^*$$

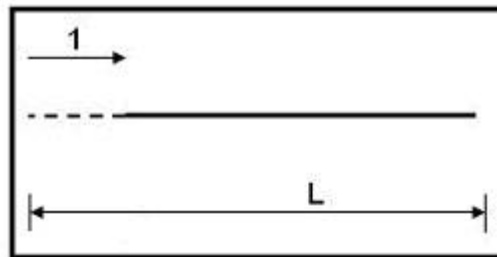
El objetivo de éste sub apartado es calcular  $\mathbf{k}^*$  pero el cálculo se lo va a realizar utilizando lo ya conocido para no empezar de nuevo todo. Para el efecto se determina una matriz de paso de las coordenadas del sistema 1 al sistema 2, a ésta matriz se denomina  $\mathbf{T}$ , definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{p}^*$$

El sistema viejo de coordenadas es el sistema 1 y el sistema nuevo de coordenadas el sistema 2. Se habla de sistemas viejo y nuevo para recordar lo estudiado en el capítulo 5. Para el cálculo de la matriz  $\mathbf{T}$  se construyen deformadas elementales en el sistema nuevo y se mide en el viejo. El cálculo se describe a continuación.

#### \* Primera columna de $\mathbf{T}$

$$p_i^* = 1 \quad \text{y} \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$



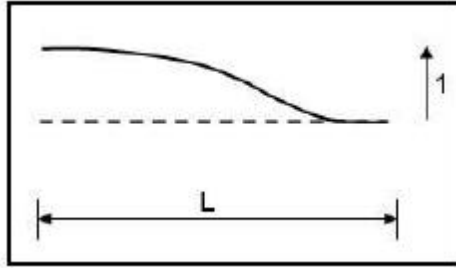
$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ Segunda columna de  $T$

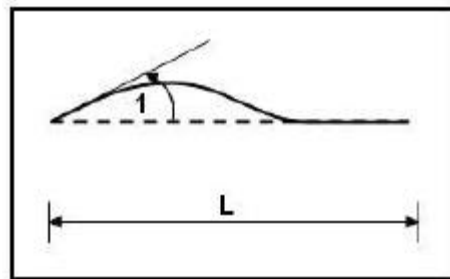
$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0 - 1}{L} = \frac{1}{L} \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{0 - 1}{L} = \frac{1}{L} \quad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ Tercera columna de  $T$

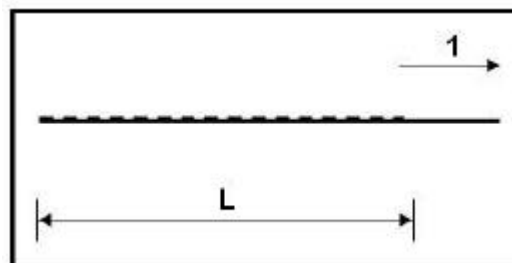
$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0 - 0}{L} = 1 \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ Cuarta columna de  $T$

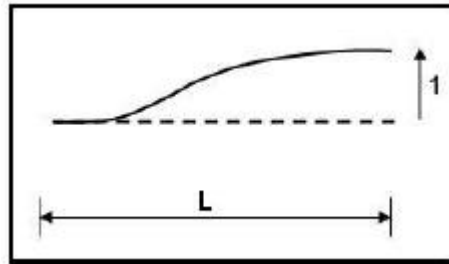
$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad p_3 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ Quinta columna de  $T$

$$p_5^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 5$$



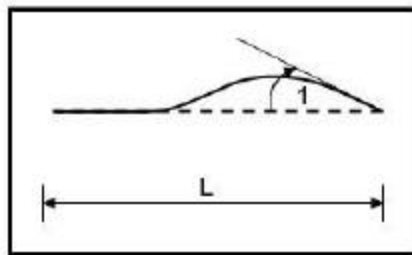
$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = -\frac{1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ Sexta columna de  $T$

$$p_6^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 6$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1$$

$$p_3 = u_2 - u_1 = 0$$

A la matriz  $T$  que se ha obtenido y que permite pasar de los resultados del sistema 1 al sistema 2 se le denomina  $T_{1-2}$  y es:

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz de rigidez en el nuevo sistema de coordenadas  $k^*$  se debe realizar el siguiente triple producto matricial  $T_{1-2}^t k_1 T_{1-2}$ . A la matriz de rigidez en coordenadas locales se ha denominado  $k_2$ , luego:

$$k_2 = T_{1-2}^t k_1 T_{1-2}$$

Los resultados que se obtienen son:



$$k_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & \\ & \frac{12EI}{L^3} & & & & \\ & & \frac{6EI}{L^2} & & \frac{4EI}{L} & \\ \frac{EA}{L} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

Preguntas para el lector:

- Por qué la primera fila (o columna) más la cuarta fila (o columna) de la matriz  $k_2$  suman cero.
- Por qué la segunda fila (o columna) más la quinta fila (o columna) de la matriz  $k_2$  suman cero.
- Por qué la tercera fila (o columna) más la sexta fila (o columna) más la quinta fila (o columna) multiplicada por la longitud  $L$  suma cero.
- Que otra combinación lineal suma cero.
- Por qué el rango de la matriz  $k_2$  es tres.
- Por qué no existe matriz de flexibilidad para el sistema de coordenadas locales.

### 12.1.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

En forma general se puede indicar que las coordenadas locales se miden axial y transversal al eje del elemento, en cambio las coordenadas globales miden en forma horizontal y vertical en consecuencia éstas últimas tienen la misma orientación que las coordenadas de la estructura.

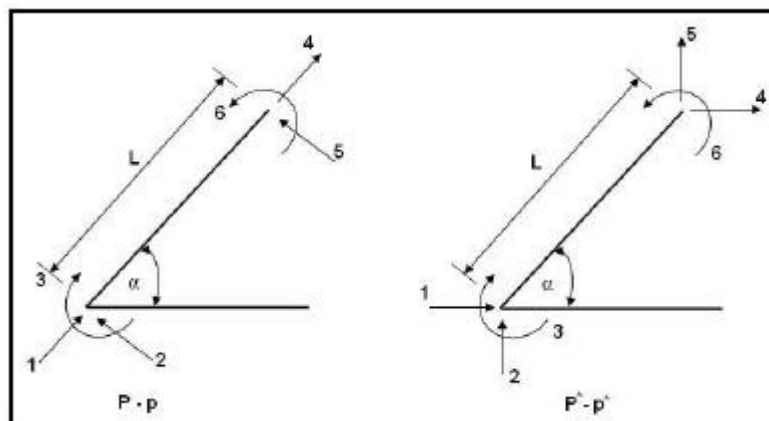


Figura 12.3 Coordenadas locales y globales de un elemento.

En la figura 12.3 se tiene un elemento inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, a la izquierda se indica el sistema de coordenadas locales y a la derecha el sistema de coordenadas globales.

En la figura 12.3 se ha utilizado el asterisco para definir las coordenadas globales del elemento. Esto se lo hace por que se va a emplear la transformación de coordenadas para calcular  $k^*$  que posteriormente se va a denominar  $k_3$  ya que al sistema de coordenadas globales se denomina sistema 3.

La matriz de paso del sistema 2 al sistema 3 fue estudiada con detenimiento en el capítulo 5 y ya se la había denominado  $T_{2-3}$  resultando que ésta matriz es:

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura se denomina  $C = \cos\alpha$ ,  $S = \text{sen}\alpha$ . Con ésta notación se realiza el siguiente producto matricial que conduce al cálculo de  $k_3$

$$k_3 = T_{2-3}^t k_2 T_{2-3}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{EA}{L} CS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} CS & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{12EI}{L^3} C^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} CS & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} CS & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{EA}{L} CS & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} CS & \frac{EA}{L} S^2 + \frac{12EI}{L^3} C^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} CS & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} CS & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$c^2$

」

¿Se puede formular las preguntas realizadas al fin del subpartado anterior?

### 12.1.3 Matriz de rotación $T_{2-3}$

Sea  $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . De tal manera que  $T_{2-3} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ , se

desea demostrar que la matriz  $T_{2-3}$  es ortogonal.

A la primera fila de la matriz  $R$  se le denomina vector  $X$ , a la segunda  $Y$  y a la tercera  $Z$ . En consecuencia se tiene que:

$$R = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= [\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0] \\ Y &= [-\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0] \\ Z &= [0 & 0 & 1] \end{aligned}$$

En los vectores  $X, Y, Z$  se cumplen las siguientes propiedades:

1. Son vectores unitarios, es decir su módulo es igual a 1. En efecto se tiene que:

$$\begin{aligned} |X| &= \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2} = 1 \\ |Y| &= \sqrt{(-\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = 1 \\ |Z| &= \sqrt{(1)^2} = 1 \end{aligned}$$

2. El producto punto de dos vectores es igual a 0.

$$\begin{aligned} X \bullet Y &= \cos\alpha * (-\operatorname{sen}\alpha) + \operatorname{sen}\alpha * \cos\alpha = 0 \\ Y \bullet Z &= -\operatorname{sen}\alpha * 0 + \cos\alpha * 0 + 0 * 1 = 0 \\ Z \bullet X &= 0 * \cos\alpha + 0 * \operatorname{sen}\alpha + 1 * 0 = 0 \end{aligned}$$

3. El producto cruz de dos vectores da como resultado el otro vector. Por ejemplo:

$$X \times Y = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = Z$$

2

$$X \times Y = Z \quad Y \times Z = X \quad Z \times X = Y$$

En forma similar se puede demostrar que  $Y \times Z = X$  y que  $Z \times X = Y$

Se ha demostrado que el módulo de cada vector es igual a la unidad; que el producto punto es nulo y que el producto cruz da el otro vector. Por lo tanto los vectores  $X, Y, Z$  son ortogonales. Por otra parte el determinante de la matriz  $R$  es igual a uno. Por consiguiente  $R$  es una **matriz propia ortogonal**, en consecuencia se cumple que:

$$R R^t = R^t R = I \quad \Rightarrow \quad R^{-1} = R^t$$

Se tiene que la matriz  $T_{2-3}$  que sirve para pasar de las coordenadas locales a coordenadas globales está compuesta por submatrices que son ortogonales. Por lo tanto  $T_{2-3}$  es una matriz ortogonal y se cumple que:

$$T_{2-3}^{-1} = T_{2-3}^t \quad (12.1)$$

Esta es una propiedad muy importante de la matriz  $T_{2-3}$  que permite calcular la inversa obteniendo su traspuesta. Esta propiedad se utiliza una vez que se tiene el vector de cargas en coordenadas globales y se desea encontrar éste vector en coordenadas locales.

## 12.2 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE DE UNA ARMADURA PLANA

### 12.2.1 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales

Básicamente se siguen los mismos pasos del numeral anterior para obtener la matriz de rigidez de un elemento. Por este motivo se presenta el cálculo de  $k$  en forma directa dejando al lector la justificación de los pasos dados.

En la figura 12.4 se plantea en forma general la forma de cálculo, lo conocido expuesto en capítulos anteriores está a la izquierda y lo que se va a calcular se encuentra a la derecha.

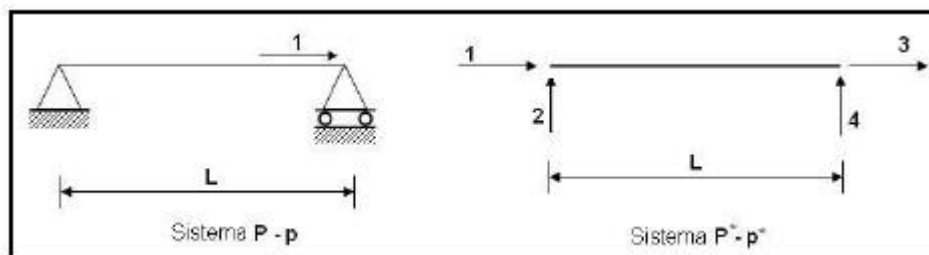


Figura 12.4 Planteamiento del problema.

En el sistema de la izquierda se tiene:

$$p_1 = u_2 - u_1 \quad k_1 = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix}$$

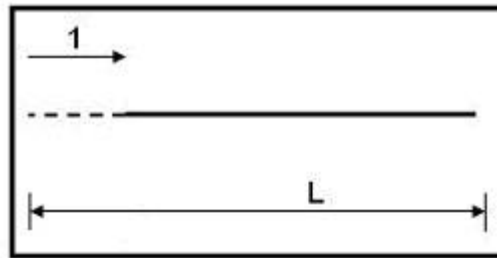
Se desea calcular  $k^*$  que se ha denominado  $k_2$  para ello se tiene:

$$k_2 = T_{1-2}^t k_1 T_{1-2}$$

Para calcular  $T_{1-2}$  se tiene que  $p = T_{1-2} p^*$

♣ Primera columna de  $T_{1-2}$ 

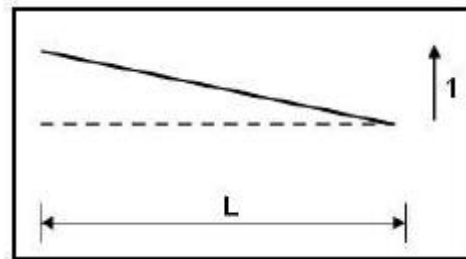
$$p_1^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 1$$



$$p_1 = u_2 - u_1 = 0 - 1 = -1$$

♣ Segunda columna de  $T_{1-2}$ 

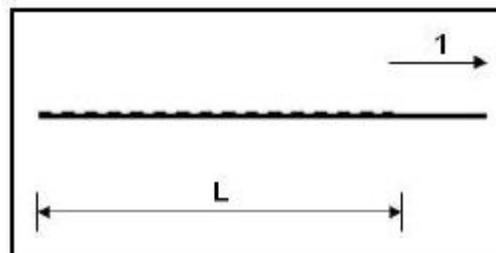
$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

♣ Tercera columna de  $T_{1-2}$ 

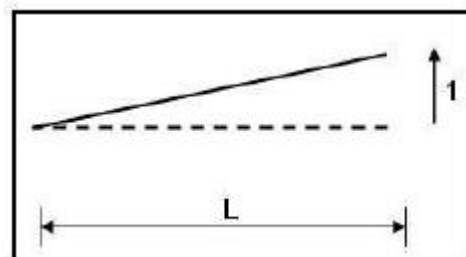
$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$



$$p_1 = u_2 - u_1 = 1 - 0 = 1$$

♣ Cuarta columna de  $T_{1-2}$ 

$$p_4^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 4$$



$$p_1 = u_2 - u_1 = 0$$

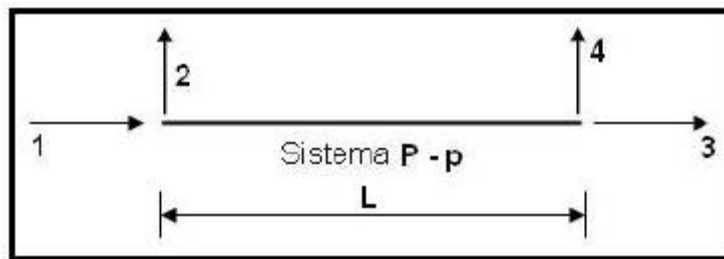
La deformada elemental que conduce al cálculo de la segunda columna de la matriz  $T_{1-2}$  se diferencia de la deformada anterior, para el caso de pórtico plano, por el hecho de que ahora el elemento es  $I = \infty$ . En consecuencia no trabaja a flexión; algo similar se indica con relación a la última deformada. Luego la matriz  $T_{1-2}$  tiene los siguientes valores.

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = T_{1-2}^t k_I T_{1-2}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Preguntas para el lector:

- i) Cual es el rango y orden de la matriz  $k_2$ .
- ii) Existe matriz inversa de  $k_2$ .

### 12.2.2 Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales

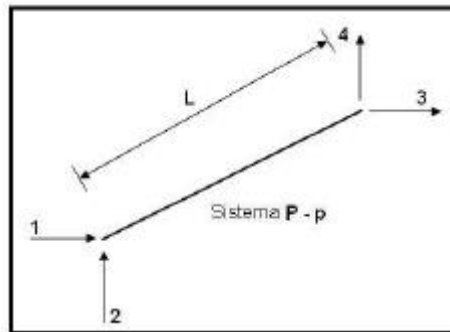
La matriz de paso de coordenadas locales a coordenadas globales en armaduras planas es:

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Para hallar la matriz de rigidez en coordenadas globales  $k_3$  se realiza la siguiente operación:

$$k_3 = T_{2-3}^t k_2 T_{2-3}$$

$$k_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha^2 & \text{sen}\alpha \cos\alpha & -\cos\alpha^2 & -\text{sen}\alpha \cos\alpha \\ \text{sen}\alpha \cos\alpha & \text{sen}\alpha^2 & -\text{sen}\alpha \cos\alpha & -\text{sen}\alpha^2 \\ -\cos\alpha^2 & -\text{sen}\alpha \cos\alpha & \cos\alpha^2 & \text{sen}\alpha \cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha \cos\alpha & -\text{sen}\alpha^2 & \text{sen}\alpha \cos\alpha & \text{sen}\alpha^2 \end{bmatrix}$$



Preguntas para el lector:

- i) La matriz  $T_{2-3}$  definida en el presente numeral es ortogonal.
- ii) Si se desea expresar la matriz de rigidez de un elemento de una armadura plana como si fuera de orden 6 x 6. Como quedaría  $k_3$  y cuál sería el sistema  $P - p$ .

### 12.3 ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE O VARIABLE DE UN PÓRTICO

#### 12.3.1 Sistema 1

En el capítulo 7 se calculó la matriz de flexibilidad  $f$  para el elemento lineal que se presenta en la figura 12.1. En esa ocasión se empleó la notación que consta en la figura 12.5 para explicar el significado físico de los elementos de la matriz  $f$  para un elemento que puede ser de sección constante o variable.

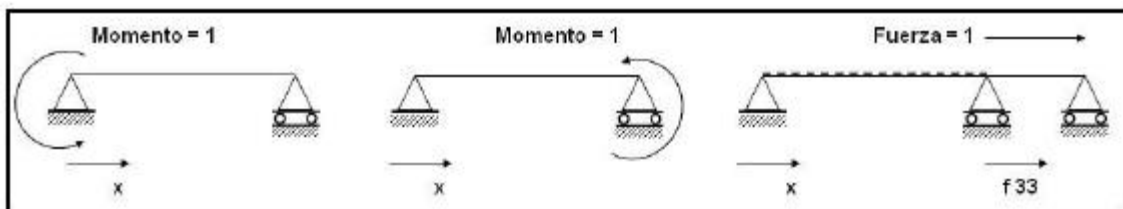


Figura 12.5 Cargas aplicadas para encontrar la matriz de flexibilidad de un elemento.



La forma de  $f$  es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

En éste apartado se va a utilizar la nomenclatura del Ing. Alejandro Segovia Gallegos quien denomino  $\alpha$  al término  $f_{11}$ ;  $\varepsilon$  al término  $f_{12} = f_{21}$ ;  $\alpha'$  al elemento  $f_{22}$ .

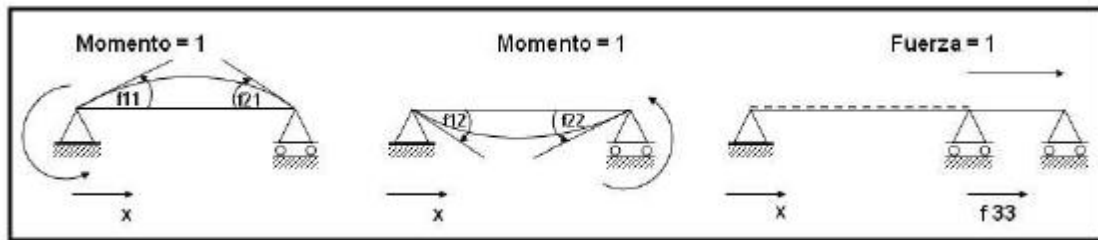


Figura 12.6 Elementos de la matriz de flexibilidad de un elemento.

Por lo tanto la matriz de flexibilidad  $f$  con la nueva nomenclatura es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\alpha = f_{11} = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\varepsilon = f_{21} = f_{12} = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$\alpha' = f_{22} = \int_0^L \frac{X^2}{L} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)}$$

Para hallar la matriz de rigidez del elemento presentado se obtiene la inversa de  $f$  el resultado que se obtiene es:

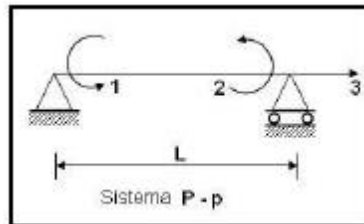
$$k = f^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\varepsilon}{\alpha} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha} & \frac{\alpha'}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix}$$

El Ing. Alejandro Segovia Gallegos denominó:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} \quad a = \frac{\varepsilon}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} \quad k' = \frac{\alpha}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2}$$

Es importante que se diferencia entre  $k$  y  $k'$  el primero es un elemento de la matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  en cambio el segundo es la matriz de rigidez,  $k$  es el término que se encuentra en la fila 1 y columna 1 de la matriz de rigidez del elemento  $k$  que es de  $3 \times 3$ .

Resumiendo todo lo expuesto en el presente apartado, se tiene que las matrices de flexibilidad y de rigidez para un elemento de sección constante o variable asociado al siguiente sistema de coordenadas, son las siguientes:



$$f_1 = \begin{bmatrix} \alpha & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \quad k_1 = \begin{bmatrix} k & a & 0 \\ a & k' & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Siendo  $r = \frac{I}{f_{33}}$ . Se ha colocado el subíndice 1 ya que corresponden al sistema 1.

### 12.3.2 Forma general de $k_2$ en coordenadas locales

Lo que interesa en el presente apartado es ilustrar la forma de cálculo de la matriz de rigidez de un elemento de sección variable en coordenadas locales suponiendo que se conocen los elementos de rigidez  $k$ ,  $a$ ,  $k'$ ,  $r$ . Si se conoce como se resuelve para sección variable también se conocerá como se resuelve para sección constante ya que éste último es un caso particular.

La matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales  $k_2$  se obtiene del siguiente triple producto matricial.

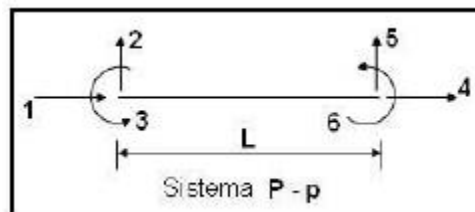
$$k_2 = T_{1-2}^t k_1 T_{1-2}$$

$$T_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$, \begin{bmatrix} r & & & & & \\ 0 & t & & & & \\ & b & k & & & \\ -\theta & 0 & 0 & r & & \\ 0 & -t & -b & 0 & t & \\ 0 & b' & a & 0 & -b' & k' \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$b = \frac{k+a}{L} \quad b' = \frac{k'+a}{L} \quad t = \frac{b+b'}{L}$$



Preguntas al lector:

- Se pueden realizar las preguntas indicadas en el apartado 12.1.1, en caso afirmativo conteste cada una de ellas.
- Como obtendría la matriz de rigidez para un elemento lineal de sección constante o variable en coordenadas globales.
- Cual es el valor de  $k, a, k', b, b', t$  para un elemento lineal de sección constante sin considerar el efecto de corte y considerando dicho efecto. Escribir en función de la rigidez a flexión  $EI$ .

### 12.3.3 Consideraciones del efecto de corte en un elemento de sección constante

Al no considerar el efecto de corte  $\phi$  en el cálculo de un pórtico plano cuyos elementos son de sección constante se está cometiendo un error el mismo que puede ser despreciable si la relación  $h/L$  tiende a cero. Donde  $h$  es la altura de la sección transversal y  $L$  la longitud del elemento. Ahora en el caso contrario el error que se comete al no considerar  $\phi$  aumenta conforme la relación  $h/L$  se incrementa. Concretamente en el caso de una viga esbelta o de un muro de corte (diafragma) es necesario evaluar la matriz de rigidez de un elemento considerando el efecto de corte.

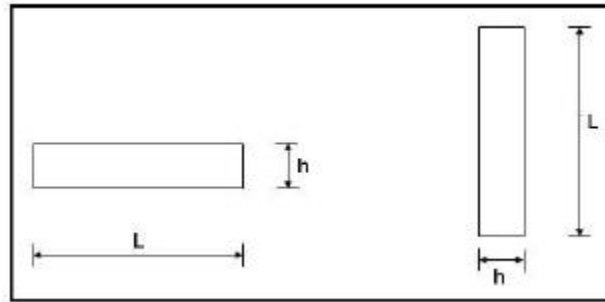


Figura 12.7 Viga esbelta y un muro de corte.

Por otra parte si los cálculos se van a realizar en un ordenador es conveniente que en el análisis se incluya el efecto de corte, al margen de que si es despreciable o no el error. De ésta manera se optimiza el cálculo. A continuación se va a presentar los valores de los elementos de la matriz de flexibilidad y de rigidez al incluir el efecto de corte y finalmente se indicará la matriz  $k_2$  incluyendo dicho efecto.

- i) Los valores de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$  para sección constante fueron obtenidos en el capítulo 7. Por lo tanto se parten de esos valores.

$$\alpha = -\frac{L}{3EI_o} (1+\phi) \quad \varepsilon = -\frac{L}{6EI_o} (1-2\phi) \quad \alpha = \alpha' \quad \phi = \frac{3\beta EI_o}{GAL^2}$$

- ii) Al sustituir los valores de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$  en las siguientes expresiones:

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} \quad a = \frac{\varepsilon}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} \quad k' = \frac{\alpha}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2}$$

se encuentra luego de realizar las simplificaciones del caso, que:

$$k = \frac{4EI_o}{L} \left( \frac{1+\phi}{1+4\phi} \right) \quad a = \frac{2EI_o}{L} \left( \frac{1-2\phi}{1+4\phi} \right) \quad k = k'$$

- iii) Ahora al reemplazar los valores de  $k$ ,  $a$ ,  $k'$  en las expresiones de  $b$ ,  $b'$ ,  $t$  se obtiene:

$$b = \frac{k+a}{L} \quad b' = \frac{k'+a}{L} \quad t = \frac{b+b'}{L}$$

$$b = \frac{6EI_o}{L^2} \left( \frac{1}{1+4\phi} \right) \quad b = b' \quad t = \frac{12EI_o}{L^3} \left( \frac{1}{1+4\phi} \right)$$

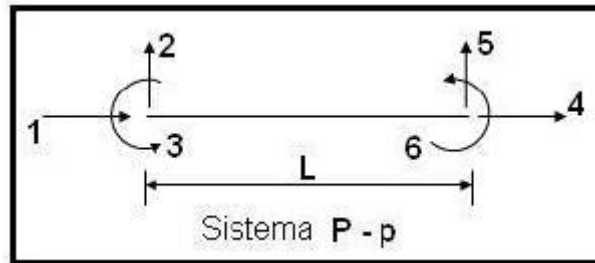
- iv) Finalmente por ser elementos de sección constante, el valor de  $r = EA_o/L$

En resumen la matriz de rigidez  $k_2$  para un elemento de sección constante considerando el efecto de corte en coordenadas locales es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} r & & & & & & & & & \\ 0 & t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & & & & & & & \\ & & b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & k \begin{pmatrix} 1+\phi \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & & & & & \\ -r & 0 & 0 & 0 & r & & & & & \\ 0 & -t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & -b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & 0 & t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & & \\ 0 & b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & a \begin{pmatrix} 1-2\phi \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & 0 & -b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & k \begin{pmatrix} 1+\phi \\ \frac{1}{1+4\phi} \end{pmatrix} & & \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

$$\phi = \frac{3\beta EI_o}{GA_o L^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Es importante que el lector observe que los términos de la matriz de rigidez en coordenadas locales se obtienen a partir de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$ , a excepción del valor  $r$ . Por lo tanto cuando se analice un elemento de sección variable el problema se considera resuelto una vez que se calculan dichos valores o cuando se encuentra los términos  $k$ ,  $a$ ,  $k'$ .

## 12.4 DIAGRAMA DE MASAS ELÁSTICA

### 12.4.1 Definiciones y nomenclatura

Sea un elemento de sección variable como el presentado en la figura 12.8.a. en el cual se han definido por una parte los ejes verticales  $Y$  y  $Y'$  en el nudo inicial y final respectivamente. Adicionalmente se consideran dos coordenadas para definir la posición de un punto del elemento que son  $X$  y  $Z$ , cumpliéndose que  $X + Z = L$ .

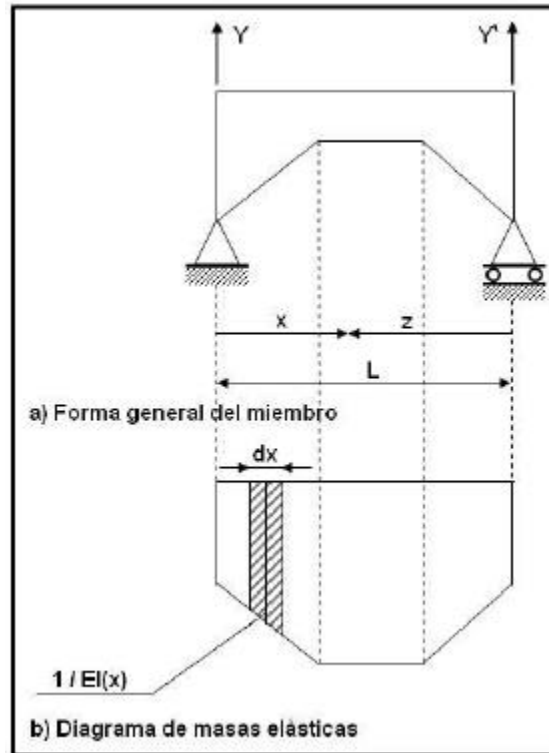


Figura 12.8 Diagrama de Masas Elásticas.

Por otra parte, el gráfico que resulta al unir los puntos cuyo valor es igual a  $\frac{1}{EI(x)}$  se conoce con el nombre de **Diagrama de masas elásticas**. Para el elemento que se está considerando este diagrama es el presentado en la parte inferior de la figura 12.8. Por lo tanto para construir el diagrama de masas elásticas se debe conocer primero el valor de  $EI(x)$  en cada punto del elemento y segundo obtener el valor de su inversa con estos valores se dibuja el diagrama.

Al considerar el elemento diferencial  $dx$  de la figura 12.8.b se nota que el diferencial de área vale  $\frac{dx}{EI(x)}$ . En consecuencia el área total del diagrama de masas elásticas,  $W$  vendrá dado por:

$$W = \int_0^L \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.2)$$

Se define el momento estático del diagrama de cargas elásticas con respecto al eje Y de la siguiente manera:

$$S_Y = \int_0^L X \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.3)$$

De igual manera el momento estático del diagrama de masas con respecto al eje Y' vale:

$$S_{Y'} = \int_0^L Z \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.4)$$

Por otra parte los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas con respecto a los ejes Y e Y' se evalúan con las siguientes ecuaciones:

$$I_Y = \int_0^L X^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.5)$$

$$I_{Y'} = \int_0^L Z^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.6)$$

Finalmente el momento de inercia compuesto del diagrama de masas elásticas respecto a los ejes  $YY'$  vale:

$$I_{YY'} = \int_0^L XZ \frac{dx}{EI(x)} \quad (12.7)$$

#### 12.4.2 Cálculo de $\alpha$

En el apartado 12.3.1 de este capítulo se llegó a la siguiente expresión para calcular  $\alpha$  en un elemento de sección constante o variable.

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \frac{I}{L^2} \frac{dx}{GA(x)}$$

Al despreciar el efecto de corte, es decir no se considera la segunda integral y al reemplazar  $X = L - Z$ , se encuentra

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{(L-L+Z)^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} = \int_0^L \frac{Z^2}{L^2} \frac{dx}{EI(x)}$$

Por ser  $L$  constante puede salir de la integral, luego:

$$\alpha = \left(\frac{1}{L}\right)^2 \int_0^L \frac{Z^2}{EI(x)} dx$$

Pero la cantidad que está en la integral es  $I_{Y'}$ . Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{I_{Y'}}{L^2} \quad (12.8)$$

#### 12.4.3 Cálculo de $\varepsilon$

De igual manera al no considerar el efecto de corte la expresión de  $\varepsilon$  dada por el numeral 12.3.1 queda:

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2 EI(x)} dx$$

Se conoce que  $Z = L - X$ , por consiguiente al sustituir este valor en la integral y al sacar  $L^2$  fuera de la integral por ser constante se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{X}{EI(x)} dx$$

Pero la integral vale  $I_{YY}$ . Luego se tiene:

$$\varepsilon = \frac{I_{YY}}{L^2} \quad (12.9)$$

#### 12.4.4 Cálculo de $\alpha'$

Finalmente al considerar el primer término de la expresión que define a  $\alpha'$ , en el numeral 12.3.1, se tiene:

$$\alpha = \frac{1}{L} \left( \int_0^L X \right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$

La misma que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\alpha' = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{X^2}{EI(x)} dx$$

En el numeral anterior se vio que la integral vale  $I_Y$ . Por lo tanto se tiene:

$$\alpha' = \frac{I_Y}{L^2} \quad (12.10)$$

En conclusión los elementos de la matriz de rigidez de un elemento de sección constante o variable en coordenadas locales pueden ser calculados a partir del diagrama de masas elásticas, toda vez que todos los términos se obtienen de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$ . Debe anotarse que los términos indicados están relacionados de la siguiente manera:

$$W = \alpha + \alpha' + 2\varepsilon \quad (12.11)$$

En resumen para calcular los valores de  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$  se tienen las siguientes alternativas:

#### ❖ Uso de Integrales

$$\alpha = \int_0^L \frac{(L-X)^2}{L^2 EI(x)} dx$$

$$\varepsilon = \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2 EI(x)} dx$$

$$\alpha' = \frac{1}{L} \left( \int_0^L X \right)^2 \frac{dx}{EI(x)}$$



- ❖ Uso del diagrama de masas elásticas

$$\alpha = \frac{I_y'}{L^2}$$

$$\alpha = \frac{I_{y_2}}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{I_{yY}}{L^2}$$

$$W = \alpha + \alpha' + 2\varepsilon$$

## 12.5 EJERCICIOS RESUELTOS

### • EJEMPLO N.- 1

Utilizando el diagrama de masas elásticas, obtener la matriz de flexibilidad del elemento presentado en la figura 12.9, que se considera axialmente rígido en toda su longitud.

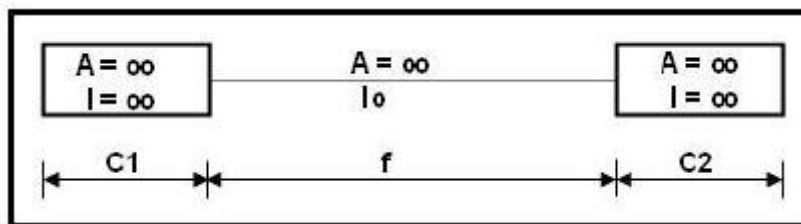


Figura 12.9 Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita en sus extremos.

En los edificios los nudos se consideran completamente rígidos en consecuencia el elemento de la figura 12.9 puede ser un elemento horizontal que ingresa a dos columnas, la cantidad que ingresa es \$C\_1\$ en el nudo inicial y \$C\_2\$ en el nudo final.

### • SOLUCIÓN

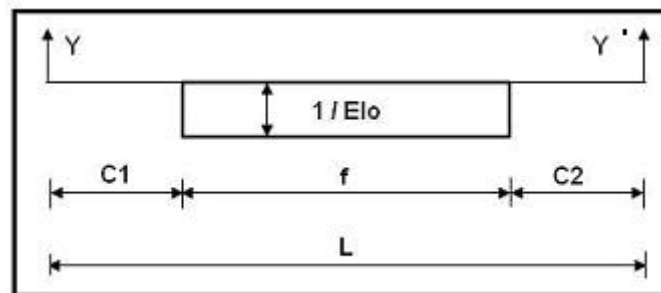


Diagrama de Masas Elásticas.

- Cálculo de \$I\_y\$

$$I_y = \frac{f^3}{12EI_0} + \frac{\left(\frac{C_1}{2} + f\right)^2 f}{EI_0} = \frac{I}{EI_0} \left( \frac{1}{3} C_1^2 f + C_1 f^2 + \frac{f^3}{3} \right)$$

Se ha obtenido el momento de inercia con respecto al centro de gravedad más la distancia al cuadrado por el área. Distancia con respecto al eje \$Y\$. En forma similar se calcula con respecto a \$I\_{y'}\$.

- Cálculo de  $I_Y'$

$$I_Y' = -\frac{f^3}{12EI_0} + \frac{\left(\frac{C_2}{2}f\right)^2 f}{EI_0} = \frac{1}{EI_0} \left( \frac{C_2^2}{3} f^3 + C_2 f^3 \right)$$

- Cálculo de  $\alpha$  y  $\alpha'$

$$\alpha = \frac{I_Y'}{L^2} = \frac{1}{EI_0 L} \left( \frac{C_2^2}{3} f^3 + C_2 f^3 \right)$$

$$\alpha' = \frac{1}{L^2} = \frac{1}{EI_0 L} \left( C_1 f + C_1 f \right) = \frac{2}{3EI_0 L}$$

- Cálculo de  $W$

$$W = \frac{f}{EI_0}$$

- Cálculo de  $\varepsilon$

$$W = \alpha + \alpha' + 2\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(W - \alpha - \alpha')$$

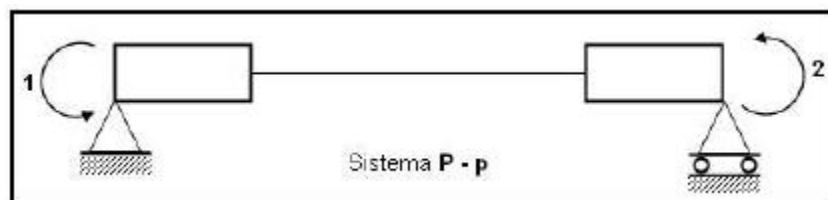
$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_0} \left( \frac{C_2^2}{3} f^3 + C_2 f^3 - \frac{C_1^2}{3L^2} f^3 - \frac{C_1^2}{L^2} f^3 \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2EI_0 L^2} \left( \frac{2}{3} f^3 L^2 - (C_1 + C_2) f - (C_1 + C_2) f - \frac{2}{3} f^3 \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{6EI_0 L} \left( 3fL^2 - 3(C_1^2 + C_2) f - 3(C_1 + C_2) f^2 - 2f^3 \right)$$

$$f = \left[ \begin{array}{l} \frac{(3C_2^2 f + 3C_2 f^2 + f^3)}{3EI_0 L^2} \\ \frac{1}{6EI_0 L} (3fL^2 - 3(C_1^2 + C_2) f - 3(C_1 + C_2) f^2 - 2f^3) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{SIMÉTRICO} \\ \frac{(3C_1^2 f + 3C_1 f^2 + f^3)}{3EI_0 L^2} \end{array} \right]$$

La matriz de flexibilidad encontrada es para el siguiente sistema de coordenadas  $P - p$ .



- EJEMPLO N.- 2

Calcular la matriz de rigidez del elemento mostrado en la figura 12.10 que es axialmente rígido, con un sector de rigidez infinita en el nudo inicial de longitud  $C_1 = \frac{f}{5}$  que es totalmente rígido. Resolver el problema a partir de los resultados del problema anterior.

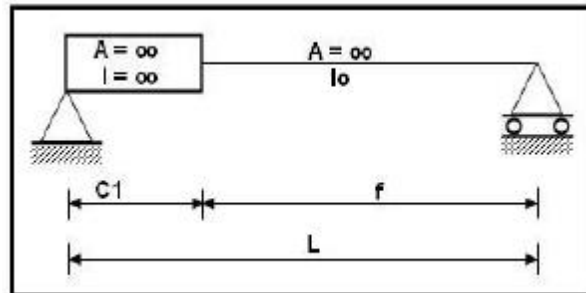


Figura 12.10 Elemento lineal con un sector de rigidez infinita.

- SOLUCIÓN

Al sustituir  $C_1 = \frac{f}{5}$  y  $C_2 = 0$  en la matriz  $f$  del problema anterior y  $L = C_1 + f = \frac{6f}{5}$  se encuentra:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{25f}{108EI_0} & \frac{5f}{27EI_0} \\ \frac{5f}{27EI_0} & \frac{43f}{108EI_0} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\alpha = \frac{25f}{108EI_0} \quad \varepsilon = \frac{5f}{27EI_0} \quad \alpha' = \frac{43f}{108EI_0}$$

- Cálculo de  $\alpha \alpha' - \varepsilon^2$

$$\alpha \alpha' - \varepsilon^2 = \frac{f^2}{(EI_0)^2} \left[ \frac{25 \cdot 43}{108 \cdot 108} - \frac{25}{27 \cdot 27} \right] = \frac{25f^2}{432(EI_0)^2}$$

- Cálculo de  $k, a, k'$

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{43f}{108EI_o}}{\frac{432(EI_o)^2}{25f^2}} = \frac{172EI_o}{25f}$$

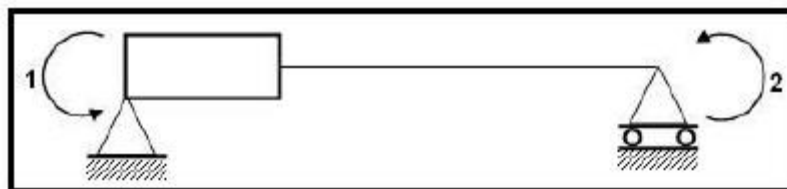
$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{5f}{27EI_o}}{\frac{432(EI_o)^2}{25f^2}} = \frac{16EI_o}{5f}$$

$$k' = \frac{\alpha}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} = \frac{\frac{25f}{108EI_o}}{\frac{432(EI_o)^2}{25f^2}} = \frac{4EI_o}{f}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez para el elemento de la figura 12.10 es:

$$k = \begin{matrix} EI_o & \\ f & \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{172}{25} & \frac{16}{5} \\ \frac{16}{5} & 4 \end{bmatrix}$$

Siendo el sistema  $P - p$  del elemento el siguiente:



Sistema  $P - p$

- EJEMPLO N.- 3

Para el ejemplo de la figura 12.11 probar que:

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \right) - \lambda \quad \left| + \frac{L}{EI_a} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \lambda \right|$$

$$\varepsilon = \frac{L}{EI_o} \left( \frac{1}{6} - \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \quad \left| + \frac{L}{EI_a} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3} \right) \right|$$

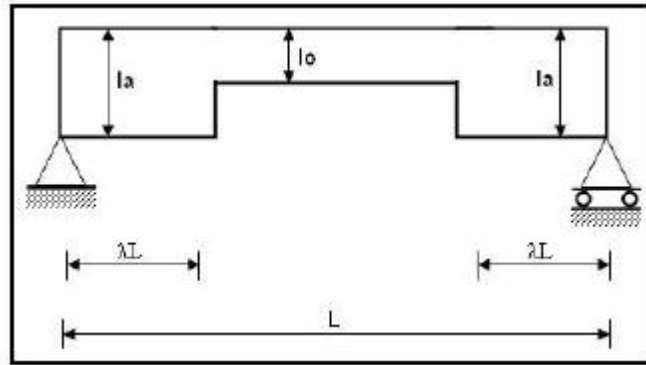
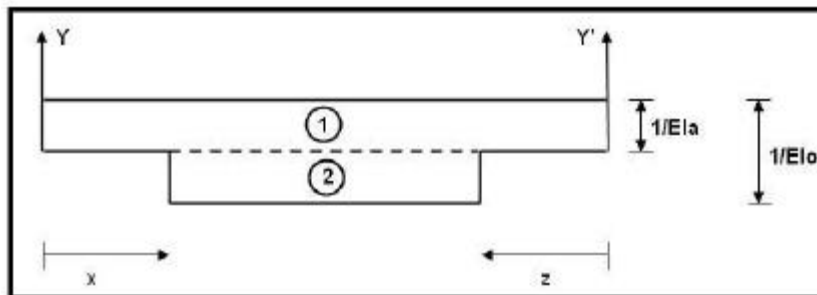


Figura 12.11 Elemento de Ejemplo 3.

• SOLUCIÓN

- Diagrama de masas elásticas



- Cálculo de  $I_Y$

$$I_Y = \frac{W_1 L^2}{3} + \frac{W_2 (L - 2\lambda L)^2}{12} + W_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Donde:

$$W_1 = \frac{L}{EI_o} \quad W_2 = (L - 2\lambda L) \left( \frac{1}{EI_o} - \frac{1}{EI_a} \right)$$

Sustituyendo  $W_1$  y  $W_2$  en  $I_Y$ . Luego de simplificar se obtiene:

$$I_Y = \frac{L^3}{EI_o} \left( \frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2\lambda^3}{3} \right) + \frac{L^3}{EI_a} \left( \frac{2\lambda^2 - 2\lambda^3}{3} - \lambda \right)$$

Por ser elemento simétrico se tiene que  $I_Y = I_{Y'}$ . En consecuencia  $\alpha = \alpha'$

- Cálculo de  $I_{YY'}$

$$I_{YY'} = \frac{L^3}{EI_o} \left( \frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2\lambda^3}{3} \right) + \frac{L^3}{EI_a} \left( \frac{2\lambda^2 - 2\lambda^3}{3} - \lambda \right)$$

Nótese que  $I_{YY'}$  se ha evaluado sumando la contribución de la figura 1 más la contribución de la figura 2, de la siguiente forma:

$$I_{YY'} = -\left[ \frac{W_1 L^2}{12} \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{W_2 (L-2\lambda)^2}{12} + \left( \frac{L}{2} \right) \left( \frac{L}{2} \right) W_2 \right]$$

$$I_{YY'} = L^2 \frac{W_1 + W_2}{4} - \left[ W_1 L^2 + W_2 (L-2\lambda)^2 \right]$$

$$I_{YY'} = -I_{YCG} + X_o Z_o W$$

En la cual C.G.= Centro de Gravedad y  $X_o, Z_o$  son las coordenadas al C.G. de cada figura. Es necesario observar que se pudo considerar  $I_{YY'}$  considerando al elemento como una sola figura. En éste caso se tiene:

$$I_{YCG} = -\frac{L^3}{12EI_o} (1-6\lambda+12\lambda^2-8\lambda^3) + \frac{L^3}{12EI_a} (6\lambda-12\lambda^2+8\lambda^3)$$

$$X_o Z_o W = \frac{L^2}{4} \left( \frac{2\lambda L}{EI_a} + \frac{L}{EI_o} (1-2\lambda) \right) |$$

Entonces al efectuar  $I_{YY'} = -I_{YCG} + X_o Z_o W$  se obtiene el resultado antes anotado.

- **Cálculo de  $\alpha, \alpha', \varepsilon$**

$$\alpha = \frac{I_y}{L^2} = \frac{I_y'}{L}$$

$$\alpha = \alpha' = \frac{L}{EI_o} \left( \frac{1}{3} \frac{2\lambda^2}{3} + \lambda^3 \right) - \lambda \quad | + \frac{L}{EI_a} \left( \frac{2}{3} \frac{2\lambda^2}{3} + \lambda^3 \right) |$$

$$\varepsilon = \frac{I_y'}{L^2} = \frac{L}{EI_o} \left( \frac{1}{6} \frac{2\lambda^2}{3} + \lambda^3 \right) \quad | + \frac{L}{EI_a} \left( \frac{\lambda^2}{3} - \frac{2}{3} \lambda^3 \right) |$$

Que era lo que se quería demostrar. En el ejemplo realizado se ha ilustrado el cálculo de los términos de la matriz de flexibilidad en una forma un tanto diferente al del ejemplo 1. En conclusión se puede calcular  $\varepsilon$  de algunas maneras. Finalmente se destaca que en los ejemplos realizados se ha despreciado el efecto de corte  $\phi$ .

## 12.6 ELEMENTO LINEAL CON DOS SECTORES DE RIGIDEZ INFINITA

En el análisis de pórticos planos con muros de corte o en el cálculo de pórticos con nudos rígidos se debe modelar a los elementos con dos sectores de rigidez infinita como lo muestra la figura 12.12.1. Para éste modelo numérico se desea encontrar la matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales que se indica en la figura 12.2.

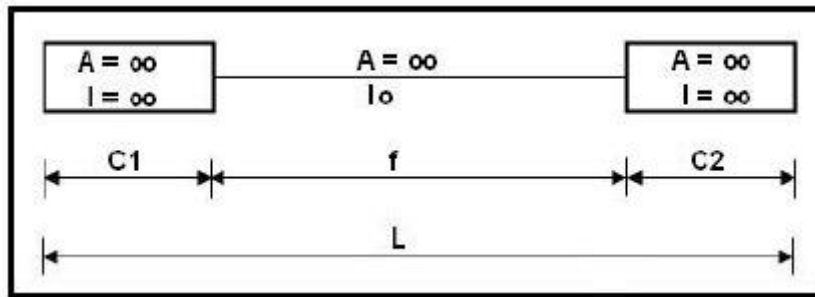


Figura 12.12.1 Elemento lineal con dos sectores de rigidez infinita.



Figura 12.12. Sistema  $P - p$

El elemento en estudio se puede analizar como si estaría compuesto por tres elementos, uno de longitud  $C_1$  que es totalmente rígido, otro de longitud  $f$  que es completamente flexible y el último de longitud  $C_2$  que es totalmente rígido. En la figura 12.12.3 se indica el artificio de solución.

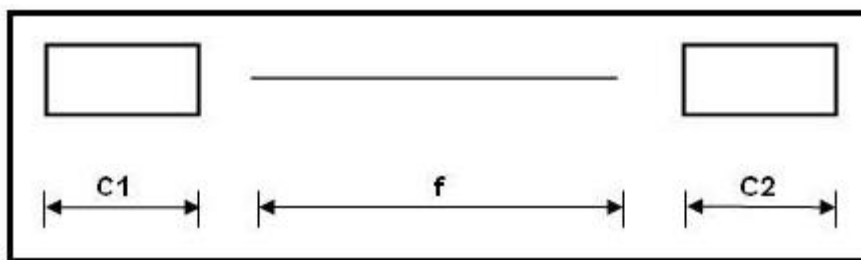


Figura 12.12.3 Artificio de solución

Sea  $k^*$  la matriz de rigidez del elemento de longitud  $f$  en coordenadas locales.

$$k^* = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b^* & a^* & 0 & -b^* & k^* \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

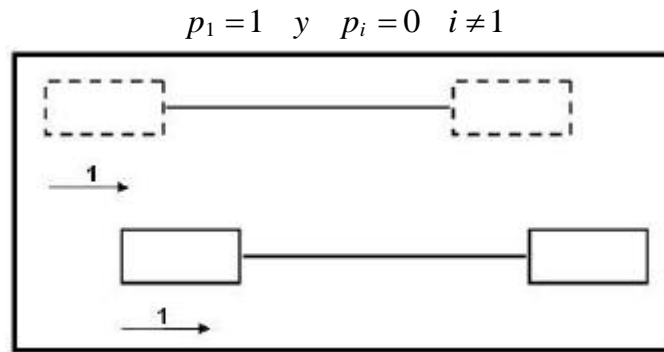
Donde:

$$r^* = \frac{EA_0}{f} \quad k^* = \frac{4EI_0}{f} \left( \frac{1+\phi}{1+4\phi} \right) \quad a^* = \frac{2EI_0}{f} \left( \frac{1-2\phi}{1+4\phi} \right) \quad k^* = k^r$$

$$b^* = \frac{6EI_0}{f^2} \left( \frac{1}{1+4\phi} \right) \quad t^* = \frac{12EI_0}{f^3} \left( \frac{1}{1+4\phi} \right) \quad b^* = b^r$$

El asterisco se lo ha colocado para indicar que corresponde al elemento de longitud  $f$ . Para calcular la matriz de rigidez se utiliza el concepto es decir se buscan las fuerzas que producen un determinado corrimiento unitario.

- o Primera columna de  $k$



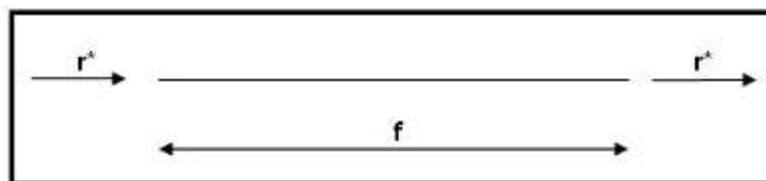
Nótese que el elemento de longitud  $f$  se ha deformado la unidad como consecuencia de esto en el elemento se generan las cargas internas que se calculan a continuación.

$$P^* = k^* p^*$$

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \\ P_5^* \\ P_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b^* & a^* & 0 & -b^* & k'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^* \\ 0 \\ 0 \\ -r^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

En lo restante del desarrollo del problema solo se indicará el resultado del producto matricial  $P^* = k^* p^*$ . Como resultado de la deformación  $p_1 = 1$  y las demás nulas en el elemento de longitud  $f$  se generan fuerzas axiales de magnitud  $r^*$ . Por consiguiente se tiene:

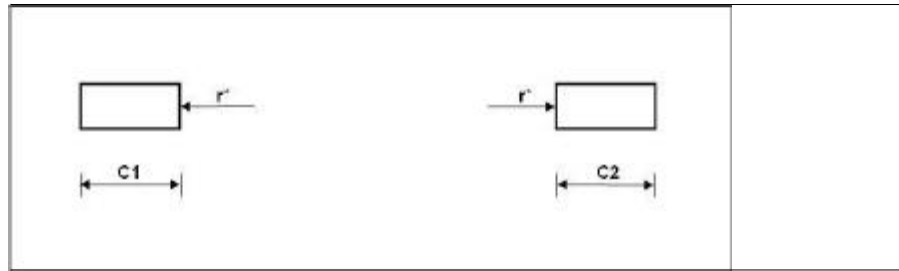


Ahora bien en la unión de los elementos de longitud  $f$  y  $C_1$  debe existir equilibrio, lo propio sucede en la unión del elemento  $f$  con el elemento de longitud  $C_2$ .

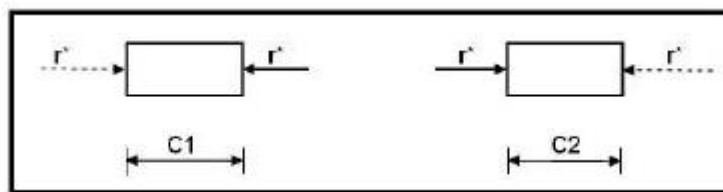




Las fuerzas representadas con líneas entrecortadas actúan en los elementos de longitud  $C_1$  y  $C_2$  cambiadas de dirección.



Para que estén en equilibrio los elementos  $C_1$  y  $C_2$  es necesario la presencia de fuerzas que se lo presenta en la siguiente figura con línea discontinua. Estas fuerzas corresponden a los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento.

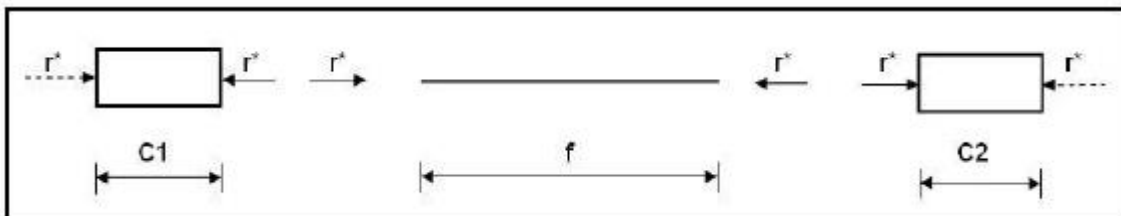


Luego:

$$k_{11} = r^* \qquad k_{41} = -r^*$$

$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

En resumen se tiene:

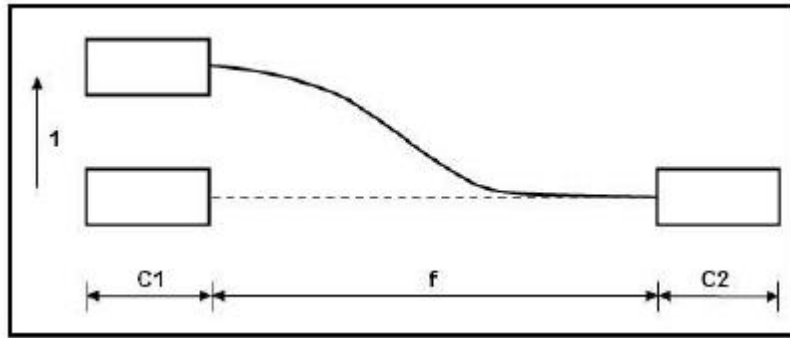


o **Segunda columna de k**

Se procede en forma similar, en éste caso se construye la deformada elemental  $p_2$ , como el elemento de longitud  $C_1$  es totalmente rígido todo sube la unidad y por lo tanto el elemento de longitud  $f$  se deforma  $p^*$ . Por facilidad de escritura se escribe la transpuesta de éste vector.

$$p^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

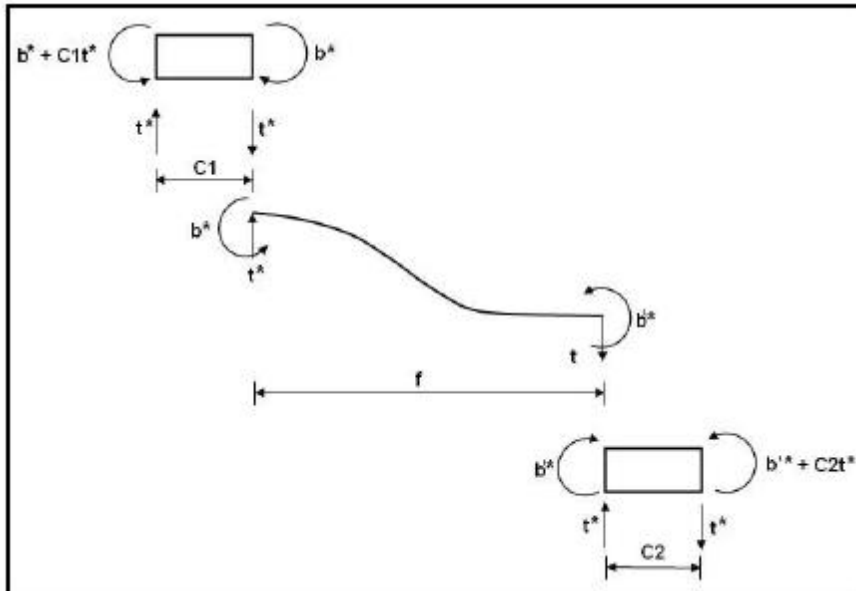
$$p_2 = 1 \quad y \quad p_i = 0 \quad i \neq 2$$



Al efectuar el producto  $\mathbf{P}^* = \mathbf{k}^* \mathbf{p}^*$  se encuentra:

$$\begin{array}{lll} P_1^* = 0 & P_2^* = t^* & P_3^* = b^* \\ P_4^* = 0 & P_5^* = -t^* & P_6^* = -b^* \end{array}$$

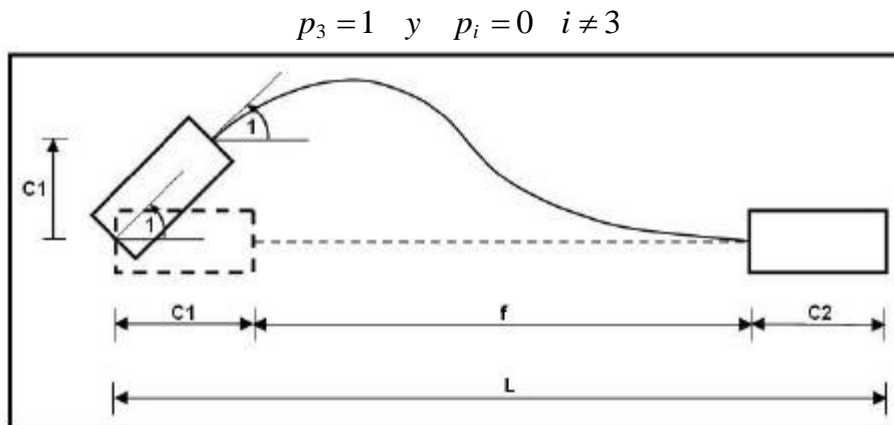
En el gráfico que se presenta a continuación se resume el equilibrio de los elementos y de las juntas.



Para hallar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez hay que observar las fuerzas y momentos que actúan en los extremos izquierdo y derecho de los elementos  $C_1$  y  $C_2$ .

$$\begin{array}{l} k_{12} = P_1 = 0 \\ k_{22} = P_2 = t^* \\ k_{32} = P_3 = b^* + C_1 t^* \\ k_{42} = P_4 = 0 \\ k_{52} = P_5 = -t^* \\ k_{62} = P_6 = b^* + C_2 t^* \end{array}$$

- o Tercera columna de  $k$



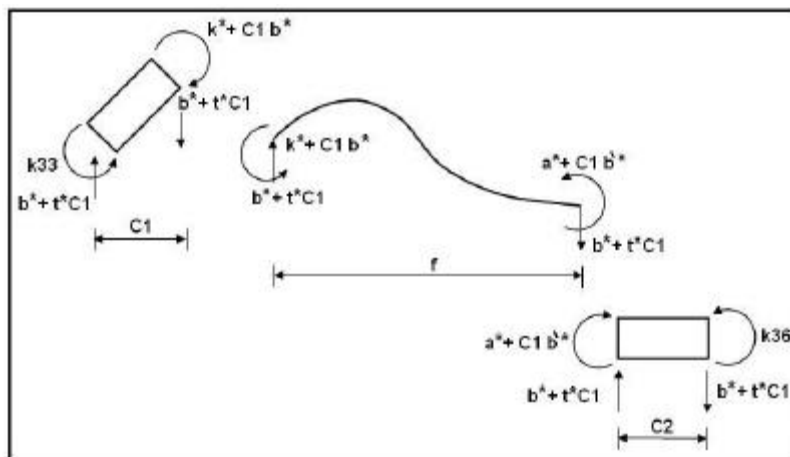
Nótese que al rotar la unidad el elemento de longitud  $C_1$  se produce en el elemento de longitud  $f$  una rotación unitaria y un corrimiento vertical de magnitud  $C_1$ , esto es debido a que el elemento de longitud  $C_1$  es totalmente rígido. Luego:

$$p^{*t} = [0 \quad C_1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Del producto matricial  $P^* = k^* p^*$  se obtiene:

$$\begin{aligned} P_1^* &= 0 & P_2^* &= b^* + C_1 t^* & P_3^* &= k^* + C_1 b^* \\ P_4^* &= 0 & P_5^* &= -(b^* + C_1 t^*) & P_6^* &= a^* + C_1 b^* \end{aligned}$$

Por lo tanto se tendrá:

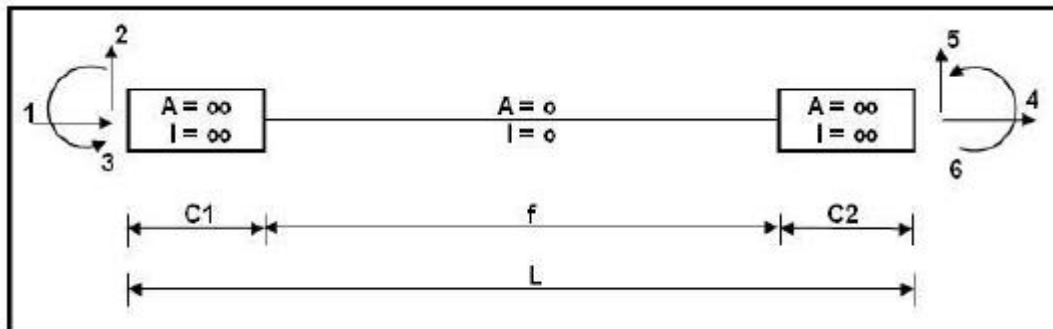


De donde:

$$\begin{aligned} k_{31} &= 0 & k_{32} &= b^* + C_1 t^* & k_{33} &= k^* + 2C_1 b^* + C_1^2 t^* \\ k_{34} &= 0 & k_{35} &= -(b^* + C_1 t^*) & k_{36} &= a^* + C_1 b^* + C_2 b^* + C_1 C_2 t^* \end{aligned}$$

Procediendo de forma similar se obtienen los elementos de la cuarta, quinta y sexta columna. La matriz de rigidez para el elemento con dos sectores de rigidez infinita indicado en la figura 12.12.1 es la siguiente:

$$k_2 = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & & & \\ 0 & b^* + C_1 t^* & k^* + 2C_1 b^* + C_1^2 t^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -(b^* + C_1 t^*) & 0 & t^* & \\ 0 & b^* + C_2 t^* & a^* + C_1 b^* + C_2 b^* + C_1 C_2 t^* & 0 & -(b^* + C_2 t^*) & k^* + 2C_2 b^* + C_2^2 t^* \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$



Sistema P - p

### 12.7 ELEMENTO LINEAL CON INERCIA ESCALONADA

Quando se diseña una estructura ante cargas verticales por el Método del Pórtico Equivalente el conjunto losa viga se modela como una viga de inercia escalonada como lo muestra la figura 12.13.1

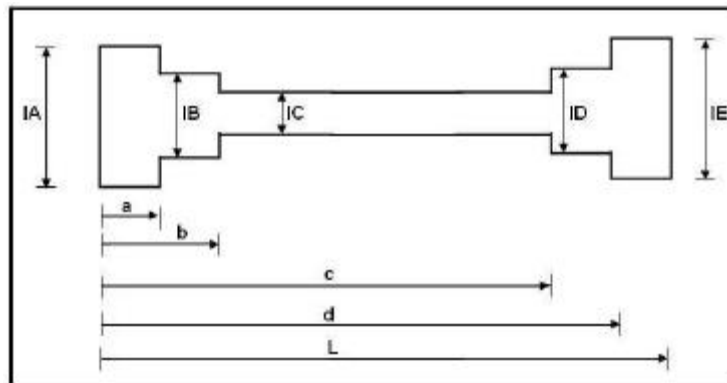


Figura 12.13.1 Viga con inercia escalonada.

En este caso se han dibujado cinco tipos de inercia, se puede tener más o menos de acuerdo al macizado de la losa. Pero no necesariamente la variación de inercia va a ser  $I_A > I_B > I_C$ , esto se cumple en las losas. Pero se puede tener el caso contrario  $I_A < I_B < I_C$  este caso es para cuando se modela daño por sismo.

Efectivamente el diagrama de momentos por sismo es de tipo triangular con valores altos de momentos en los extremos en consecuencia son éstos puntos los que más se dañan de ahí que la inercia va a ser menor en los extremos y a medida que se aproxima al centro de luz el daño es menor y consecuentemente la inercia a flexión mayor. Se puede considerar más escalones en el modelo pero la forma de cálculo que se indica a continuación es la misma.

En la figura 12.13.1 la longitud de cada escalón de inercia se le acota a partir del nudo inicial para poder sistematizar el cálculo como se verá posteriormente. El diagrama de masas elásticas para el elemento analizado se lo presenta en la figura 12.13.2

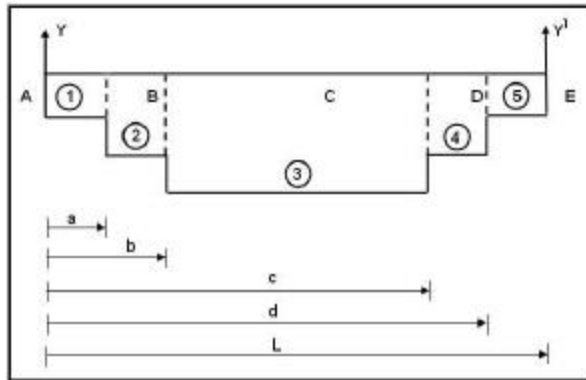


Figura 12.13.2 Diagrama de masas elásticas y numeración de figuras.

La nomenclatura utilizada en el diagrama de la figura 12.13.2 es la siguiente:

$$A = \frac{1}{EI_A} \quad B = \frac{1}{EI_B} \quad C = \frac{1}{EI_C} \quad D = \frac{1}{EI_D} \quad E = \frac{1}{EI_E}$$

Con la forma acotada para definir las inercias y longitudes de los escalones, el cálculo de los momentos de inercia y áreas se sintetiza en la tabla 12.1

Tabla 12.1 Cálculo de momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

Figura	$X_o$	$W$	$I_Y$	$I_Y'$
1	$\frac{a}{2}$	$A a$	$\frac{A a^3}{3}$	$\frac{A[L^3 - (L-a)^3]}{3}$
2	$\frac{a+b}{2}$	$B(b-a)$	$\frac{B(b^3 - a^3)}{3}$	$\frac{B[(L-a)^3 - (L-b)^3]}{3}$
3	$\frac{b+c}{2}$	$C(c-b)$	$\frac{C(c^3 - b^3)}{3}$	$\frac{C[(L-b)^3 - (L-c)^3]}{3}$
4	$\frac{c+d}{2}$	$D(d-c)$	$\frac{D(d^3 - c^3)}{3}$	$\frac{D[(L-c)^3 - (L-d)^3]}{3}$
5	$\frac{d+L}{2}$	$E(L-d)$	$\frac{E(L^3 - d^3)}{3}$	$\frac{E(L-d)^3}{3}$
		$\sum W$	$\sum I_Y$	$\sum I_Y'$

Una vez calculado  $W, I_Y, I_Y'$  se procede de acuerdo a lo indicado en el apartado 12.4.

En el Capítulo 13 se realizan ejemplos numéricos de lo estudiado en el presente capítulo.

## 12.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

### EJERCICIO N.- 1

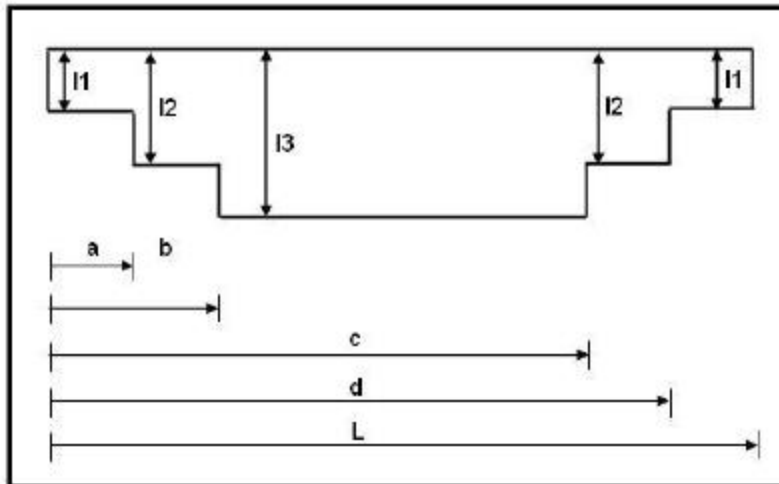
Para el elemento lineal presentado en la figura 12.2 obtener la matriz de rigidez usando el concepto. Por lo tanto encontrar las fuerzas y momentos que producen un determinado corrimiento unitario.

**EJERCICIO N.- 2**

Obtener los elementos de la quinta columna de la matriz de rigidez de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

**EJERCICIO N.- 3**

Usando el diagrama de masas elásticas elaborar un programa para calcular  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$  para el siguiente elemento:

**EJERCICIO N.- 4**

Presentar un caso práctico en donde se puede emplear los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. Ilustre lo mismo para el caso de un elemento con dos sectores de rigidez infinita.

**EJERCICIO N.- 5**

Generalice el Ejercicio N.- 3 y elabore un diagrama de flujo para obtener  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha'$  para una viga escalonada con inercias diferentes. El número de escalones es arbitrario.

## CAPITULO 13

---

### ENSAMBLAJE DIRECTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA

#### RESUMEN

Se presenta el fundamento matemático que conduce al algoritmo denominado ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez de una estructura por medio del ordenador. Se obtiene esta matriz para estructuras planas cuyos elementos se estudiaron en el Capítulo 12.

Se presentan dos formas de realizar el ensamblaje directo de la matriz de rigidez, en la primera se trabaja con un arreglo de dos dimensiones y en la segunda con un arreglo de una dimensión y solo con la matriz triangular superior de  $K$ , de esta manera se pueden resolver estructuras con un mayor número de grados de libertad, para ello se debe utilizar los programas de solución de ecuaciones indicados en el Capítulo 11. Para lograr este objetivo se presentan dos diagramas de flujo que permiten al lector programar el cálculo de la matriz de rigidez en forma total, en dos dimensiones o solo la matriz triangular superior en una sola dimensión.

#### 13.1 MATRIZ DE COMPATIBILIDAD $A$

Se va a obtener la matriz de compatibilidad  $A$  orientada al uso del ordenador, para el pórtico presentado a la izquierda de la figura 13.1 Para no escribir demasiados números el marco que se analiza solo tiene dos elementos. En la gráfica de la parte central se indica el sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$  y a la derecha el sistema de coordenadas globales de los elementos  $P - p$ . La estructura que tiene 4 grados de libertad.

Antes de calcular la matriz de compatibilidad es necesario realizar las siguientes acotaciones:

- i) Los elementos del pórtico plano son totalmente flexibles, ésta hipótesis facilita la elaboración de un programa de computación para obtener la matriz de rigidez de la estructura.
- ii) El sistema de coordenadas  $P - p$  se considera en coordenadas globales.

Para el ejemplo analizado las seis primeras coordenadas del elemento corresponden a la columna y las siguientes seis a la viga.

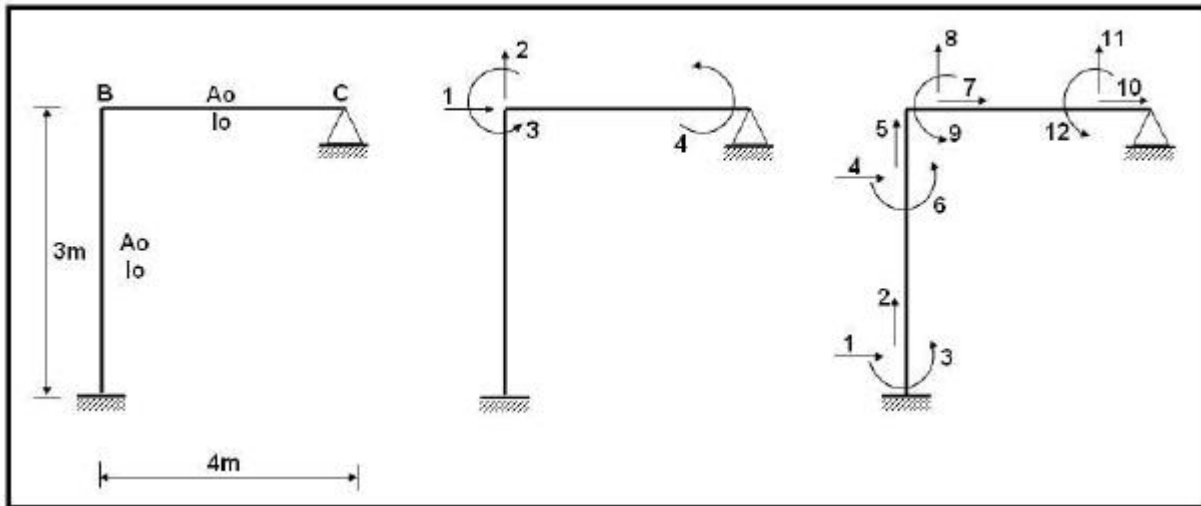


Figura 13.1 Pórtico con elementos totalmente flexibles, sistema  $Q - q$ , y sistema  $P - p$

Si bien es cierto en el Capítulo 5 ya se presentó las coordenadas globales de un elemento y en el Capítulo 12 se obtuvo la matriz de rigidez en coordenadas globales no está demás repasar el significado de las deformaciones  $p$  y las cargas  $P$  lo que se realiza a continuación pero previamente en la figura 13.2 se presentan las coordenadas globales de un elemento inclinado que es el caso más general.

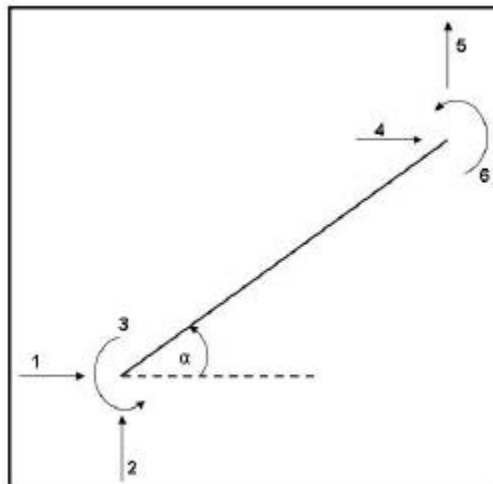


Figura 13.2 Coordenadas globales de un elemento.

El vector transpuesto de las deformaciones  $p$  tiene la siguiente forma:

$$p^t = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6]$$

La convención de signos positiva de las deformaciones  $p$  se indica en la figura 13.2 y su significado es el siguiente:

- $p_1$  Es la componente de desplazamiento horizontal del nudo inicial.
- $p_2$  Es la componente de desplazamiento vertical del nudo inicial.
- $p_3$  Es la rotación del nudo inicial.
- $p_4$  Es la componente de desplazamiento horizontal del nudo final.
- $p_5$  Es la componente de desplazamiento vertical del nudo final.
- $p_6$  Es la rotación del nudo final.



Por otra parte el vector de cargas  $P$  es:

$$P^t = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6]$$

- $P_1$  Es la fuerza horizontal en el nudo inicial.
- $P_2$  Es la fuerza vertical en el nudo inicial.
- $P_3$  Es el momento del nudo inicial.
- $P_4$  Es la fuerza horizontal del nudo final.
- $P_5$  Es la fuerza vertical del nudo final.
- $P_6$  Es el momento del nudo final.

Se destaca que en los programas de computación las estructuras se resuelven en coordenadas globales y al final las cargas se pasan a coordenadas locales que son más fáciles de interpretar. Retornando al objetivo inicial del presente apartado, que es demostrar el fundamento del ensamblaje directo a continuación se procede a calcular la matriz  $A$

$$p = A q$$

- Primera columna de  $A$

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

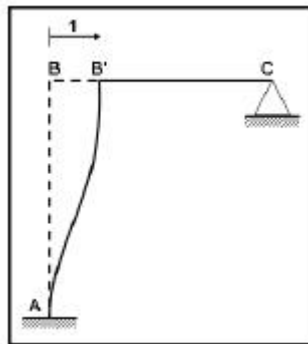


Figura 13.3.1 Deformada elemental  $q_1$

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 & p_4 = 1 & p_5 = 0 & p_6 = 0 \\ p_7 = 1 & p_8 = 0 & p_9 = 0 & p_{10} = 0 & p_{11} = 0 & p_{12} = 0 \end{matrix}$$

- Segunda columna de  $A$

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

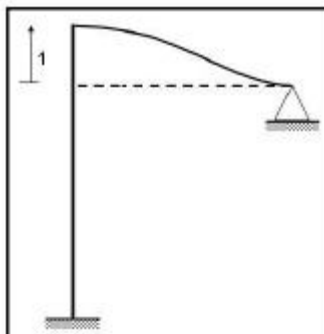


Figura 13.3.2 Deformada elemental  $q_2$

$$\begin{array}{cccccc}
 p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 & p_4 = 0 & p_5 = 1 & p_6 = 0 \\
 p_7 = 0 & p_8 = 1 & p_9 = 0 & p_{10} = 0 & p_{11} = 0 & p_{12} = 0
 \end{array}$$

▪ Tercera columna de  $A$

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$

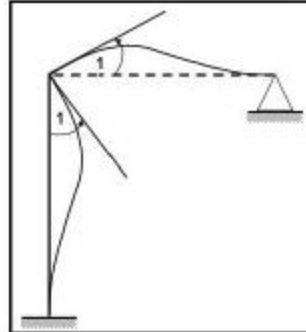


Figura 13.3.3 Deformada elemental  $q_3$

$$\begin{array}{cccccc}
 p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 & p_4 = 0 & p_5 = 0 & p_6 = 1 \\
 p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 1 & p_{10} = 0 & p_{11} = 0 & p_{12} = 0
 \end{array}$$

▪ Cuarta columna de  $A$

$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$

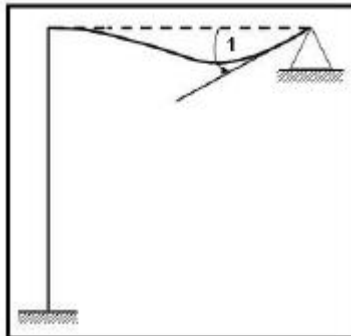


Figura 13.3.4 Deformada elemental  $q_4$

$$\begin{array}{cccccc}
 p_1 = 0 & p_2 = 0 & p_3 = 0 & p_4 = 0 & p_5 = 0 & p_6 = 0 \\
 p_7 = 0 & p_8 = 0 & p_9 = 0 & p_{10} = 0 & p_{11} = 0 & p_{12} = 1
 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \hline A^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $A$  orientada al uso del computador está compuesta únicamente por ceros y unos, como se acaba de apreciar. Su cálculo es muy sencillo pero implica demasiados números.

### 13.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La matriz de rigidez de un elemento está en concordancia con el sistema de coordenadas del elemento. Por lo tanto si el sistema de coordenadas de elemento está en coordenadas globales la matriz de rigidez del elemento se evaluará en coordenadas globales.

Por ahora no interesan los valores de la matriz de rigidez de un elemento razón por la cual se resuelve en forma literal el pórtico plano de la figura 13.1. Se va a utilizar el índice 1 para indicar que corresponde a la columna y el índice 2 para la viga. Al emplear los formularios indicados en el capítulo 12 y considerando que se resuelve literalmente se tiene para el ejemplo, lo siguiente:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Como se estudió en el Capítulo 10, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la siguiente ecuación.

$$K = \sum_{i=1}^n A^{(i)T} k^{(i)} A^{(i)}$$

Para el presente ejemplo los triples productos matriciales indicados en la ecuación, son:

- **Producto**  $A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)}$

$$A^{(1)t} k^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 \\ k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} & 0 \\ k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Producto**  $A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)}$

$$A^{(2)t} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez del marco plano resulta:

$$K = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{54}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)} + k_{23}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{64}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)} + k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

### 13.3 ENSAMBLAJE DIRECTO

En el Capítulo 5 se definió lo que es el vector de colocación, VC, de un elemento; para el marco plano de la figura 13.1 los vectores de colocación, son:

$$VC(1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$VC(2) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$$

Los tres primeros dígitos de VC corresponden a los grados de libertad del nudo inicial y los tres últimos a los grados de libertad del nudo final.

Se llega a obtener el mismo resultado de la matriz de rigidez de la estructura analizada en los numerales anteriores, si sobre la matriz de rigidez de cada elemento se coloca el vector de colocación respectivo, en la parte superior y a la derecha, como se explica a continuación.

Los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez del elemento 1 van a la posición cero en la matriz de rigidez de la estructura pero como no existe la posición toda la primera columna no contribuye, razón por la cual se traza una línea vertical, lo propio sucede con la segunda y tercera columnas. Los elementos de la cuarta columna si contribuyen a la formación de **K**. Ahora bien, a nivel de filas, la primera fila tiene un cero por lo que no contribuye trazándose por tanto una línea horizontal, de igual manera la segunda y tercera filas no contribuyen.

▪ Elemento 1

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Los elementos no rayados son la contribución del elemento 1 a la matriz de rigidez de la estructura. El vector de colocación indica la posición en la cual deben ubicarse estos términos así el elemento  $k_{44}^{(1)}$  va a la columna 1 fila 1, el término  $k_{54}^{(1)}$  va a la columna 1 fila 2, etc.

Por lo tanto la matriz de rigidez de miembro se ensambla en la matriz de rigidez de la estructura mediante su vector de colocación.

▪ Elemento 2

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

El elemento  $k_{11}^{(2)}$  va a la posición (1,1) y se sumará al término  $k_{44}^{(1)}$  que ya estaba en esa posición, el término  $k_{21}^{(2)}$  va a la posición (1,2) y se suma a  $k_{54}^{(1)}$ , etc. De esta forma se obtiene la matriz de rigidez para la estructura de la figura 13.1 y cuyo resultado se indica al final del apartado 13.2.

El fundamento del ensamblaje directo viene dado por el concepto de la matriz de rigidez de una estructura asociado a la circunstancia de que la matriz **A** está compuesta únicamente por ceros y unos.

**13.4 EJERCICIOS RESUELTOS**

• EJEMPLO 1

Determinar la matriz de rigidez, por ensamblaje directo de la estructura mostrada, a la izquierda de la figura 13.4. El sistema de coordenadas y la numeración de los elementos se indican a la derecha

de la figura 13.4. Considerar que:  $\frac{I_0}{A_0 L^2} = \frac{1}{80}$

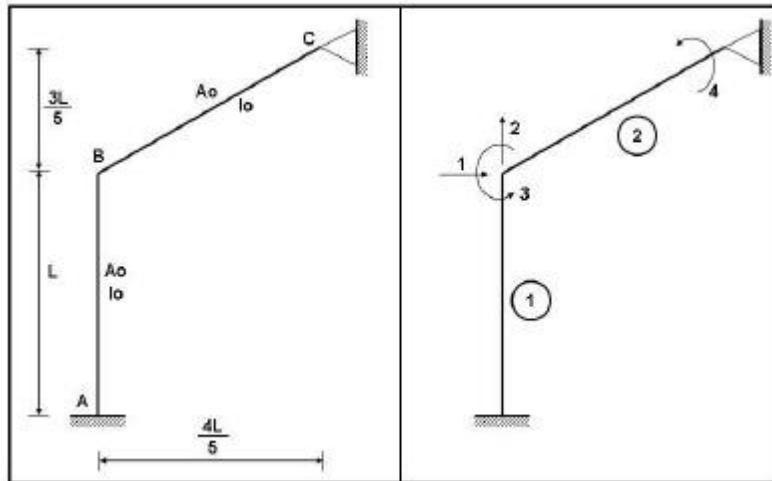


Figura 13.4 Estructura de Ejemplo 1 y sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$

### • SOLUCIÓN

Para el elemento uno, se considera que el nudo inicial corresponde al nudo A y el final al nudo B. Luego el ángulo que forma el eje del elemento con el eje X es 90 grados. La matriz de rigidez en coordenadas globales resulta.

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} EI_0 \\ L^3 \end{matrix}$$

No se considera el efecto de corte y se ha reemplazado la condición de que  $A_0 = 80 I_0 / L^2$  dato del problema. Para el elemento 1 el vector de colocación es:

$$VC(1) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]$$

Luego al colocar el VC sobre y a la derecha de la matriz de rigidez del elemento, se tiene:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EI_0 \\ L^3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura analizada es de 4 x 4 y la contribución del miembro 1, es:

$$= \begin{bmatrix} 12 & \vdots & 6L & \vdots \\ \vdots & 80 & \vdots & \vdots \\ 6L & \vdots & 4L^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3}$$

Para el elemento 2 se tiene que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cos}\alpha = \frac{4}{5}$$

Al reemplazar estos valores en la matriz de rigidez de miembro en coordenadas globales y al proceder en forma similar al elemento 1 teniendo presente que:

$$VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$$

Se tiene:

$$k^{(2)} = \frac{EI_0}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 1388 & 816 & -18L & -1388 & -816 & -18L \\ 816 & 912 & 24L & -816 & -912 & 5 \\ -18L & 24L & 4L^2 & 18L & -24L & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2L^2 \\ \hline -1388 & -816 & 18L & 1388 & 816 & 18L \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 25 & -912 & -24L & 816 & 912 & 5 \\ -816 & 25 & 5 & 25 & 25 & -24L \\ 25 & 24L & 2L^2 & 18L & -24L & 5 \\ -18L & 5 & 5 & 5 & 5 & 4L \\ \hline 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

La contribución del elemento 2 a la matriz de rigidez del pórtico analizado, es:

$$k = \begin{bmatrix} 1388 & \vdots & 816 & \vdots & -18L & \vdots & -18L \\ \vdots & 25 & 5 & \vdots & 5 & \vdots & 5 \\ 816 & \vdots & 912 & \vdots & 24L & \vdots & 5 \\ \vdots & 25 & 25 & \vdots & 5 & \vdots & 5 \\ -18L & \vdots & 24L & \vdots & 4L^2 & \vdots & 2L^2 \\ -18L & \vdots & 5 & \vdots & 5 & \vdots & 5 \\ \vdots & 24L & 2L^2 & \vdots & 4L^2 & \vdots & 4L^2 \\ 5 & \vdots & 5 & \vdots & 5 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \frac{EI_0}{L^3}$$

Al sumar la contribución de los elementos 1 y 2 se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1688}{25} & \vdots & \frac{816}{25} & \vdots & \frac{12L}{5} & \vdots & \frac{-18L}{5} \\ \frac{816}{25} & \vdots & \frac{2912}{25} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} \\ \frac{12L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 8L^2 & \vdots & 2L^2 \\ \frac{-18L}{5} & \vdots & \frac{24L}{5} & \vdots & 2L^2 & \vdots & 4L^2 \\ -5 & \vdots & 5 & \vdots & 2L^2 & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI_o}{L^3}$$

## • EJEMPLO 2

Determinar la matriz de rigidez del pórtico plano presentado a la izquierda de la figura 13.5 si sus elementos son totalmente flexibles. Las columnas son de 40 x 40 cm., y la viga de 30 x 30 cm., Considerar un módulo  $E = 2100000 \text{ T/m}^2$ .

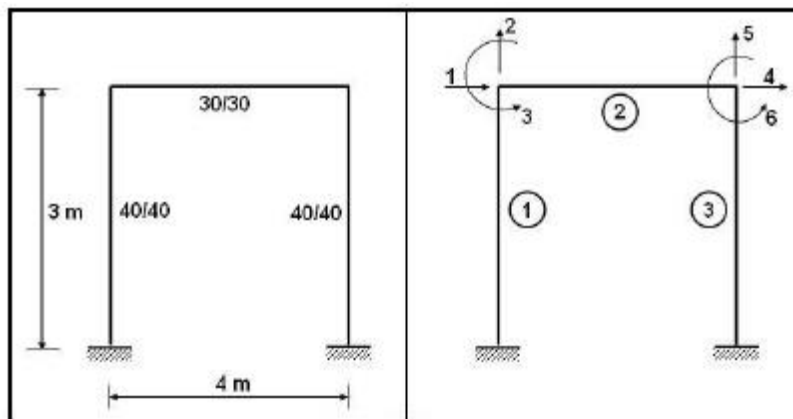


Figura 13.5 Pórtico de Ejemplo 2 y sistema de coordenadas  $q - q'$

## • SOLUCIÓN

Se indican las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales y los respectivos vectores de colocación.

### ▪ Elemento 1

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} 1988.00 & 0.00 & -2982.00 & -1988.00 & 0.00 & -2982.00 \\ 0.00 & 112000.0 & 0.00 & 0.00 & -112000.00 & 0.00 \\ 0 & -2982.00 & 0.00 & 5964.00 & 2982.00 & 0.00 \\ -1988.00 & 0.00 & 2982.00 & 1988.00 & 0.00 & 2982.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 112000.00 & 0.00 \\ 0 & -2982.00 & 2000.00 & 2982.00 & 2982.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$



- Elemento 2

$$k^{(2)} = \begin{bmatrix} 47250.00 & 0.00 & 0.00 & -47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 267.75 & 535.50 & 0.00 & -267.75 & 535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 1428.00 & 0.00 & -535.50 & 714.00 \\ -47250.00 & 0.00 & 0.00 & 47250.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -267.75 & -535.50 & 0.00 & 267.75 & -535.50 \\ 0.00 & 535.50 & 714.00 & 0.00 & -535.50 & 1428.00 \end{bmatrix}$$

$$VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

- Elemento 3

$$k^{(3)} = k^{(1)}$$

$$VC^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

Al realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura se obtiene:

$$K = \begin{bmatrix} 49238.00 & 0.00 \\ 0.00 & 112270.00 \\ 2982.00 & 535.50 \\ -47250.00 & 0.00 \\ 0.00 & -267.75 \\ 0.00 & 535.50 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 3

El pórtico plano presentando en la parte superior de la figura 13.6 tiene dos muros de corte de 20/200 cm y vigas de 60/60 cm. Las fuerzas sísmicas que actúan sobre el pórtico son de 8 T., y 14 T. Se considera que las vigas son axialmente rígidas y todo lo demás completamente flexible. El módulo de elasticidad del material  $E = 2400000 \text{ kg/m}^2$ . Se pide resolver el pórtico por el Método de los Desplazamientos, en verdad se debería calcular solo la matriz de rigidez de la estructura, que es lo que abarca el Capítulo pero por considerarlo de interés se resuelve completamente como lo hace el computador.

En la parte inferior izquierda, se indica la numeración de los nudos, elementos y se destaca que la luz es de 6.0 m., a la derecha se presentan los 10 grados de libertad que tiene la estructura.

- SOLUCIÓN

El Ejemplo ha sido resuelto utilizando el sistema de computación **CEINCI-LAB** pero con modificaciones ya que la librería de programas de **CEINCI-LAB** son para pórticos con elementos totalmente flexibles y aquí solo las vigas son axialmente rígidas, son ligeras las modificaciones que se realizan pero conceptuales.

Cuando se tiene muros de corte, es fundamental calcular la matriz de rigidez de las vigas, considerando nudos rígidos, tema que fue abordado en el Capítulo 12. En este ejercicio solo se considera nudos rígidos en las vigas, en las columnas no para que el usuario determine la matriz de rigidez de los muros sin nudos rígidos y la matriz de rigidez de las vigas con nudos rígidos.

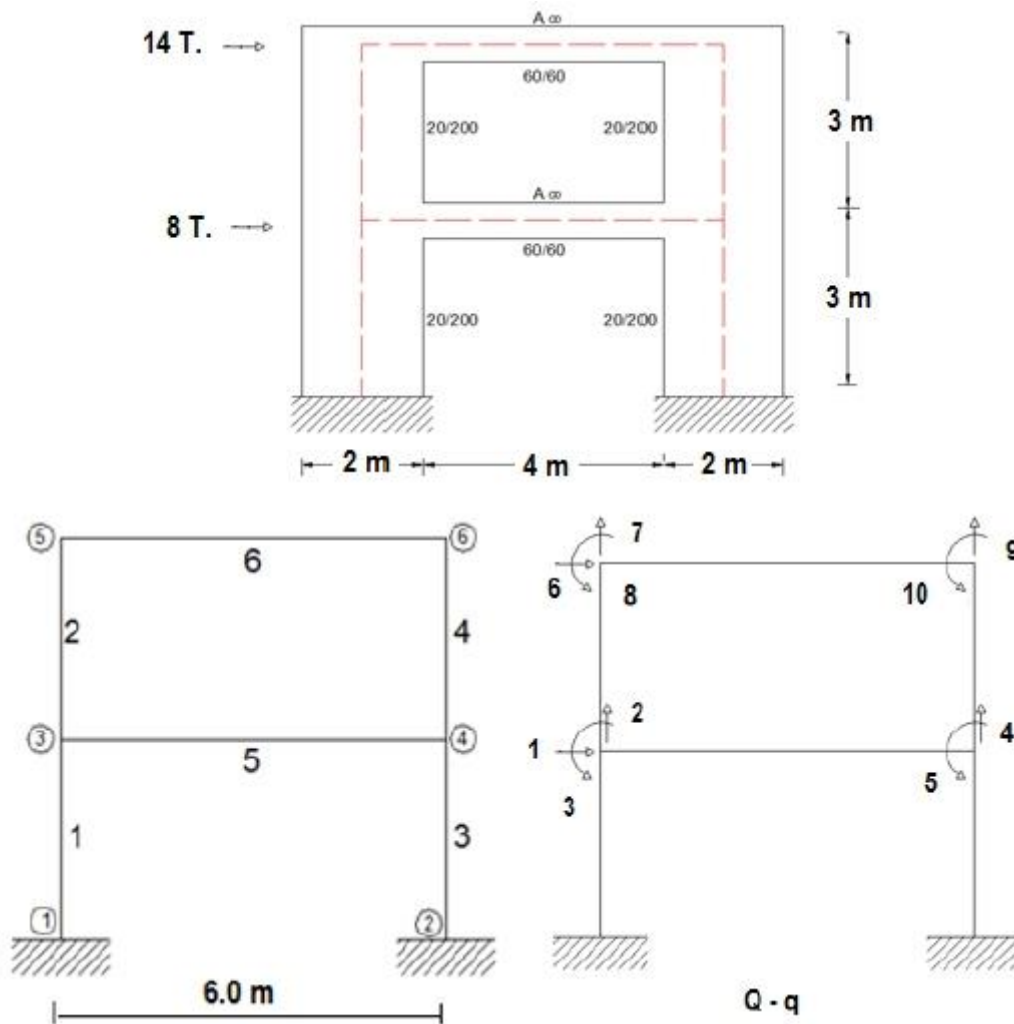
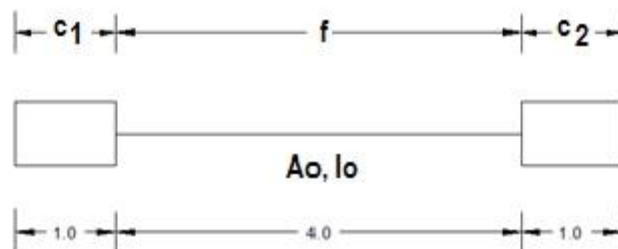


Figura 13.6 Pórtico con muros de corte sometida a cargas laterales.

- Matriz de rigidez de una viga con nudo rígido

No considerar nudos rígidos en las vigas es un verdadero error, no así en los muros que se puede omitir el nudo rígido. La nomenclatura utilizada en el capítulo 12 y la respectiva matriz de rigidez del elemento se presentan a continuación, destacando que los términos que tienen asterisco se calculan su rigidez con la luz libre  $f$ .



$$k^* = \begin{bmatrix} r^* & & & & & \\ 0 & t^* & & & & \\ 0 & b^* & k^* & & & \\ -r^* & 0 & 0 & r^* & & \\ 0 & -t^* & -b^* & 0 & t^* & \\ 0 & b^* & a^* & 0 & -b^* & k^{**} \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$



$KT =$

	2.438									
	0	6.445								
	0	0.135	5.347							
	0	-0.045	-0.135	6.445						
	0	0.135	0.341	-0.135	5.347					
$10^5$	-1.219	0	0.914	0	0.914	1.219				
	0	-3.2	0	0	0	0	3.2			
	-0.914	0	0.305	0	0	0.914	0	2.439		
	0	0	0	-3.2	0	0	0	0	3.2	
	(-0.914	0	0	0	0.3052	0.914	0	0	0	2.438)

Para el cálculo del vector de cargas generalizadas  $q$  se debe tener en cuenta que las vigas son axialmente rígidas en consecuencia se tiene que determinar una fuerza axial  $N$ , como se vio en el capítulo IV. El vector transpuesta de  $q$  es:

$$q^t = [8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 14 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales se encuentra el vector de coordenadas  $q$ .

$$q = 10^{-3} * \begin{pmatrix} 0.3991 \text{ m} \\ 0.0229 \text{ m} \\ -0.1457 \text{ rad} \\ -0.0229 \text{ m} \\ -0.1457 \text{ rad} \\ 0.9479 \text{ m} \\ 0.0341 \text{ m} \\ -0.1435 \text{ rad} \\ -0.0341 \text{ m} \\ (-0.1435 \text{ rad}) \end{pmatrix}$$

Con el vector de coordenadas  $q$ , y con los vectores de colocación se encuentra primero las deformaciones en los elementos en coordenadas globales, así por ejemplo para el elemento 1, se tiene:

$$p^{t(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Primero se encera el vector  $p$  en coordenadas globales que tiene 6 elementos, se ha escrito la transpuesta para ahorrar espacio. El VC del elemento 1 es:  $VC^{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]$

Cuando el vector de colocación es cero, queda el cero del vector  $p$ , para el ejemplo quedan los tres primeros ceros en la cuarta posición se tiene que el vector de colocación es 1, luego del vector  $q$  se toma la primera cantidad, para la posición cinco se toma la segunda cantidad porque el VC es 2 y para la sexta posición la tercera cantidad del vector  $q$ . Quedando.

$$p^{t(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.3991 \ 0.0229 \ -0.1457] * 10^{-3}$$

Posteriormente se encuentran las cargas  $p$  en coordenadas globales que se denomina  $p_G$ , para diferenciar de las cargas  $p$  en coordenadas locales  $p_L$

$$p_G = k_3 p$$

$$p_L = T_{2-3} p_G$$

Al no existir cargas en los elementos no se tiene Problema Primario.

Donde  $k_3$  es la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales, que en este ejercicio se ha denominado  $KH$ ; por otra parte,  $T_{2-3}$  es la matriz de paso de coordenadas locales a globales, estudiada en el capítulo 5.

Lo indicado se verá con más detenimiento en el siguiente capítulo. Los resultados que se hallan para todos los elementos son:

$$F = \begin{pmatrix} -7.318 & 11 & 32.047 & 7.318 & -11 & 0.954 \\ -3.579 & 7 & 10.264 & 3.579 & -7 & 10.736 \\ 7.318 & 11 & 32.047 & -7.318 & -11 & 0.954 \\ 3.579 & 7 & 10.264 & -3.579 & -7 & 10.736 \\ 0 & -3.739 & -11.218 & 0 & 3.739 & -11.218 \\ 0 & -3.579 & -10.736 & 0 & 3.579 & -10.736 \end{pmatrix}$$

Las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos se indican en la figura 13.7.

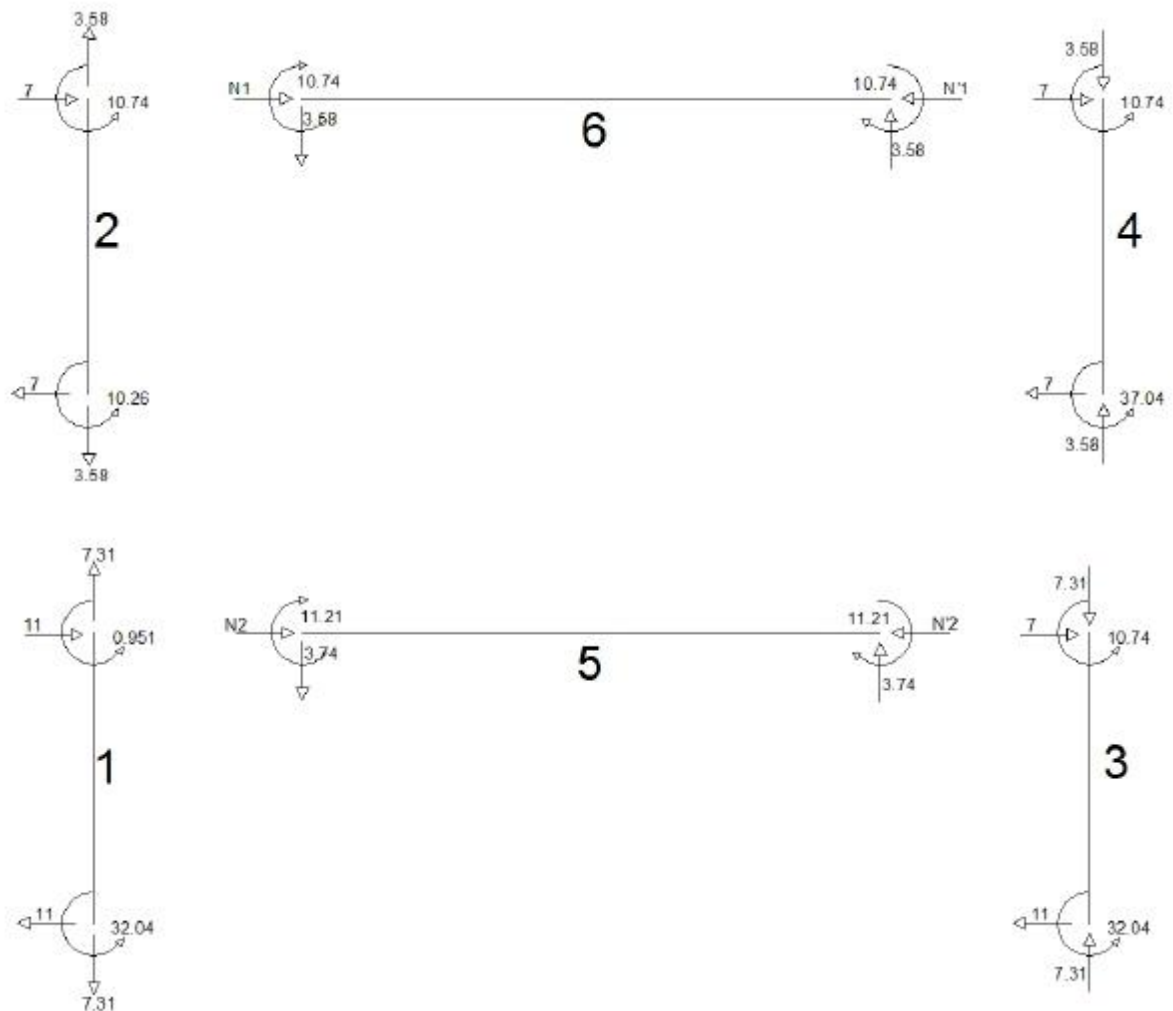


Figura 13.7 Fuerzas y momentos finales en los elementos.

Al calcular el vector  $q$  se halló  $N_2 = 4 T$ , y el valor de  $N_1 = 7 T$ . Finalmente se deja al lector la verificación del equilibrio de los nudos.

- EJEMPLO 4**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la armadura plana indicada a la izquierda de la figura 13.8; a la derecha se tiene el sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$ . En la tabla 13.1 se indica el área de cada uno de los elementos.

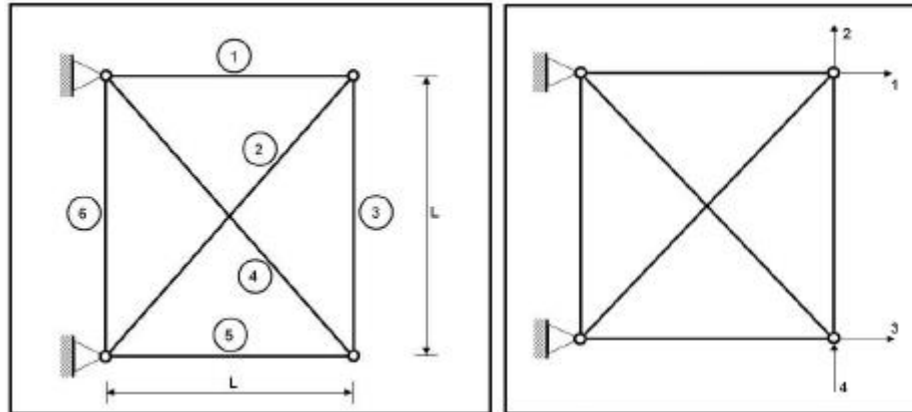


Figura 13.8 Armadura plana y coordenadas generalizadas  $Q - q$

Tabla 13.1 Area transversal de los elementos.

Elemento	Área Transversal
1	$A_o$
2	$A_o$
3	$A_o$
4	$A_o$
5	$A_o$
6	$A_o$

- SOLUCIÓN**

De acuerdo al sistema de coordenadas generalizadas presentado a la derecha de la figura 13.8, los vectores de colocación de cada elemento son los siguientes:

$$VC(1) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$

$$VC(2) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$

$$VC(3) = [3 \quad 4 \quad 1 \quad 2]$$

$$VC(4) = [3 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$

$$VC(5) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 4]$$

$$VC(6) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A continuación se escribe la matriz de rigidez de cada uno de los elementos en coordenadas globales con su respectivo vector de colocación escrito sobre la matriz y a la derecha.

- Elemento 1

$$k^{(1)} = \frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Elemento 2

$$k^{(2)} = \frac{EA_0}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 2 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{matrix}$$

- Elemento 3

$$k^{(3)} = \frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Elemento 4

$$k^{(4)} = \frac{EA_0}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Elemento 5

$$k^{(5)} = \frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

El elemento 6 no contribuye a la matriz de rigidez de la estructura ya que su vector de colocación solo tiene ceros.

- Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura

$$= \left[ \begin{array}{cccc|c} 1+0.25 & \vdots & 0.25 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0.25+1 & \vdots & \vdots & -1 \\ 0.25 & \vdots & \vdots & 0.25+1 & -0.25 \\ \vdots & -1 & \vdots & -0.25 & 1+0.25 \end{array} \right] \frac{EA_0}{L}$$

Luego, la matriz de la estructura, resulta:

$$K = \frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.25 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.25 & -0.25 \\ 0.0 & -1.0 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 5

Encontrar la matriz de rigidez de la estructura, que está a la izquierda de la figura 13.9, en el cual el miembro vertical es un elemento (hormigón armado) de un pórtico plano y el horizontal de una armadura plana (acero) con unión simple. Considerar los grados de libertad indicados a la derecha de 13.9. Estrictamente la articulación debió haberse colocado en la unión de la columna con la viga.

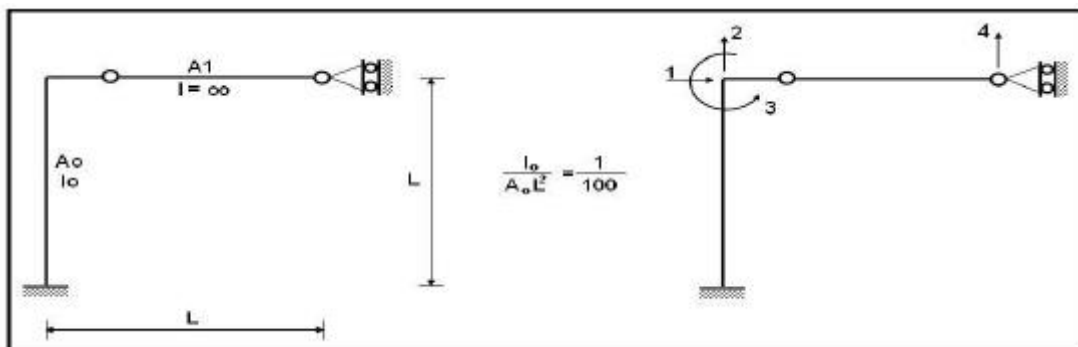


Figura N.- 13.9 Pórtico del ejemplo 5 y sistema  $Q-q$ .

- SOLUCIÓN

- Elemento Vertical

$$k = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & 100 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} EI_0 \\ L^3 \end{matrix}$$

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$



▪ Elemento Horizontal

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} EA_1 \\ L \end{matrix}$$

$$VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 4]$$

▪ Ensamblaje Directo

$$L \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{L^3} + \frac{EA_1}{L} & 0 & \frac{6EI_o}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{100EI_o}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_o}{L} & 0 & \frac{4EI_o}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2

• EJEMPLO 6

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la estructura, que se encuentra a la izquierda de la figura 13.10, con los grados de libertad indicados a la derecha de 13.10. La variación de inercia del elemento horizontal se presenta en la parte inferior de la figura 13.10 y se desprecia la deformación axial en dicho elemento. Considerar  $E = 2100000 \text{ T/m}^2$ .

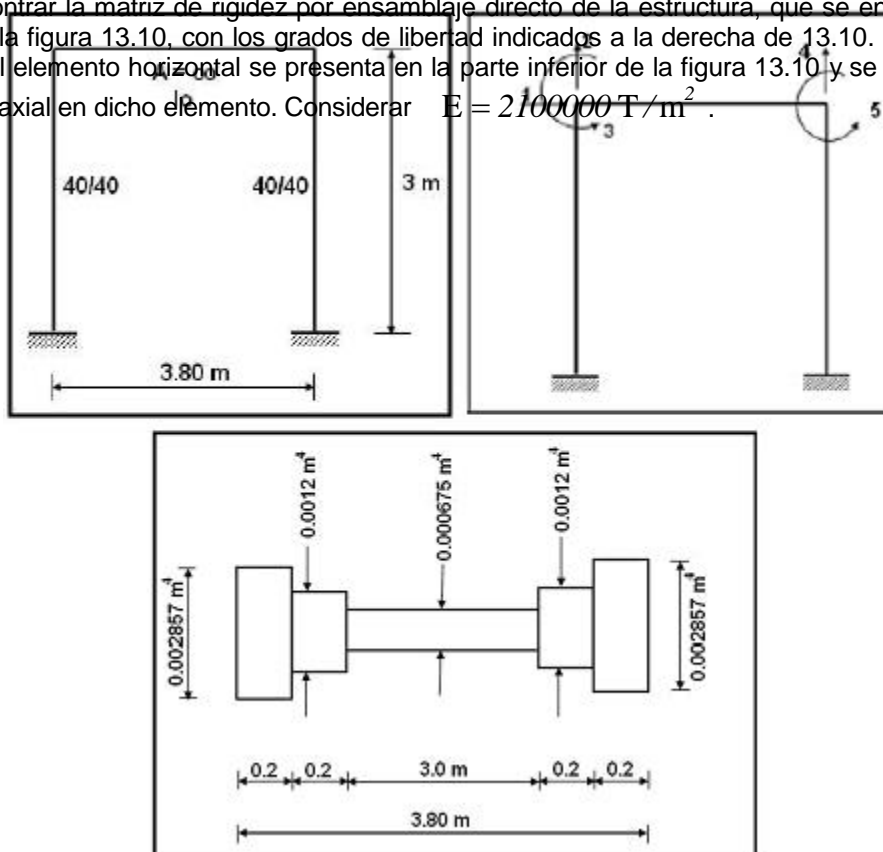


Figura 13.10 Estructura de Ejemplo 6, grados de libertad y variación de inercia en viga.

• SOLUCIÓN

El Ejemplo 6 es una estructura de hormigón armado con losa plana; las diferentes inercias corresponden al macizado de la losa.

En la figura 13.11 se presenta el diagrama de masas elásticas <sup>1</sup> para el elemento con inercia escalonada que se analiza.

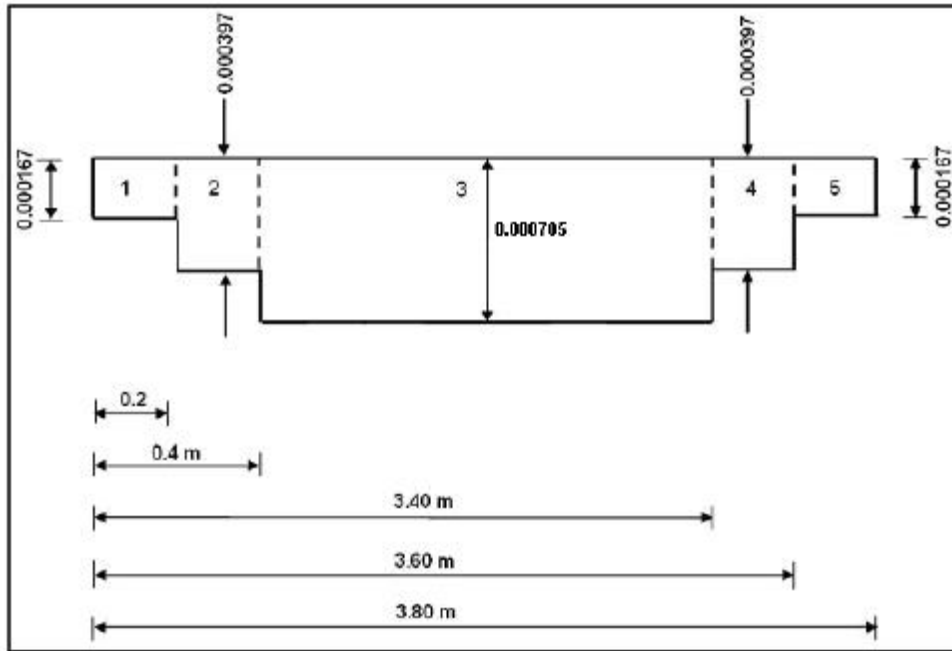


Figura 13.11 Diagrama de masas elásticas y figuras elementales.

En base a la nomenclatura y teoría expuesta en el capítulo anterior, en la tabla 13.2 se indica el cálculo de los momentos de inercia del diagrama de masas elásticas.

Tabla 13.2 Cálculo de momentos de inercia

Figura	$X_0$	$W$	$I_Y$	$I_Y'$
	(m)	(m <sup>2</sup> )	(m <sup>4</sup> )	(m <sup>4</sup> )
1	0.10	0.000033	4.45333x10 <sup>-7</sup>	0.000457
2	0.30	0.000079	0.000007	0.000973
3	1.90	0.002115	0.009221	0.009221
4	3.50	0.000079	0.000973	0.000007
5	3.70	0.000033	0.000457	4.45333x10 <sup>-7</sup>
SUMATORIA		0.002339	0.010658	0.010658

= 0.00  
0738

$$I_Y' = \frac{0.010658}{3.8^2}$$

$$\alpha' = \frac{10.1010}{658} = 0.000738$$

$$W - \alpha - \alpha' = 0.002339 - 2(0.000738)$$

$$\alpha \alpha' - \varepsilon^2 = (0.000738)^2 - (0.000432)^2 = 3.580942 \times 10^{-7}$$

$$k = k' = \frac{\alpha}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000738}{3.580942 \times 10^{-7}} = 2060.9104$$

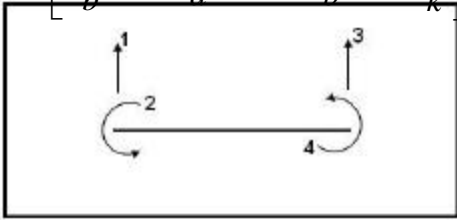
$$a = \frac{\varepsilon}{\alpha \alpha' - \varepsilon^2} = \frac{0.000432}{3.580942 \times 10^{-7}} = 1260.3865$$

$$b = b' = \frac{k + a}{L 3} = \frac{2060.9104 + 1260.3865}{L 3} = 874.0255$$

$$t = \frac{b + b'}{L 3} = \frac{874.0255}{L 3} = 460.0134$$

80

Para el elemento horizontal, la matriz de rigidez en coordenadas locales es igual a la matriz de rigidez en coordenadas globales y es la siguiente.

$$k = \begin{bmatrix} t & b & -t & b' \\ b & k & -b & a \\ -t & -b & t & -b' \\ b' & a & -b' & k' \end{bmatrix}$$


Sistema P – p para un elemento axialmente rígido.

Al reemplazar los valores encontrados se tiene que la matriz de rigidez del elemento horizontal es:

$$k = \begin{bmatrix} 460.0134 & 874.0255 & -460.0134 & 874.0255 \\ 874.0255 & 2060.9104 & -874.0255 & 1260.3865 \\ -460.0134 & -874.0255 & 460.0134 & -874.0255 \\ 874.0255 & 1260.3865 & -874.0255 & 2060.9104 \end{bmatrix}$$

El vector de colocación para el elemento horizontal es:

$$VC = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

La matriz de rigidez, en coordenadas globales, de los elementos verticales es la misma y corresponde a la mostrada en el Ejemplo 2. Esta es:

	1988.00		-2982.00	-1988.00	0.00		-2982.00
			0.00	0.00	-112000.00		0.00
	0.00	0.00	5964.00	2982.00	0.00		2982.00
1	-1988.00	0.00	2982.00	1988.00	0.00		2982.00
		112000	0.00	0.00	112000.00		0.00
	0.00	2982.00	0.00	2982.00	0.00		5964.00

$$\begin{bmatrix} 0.00 & -112000 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Los vectores de colocación para los elementos verticales izquierdo y derecho, respectivamente, son:

$$VC = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$VC = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5]$$

Al ser el elemento horizontal axialmente rígido el desplazamiento del nudo final es igual al desplazamiento del nudo inicial  $q_1$ .

Al efectuar el ensamblaje directo se obtiene la matriz de rigidez buscada.

					-874.00
$K =$	3976.00	0.00	2982.00	0.00	2982.00
	0.00	112460.00	874.00	-460.00	874.00
	2982.00	874.00	8024.90	-874.00	1260.40
	0.00	-460.00	-874.00	112460.00	
	2982.00	874.00	1260.40	-874.00	8024.90

### 13.5 DIAGRAMA DE FLUJO

En la figura 13.12 se presenta el diagrama de flujo para encontrar la matriz de rigidez de un pórtico plano, para cuando se obtiene completamente toda la matriz y se está trabajando con un arreglo de dos dimensiones.

En el diagrama de flujo,  $mbr$  es el número de elementos que tiene la estructura, en este caso el pórtico; lo primero que se hace es encontrar la matriz de rigidez de un elemento  $k$  en coordenadas globales, estrictamente vendría a ser  $k_3$  pero se ha dejado como  $k$ . Posteriormente en el lazo  $j = 1:6$  se coloca el vector de colocación en la parte superior del elemento y se obtienen sus elementos que se ha denominado  $j_j$ . En caso de tener una armadura plana el lazo  $j = 1:4$ , de tal manera que el diagrama de flujo se puede adaptar muy fácilmente a cualquier estructura cambiando los lazos de acuerdo al número de elementos del vector de colocación y desde luego encontrando la matriz de rigidez del elemento respectivo sea éste: pórtico plano, armadura plana, etc.

Retomando la explicación se pregunta a continuación si  $j_j = 0$ , en caso de que lo sea, esa columna de la matriz de rigidez del elemento no contribuye a la matriz de rigidez de la estructura que en el diagrama de flujo se ha identificado como  $ss$ . Si  $j_j$  no es cero se pasa a colocar el vector de colocación a la derecha de la matriz de rigidez del elemento para eso se abre otro lazo  $m = 1:6$  y se empieza a obtener los vectores de colocación  $mm$ ; se pregunta si  $mm = 0$ , si es cero esa fila de la matriz de rigidez del elemento no contribuye y cuando no lo es, se pasa a realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura y de ahí se cierran los lazos.

En la figura 13.13 se presenta el diagrama de flujo cuando solo se obtiene la matriz triangular

superior de  $K$  por esta razón hay una pregunta antes de realizar el ensamblaje. Posteriormente antes de realizar el ensamblaje, se coloca la fórmula con la que se pasa de un arreglo de dos dimensiones a una dimensión y se procede al ensamblaje trabajando como vector.

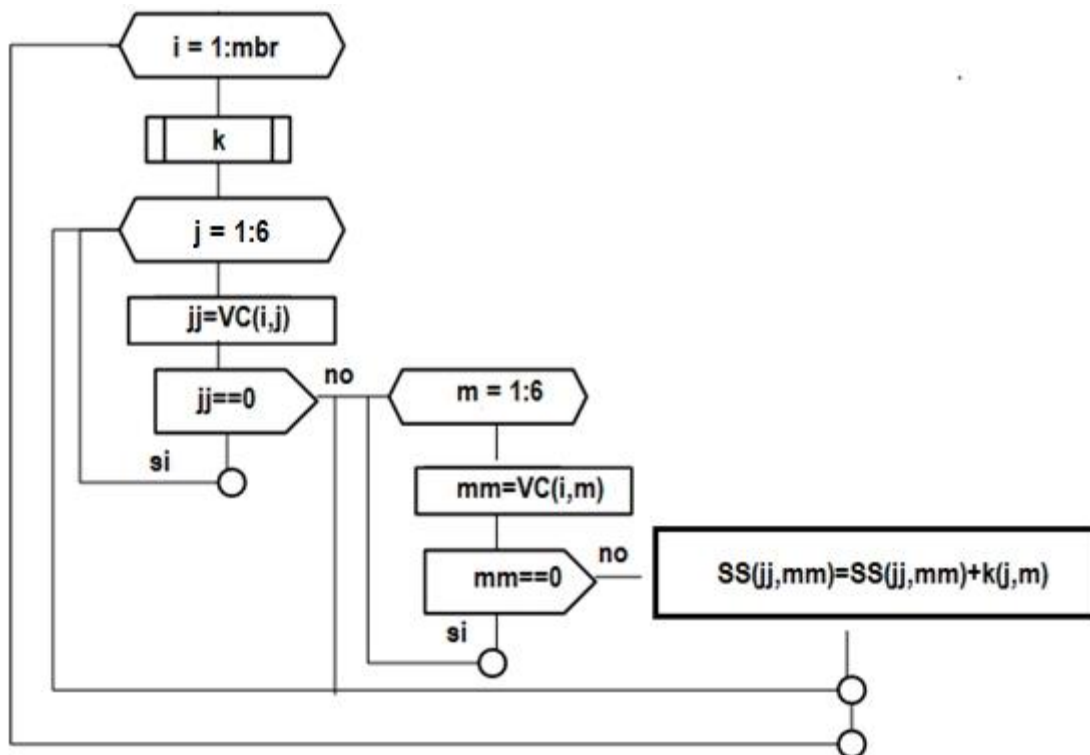


Figura 13.12 Diagrama de flujo de matriz de rigidez completa, de dos dimensiones.

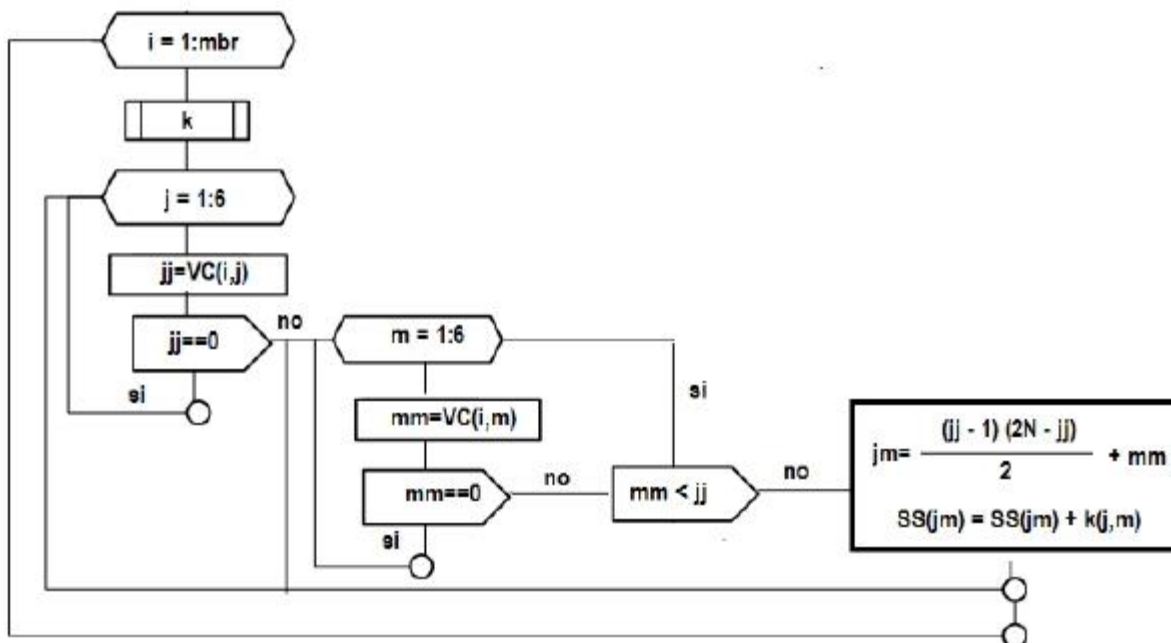


Figura 13.13 Matriz de rigidez en forma de vector, solo triangular superior

Como se podrá apreciar es muy sencillo el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, trabajando con un solo índice. Se deja al lector, lo siguiente:

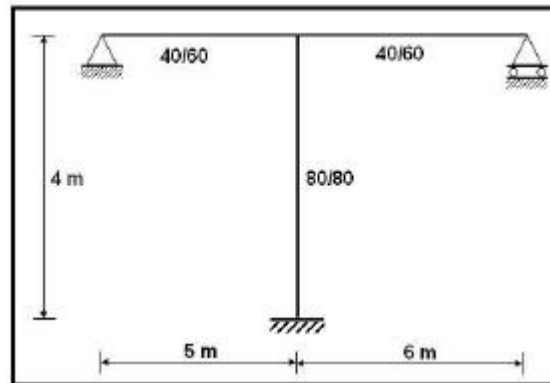
- i) Realizar un diagrama de flujo para hallar la matriz de rigidez de pórticos planos y de armaduras planas.
- ii) Encontrar un diagrama de flujo para hallar la matriz de rigidez en forma de vector y con ancho de banda constante.

Se recuerda que la matriz de rigidez de la estructura se obtiene pensando en la forma como se va a resolver el sistema de ecuaciones lineales.

### 13.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

#### EJERCICIO N.- 1

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura, sin considerar nudos rígidos pero considerando el efecto de corte. Datos:  $E = 2100000 \text{ T/m}^2$ ,  $G = 0.4 E$ ,  $I_v = 0.072 \text{ m}^4$ ,  $I_c = 0.03413 \text{ m}^4$ .



#### EJERCICIO N.- 2

Preparar el archivo de datos para un programa en **MATLAB**, para determinar la matriz de rigidez del ejercicio anterior.

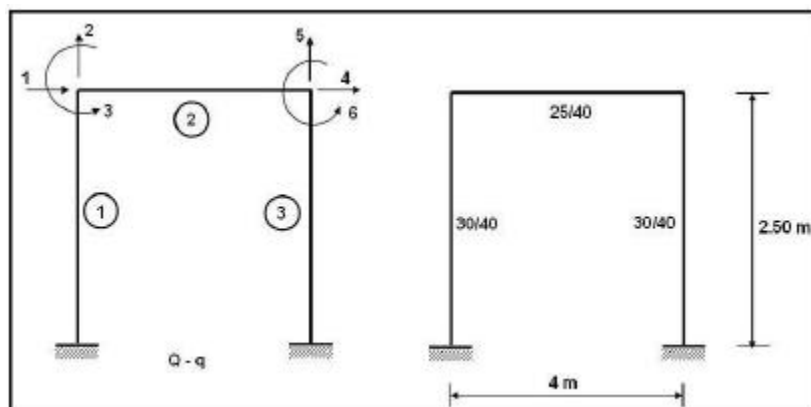
#### EJERCICIO N.- 3

Obtener la matriz de rigidez del ejercicio número 1 considerando nudos rígidos.

#### EJERCICIO N.- 4

Encontrar la matriz de rigidez de la siguiente estructura si los vectores de colocación son los siguientes:

$$\begin{aligned} VC(1) &= [1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0] \\ VC(2) &= [4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3] \\ VC(3) &= [4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0] \end{aligned}$$

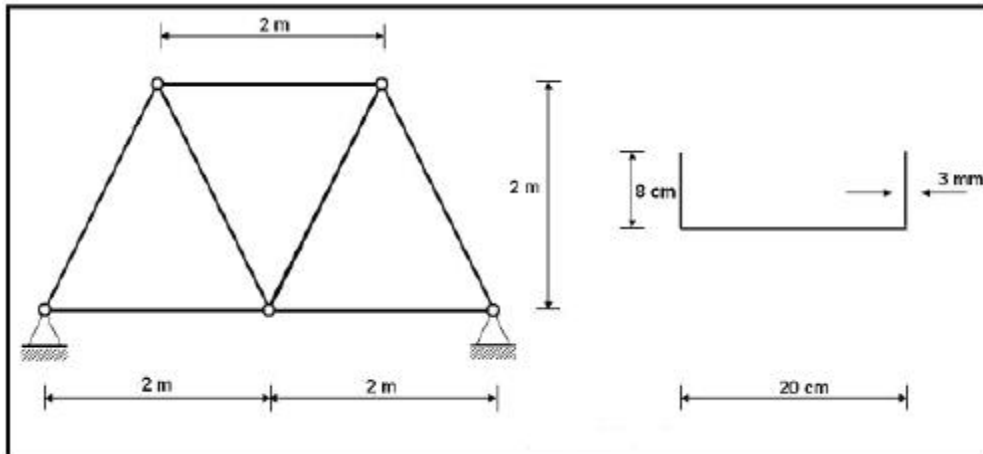


**EJERCICIO N.- 5**

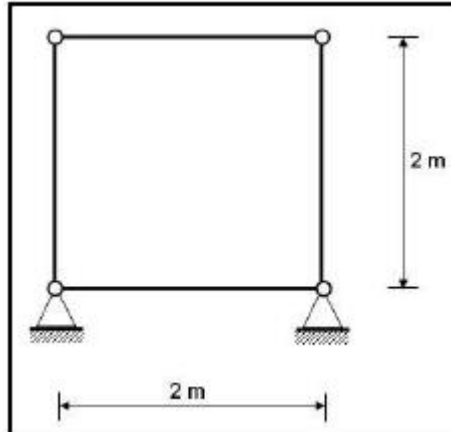
Preparar el archivo de datos para un programa en **MATLAB** del ejercicio 4.

**EJERCICIO N.- 6**

Obtener la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente armadura plana compuesta por perfiles C de 3 mm de espesor. Considerar  $E = 20000000 \text{ kg/cm}^2$

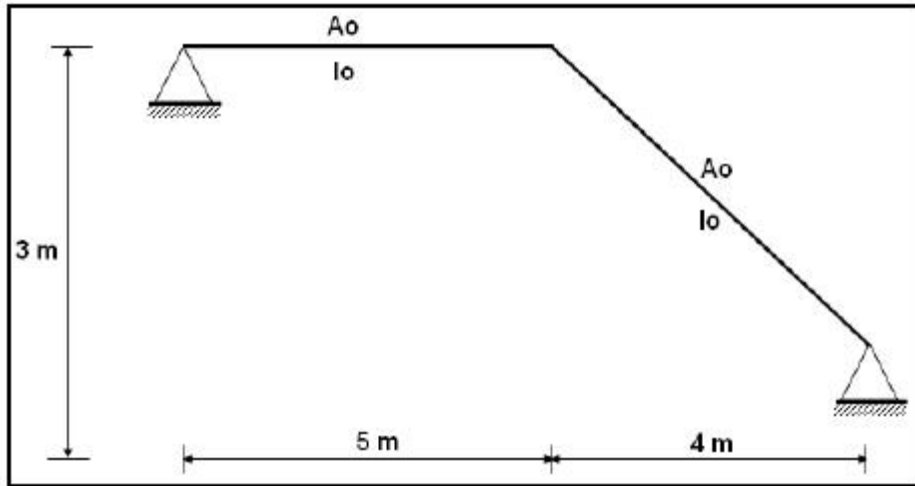
**EJERCICIO N.- 7**

Indicar si la siguiente armadura es estable o inestable usando la matriz de rigidez de la estructura. Considerar que cada elemento es un perfil C igual al del ejemplo anterior.

**EJERCICIO N.- 8**

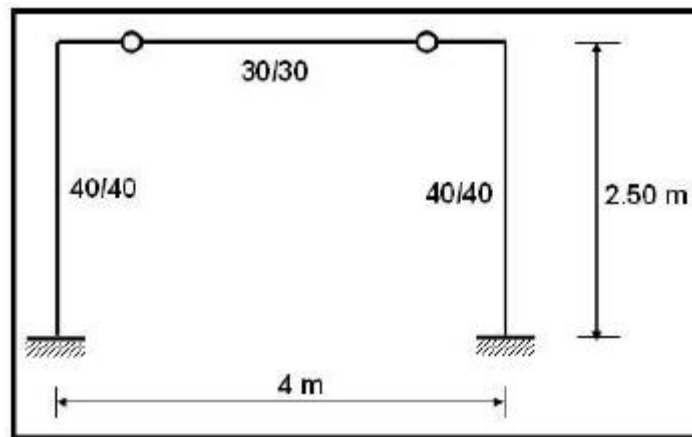
Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo del siguiente marco plano. Los dos elementos tienen la misma sección transversal y en ellos se cumple que:  $\frac{A_o}{I_o L^2} = 80$



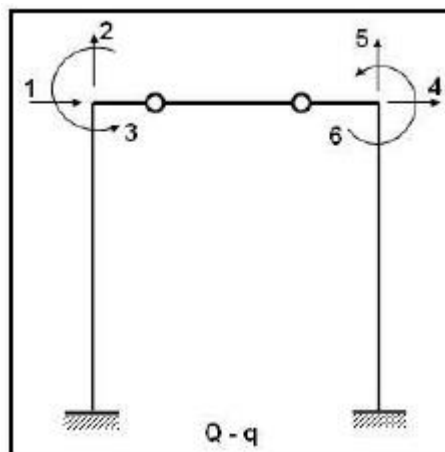


**EJERCICIO N.- 9**

Encontrar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura.

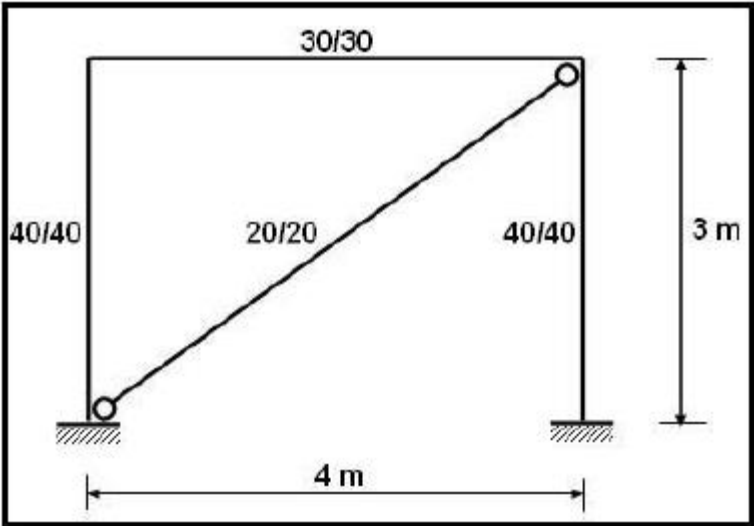


Considerar  $E = 2100000 T/m^2$  y el siguiente sistema de coordenadas de la estructura.



**EJERCICIO N.- 10**

Determinar la matriz de rigidez por ensamblaje directo de la siguiente estructura. Considerar  $E = 2100000 T/m^2$ .



## CAPITULO 14

---

# SOLUCIÓN DE UNA ESTRUCTURA PLANA ORIENTADA AL USO DEL COMPUTADOR

## RESUMEN

Se presenta con detalle la solución de una armadura plana y de un pórtico plano a partir del vector de coordenadas generalizado  $q$ , orientado al uso del ordenador. El cálculo anterior que corresponde a la matriz de rigidez de la estructura  $K$  y al vector de cargas generalizadas  $Q$  ha sido explicado con bastante detenimiento en capítulos anteriores. Por lo tanto en éste capítulo se explica el cálculo de:

- a. Deformaciones de los elementos  $p$  en coordenadas globales.
- b. Acciones de los elementos  $P$  en coordenadas globales y locales.
- c. Acciones finales de los elementos que es la suma del problema primario más el problema complementario.

### 14.1 ANTECEDENTES

En el Capítulo 5 se estudió el cálculo del vector de cargas generalizadas  $Q$  orientado al uso del computador, un resumen del mismo se presenta a continuación para el caso de estructuras con cargas en los elementos.

- i) Se determina el vector de cargas de empotramiento perfecto en coordenadas locales  $Q_3$ .

- ii) Se encuentra la matriz de paso de coordenadas locales a globales  $T_{2-3}$ .

- iii) Se calcula el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales  $Q_3$  y se le cambia de signo para tener acciones en las juntas, con la siguiente ecuación:

$$Q_3 = -T_{2-3}^t Q_2$$

- iv) Se realiza el ensamblaje de  $Q_3$  en el vector de cargas generalizado  $Q$  mediante el vector de colocación del elemento respectivo.

Por otra parte en el capítulo 13 se estudió el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo. El procedimiento de cálculo para cada uno de los elementos de una estructura es el siguiente:

- i) Se determina la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales  $k_3$ .
- ii) Se realiza el ensamblaje directo de  $k_3$  en la matriz de rigidez de la estructura  $K$  con el vector de colocación del elemento analizado.

Una vez que se ha determinado  $K$  y  $Q$  se procede a resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el vector de coordenadas  $q$  como se ilustró en el capítulo 11.

A partir del vector  $q$  se continúa en éste capítulo con el cálculo matricial de una estructura plana, dejando indicado que el mismo procedimiento se realiza para estructuras espaciales, con las modificaciones del caso en cuanto se refiere al vector de colocación, matriz de rigidez del elemento y la determinación de las acciones de empotramiento perfecto.

## 14.2 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

Los elementos de la estructura presentada a la izquierda de la figura 14.1, se consideran totalmente flexibles, en consecuencia se tienen los 7 grados de libertad, que son los indicados en la parte central de 14.1, este es el sistema  $Q - q$ ; a la derecha se muestra el sistema de coordenadas globales de los elementos,  $P - p$ , **destacando una vez más que en el computador se trabaja en coordenadas globales.**

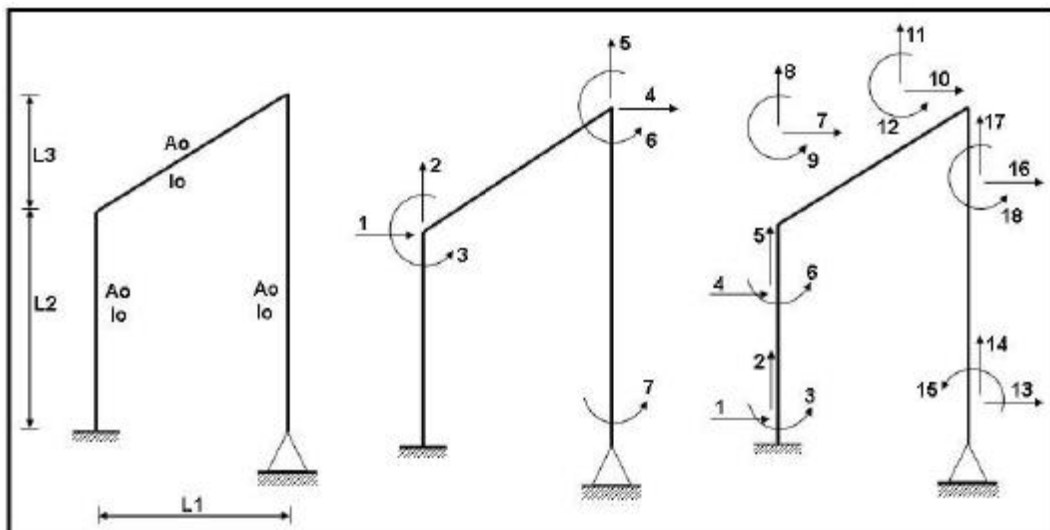


Figura 14.1 Estructura, coordenadas de la estructura  $Q - q$  y de elementos  $P - p$

De acuerdo a la numeración del sistema de coordenadas de los elementos, se tiene que la columna izquierda corresponde al elemento 1, la viga inclinada al elemento 2 y la columna derecha al elemento 3. En los Capítulos 9 y 10 se estudió la forma de cálculo de la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$ . Para el presente ejemplo se tiene.

- **Elemento 1**

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 2**

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Elemento 3**

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Únicamente por facilidad se ha escrito las sub matrices de la matriz de compatibilidad de deformación  $A$  se pudo haber escrito directamente ésta matriz pero es más cómodo escribir las sub matrices.

El vector de coordenadas generalizadas  $q$  para la estructura analizada tiene la siguiente forma:

$$q^t = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7]$$

Para encontrar las deformaciones de los elementos  $p$  en coordenadas globales se realiza el producto matricial de la matriz de compatibilidad de deformaciones  $A$  por el vector de coordenadas  $q$

$$p = A q$$

El producto matricial indicado se puede realizar con la matriz  $A$  completa o sino con las sub matrices de  $A$  teniendo en cuenta en éste último caso que se va a obtener las deformaciones de un elemento determinado, de ésta manera se resuelve en el ordenador.

$$p^{(1)} = A^{(1)} q$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las deformaciones del elemento 1 en coordenadas globales son:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Para el elemento analizado el vector de colocación es:

$$\text{VC}(1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

El algoritmo con el cual se obtiene el vector de deformaciones  $\mathbf{p}$  sin necesidad de realizar el producto matricial se presenta a continuación:

- i) Encerrar el vector  $\mathbf{p}$ , para el caso plano éste vector tiene 6 elementos.
- ii) Determinar el vector de colocación del elemento, que tiene 6 elementos para el caso plano.
- iii) Ensamblar  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{p}$  por medio del vector de colocación. Cuando el vector de colocación es cero, queda cero en el vector de deformaciones, cuando es diferente de cero el vector de colocación, se obtiene del vector  $\mathbf{q}$  la cantidad respectiva y se ensambla: el vector de colocación indica la posición del vector  $\mathbf{q}$  que tomarse para el vector  $\mathbf{p}$ .

Para los elementos 2 y 3 de la estructura analizada los vectores de colocación son:

$$\text{VC}(2) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

$$\text{VC}(3) = [0 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

Al aplicar el algoritmo indicado los vectores de deformación de los elementos 2 y 3 resultan.

$$\mathbf{p}^{(2)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_7 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$