

Por lo tanto las cargas internas de un elemento se transforman en deformaciones mediante la matriz de flexibilidad de un elemento. A la matriz f también se la conoce con el nombre de matriz fuerza deformación.

7.1.8 Modelo de Giberson

Antes de terminar con el apartado 7.1, dedicado al estudio de la matriz de flexibilidad en el modelo que tiene dos giros en los nudos, para el caso de un elemento axialmente rígido, conviene presentar el modelo de Giberson que se utiliza en análisis no lineal pero cuya formulación está en concordancia con lo indicado en el apartado 7.1.5.

En la figura 7.8 se presenta una viga en la que se han definido tres rigideces a flexión, en el nudo inicial, $(EI)_a$ en el centro de luz, $(EI)_o$ y en el nudo final $(EI)_b$. Cuando el elemento es de sección constante las tres rigideces a flexión son iguales.

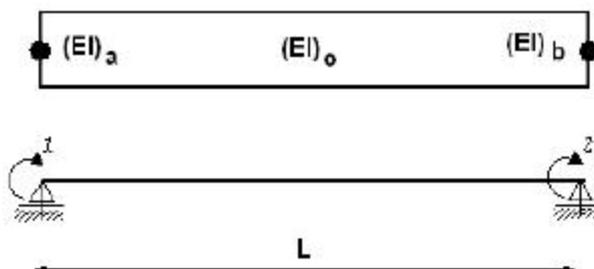


Figura 7.8 Modelo de Plasticidad Concentrada de Giberson

La matriz de flexibilidad f para el modelo de Giberson, es la siguiente:

$$f = \frac{L}{(EI)_o} \begin{bmatrix} 1 + s_a & -1 \\ -1 & 1 + s_b \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

$$s_a = \frac{(EI)_o}{(EI)_a} \quad s_b = \frac{(EI)_o}{(EI)_b}$$

Para un elemento de sección constante $s_a = s_b = 1$. Al reemplazar estos valores se encuentra la misma matriz de flexibilidad que se indicó en el apartado 7.1.5. Lo importante del Modelo de Giberson es que se utiliza cuando las rigideces a flexión no son iguales y esto se presenta cuando hay daño en los elementos.

Al comienzo de un sismo, en una viga de sección constante, las rigideces en el nudo inicial, centro de luz y nudo final son iguales pero cuando el terremoto es intenso se dañan los extremos con lo que la rigidez en dichos puntos es diferente a la del centro de luz y ahí es muy apropiado el modelo de Giberson para definir la matriz de flexibilidad.

7.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO k

7.2.1 Forma general

La matriz de rigidez k (minúscula) de un elemento lineal se va a obtener invirtiendo la matriz de flexibilidad.

$$k = f^{-1}$$

Para un elemento de sección constante o variable, la forma general de la matriz de rigidez asociada al sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1 es la siguiente:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Donde:

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{\Delta} \quad k_{22} = \frac{f_{11}}{\Delta} \quad k_{33} = \frac{1}{f_{33}}$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{f_{21}}{\Delta} \quad \Delta = f_{11} * f_{22} - (f_{21})^2$$

En el apartado 7.1.1 se indican las integrales mediante las cuales se evalúan los términos de la matriz de flexibilidad para un elemento de sección constante o variable.

7.2.2 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

La matriz de rigidez de un elemento lineal de sección constante, considerando el efecto de corte, se obtiene invirtiendo la matriz (7.8). El resultado que se obtiene es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{2EI}{L} \frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ \frac{2EI}{L} \frac{(1-2\phi)}{(1+4\phi)} & \frac{4EI}{L} \frac{(1+\phi)}{(1+4\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

7.2.3 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

Al sustituir $\phi = 0$ en la matriz (7.17), se encuentra la matriz de rigidez de un miembro lineal de sección constante, sin considerar el efecto de corte. Esta es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

7.2.4 Elementos axialmente rígidos

Por lo expresado en el apartado 7.1.5 de éste capítulo, el sistema de coordenadas de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.6. Al eliminar la tercera fila y columna de la matriz (7.18), se encuentra la matriz de rigidez para un elemento de sección constante en el que se ignora el efecto de corte. Esta es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Si se desea considerar el efecto de corte, en la matriz (7.17) se debe eliminar la tercera fila y columna.

Es necesario indicar que si bien $p_3 = 0$ (minúscula) esto no implica que la fuerza axial sea nula. En efecto se tiene que $P_3 \neq 0$ (mayúscula).

7.2.5 Elementos transversalmente rígidos

Este es el caso de las armaduras planas o celosías en las que se solo existe deformación axial en los elementos. El sistema de coordenadas del elemento se presenta en la figura 7.7. La matriz de rigidez es:

$$k = \begin{bmatrix} EA \\ L \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

En pórticos planos con elementos transversalmente rígidos existen momentos en los nudos inicial y final que son necesarios para cumplir con la condición de $I = \infty$.

7.2.6 Relación deformación fuerza

Así como para una estructura se tiene que $Q = K q$ para un elemento lineal se tiene que:

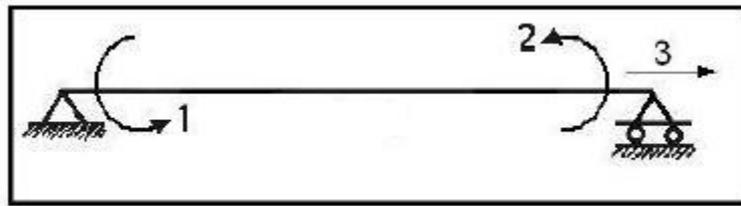
$$P = k p \quad (7.21)$$

Por lo tanto las deformaciones de un elemento se transforman en fuerzas internas por medio de la matriz de rigidez de miembro k , también conocida como matriz deformación fuerza.

Con el objeto de aclarar algunos conceptos se desarrolla la ecuación (7.21) para un elemento lineal de sección constante, en el que no se considera el efecto de corte. Se tiene:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Se está considerando el sistema de coordenadas de la figura 7.1, para recordar el significado del vector P (mayúscula) y del vector p (minúscula) se presenta nuevamente este gráfico.

Sistema $P - p$

Al sustituir los vectores P , p y la matriz de rigidez k en la ecuación (7.21) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Desarrollando se tiene:

$$P_1 = \frac{4EI}{L} p_1 + \frac{2EI}{L} p_2 \quad (7.22.1)$$

$$P_2 = \frac{2EI}{L} p_1 + \frac{4EI}{L} p_2 \quad (7.22.2)$$

$$P_3 = \frac{EA}{L} p_3 \quad (7.22.3)$$

Estas expresiones se las estudia en Estructuras con otra nomenclatura. Se hace hincapié en un concepto que se indicó en el capítulo 2 referente a que se está resolviendo únicamente el problema primario. Por lo tanto se debe añadir las acciones de empotramiento perfecto, a las ecuaciones (7.22.1) a (7.22.3).

7.3 OBTENCIÓN DE f Y k UTILIZANDO LA MATRIZ T

7.3.1 Planteamiento del Problema

Se desea calcular la matriz de flexibilidad y de rigidez para el elemento lineal de la figura 7.9, en el cual los desplazamientos como cuerpo rígido se los ha omitido mediante la colocación de un empotramiento en el nudo inicial. A este sistema de coordenadas se lo diferencia del anterior con la utilización de un asterisco como subíndice.

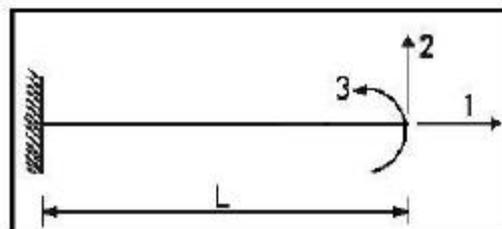


Figura 7.9 Nuevo sistema de coordenadas del elemento $P^* - p^*$

Por lo tanto k^* y f^* serán las matrices de rigidez y de flexibilidad del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.9. Están relacionados de la siguiente manera:

$$P^* = k^* p^* \quad p^* = f^* P^* \quad k^* f^* = I \quad (7.23)$$

Para encontrar k^* y f^* se puede proceder de una manera similar a la desarrollada en los apartados 7.1 y 7.2 de éste capítulo. Se deja al estudiante el cálculo de ésta manera: Otra forma de hacerlo es por medio de la matriz de transformación de coordenadas. En éste caso el sistema viejo de coordenadas es el mostrado en la figura 7.1 y el sistema nuevo de coordenadas el de la figura 7.9. Por lo tanto de acuerdo a lo estudiado en el capítulo 5 el cálculo se lo puede realizar de dos formas:

- i) Por medio de la matriz T que relaciona deformaciones: $p = T p^*$.
- ii) Por medio de la matriz T_1 que relaciona cargas internas: $P = T_1 P^*$.

7.3.2 Solución del Problema

Si se considera unos desplazamientos virtuales en un elemento cualquiera que forma parte de un pórtico plano, por ejemplo el de la figura 7.10.1 se observa que la inmovilización como cuerpo rígido puede hacerse considerando los vínculos de la figura 7.10.2 o el empotramiento de la figura 7.10.3.

Entre los sistemas de coordenadas virtuales, figuras 7.10.2 y 7.10.3, se establece la siguiente relación geométrica.

$$\delta p = T \delta p^* \quad (7.24.1)$$

Ahora bien, el trabajo virtual T.V. producido por las cargas que actúan en la figura 7.1 en los desplazamientos virtuales de la figura 7.10.2 tiene que ser igual al trabajo virtual producido por las cargas que actúan en la figura 7.9 sobre los desplazamientos virtuales de la figura 7.8.3 Esto se debe a que el trabajo virtual es independiente del sistema de coordenadas en que se mida.

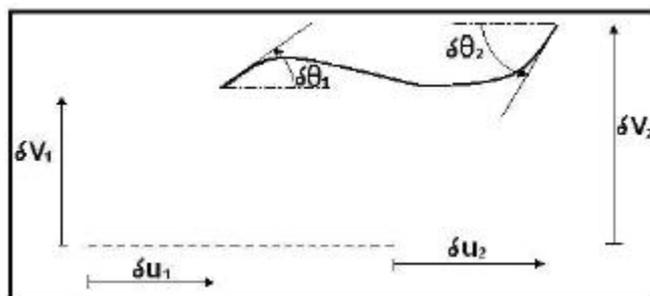


Figura 7.10.1 Desplazamientos Virtuales.

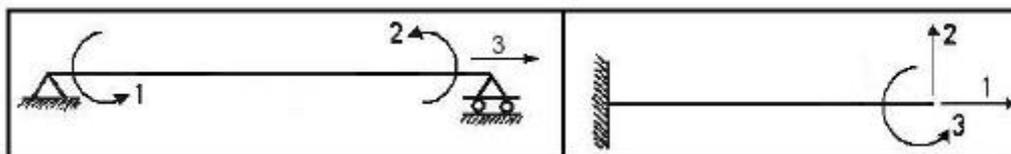


Figura 7.10.2 Sistema δp

Figura 7.10.3 Sistema δp^*

En consecuencia, se tiene:

$$TV = \delta p^t P = \delta p^{*t} P^* \quad (7.24.2)$$

Al reemplazar (7.24.1) en (7.24.2)

$$\left(T \delta \quad \dot{p}^t \right) P = \delta p^{*t} P^* \quad \Rightarrow \quad \delta p^{*t} T^t P = \delta p^{*t} P^*$$

Por ser δp^* arbitrario, se tiene:

$$P^* = T^t P$$

Pero $P = k p$. Luego:

$$P^* = T^t k p$$

Pero $p = T p^*$. En consecuencia se tiene que:

$$P^* = \left(T^t k T \right) p^* \quad (7.25)$$

Al comparar las ecuaciones (7.25) y (7.23), se concluye que:

$$k^* = T^t k T \quad (7.26)$$

Por lo tanto la nueva matriz de rigidez k^* se puede obtener a partir de la matriz T , que relaciona las deformaciones de los sistemas de coordenadas de las figuras 7.1 y 7.9

La ecuación (7.26) es muy utilizada en el Análisis Matricial de Estructuras y en Dinámica de Estructuras ya que conocida la matriz de rigidez k en un sistema determinado de coordenadas se puede hallar por medio de la matriz T la nueva matriz de rigidez en otro sistema de coordenadas.

Por otra parte, una forma de hallar la matriz de flexibilidad de un elemento f^* sería calculando la matriz inversa de k^* y otra por medio de la matriz T_1 (Punto de vista estático). Al examinar el procedimiento para hallar k^* se observa que se ha ejecutado una repetición de conceptos indicados en el Capítulo 5, razón por la cual se deja al lector la demostración de:

$$f^* = T_1^t f T_1$$

Resumen

La matriz de rigidez k^* se obtiene utilizando la geometría:

$$p = T p^* \quad \Rightarrow \quad k^* = T^t k T$$

La matriz de flexibilidad f^* se encuentra por medio de la estática.

$$P = T_1 P^* \quad \Rightarrow \quad f^* = T_1^t f T_1$$

Finalmente se deja al lector la demostración de los siguientes teoremas:

1. Si $p = T p^*$. Entonces $P^* = T^t P$.
2. Si $P = T_1 P^*$. Entonces $P^* = T_1^t P$.

7.3.3 Cálculo de la matriz de rigidez usando la geometría

En el apartado 7.2 de éste capítulo, se obtuvo la matriz de rigidez de un elemento k para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.1. Ahora se desea calcular k^* para el sistema $P^* - p^*$ de la figura 7.11.2, esto se lo realiza por medio de la matriz T definida por la expresión $p = T p^*$.

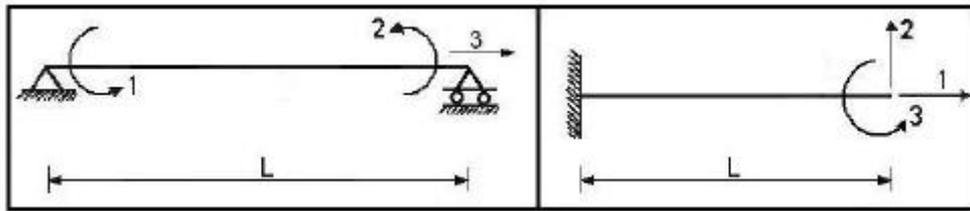


Figura 7.11.1 Sistema $P - p$

Figura 7.11.2 Sistema $P^* - p^*$

❖ Cálculo de la matriz T

La matriz T se obtiene construyendo las deformadas elementales en el sistema p^* y se mide en el sistema p

- Primera columna de T

$$p_1 = 1 \text{ y } p^i = 0 \quad i \neq 1$$

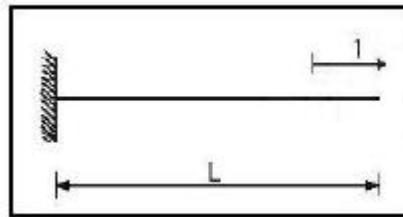


Figura 7.11.3 Deformada elemental p_1^*

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \quad p_3 = 1$$

En la primera deformada no existe deformación a flexión, solo hay deformación axial.

- Segunda columna de T

$$p_2 = 1 \text{ y } p^i = 0 \quad i \neq 2$$

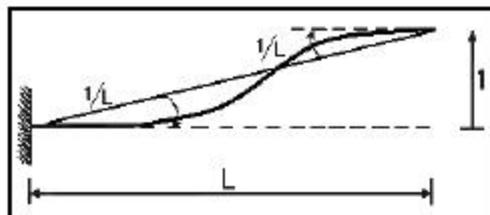


Figura 7.11.4 Deformada elemental p_2^*

$$p_1 = -\frac{1}{L} \quad p_2 = -\frac{1}{L} \quad p_3 = 0$$

- Tercera columna de T

$$p_3 = 1 \text{ y } p^{\dagger} = 0 \quad i \neq 3$$

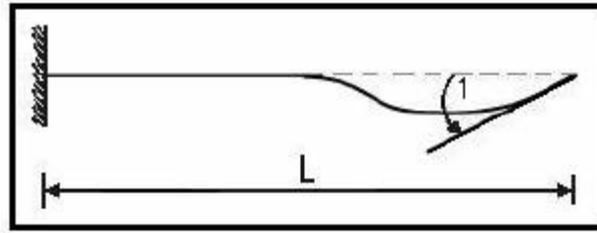


Figura 7.11.5 Deformada elemental p_3^*

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 1 \quad p_3 = 0$$

Por lo tanto la matriz T es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El lector deberá justificar las deformadas presentadas en las figuras 7.11.3 a 7.11.5, así como los elementos de la matriz T . Se recuerdan las fórmulas con las que se obtienen p_1 , p_2 y p_3 .

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.11.2 y para el caso de un elemento de sección constante se obtiene mediante la ecuación (7.26).

$$k^* = T^t k T$$

$$k^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Se ha encontrado la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas indicado en la figura 7.11.2, para el caso en que no se considera el efecto de corte. Cuando se considera dicho efecto la matriz de rigidez resulta.

$$k^* = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}(1+4\phi) & -\frac{6EI}{L^2}(1+4\phi) \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2}(1+4\phi) & \frac{4EI}{L}(1+4\phi) \end{bmatrix}$$

7.3.4 Cálculo de la matriz de flexibilidad usando la estática

Para el efecto es necesario calcular la matriz T_1 , matriz que relaciona las cargas internas P de la figura 7.11.1 con las cargas internas P^* de la figura 7.11.2. La relación es:

$$P = T_1 P^*$$

❖ **Cálculo de la matriz T_1**

- Primera columna de T_1

$$P_1^* = 1 \text{ y } P_i^* = 0 \text{ } i \neq 1$$

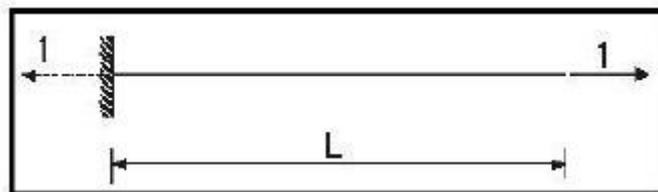


Figura 7.11.6 Fuerza axial en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 1$$

- Segunda columna de T_1

$$P_2^* = 1 \text{ y } P_i^* = 0 \text{ } i \neq 2$$

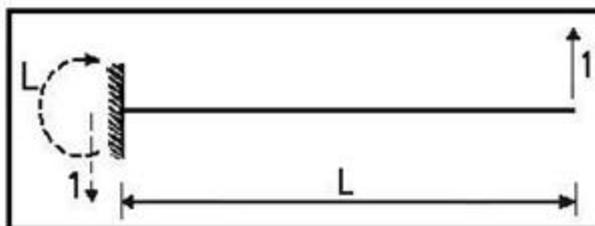


Figura 7.11.7 Fuerza de corte en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = -L \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = 0$$

- Tercera columna de T_1

$$P_3^* = 1 \text{ y } P_i^* = 0 \quad i \neq 3$$

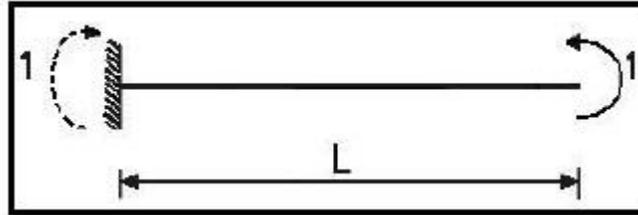


Figura 7.11.8 Momento en el voladizo igual a 1.

$$P_1 = -1 \quad P_2 = 1 \quad P_3 = 0$$

El valor de $p_1 = -1$ debido a que el momento es horario y la convención de signos positiva es anti horario positivo.

Por lo tanto la matriz T_1 es la siguiente:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad resulta:

$$f^* = T_1^t f T_1$$

$$f^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -L & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Cuando se considera el efecto de corte se tiene:

$$f_* = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}(1+\phi) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

7.3.5 Obtención de k y f cuando se cambia la numeración del sistema de coordenadas

Si el sistema de coordenadas del elemento lineal de la figura 7.9 se numera en forma diferente, por ejemplo según lo expresado en la figura 7.12, y si se desea obtener la matriz de rigidez o la matriz de flexibilidad en éste nuevo sistema de coordenadas, evidentemente que la forma más fácil de lograr éste objetivo es a través de la matriz de transformación de coordenadas.

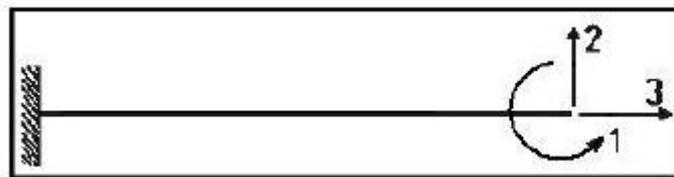


Figura 7.12 Nuevo sistema $P^* - p^*$

En el sistema mostrado en la figura 7.12, p_3^* es la deformación axial mientras que en el sistema de la figura 7.9 ésta corresponde a p_1 . Es decir se cambió la numeración de la deformación **uno por tres y viceversa**. Ahora el sistema *viejo* de coordenadas corresponde al de la figura 7.9

Para presentar el método directo de cálculo de la matriz de rigidez y de la matriz de flexibilidad cuando se cambia el sistema de numeración se va a explicar a continuación el procedimiento de cálculo pero orientado a la matriz de rigidez únicamente pero el procedimiento es similar para la matriz de flexibilidad.

Por didáctica se indican nuevamente estos dos sistemas de coordenadas en las figuras 7.13.1 y 7.13.2 con el objeto de tener una mejor comprensión.

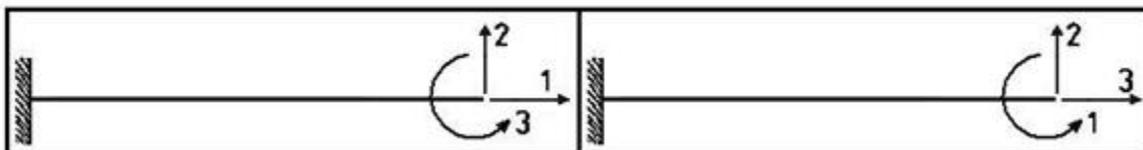


Figura 7.13.1 Sistema viejo de coordenadas Figura 7.13.2 Sistema nuevo de coordenadas.

La nueva matriz de rigidez k^* es igual a $T^t k T$ siendo k la matriz de rigidez para el sistema de coordenadas de la figura 7.13.1 y la matriz T es la matriz de paso desde las coordenadas de la figura 7.13.1 a las coordenadas de la figura 7.13.2. La matriz T que se obtiene es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar la operación $k^* = T^t k T$, se obtiene:

$$k^* = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Se llega al mismo resultado con la siguiente regla: se cambian los elementos de la primera fila a la tercera fila y posteriormente los elementos de la primera columna a la tercera columna en el sistema viejo de coordenadas. A continuación se indica el cambio de los elementos de la primera fila a la tercera fila.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se cambia la primera columna a la tercera y viceversa, con lo que se halla k^*

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

En consecuencia **para obtener la matriz de rigidez de un elemento en el cual se ha cambiado el sistema de numeración de sus coordenadas, se deberá intercambiar las filas y columnas de acuerdo al cambio de numeración que se haya efectuado.** Lo propio se hace para obtener la matriz de flexibilidad. La regla indicada no solo se aplica a un elemento sino también a una estructura.

7.4 FUNCIONES DE FORMA

Se denomina $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ a las funciones de forma, asociadas con el modelo de cálculo de la figura 7.1, éste modelo se repite a continuación.

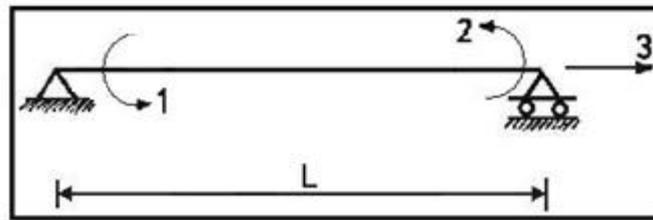


Figura 7.14 Modelo de cálculo para un elemento totalmente flexible.

Se recuerda que las funciones de forma reportan las ordenadas de la elástica, así la función de forma $\phi_1(x)$ da el valor de $v(x)$ cuando existe un giro en el nudo inicial y las demás nulas en el modelo de cálculo de la figura 7.14; lo propio sucede con $\phi_2(x)$. La función de forma $\phi_3(x)$ reporta el valor de $u(x)$, en cualquier punto de la viga cuando existe el desplazamiento axial en el nudo final.

7.4.1 Cálculo de $\phi_1(x)$ para un elemento de sección constante

Para calcular $\phi_1(x)$ se aplica un momento unitario en el nudo inicial. En el apartado 7.1 se encontró que la ecuación de momentos para este caso es.

$$M = \frac{x}{L} - 1 = -\frac{L-x}{L}$$

De la Resistencia de Materiales se conoce que.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Al reemplazar la ecuación de momentos se tiene.

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x}{L} - 1$$

Al integrar una vez se halla el giro $\theta(x)$ y la segunda integral es $v(x)$.

$$EI \theta(x) = \frac{x^2}{2L} - x + A$$

$$EI v(x) = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno para la viga de la figura 7.14, son en $x = 0$ y en $x = L$ el desplazamiento vertical es cero.

$$i) x = 0 \rightarrow v(x) = 0$$

$$ii) x = L \rightarrow v(x) = 0$$

Con la primera condición se obtiene.

$$B = 0$$

Con la segunda condición se encuentra.

$$A = \frac{l^2}{3}$$

Por lo tanto, al reemplazar las dos constantes de integración, se obtiene $v(x)$ que es la función de forma $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = \frac{x^3 - 3lx^2 + 2l^2x}{6EI} \quad (7.27)$$

7.4.2 Cálculo de $\phi_2(x)$ para un elemento de sección constante

En este caso el momento unitario se aplica en el nudo final; la ecuación de momentos es:

$$M = \frac{x}{l}$$

Luego.

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x}{l}$$

$$EI \theta(x) = \frac{x^2}{2l} + A$$

$$EI v(x) = \frac{x^3}{6l} + Ax + B$$

Las condiciones de contorno son las mismas que para $\phi_1(x)$

$$i) x = 0 \rightarrow v(x) = 0$$

$$ii) x = l \rightarrow v(x) = 0$$

Con la primera condición se tiene.

$$B = 0$$

Con la segunda condición se halla.

$$A = -\frac{l}{6}$$

Al reemplazar las constantes de integración se tiene

$$EI v(x) = \frac{x^3}{6l} - \frac{l}{6}x \rightarrow v(x) = -\frac{x(l^2 - x^2)}{6EI}$$

$$\phi_2(x) = -\frac{x(l^2 - x^2)}{6EI} \quad (7.28)$$

7.4.3 Cálculo de $\phi_3(x)$ para un elemento de sección constante

Al aplicar la fuerza axial, unitaria en el nudo final, se tiene.

$$EA \phi_3'(x) = 1$$

De donde.

$$EA \phi_3(x) = x + A \rightarrow EA u(x) = x + A$$

En $x = 0$ se tiene que $u(x) = 0$. Luego la constante de integración $A = 0$. Finalmente se tiene:

$$\phi_3(x) = \frac{x^3}{6EI} \quad (7.29)$$

• EJEMPLO 3

Utilizando las funciones de forma determinar los elementos de la matriz de flexibilidad para el sistema de la figura 7.14.

• SOLUCIÓN

El valor de f_{11} es el giro en $x = 0$. Por lo que se debe derivar la ecuación $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = \frac{3x^2 - 6Lx + 2L^2}{6EI} \quad (7.30)$$

Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (7.30) se tiene:

$$f_{11} = -\frac{L}{3EI}$$

Para encontrar f_{12} se reemplaza en la ecuación (7.30) $x = L$

$$f_{12} = \frac{3L^2 - 6L^2 + 2L^2}{6EI} = -\frac{L}{6EI}$$

La derivada de la ecuación (7.28) permite calcular el valor de f_{22}

$$\phi_2(x) = -\frac{xL^2 - x^3}{6EI} \quad (7.31)$$

Al reemplazar $x = L$, en (7.31) se tiene:

$$f_{22} = -\frac{L}{3EI}$$

El cálculo de f_{33} es directo, se reemplaza $x = L$ en la ecuación (7.29). Con lo que se halla.

$$f_{33} = \frac{L}{6EI}$$

La matriz de flexibilidad que se ha obtenido es la siguiente.

$$f = \begin{bmatrix} -\frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & -\frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{6EI} \end{bmatrix}$$

Nótese que en la matriz de flexibilidad encontrada, a partir de las funciones de forma, no aparece el efecto del corte. Todo esto debido a que se ha trabajado con la Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli. Con la Teoría de Vigas de Timoshenko si se obtiene la matriz de flexibilidad considerando el efecto de corte. Lamar y Fortoul 2007.

- **EJEMPLO 4**

Determinar las funciones de forma y la matriz de flexibilidad de la viga indicada en la figura 7.15. Si para el intervalo $0 < x \leq L/2$, el área y la inercia valen: A, I . Para el intervalo $L/2 < x \leq L$, el área y la inercia son: $2A, 2I$. Se desprecia el efecto del corte.

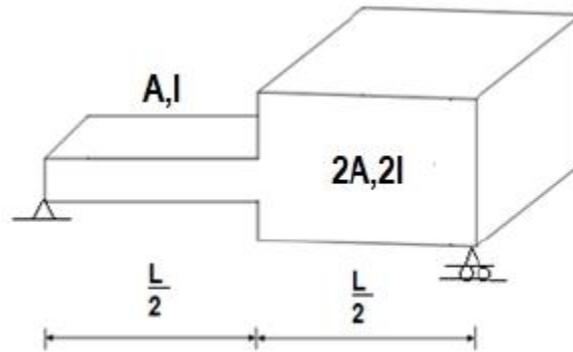


Figura 7.15 Viga de sección variable

- **SOLUCIÓN**

- **Cálculo de $\phi_1(x)$**

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$EI \phi_1''(x) = \frac{x}{L} - 1$$

$$EI \phi_1'(x) = \frac{x^2}{2} - x + A$$

$$EI \phi_1(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$2EI \phi_1''(x) = \frac{x}{L} - 1 \quad \rightarrow EI \phi_1''(x) = \frac{x}{2L} - \frac{1}{2}$$

$$EI \phi_1'(x) = \frac{x^2}{4L} - \frac{x}{2} + C$$

$$EI \phi_1(x) = \frac{x^3}{12L} - \frac{x^2}{4} + Cx + D$$

Las condiciones de contorno para hallar las constantes de integración son:

i) $\phi_1(x=0) = 0$

ii) $\phi_1(x=L) = 0$

iii) $\phi_1(x = \frac{L}{2}) = \phi_1(x = \frac{L}{2}) +$

$$\frac{L}{2} \quad \quad \quad \frac{L}{2}$$

$$iv) \phi_1'(x = \frac{L}{2}) = \phi_1'(x = \frac{L}{2}) + 2$$

Las dos primeras condiciones se relacionan a que en los apoyos el desplazamiento vertical es nulo y las dos últimas condiciones a la continuidad en $x = L/2$. En el centro de luz el desplazamiento y giro es el mismo al aplicar la ecuación para el primer intervalo y al aplicar la ecuación para el segundo intervalo. Con las cuatro condiciones se hallan las siguientes ecuaciones, en este orden.

$$B = 0$$

$$CL + D = \frac{l^2}{6}$$

$$\frac{CL}{2} + D - \frac{AL}{36} = \frac{96^2}{16}$$

$$C - A = -\frac{3L}{16}$$

La solución de las ecuaciones es:

$$A = \frac{5L}{16} \quad B = 0 \quad C = \frac{L}{24}$$

Finalmente la función de forma $\phi_1(x)$ resulta:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \phi_1(x) = \frac{8x^3 - 24x^2 + 15Lx}{48}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L \quad \phi_1(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 3Lx + L^3}{24}$$

• **Cálculo de $\phi_2(x)$**

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$El \phi_2'(x) = \frac{x}{L}$$

$$El \phi_2'(x) = \frac{x^2}{2L} + A$$

$$El \phi_2(x) = \frac{x^3}{6} + Ax + B$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$2 El \phi_2'(x) = \frac{x}{L} \rightarrow El \phi_2(x) = \frac{x}{2L}$$

$$El \phi_2'(x) = \frac{x^2}{4L} + C$$

$$El \phi_2(x) = \frac{x^3}{12L} + Cx + D$$

Las condiciones de contorno son las mismas y se indican a continuación pero con $\phi_2(x)$

$$i) \quad \phi_2(x=0) = 0$$

$$ii) \quad \phi_2(x=L) = 0$$

$$iii) \quad \phi_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \phi_2\left(x = \frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2}$$

$$iv) \quad \phi_2\left(x' = \frac{L}{2}\right) = \phi_2\left(x' = \frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2}$$

Al sustituir las condiciones se halla:

$$B = 0$$

$$CL + D = -\frac{L^2}{12}$$

$$\frac{CL}{2} + D = \frac{A}{9\beta}$$

$$C - A = \frac{L}{16}$$

La solución de las ecuaciones reporta.

$$A = -\frac{L}{8} \quad B = 0 \quad C = -\frac{L}{16} \quad \text{48}$$

Luego la función de forma $\phi_2(x)$ es:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \phi_2(x) = \frac{L^3}{48} \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L \quad \phi_2(x) = \frac{L^3}{48} \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

• **Cálculo de $\phi_3(x)$**

$$0 \leq x \leq L/2$$

$$EA \phi_3'(x) = 1$$

$$EA \phi_3(x) = x + A$$

$$L/2 \leq x \leq L$$

$$2EA \phi_3'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad EA \phi_3'(x) = \frac{1}{2}$$

$$EA \phi_3(x) = \frac{x^2}{2} + B$$

Las condiciones de contorno son:

$$i) \quad \phi_3(x=0) = 0$$

$$ii) \phi_3(x) = \frac{L}{2} \phi_3\left(x = \frac{L}{2}\right) + 2$$

Se recuerda que $\phi_3(x)$ es el desplazamiento horizontal $u(x)$. Las condiciones de contorno reportan.

$$A = 0 \quad B = -\frac{L}{4}$$

Con lo que se encuentra que la función de forma $\phi_3(x)$ es:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \phi_3(x) = \frac{x}{EA}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L \quad \phi_3(x) = \frac{2x-L}{4EA}$$

• EJEMPLO 5

Calcular la función de forma $\phi_1(x)$ de la viga de altura variable, indicada en la figura 7.16; la altura en el nudo inicial es h_0 y la altura en el nudo final es $2h_0$. El ancho de la viga es constante b .

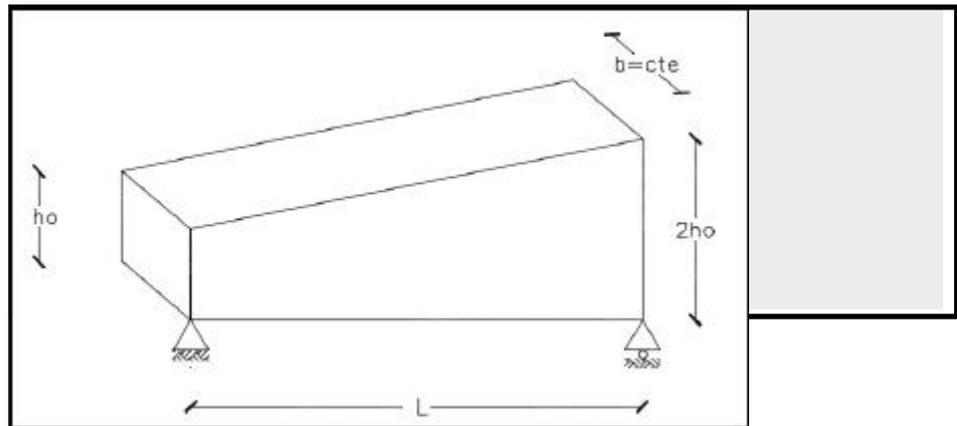


Figura 7.16 Viga se altura variable de Ejemplos 5 y 6.

• SOLUCIÓN

• Variación de altura

$$m = \frac{2h_0 - h_0}{L} = \frac{h_0}{L}$$

$$h(x) - h_0 = m x \quad \rightarrow h(x) = \frac{h_0}{L} (x + L)$$

• Variación de la Inercia

$$I_0 = \frac{b h_0^3}{12}$$

- **Cálculo del giro**

$$EI \phi_1'(x) = \left(-\frac{x}{L} \right) \phi_1'(x) = EI_0 \left(\frac{x-L}{L} \right)$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1'(x) = \frac{x-L}{(x+L)^3}$$

Para integrar se hace el siguiente cambio de variable:

$$x+L = y \quad \rightarrow \quad x = y - L \quad \rightarrow \quad dx = dy$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1'(x) = \int \frac{y-2L}{y^3} dy = \int y^{-2} dy - 2L \int y^{-3} dy$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1'(x) = -\frac{1}{y} + \frac{2L}{y^2} + A = -\frac{1}{y-L} + \frac{2L}{(y-L)^2} + A$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1'(x) = -\frac{1}{x+L} + \frac{2L}{(x+L)^2} + A$$

- **Cálculo del desplazamiento vertical**

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1(x) = \int -\frac{1}{y} dy + \int \frac{2L}{y^2} dy + Ax + B$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1(x) = -\ln(x+L) - \frac{2L}{x+L} + Ax + B$$

- **Cálculo de constantes de integración**

i) $\phi_1(x=0) = 0$

ii) $\phi_1(x=L) = 0$

Con la primera condición se obtiene: $0 = -\ln L - 1 + B$

$$B = 1 + \ln L$$

Con la segunda condición se halla: $0 = -\ln(2L) - \frac{1}{2}$

$$0 = -\ln(2L) - \frac{1}{2} + A L + 1 + \ln L \quad \rightarrow \quad A L = \ln(2L) - \ln L - \frac{1}{2}$$

$$A L = \ln \frac{2L}{L} - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A L = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{2 \ln 2 - 1}{2L}$$

- **Función de forma $\phi_1(x)$**

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1(x) = -\ln(x+L) - \frac{2L}{x+L} + \frac{2 \ln 2 - 1}{2L} x + 1 + \ln L$$

$$\frac{EI_0}{L^2} \phi_1(x) = -\ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{x}{x+L} + \frac{2 \ln 2 - 1}{2L} x$$

$$\phi_1(x) = \frac{L^2}{EI_0} \left[-\ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{x}{x+L} + \frac{2 \ln 2 - 1}{2L} x \right]$$

- **Funciones de forma restantes**

Las restantes funciones de forma son las siguientes.

$$\phi_2(x) = \frac{L^2}{EI_0} \left[\frac{x}{2(x+L)} - \ln\left(\frac{x+L}{L}\right) + \frac{4 \ln 2 - 1}{4L} x \right]$$

$$\phi_3(x) = \frac{L}{EA_0} \ln \frac{x+L}{L}$$

Este ejercicio fue tomado del libro "Análisis Estático de Estructuras. Formulación Matricial" de los Profesores: Simón Lamar y Celso Fortoul, publicado en Caracas, en el 2007. Simón Lamar Ph.D., fue uno de los mejores profesores que el autor de este libro ha tenido en su vida. Los editores del libro fueron mis compañeros del IMME (Instituto de Materiales y Modelos Estructurales de la U. C. de Venezuela) Marianela Lafuente y Carlos Genatios, excelentes estudiantes y amigos.

- **EJEMPLO 6**

Determinar la matriz de flexibilidad de la viga de altura variable presentada en la figura 7.16.

- **SOLUCIÓN**

Los giros se hallan con las siguientes ecuaciones.

$$\phi_1(x) = \frac{L^2}{EI_0} \left[-\frac{1}{x+L} + \frac{L}{(x+L)^2} + \frac{2 \ln 2 - 1}{2L} \right]$$

$$\phi_2(x) = \frac{L^2}{EI_0} \left[\frac{L}{2(x+L)^2} - \frac{1}{(x+L)} + \frac{4 \ln 2 - 1}{4L} \right]$$

La primera fila de la matriz de flexibilidad se encuentra sustituyendo $x = 0$ con lo que se determina f_{11} y $x = L$ con lo que se halla f_{12} en $\phi_1(x)$. El $f_{21} = f_{12}$; para encontrar f_{22} se evalúa ϕ_2 en $x = L$. Finalmente f_{33} se encuentra sustituyendo $x = L$ en $\phi_3(x)$.

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{2EI_0} (2 \ln 2 - 1) & -\frac{L}{EI_0} \left(\frac{3}{4} + \ln 2 \right) & 0 \\ -\frac{L}{EI_0} \left(\frac{3}{4} + \ln 2 \right) & -\frac{L \ln 2}{8EI_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L \ln 2}{EA_0} \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 7**

Encontrar la función de forma $\phi_1(x)$ para la viga de sección variable de la figura 7.17; la altura en el nudo inicial es h_0 y crece en forma lineal hasta $2h_0$ en el centro de luz y desde este punto se mantiene constante hasta el nudo final. Por otro lado el ancho de la viga es constante y vale b .

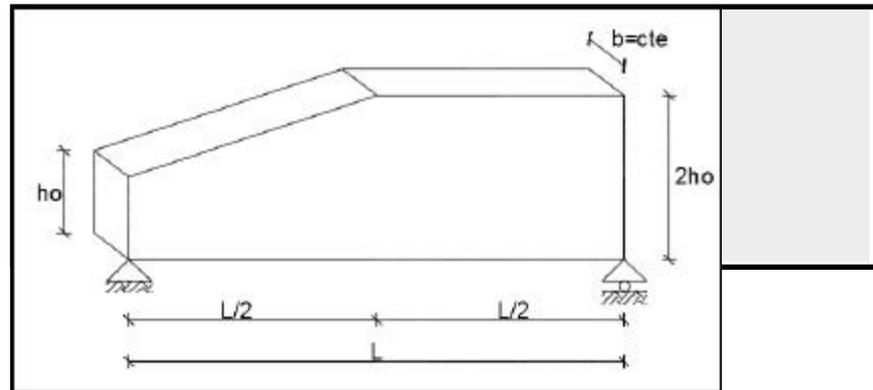


Figura 7.17 Viga de sección variable de Ejemplo 7

- SOLUCIÓN**

Calculo de $\phi_1(x)$ para el dominio $0 < x < L/2$

- Variación de la altura**

$$(h(x) - h_0) = \frac{h_0}{L} (x - 0)$$

$$h(x) = h_0 \left(\frac{2x + L}{L} \right)$$

- Variación de la Inercia**

$$I(x) = \frac{b * (h_0 \left(\frac{2x + L}{L} \right))^3}{12}$$

$$I(x) = I_0 * \left(\frac{2x + L}{L} \right)^3$$

- Ecuación diferencial inicial**

$$E \cdot I(x) \cdot \phi_1''(x) = \left(\frac{x - L}{L} \right)$$

$$E \cdot I_0 * \left(\frac{2x + L}{L} \right)^3 \cdot \phi_1''(x) = \left(\frac{x - L}{L} \right)$$

$$\frac{E \cdot I_0}{L^2} * \phi_1''(x) = \left(\frac{x - L}{(2x + L)^3} \right)$$

- Cálculo de $\phi_1(x)$**

$$\frac{E \cdot I_0}{L^2} * \phi_1'(x) = \int \left(\frac{x - L}{(2x + L)^3} \right) dx$$

$$\text{si } 2x + L = y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow dx = \frac{dy}{2}$$

$$E \cdot \frac{I_0}{L^2} * \phi_1'(x) = \frac{y - 3L}{2y^2} * \frac{1}{2}$$

$$E \frac{I_0}{l^2} \phi_1'(x) = \int \frac{y-3L}{2y^2} dy$$

$$E \frac{I_0}{l^2} \phi_1'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{3L}{2(2x+L)^2} - \frac{1}{2x+L} \right) + A$$

• **Cálculo de $\phi_1(x)$**

$$\frac{E \cdot I_0}{l^2} \phi_1(x) = \int \frac{1}{4} \left(\frac{3L}{2(2x+L)^2} - \frac{1}{2x+L} \right) + A \, dx$$

$$\frac{E \cdot I_0}{l^2} \phi_1(x) = \frac{1}{4} \left(-\frac{\ln(2x+L)}{2} - \frac{3L}{4(2x+L)} \right) + Ax + B$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{4} \left(-\frac{\ln(2x+L)}{2} - \frac{3L}{4(2x+L)} \right) + Ax + B$$

Calculo de $\phi_1(x)$ para el dominio $L/2 < x < L$

• **Variación de la Inercia**

$$I = b \cdot \frac{(2 \cdot h_0)^3}{12}$$

$$I = 8 \cdot I_0$$

• **Ecuación diferencia Inicial**

$$E \cdot 8 \cdot I_0 \cdot \phi_1''(x) = \frac{x-L}{L}$$

• **Integración de $\phi_1''(x)$**

$$8E I_0 \phi_1'(x) = \frac{x(x-L)}{2L} + C$$

$$8E I_0 \phi_1(x) = \frac{x(x^2-3Lx)}{6L} + Cx + D$$

• **Condiciones de Borde.**

i) $\phi_2(x=0) = 0$

ii) $\phi_2(x=L) = 0$

iii) $\phi_2(x=L/2) = \phi_2(x=L/2) + 2$

iv) $\phi_2'(x=L/2) = \phi_2'(x=L/2) + \frac{L}{2}$

• **Constantes de Integración**

$$A = \frac{12 \ln(2) - 7}{96L}$$

$$B = \frac{\ln(L)}{8} + \frac{3}{16}$$

$$C = \frac{L}{24} (24 \ln(2) - 11)$$

$$D = -\frac{L^2}{24} (24 \ln(2) - 19)$$

• **Función de forma $\phi_1(x)$**

- Para el intervalo $0 \leq x \leq L/2$

$$\phi_1(x) = \left(-\frac{\ln(2x+L)}{8} - \frac{3L}{16(2x+L)} + \left(\frac{12 \ln(2) - 7}{96} \right) + \frac{\ln(L)}{8} + \dots \right)$$

- Para el intervalo $L/2 \leq x \leq L$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{x^2(x-3L)}{6L} + \left(\frac{1}{24} (24 \ln(2) - 19) \right) \left(\frac{L}{8} \right) \right)$$

7.5 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

• **EJEMPLO 8**

Encontrar el coeficiente de forma β de la sección rectangular de la figura 7.4 si el momento estático S y el momento de inercia a flexión I se calculan con respecto al eje X que se indica en la figura 7.18.

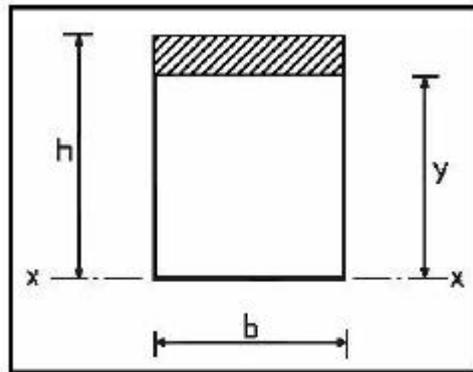


Figura 7.18 Ubicación del X para ejemplo 8

• **SOLUCIÓN**

Por ser de sección constante:

$$\beta = \frac{A}{I_x^2 b^2} \int S_x^2 dA$$

$$dA = b dY \quad A = b h \quad I = \frac{b h^3}{3}$$

$$S_x = b(h-Y) \left(Y + \frac{h-Y}{2} \right) = \frac{b}{2} (h-y)(h+y)$$

$$S_x = \frac{b}{2} (h^2 - Y^2)$$

$$\beta = \frac{b h}{\left(\frac{b h^3}{3} \right)^2 b^2} \int_0^h \left(\frac{b}{2} (h^2 - Y^2) \right)^2 b dY$$

$$\beta = \frac{9b^4 h}{4b^4 h^6} \int_0^h (h^4 - 2h^2 Y^2 + Y^4) dY = \frac{9}{4h^5} \left[h^4 Y - 2h^2 \frac{Y^3}{3} + \frac{Y^5}{5} \right]_0^h$$

$$\beta = \frac{9}{4h} \left(h^5 - \frac{2h^5}{3} + \frac{h^5}{5} \right) = \frac{9}{4} \left(\frac{15}{15} - \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{6}{5} = 1.2$$

columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. Si $E = 2173706.5 T/m$ y $G = 869482.6 T/m$. En los

GAL

• EJEMPLO 9

Encontrar el valor de ϕ para una columna cuadrada de 30 cm. por 30 cm. ($b \times h$) y para una columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. En los dos casos la longitud es de 3.0 m.

• SOLUCIÓN

- Columna de $b=30$ cm. y $h=30$ cm.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3 * 0.3^3}{12} = 0.000675 m^4$$

$$A = b h = 0.3 * 0.3 = 0.09 m^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{L^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{*} = 0.0075}{\frac{1.}{2} * \frac{2}{2} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{0}{0} \frac{6.}{5} * \frac{0.}{0} \frac{0}{0} \frac{0}{6} \frac{7}{5} 8 \frac{6}{9} \frac{4}{8} \frac{2.}{6} * \frac{0.}{0} \frac{9}{*} \frac{3.}{0^2}}$$

- **Columna de b=30 cm. y h=150 cm.**

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{0.3 * 1.5^3}{12} = 0.084375 \text{ m}^4$$

$$A = b h = 0.3 * 1.5 = 0.45 \text{ m}^2$$

$$\phi = \frac{3\beta EI}{2} = \frac{3 * 1.2 * 2173706.5 * 0.084375}{869482.6 * 0.45 * 3^2} = 0.1875$$

En columnas de pequeñas dimensiones el valor de ϕ es muy pequeño y se lo puede

despreciar, en el ejemplo desarrollado se ha visto que para la columna cuadrada de 30 cm. de lado el

valor de ϕ es 0.0075 prácticamente cero. En cambio en columnas de grandes dimensiones o en muros de corte el valor de ϕ tiene importancia, su omisión puede conducir a errores apreciables, lo propio sucede en vigas esbeltas. En la columna de 30/150 el valor de ϕ es 0.1875 cantidad distante de cero.

• EJEMPLO 10

Para la columna rectangular de 30 cm. por 150 cm. (b x h) del ejemplo anterior, determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 7.1. Calcular de dos formas: i) Sin considerar el efecto de corte, y, ii) Considerando el efecto de corte.

• SOLUCIÓN

▪ Sin considerar el efecto de corte

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 * 2173706.5 * 0.084375}{3} = 244541.97 \text{ Tm.}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2173706.5 * 0.084375}{3} = 122270.98 \text{ Tm.}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{2173706.5 * 0.45}{3} = 326055.97 \frac{T}{m}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244541.97 & 122270.98 & 0.00 \\ 122270.98 & 244541.97 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 326055.97 \end{bmatrix}$$

▪ Considerar el efecto de corte

$$\frac{1+\phi}{1+4\phi} = \frac{1+0.1875}{1+4*0.1875} = 0.67857 \Rightarrow \frac{4EI}{L} \frac{1+\phi}{1+4\phi} = 244541.97 * 0.67857 = 165938.84$$

$$\frac{1-2\phi}{1+4\phi} = \frac{1-2*0.1875}{1+4*0.1875} = 0.35714 \Rightarrow \frac{2EI}{L} \frac{1-2\phi}{1+4\phi} = 122270.98 * 0.35714 = 43667.857$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \frac{1+\phi}{1+4\phi} & \frac{2EI}{L} \frac{1-2\phi}{1+4\phi} & 0 \\ \frac{2EI}{L} \frac{1-2\phi}{1+4\phi} & \frac{4EI}{L} \frac{1+\phi}{1+4\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43667.857 & & \\ & 165938.84 & 0.00 \\ & 43667.857 & 165938.84 \\ & 0.00 & 0.00 & 326055.97 \end{bmatrix}$$

Al comparar las dos matrices de rigidez del elemento se observa que existe una diferencia notable en los valores. Por lo tanto es importante considerar el efecto de corte. Actualmente se disponen ordenadores con mucha capacidad de memoria de tal manera que es mejor considerar el efecto de corte para cualquier tipo de elemento su programación es muy sencilla. En el libro únicamente por efecto de escritura no se considerará el efecto de corte.

- **EJEMPLO 11**

Encontrar el giro en el nudo inicial de la viga de la figura 7.19 si se aplica un Momento de 5Tm. La viga es de 30/30 cm., y tiene un módulo de elasticidad de 2173706.5 T/m².

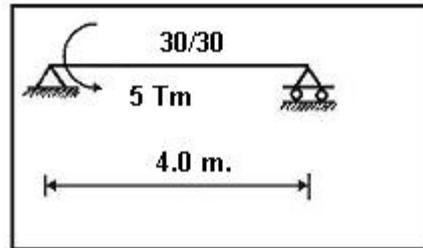


Figura 7.19 Viga de sección constante de ejemplo 11.

- **SOLUCIÓN**

Sea α el giro en el nudo inicial debido al Momento de 5 Tm. Por otro lado se conoce que al aplicar un momento unitario el giro en el nudo inicial es de $-\frac{L}{3EI}$. Como se está trabajando en el rango elástico al aplicar un momento de 5 Tm. el giro será $\alpha = -\frac{5L}{3EI}$

$$EI = 2173706.5 * 0.000675 = 1467.2518 \text{ Tm}^2$$

$$\alpha = -\frac{5L}{3EI} = \frac{5 \text{ Tm} * 4 \text{ m}}{3 * 1467.2518 \text{ Tm}^2} = 0.0045436 \text{ rad.}$$

- **EJEMPLO 12**

Determinar el momento de inercia de la viga "T" indicada en la figura 7.20, de dos formas y posteriormente encontrar las dimensiones de una sección rectangular equivalente que tenga la misma área y momento de inercia.

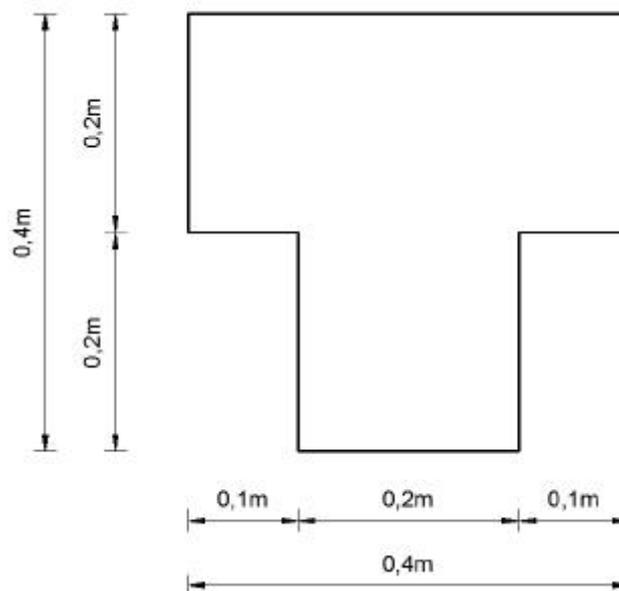


Figura 7.20 Geometría de viga "T"

• SOLUCIÓN

Primera Forma de Cálculo

La viga "T" se ha dividido en las dos figuras indicadas en la figura 7.21; en la tabla 7.1, se presenta el cálculo del centro de gravedad de la viga "T". Se ha denominado CG al centro de gravedad de la viga "T" y $cg1, cg2$ a los centros de gravedad de cada una de las figuras, la distancia entre el CG y el $cg1$ es 6.667 cm, que se ha redondeado a 0.07 m.

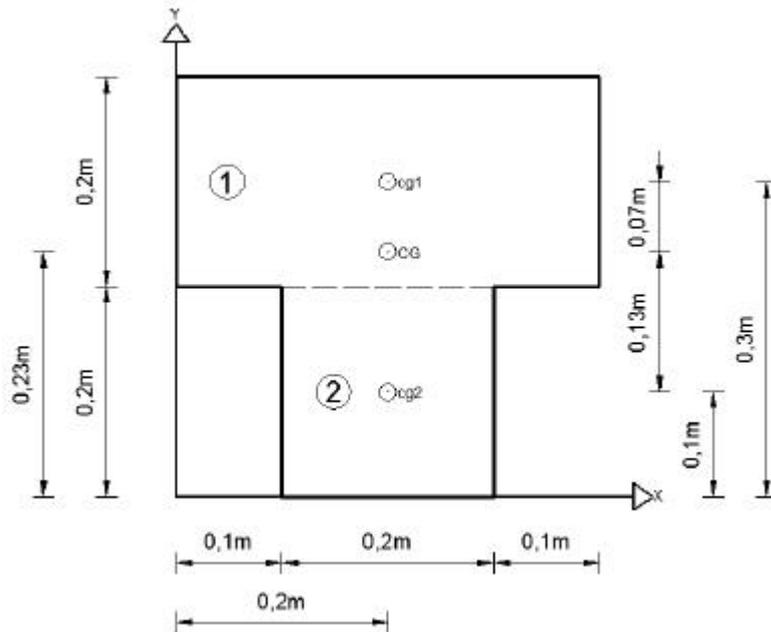


Figura 7.21 Figuras consideradas en la primera forma de cálculo

Tabla 7.1 Cálculo del centro de gravedad

Figura	X (cm)	Y (cm)	A (cm) ²	X A (cm) ³	Y A (cm) ³
1	20	30	800	16000	24000
2	20	10	400	8000	4000
Σ=			1200	24000	28000

$$X_{CG} = \frac{\sum X A}{\sum A} = \frac{24000}{1200} = 20 \text{ cm}$$

$$Y_{CG} = \frac{\sum Y A}{\sum A} = \frac{28000}{1200} = 23.333 \text{ cm}$$

Tabla 7.2 Cálculo del momento de inercia con respecto al centro de gravedad de la sección

Figura	b (cm)	h (cm)	$I_{CG} = \frac{bh^3}{12}$ (cm) ⁴	Y (cm)	$Y^2 A$ (cm) ⁴
1	40	20	26667	6.667	35559
2	20	20	13333	13.333	71108
Σ=			40000		106667

$$I_{CG} = \sum I_{CGi} + Y_{12} A = 40000 + 106667 = 146667 \text{ cm}^4$$

Segunda Forma de Cálculo

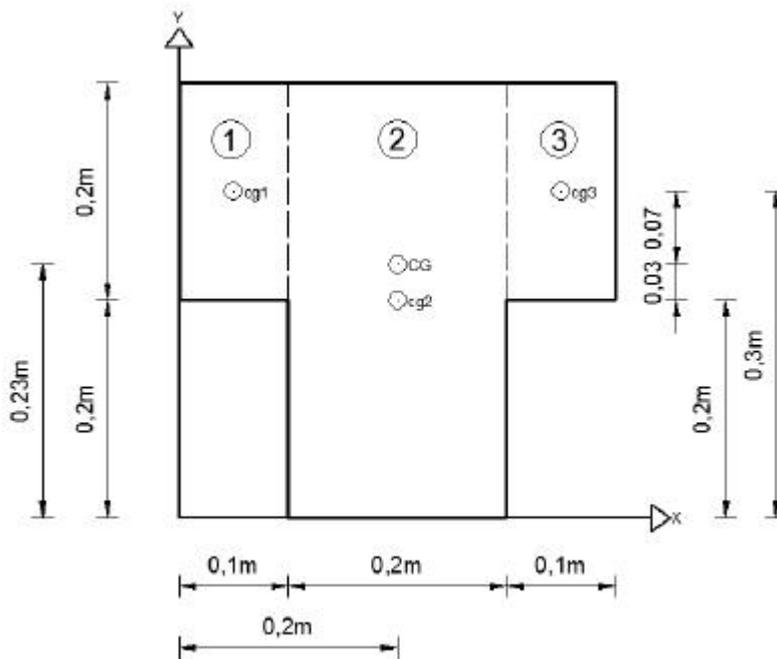


Figura 7.22 Figuras consideradas en la segunda forma de cálculo

Tabla 7.2 Cálculo del momento de inercia con respecto al centro de gravedad de la sección

Figura	b (cm)	h (cm)	A (cm) ²	$I_{CG} = \frac{bh^3}{12}$ (cm) ⁴	Y (cm)	$\frac{Y^2 A}{(cm)^4}$
1	10	20	200	6666.7	6.667	8889
2	20	40	800	106670	3.333	8887.1
3	10	20	200	6666.7	6.667	8889
$\Sigma =$				120000		26665

$$I_{CG} = \sum(I_{CGi} + Y_{12} A) = 120000 + 26665 = 146665 \text{ cm}^4$$

Sección rectangular equivalente

$$h_{eq} = \sqrt{\frac{12 I_{CG}}{A}} = \sqrt{\frac{12 * 146667}{1200}} = 38.29$$

$$b_{eq} = \frac{A}{h_{eq}} = \frac{1200}{38.29} = 31.33 \text{ m}$$

• **EJEMPLO 13**

Encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$ para una viga de sección constante a partir de la solución del problema de flexión y empleando la definición de rigidez.

• **SOLUCIÓN**

Por definición el valor de $\frac{4EI}{L}$ es el momento que hay que aplicar en el nudo inicial para que ese nudo rote la unidad y la rotación en el nudo final sea cero.

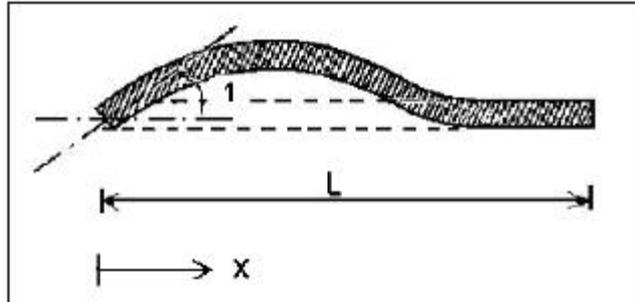


Figura 7.23 Planteamiento del problema para encontrar la rigidez $\frac{4EI}{L}$

En el capítulo 3 se estudió que la deformación $v(x)$ cuando solo existe un giro θ_1 vale:

$$v(x) = \theta_1 \phi_3(x) = \theta_1 X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 = \theta_1 X \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2} \right) = \theta_1 \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \right)$$

Para el presente caso $\theta_1 = 1$. Luego la ordenada de la elástica para el caso que nos interesa vale:

$$v(x) = X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}$$

La derivada de $v(x)$ es el giro $\theta(x)$ y la derivada del giro es la curvatura $\phi(x)$ y a su vez la derivada de la curvatura es la carga.

La curvatura es igual a $\frac{M}{EI}$, donde M es el momento a flexión y EI es la rigidez a flexión.

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = 1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2}$$

$$\phi(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2}$$

Por la convención de signos con la que se está trabajando se tiene que:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

De tal forma que el momento que se aplica en el nudo inicial se obtiene al reemplazar $X = 0$ en la ecuación de la curvatura y al despejar el momento de ésta última ecuación se tiene:

$$M = \frac{4EI}{L}$$

L

De tal manera que el momento que produce el giro unitario en el nudo inicial vale $\frac{4EI}{L}$ que es el término de rigidez que se está buscando.

7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio N.- 1

Determinar el coeficiente de forma β de una columna de sección constante en forma de "L".

Ejercicio N.- 2

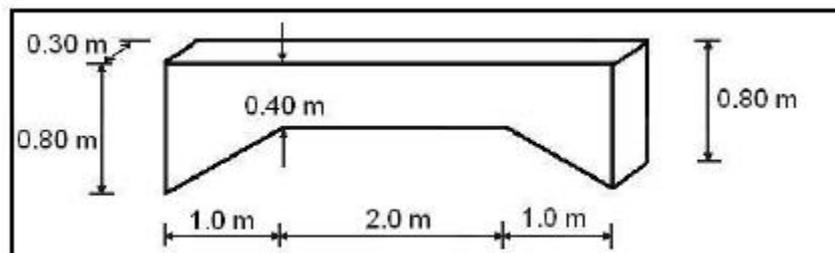
Encontrar el elemento de rigidez $\frac{2EI}{L}$ a partir de los resultados presentados en el ejemplo 5.

Ejercicio N.- 3

Encontrar la matriz de rigidez asociado al sistema de coordenadas de la figura 7.1 para un muro de corte de 20 por 400 cm. (b x h). La altura del elemento es de 3.0 m. El módulo de elasticidad es de 2173706.5 T/m². Calcular sin considerar el efecto de corte y considerando el efecto de corte.

Ejercicio N.- 4

Con la ayuda de las tablas de Guldán determinar la matriz de rigidez del elemento para el sistema de coordenadas de la figura 7.5. Para la viga de sección variable que se indica a continuación. Considerar el módulo de elasticidad igual al del ejercicio anterior.



Viga de Sección Variable para los ejercicios 4 y 5.

Ejercicio N.- 5

Determinar los términos f_{11} y f_{21} utilizando las ecuaciones (7.4.1) y (7.4.2) de la viga amartelada. Se recomienda resolver las integrales empleando métodos numéricos. Concretamente utilizar 5 puntos de la cuadratura de Gauss.

CAPITULO 8

MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ESTRUCTURA A PARTIR DEL CONCEPTO

RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices de rigidez \mathbf{K} y de flexibilidad \mathbf{F} de una estructura usando el concepto. En los capítulos posteriores a partir del concepto se obtendrá en forma práctica la matriz de rigidez.

Posteriormente se trabaja con la matriz de transformación de coordenadas para encontrar las matrices \mathbf{K} y \mathbf{F} . Finalmente se presenta un algoritmo orientado al uso del computador para estructuras con elementos flexibles para encontrar las matrices indicadas en otro sistema de coordenadas.

8.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA \mathbf{K}

8.1.1 Definición

En el capítulo 6 se indicó que un término cualquiera de la matriz de rigidez de una estructura k_{ij} , es el valor de la carga generalizada Q_i correspondiente a la deformada elemental, $q_j = 1$ y demás nulas. Por consiguiente si se desea calcular, por ejemplo, los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de una estructura se deberá calcular el vector de cargas generalizadas que corresponde al estado de desplazamiento elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1$. De igual forma se procederá con las demás columnas de \mathbf{K} .

8.1.2 Procedimiento de cálculo

El procedimiento de cálculo para hallar la matriz de rigidez de una estructura \mathbf{K} a partir del concepto es el siguiente:

- 1) Construir la deformada elemental cuya columna se desea calcular.
- 2) Encontrar las deformaciones p en cada uno de los elementos asociados a la deformada elemental. Es un problema de geometría.

- 3) Transformar las deformaciones p de cada elemento en cargas internas P por medio de la matriz de rigidez del elemento k . La ecuación matricial que se utiliza es: $P = k p$
- 4) Usando la estática se realiza el equilibrio de cada uno de los elementos que conforman la estructura.
- 5) Encontrar el equilibrio de cada uno de los nudos de la estructura.
- 6) En el paso anterior se obtienen las cargas que actúan sobre la estructura y el vector de cargas generalizadas que son los elementos de la matriz de rigidez de la estructura.

8.1.3 Primera forma de cálculo numérico

Por didáctica únicamente se denomina primera forma de cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, a aquella en que se utiliza como sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.1

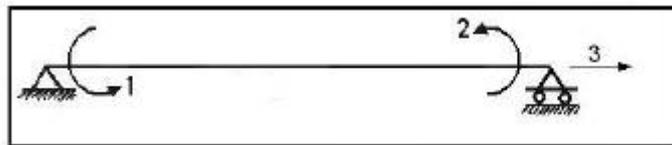


Figura 8.1 Sistema $P - p$ para la primera forma de cálculo.

Se recuerda que las deformaciones p se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \quad p_3 = u_2 - u_1$$

La matriz de rigidez de un elemento para el sistema de coordenadas indicado es:

$$k = \begin{bmatrix} \underline{4EI} & \underline{2EI} & 0 \\ \underline{2EI} & \underline{4EI} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{EA} \\ & & L \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 1

Encontrar la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura indicada en la figura 8.2 si todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud. Encontrar aplicando el concepto y no considerar el efecto de corte.

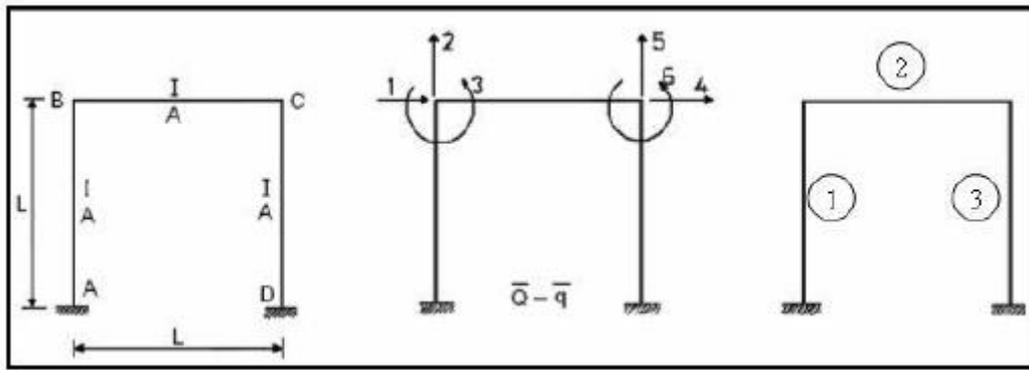


Figura 8.2 Estructura de Ejemplo 1; grados de libertad y numeración de elementos.

• SOLUCIÓN

Por ser todos sus elementos flexibles se tiene seis grados de libertad. En consecuencia el sistema de coordenadas de la estructura $Q - q$ es el indicado en la parte central de la figura 8.2. Para una mejor comprensión a la derecha se indica la numeración de los elementos.

En la figura 8.3 se indica el sistema de coordenadas de los elementos $P - p$, para las columnas el nudo inicial se ha considerado en la parte inferior y para la viga a la izquierda.

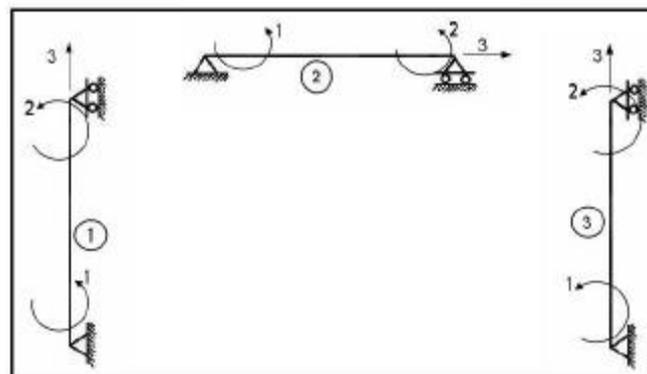


Figura 8.3 Sistema $P - p$ de la estructura.

Para diferenciar las deformaciones y cargas internas se escribe entre paréntesis y como subíndice el número del elemento al cual corresponde.

De acuerdo al procedimiento indicado en el apartado anterior para encontrar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura se procede de la siguiente manera:

- 1) Deformada elemental $q_1 = 1$ y $q_i = 0, i \neq 1$.

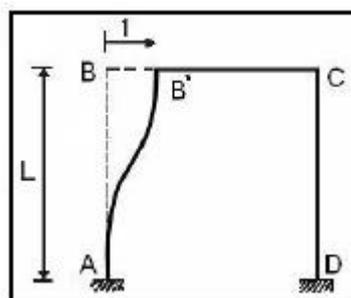


Diagrama elemental q_1

2) Cálculo de las deformaciones p .

$$\begin{array}{lll} p_1^{(1)} = \frac{1}{L} & p_1^{(2)} = 0 & p_1^{(3)} = 0 \\ p_2^{(1)} = \frac{1}{L} & p_2^{(2)} = 0 & p_2^{(3)} = 0 \\ p_3^{(1)} = 0 & p_3^{(2)} = -1 & p_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

Para encontrar las deformaciones del elemento 1, se procedió de la siguiente manera:

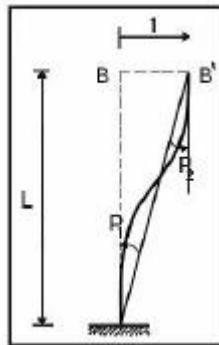
$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & u_2 = 0 \\ v_1 = 0 & v_2 = -1 \\ \theta_1 = 0 & \theta_2 = 0 \end{array}$$

$$p_1^{(1)} = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1 - 0}{L} = \frac{1}{L}$$

$$p_2^{(1)} = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 - \frac{-1 - 0}{L} = \frac{1}{L}$$

$$p_3^{(1)} = u_2 - u_1 = 0 - 0 = 0$$

Se puede obtener éstos mismos valores directamente sin necesidad de aplicar las ecuaciones si se recuerda que las deformaciones p_1 y p_2 son los ángulos comprendidos entre la cuerda y la tangente de los nudos inicial y final respectivamente como se indicó en el Capítulo 6. Para el elemento 1 se ha separado la deformada elemental correspondiente a la columna izquierda, en ella se ha unido la cuerda entre B y B', luego se han trazado las tangentes en el nudo inicial y final se observa que el ángulo entre la cuerda y la tangente es anti horario luego las deformaciones p_1 y p_2 son positivas.



Regla para encontrar las deformaciones del elemento 1.

En la gráfica se aprecia que el ángulo p_1 es igual al ángulo p_2 por ser alternos e internos y que p_1 es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Por lo tanto se tiene:

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{L} \quad p_2^{(1)} = \frac{1}{L}$$

3) Se obtienen las cargas internas P en cada uno de los elementos del pórtico plano. Como todos los elementos tienen la misma sección transversal y la misma longitud, la matriz de rigidez de cada uno de ellos es la misma y es:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \begin{bmatrix} 4EI & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Las cargas internas del elemento 1 se obtienen del producto matricial $P^{(1)} = k^{(1)} p^{(1)}$. Donde $P^{(1)}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

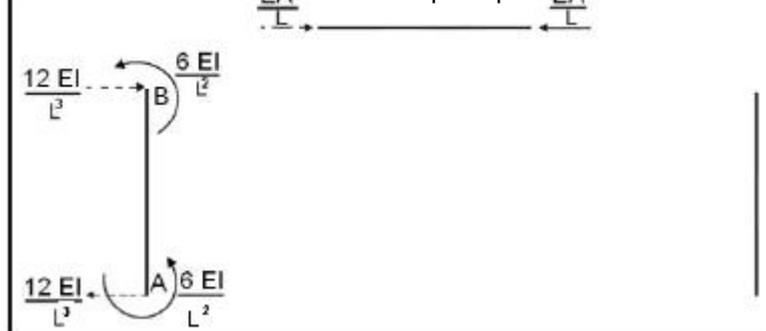
$$P_1^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \quad P_2^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \quad P_3^{(1)} = 0$$

Lo propio se realiza con los elementos 2 y 3 es decir se multiplica la matriz de rigidez del respectivo elemento por su vector de deformaciones, los resultados que se obtienen, son:

$$\begin{matrix} P_1^{(2)} = 0 & P_2^{(2)} = 0 & P_3^{(2)} = -\frac{EA}{L} \\ P_1^{(3)} = 0 & P_2^{(3)} = 0 & P_3^{(3)} = 0 \end{matrix}$$

4) Se realiza el equilibrio de cada elemento.

En la siguiente figura se indica con línea continua las cargas internas P obtenidas en el paso anterior y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran cada uno de los elementos.

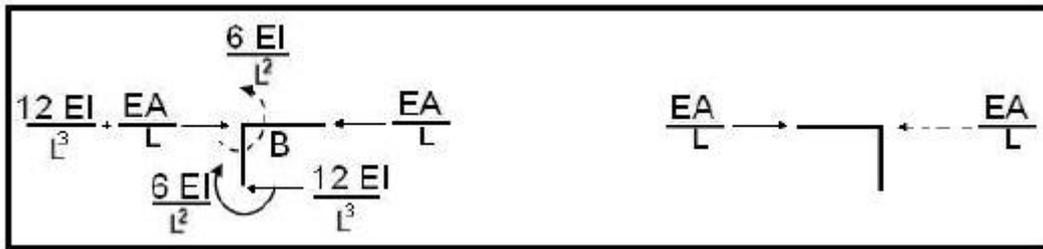


Equilibrio de elementos.

El cortante en la columna se obtiene sumando los momentos y dividiendo para la longitud.

- 5) Se halla el equilibrio de nudos.

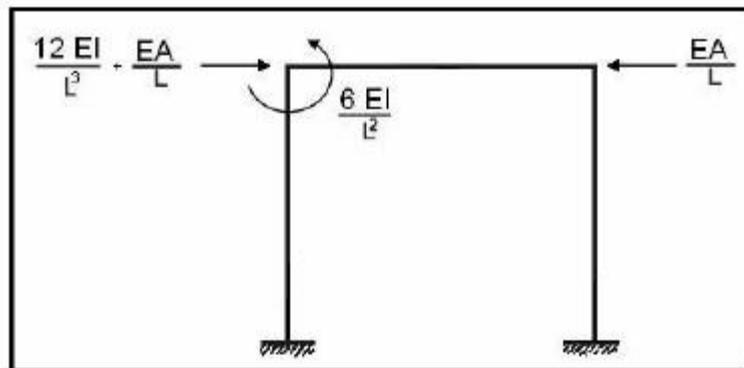
En los nudos de la estructura, las fuerzas y momentos internos de cada elemento actúan con sentido contrario, éstas se han representado con línea continua y las cargas exteriores que equilibran cada uno de los nudos se presentan con línea entrecortada.



Equilibrio de nudos.

Nótese que para equilibrar la fuerza horizontal del nudo B se ha sumado el cortante proveniente de la columna y la fuerza axial que viene de la viga.

- 6) Finalmente se determinan las cargas exteriores y el vector de cargas generalizadas, que producen la deformada elemental inicial, $q_1 = 1$ y todas las demás nulas.



Valores de la primera columna de K

Por consiguiente el vector de cargas generalizadas Q resulta:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} \\ 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \\ K_{51} \\ K_{61} \end{bmatrix}$$

Por definición los elementos de Q son los términos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura. Se deja al estudiante el obtener las demás columnas de K aplicando el concepto. El resultado total es el siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI+EA}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix}$$

8.1.4 Segunda forma de cálculo numérico

Se puede considerar otro sistema de coordenadas del elemento para encontrar la matriz de rigidez de la estructura, por ejemplo el presentado en la figura 8.3

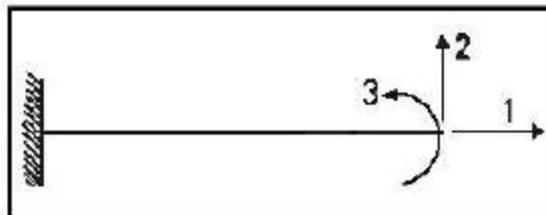


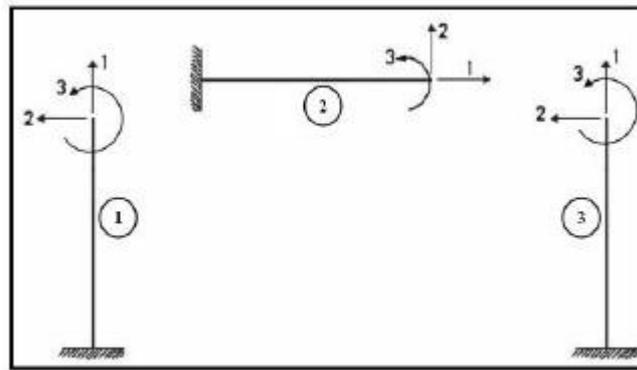
Figura 8.4 Otro sistema de coordenadas del elemento $P - p$

• EJEMPLO 2

Calcular la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.2 considerando el sistema de coordenadas del elemento el indicado en la figura 8.4.

• SOLUCIÓN

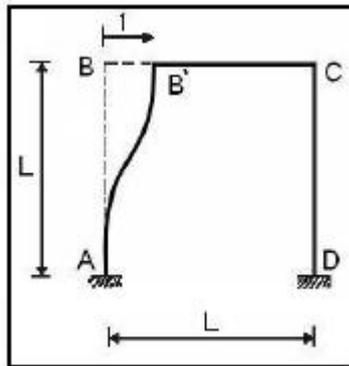
En la siguiente figura se presenta las coordenadas de cada uno de los elementos que forman la estructura.



Sistema de coordenadas de los elementos del ejemplo 2.

Se resume a continuación el procedimiento de cálculo.

1) Deformada elemental q_1

Deformada elemental q_1

Las fórmulas con las cuales se obtienen las deformaciones de un elemento se obtuvieron en el capítulo 6. Estas son:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_2 - u_1 \\ p_2 &= v_2 - v_1 - L\theta_1 \\ p_3 &= \theta_2 - \theta_1 \end{aligned}$$

2) Deformaciones de los elementos

Las deformaciones en cada uno de los elementos son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} p_1^{(1)} = 0 & p_1^{(2)} = -1 & p_1^{(3)} = 0 \\ p_2^{(1)} = -1 & p_2^{(2)} = 0 & p_2^{(3)} = 0 \\ p_3^{(1)} = 0 & p_3^{(2)} = -1 & p_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

3) Cargas Internas

La matriz de rigidez de elemento para el sistema de coordenadas $P - p$ de la figura 8.4 fue deducida en el capítulo anterior y es la siguiente:

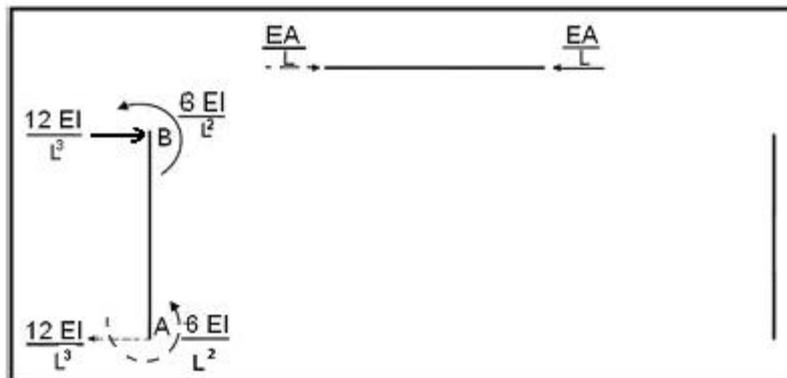
$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Por los datos del ejemplo la matriz de rigidez es igual para todos los elementos. Al realizar el producto matricial $\mathbf{P} = \mathbf{k} \mathbf{p}$ en cada uno de los elementos de la estructura se obtiene:

$$\begin{array}{lll} P_1^{(1)} = 0 & P_1^{(2)} = -\frac{EA}{L} & P_1^{(3)} = 0 \\ P_2^{(1)} = \frac{12EI}{L^3} & P_2^{(2)} = 0 & P_2^{(3)} = 0 \\ - & - & - \\ P_3^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} & P_3^{(2)} = 0 & P_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

4) Equilibrio de elementos

En la siguiente figura se presenta con línea continua las cargas \mathbf{P} obtenidas en cada uno de los elementos y con línea entrecortada las diferentes fuerzas que equilibran los elementos.



Equilibrio de elementos

Las fuerzas y momentos encontrados en cada elemento son iguales a las halladas en el Ejemplo anterior, como debe ser. En consecuencia los siguientes pasos que faltan para hallar los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de la estructura son los dados en el Ejemplo 1. De idéntica forma se obtendrán las demás columnas de la matriz de rigidez.

El haber obtenido la misma matriz de rigidez de la estructura, utilizando diferentes sistemas de coordenadas de elemento, no es un hecho casual. Esto es debido a que la inmovilización de los desplazamientos como cuerpo rígido, que se estudió en el Capítulo 6, utilizando diferentes tipos de vínculos es un artificio. Si se utiliza otro sistema de coordenadas de miembro se obtendrá la misma matriz de rigidez \mathbf{K} .

Finalmente, se puede resolver la estructura utilizando sistemas de coordenadas de elemento $P - p$, diferentes para cada uno de los elementos, por ejemplo el que se indica en la figura 8.5.

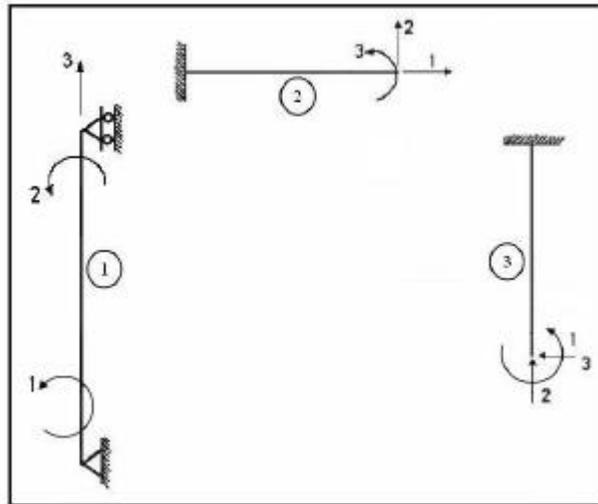


Figura 8.5 Nuevo sistema de coordenadas de los elementos para la estructura de los ejemplos 1 y 2.

8.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UNA ESTRUCTURA F

8.2.1 Definición

Se conoce que $q = F Q$. Por lo tanto un elemento cualquiera de la matriz de flexibilidad de una estructura F_{ij} será el valor del desplazamiento o giro q_i correspondiente al estado de cargas $Q_j = I$ y las demás nulas.

La matriz de flexibilidad F transforma las cargas generalizadas Q en coordenadas generalizadas q .

8.2.2 Procedimiento de cálculo

Para encontrar la matriz de flexibilidad F a partir de su definición, se realizan los siguientes pasos:

- 1) Para el estado de carga elemental $Q_i = I$ y las demás nulas, se debe hallar las cargas internas P que actúan en cada uno de los elementos. Esto es un procedimiento de estática.
- 2) Conocido el vector P se encuentran las deformaciones p , por medio de la siguiente ecuación:
 $p = f P$.
- 3) A partir de las deformaciones internas en cada uno de los elementos de la estructura se determina el vector de coordenadas generalizadas q . Este es un problema de geometría. Al encontrar q se tienen ya los elementos de la columna de F que se está calculando.

- **EJEMPLO 3**

En la figura 8.6 se presenta un pórtico plano con todos sus elementos completamente flexibles, se pide calcular la primera columna de la matriz de flexibilidad.

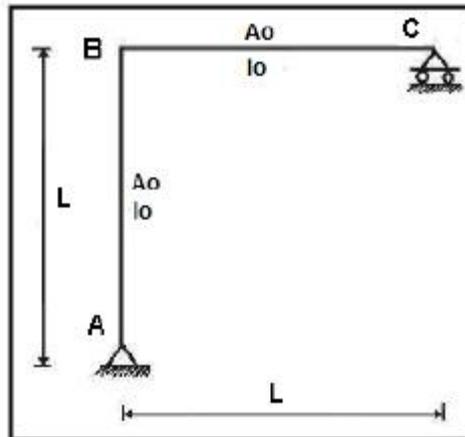


Figura 8.6 Estructura de ejemplo 3.

- **SOLUCIÓN**

Por facilidad se ha considerado que la columna y la viga del pórtico tienen igual sección transversal y la misma longitud. En consecuencia la matriz de flexibilidad de sus elementos es la misma.

A la izquierda de la figura 8.7, se presenta el sistema $Q - q$, y a la derecha la numeración de los elementos.

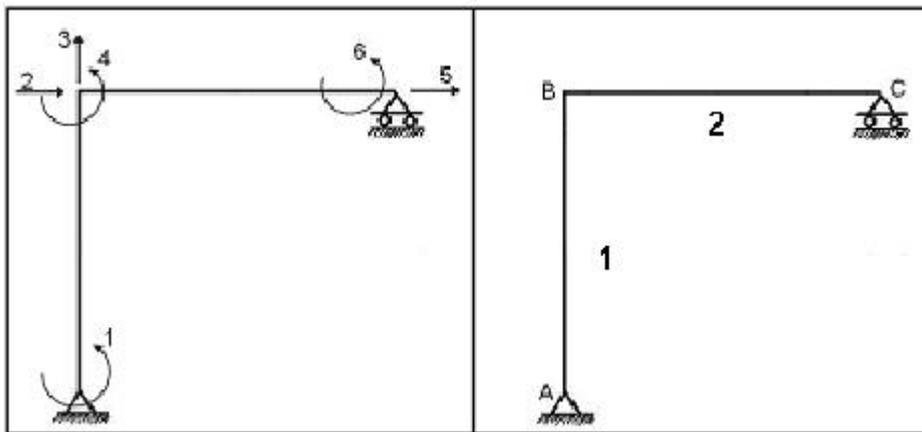
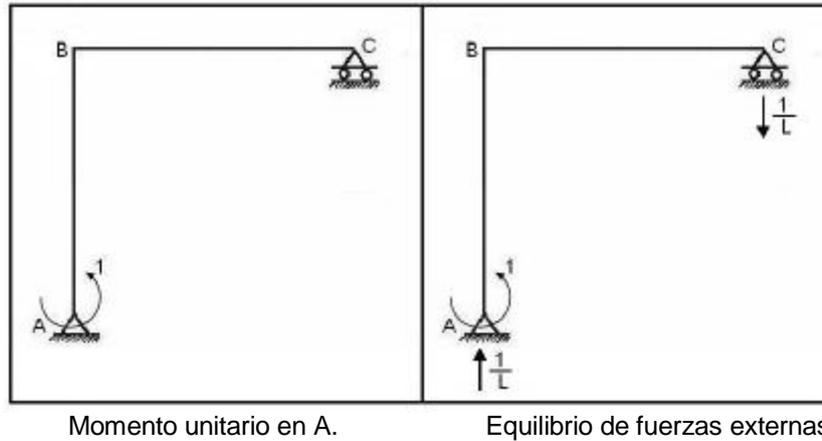


Figura 8.7 Grados de libertad y numeración de los elementos.

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

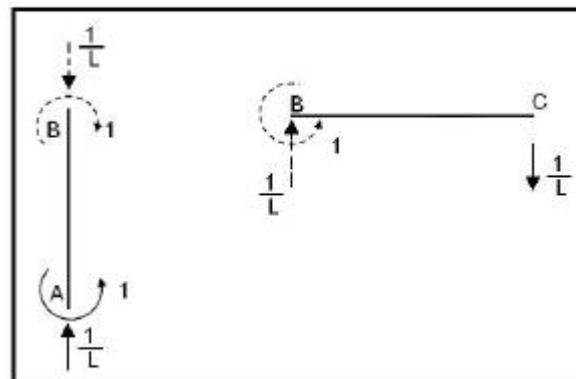
$$1) Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad i \neq 1$$



Debido al momento unitario que actúa en el nudo A de la estructura, se generan reacciones en los vínculos A y C que valen $\frac{1}{L}$ con lo cual la estructura está en equilibrio. En la figura del estado de carga unitaria, se muestran éstas reacciones.

Por efecto del sistema de cargas en cada uno de los elementos se tienen fuerzas y momentos internos los mismos que se indican en la siguiente figura. Con línea continua se indican las acciones que vienen de las reacciones de los nudos y con línea entrecortada las acciones que conducen al equilibrio en los elementos.

Para el equilibrio de las juntas se colocan en primer lugar las fuerzas externas que actúan en la junta. Luego se equilibra el nudo con fuerzas y momentos. Estas fuerzas son las que pasan a los elementos con sentido contrario y son las que se han indicado en la figura.



Equilibrio de los elementos.

Se deja al lector la verificación del equilibrio de juntas y de elementos. Por otra parte se trabaja con el sistema de coordenadas de miembro de la figura 8.1, en la cual se tiene que P_1 es el momento en el nudo inicial y es positivo si es anti horario, P_2 es el momento en el nudo final y es positivo si es anti horario y P_3 es la fuerza axial en el nudo final y es positiva si produce tracción en el elemento. Con estas indicaciones y al observar las fuerzas y momentos en los elementos se tiene.

$$\begin{array}{ll}
 P_1^{(1)} = 1 & P_1^{(2)} = 1 \\
 P_2^{(1)} = -1 & P_2^{(2)} = 0 \\
 P_3^{(1)} = -\frac{1}{L} & P_3^{(2)} = 0
 \end{array}
 \Rightarrow \mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Cálculo de las deformaciones de los elementos.

$$\mathbf{p} = \mathbf{f} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} \mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2EI} \\ -\frac{L}{2EI} \\ -\frac{1}{EA} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} \mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} \\ -\frac{L}{6EI} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En consecuencia se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 p_1^{(1)} = \frac{L}{2EI} & p_1^{(2)} = \frac{L}{3EI} \\
 p_2^{(1)} = -\frac{L}{2EI} & p_2^{(2)} = -\frac{L}{6EI} \\
 p_3^{(1)} = -\frac{1}{EA} & p_3^{(2)} = 0
 \end{array}$$

3) Cálculo de los desplazamientos y giros q

Esta es la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura. Se quiere hallar los desplazamientos y giros que experimentan las juntas de tal forma que los elementos tengan las deformaciones p indicadas. Para facilitar la explicación, se denomina:

$$\alpha = -\frac{L}{2EI} \quad \delta = \frac{1}{EA}$$

Con ésta nomenclatura las deformaciones en los elementos valen:

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= \alpha & p_1^{(2)} &= \frac{2}{3}\alpha \\ p_2^{(1)} &= -\alpha & p_2^{(2)} &= -\frac{\alpha}{3} \\ p_3^{(1)} &= -\delta & p_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

En la figura 8.8.1 se indican éstas deformaciones y en la misma se aprecia que se está violando dos reglas básicas en el nudo B que son:

- i) El nudo B es discontinuo; se aprecia que el nudo B por parte de la columna ha bajado.
- ii) El nudo B antes de deformarse medía 90 grado, ahora no.

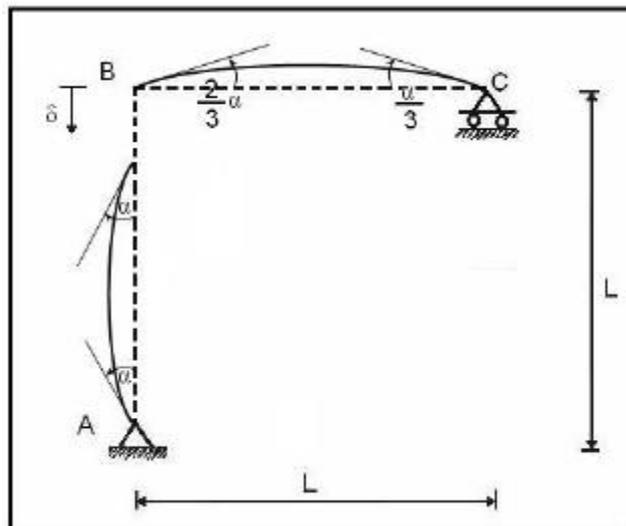


Figura 8.8.1 Deformaciones de los elementos obtenidos.

Para solucionar éstos dos problemas se deben dar ciertos desplazamientos y giros a la estructura. En primer lugar para corregir la anomalía de la discontinuidad en el nudo B, al elemento BC se desplaza verticalmente una magnitud igual a δ como se indica en la figura 8.8.2.

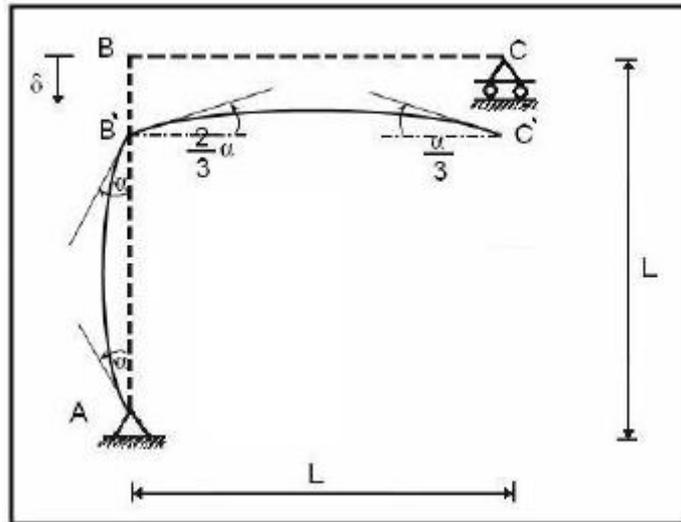


Figura 8.8.2 Solución de la discontinuidad en el nudo B pero no en el ángulo.

Si bien se ha solucionado un problema, ahora se ha creado otro que es la posición del nudo C' ya que debido al tipo de vínculo existente en esa junta el nudo C no debe bajar. Esto se va a resolver posteriormente, se concentra la atención en resolver el problema de que la junta B antes de deformarse medía 90 grados y después de deformarse debe medir 90 grados.

En la figura 8.8.2 se aprecia que el ángulo B' vale $\alpha + 90 + \alpha \frac{2}{3} = 90 + \frac{5}{3}\alpha$. Pero el ángulo

B' debe valer 90 grados luego el elemento B'C' se rota $\frac{5}{3}\alpha$ haciendo centro en B' esto se presenta en la figura 8.8.3.

Luego de la rotación, el punto C' se ha desplazado verticalmente $\frac{5}{3}\alpha L$ hasta llegar a C''.

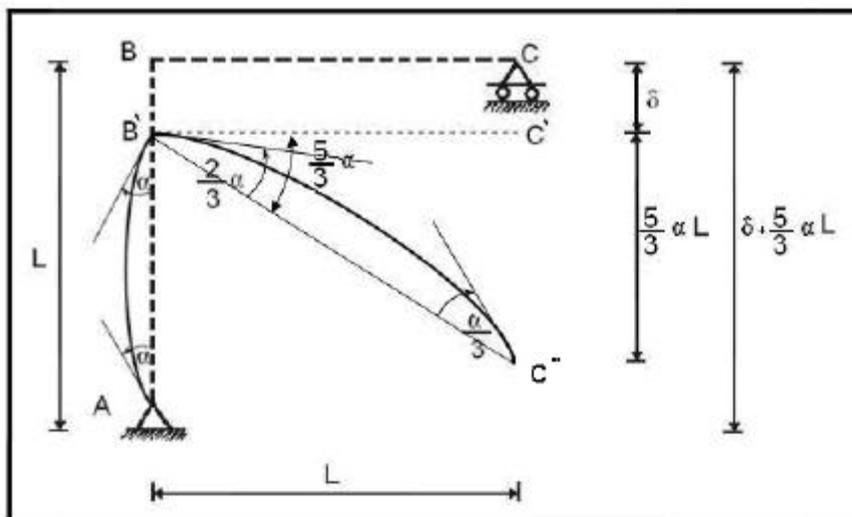


Figura 8.8.3 Solución de la rotación del nudo B.

La posición final del nudo C no puede ser C'' como está indicado en la figura 8.8.3 debe estar en cualquier parte de la recta BC, para lograr éste objetivo se debe rotar el nudo A un ángulo Φ .

$$\Phi = -\frac{\delta + \alpha L}{L} = \frac{\delta}{L} + \frac{5\alpha}{3}$$

Esta rotación Φ se indica en la figura 8.8.4, se observa que la posición final del nudo C es C'' . El nudo C se ha desplazado horizontalmente ΦL igual corrimiento experimenta el nudo B como se aprecia en la figura mencionada.

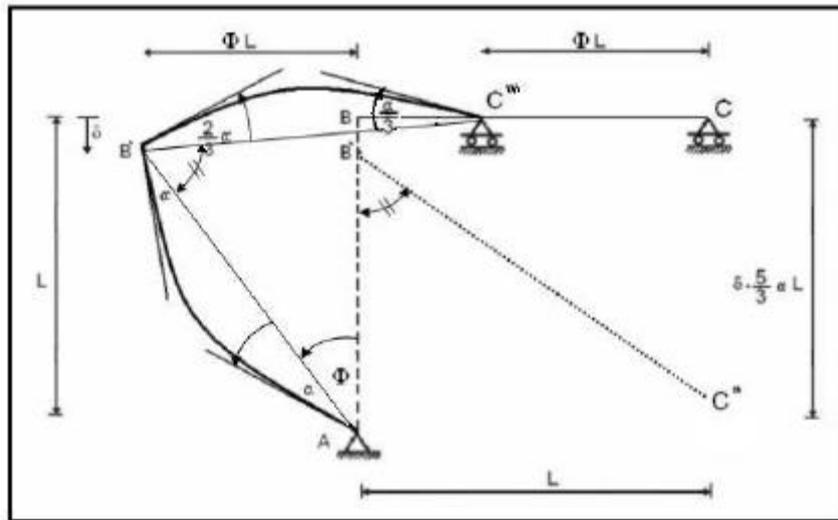


Figura 8.8.4 Posición final de la estructura.

En resumen, los desplazamientos y giros de los nudos son los siguientes:

$q_1 = \alpha + \Phi$	Rotación del nudo A.
$q_2 = -\Phi L$	Desplazamiento horizontal del nudo B.
$q_3 = -\delta$	Desplazamiento vertical del nudo B.
$q_4 = -\alpha + \Phi$	Rotación del nudo B.
$q_5 = -\Phi L$	Desplazamiento horizontal del nudo C.
$q_6 = -\frac{\alpha}{3} - \frac{5\alpha}{3} + \Phi$	Rotación del nudo C.

Al reemplazar Φ , α , δ , se encuentra:

$$q_1 = \alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3} \frac{\delta}{3} = \alpha + \frac{\delta}{L} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = -\left(\frac{\delta}{L} + \frac{5}{3} \frac{\delta}{3}\right) \frac{5}{3} = -\delta - \alpha L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = -\delta = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = -\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3} \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3} \frac{\delta}{3} = -\frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = -\Phi L = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = -2\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{5}{3} \frac{\delta}{3} = -\frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Por definición se tiene:

$$q_1 = F_{11} = \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL}$$

$$q_2 = F_{21} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_3 = F_{31} = -\frac{1}{EA}$$

$$q_4 = F_{41} = -\frac{1}{EAL} + \frac{L}{3EI}$$

$$q_5 = F_{51} = -\frac{1}{EA} - \frac{5L^2}{6EI}$$

$$q_6 = F_{61} = -\frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI}$$

Las restantes columnas de la matriz de flexibilidad F se obtienen en forma similar. Con el propósito de que el estudiante calcule cualquiera de las columnas de la matriz de flexibilidad a partir de su definición, se indica el resultado completo pero únicamente se presenta la matriz triangular superior debido a que la matriz es simétrica.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{4L}{3EI} + \frac{1}{EAL} & -\frac{1}{E} \frac{5L^2}{6EI} & -\frac{1}{EA} & -\frac{1}{EA} & -\frac{1}{EA} \frac{5L^2}{6EI} & -\frac{1}{EAL} - \frac{L}{6EI} \\ & \frac{2L}{EI} & \frac{L}{EA} & \frac{EAL}{3EI} & \frac{2L^3}{3EI} \frac{L}{EA} & \frac{L^2}{6EI} \frac{1}{EA} \\ & \frac{EI}{3} & \frac{L}{EA} & \frac{L^2}{EA} & \frac{L}{EA} & -\frac{1}{EA} \\ & \frac{3}{EI} & & \frac{3EI}{EA} & -\frac{L^2}{3EI} - \frac{1}{EA} & -\frac{L}{6EI} + \frac{1}{LEA} \\ & \frac{E}{A} & & & \frac{2L^3}{3EI} + \frac{2L}{EA} & \frac{L^2}{6EI} \frac{1}{EA} \\ & & & L & & \frac{L}{3EI} + \frac{1}{LEA} \\ & & & \frac{3EI}{LEA} & & \end{bmatrix}$$

8.2.3 Principio de superposición

Como se indicó la parte más difícil del cálculo de la matriz de flexibilidad de una estructura a partir de su definición es calcular los desplazamientos y giros q luego que se han obtenido las deformaciones p . Si se emplea el principio de superposición se puede hacer esto de una forma sencilla como se ilustra con el ejemplo 4.

• EJEMPLO 4

Encontrar la primera columna de la matriz de flexibilidad del ejemplo 3, aplicando el principio de superposición para calcular el vector de coordenadas q .

• SOLUCIÓN

Para el ejemplo que se está analizando se tiene:

$$\begin{array}{l} p_1^{(1)} = \alpha \\ p_2^{(1)} = -\alpha \\ p_3^{(1)} = -\delta \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha \\ p_2^{(2)} = \frac{\alpha}{3} \\ p_3^{(2)} = 0 \end{array}$$

En el cálculo del vector de coordenadas generalizadas q se consideran dos etapas, a saber:

Etapla 1.- Actúan sólo las deformaciones del elemento uno, por lo tanto se considera al elemento dos como totalmente rígido.

Etapla 2.- El elemento uno es totalmente rígido y sólo hay deformaciones en el miembro dos.

A los desplazamientos y giros de la etapa uno se los denomina $q^{(1)}$ y a los desplazamientos y giros de la etapa dos $q^{(2)}$. En consecuencia:

$$q = q^{(1)} + q^{(2)}$$

➤ **Etapa 1.-** En la figura 8.9.1 se presenta ésta fase del cálculo que consiste en tener deformaciones únicamente en el elemento vertical.

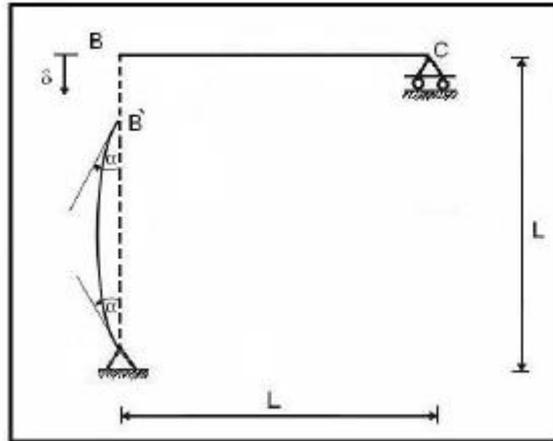


Figura 8.9.1 Únicamente se deforma elemento AB

Al igual que en el ejemplo anterior, en la figura 8.9.1 hay que rectificar dos errores que se tienen y son los siguientes:

- i) El nudo B es discontinuo.
- ii) El ángulo del nudo B antes de la deformación es diferente al obtenido después de la deformación.

Para corregir el primer error se desplaza el elemento BC una cantidad δ como lo indica la figura 8.9.2 y para solucionar el segundo error haciendo centro en B se rota el elemento BC una magnitud igual a α como lo ilustra la figura 8.9.3. Nótese que el punto C' se ha desplazado hasta C'' una cantidad αL .

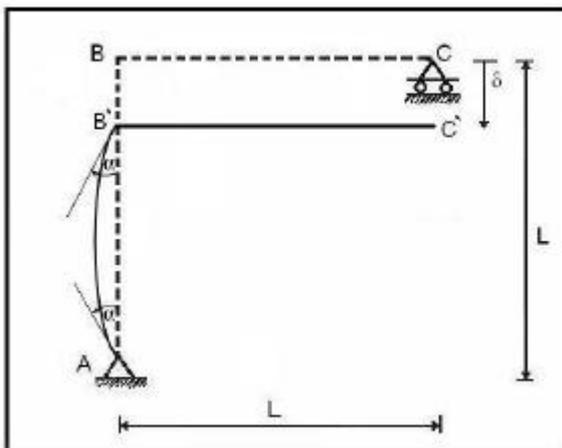


Figura 8.9.2

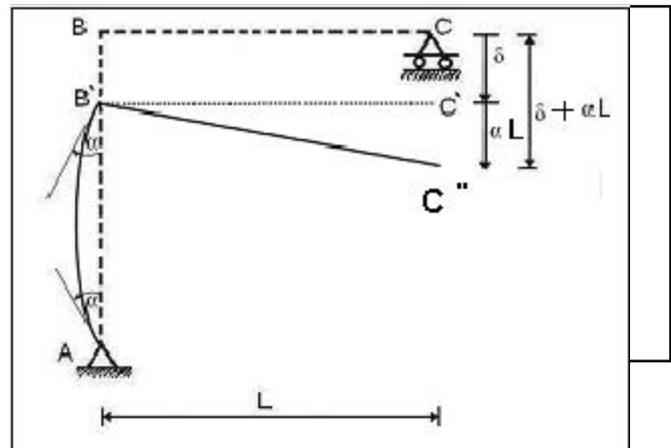


Figura 8.9.3

Pero la posición final del nudo C tiene que estar a lo largo de BC ya que no puede desplazarse verticalmente para lograr esto haciendo centro en el nudo A se rota la estructura un ángulo Φ_1 .

$$\Phi_1 = \frac{\delta + \alpha L}{L} = \frac{\delta}{L} + \alpha$$

Por lo tanto la ubicación final del nudo C al terminar ésta etapa es C''' como se indica en la figura 8.9.4.

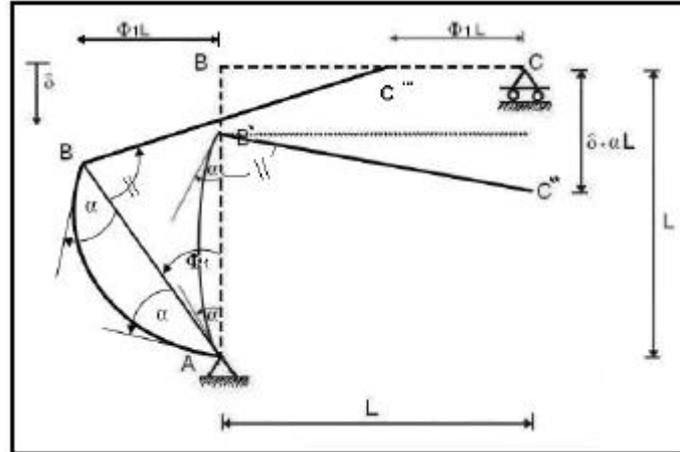


Figura 8.9.4 Fin de etapa uno

Por lo tanto los desplazamientos y giros encontrados en la etapa uno son:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \alpha + \Phi_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{L} \\ q_2^{(1)} &= -\Phi_1 L = -\delta - \alpha L \\ q_3^{(1)} &= -\delta \\ q_4^{(1)} &= -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L} \\ q_5^{(1)} &= -\Phi_1 L = -\delta - \alpha L \\ q_6^{(1)} &= -\alpha + \Phi_1 = \frac{\delta}{L} \end{aligned}$$

↳ **Etapa 2.-** En ésta etapa actúan las deformaciones en el elemento 2 ya que el miembro 1 se considera como elemento rígido, estas deformaciones iniciales se indican en la figura 8.10.1

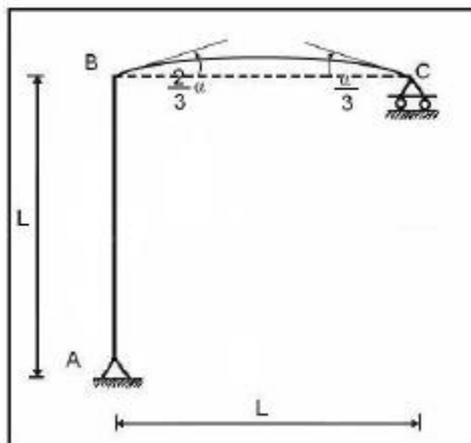


Figura 8.10.1 Sólo se deforma elemento BC.

El ángulo final del nudo B en la figura 8.9.1 se aprecia que es $90^\circ + \alpha \frac{2}{3}$. Esto no puede ser. Se deja al estudiante que justifique las figuras 8.10.2 y 8.10.3 con las cuales se corrige ésta anomalía.

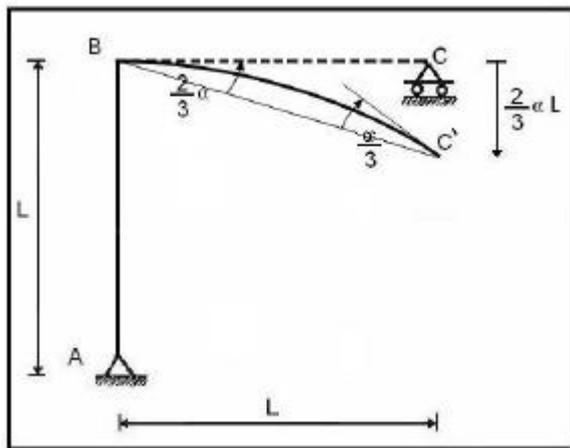


Figura 8.10.2

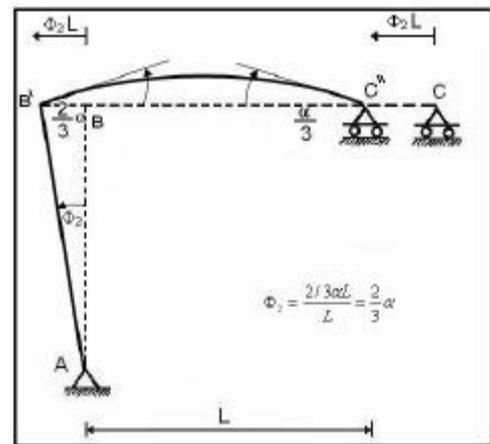


Figura 8.10.3

Luego de la geometría realizada se tiene:

$$q_1^{(2)} = \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_2^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha L$$

$$q_3^{(2)} = 0$$

$$q_4^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = \frac{2}{3}\alpha$$

$$q_5^{(2)} = -\Phi_2 L = -\frac{2}{3}\alpha L$$

$$q_6^{(2)} = -\frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \Phi_2 = -\frac{\alpha}{3}$$

Al sumar los desplazamientos y giros obtenidos en las dos etapas se tiene:

$$q = q^{(1)} + q^{(2)}$$

$$q_1 = 2\alpha + \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{8}{3}\alpha + \frac{\delta}{L}$$

$$q_2 = -\delta - \alpha \frac{2}{3} L = -\frac{5}{3}\alpha L - \delta$$

$$q_3 = -\delta + 0 = -\delta$$

$$q_4 = \frac{\delta}{L} + \frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{\delta}{L}$$

$$q_5 = -\delta - \alpha \frac{2}{3} L = -\frac{5}{3}\alpha L - \delta$$

$$q_6 = -\frac{\alpha}{3}$$

Al sustituir $\alpha = \frac{L}{2EI}$ y $\delta = \frac{I}{EA}$ se obtienen los valores de la primera columna de la matriz de flexibilidad anotados en el Ejemplo 3.

8.3 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UNA ESTRUCTURA

8.3.1 Cálculo de la matriz de rigidez y de flexibilidad

Conocida la matriz de rigidez K para un determinado sistema de coordenadas $Q - q$ de una estructura, se desea ahora calcular la matriz de rigidez K^* en otro sistema de coordenadas $Q^* - q^*$. Este cálculo se lo va a realizar utilizando la matriz de transformación de coordenadas.

• EJEMPLO 5

El pórtico plano de la figura 8.11.1 está compuesto por una columna de altura H y una viga de longitud L , los dos elementos se consideran axialmente rígidos y el sistema de coordenadas $Q - q$ es el indicado en la figura 8.11.2. La matriz de rigidez K asociado a éste sistema de coordenadas es la siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI_0}{H^3} & \frac{6EI_0}{H^2} & 0 \\ \frac{6EI_0}{H^2} & \frac{4EI_0 + 4EI_1}{HL} & \frac{2EI_1}{L} \\ 0 & \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} \end{bmatrix}$$

Se desea encontrar la matriz de rigidez K^* para el sistema de coordenadas $Q^* - q^*$ de la figura 8.10.3 por medio de la matriz de transformación de coordenadas T .

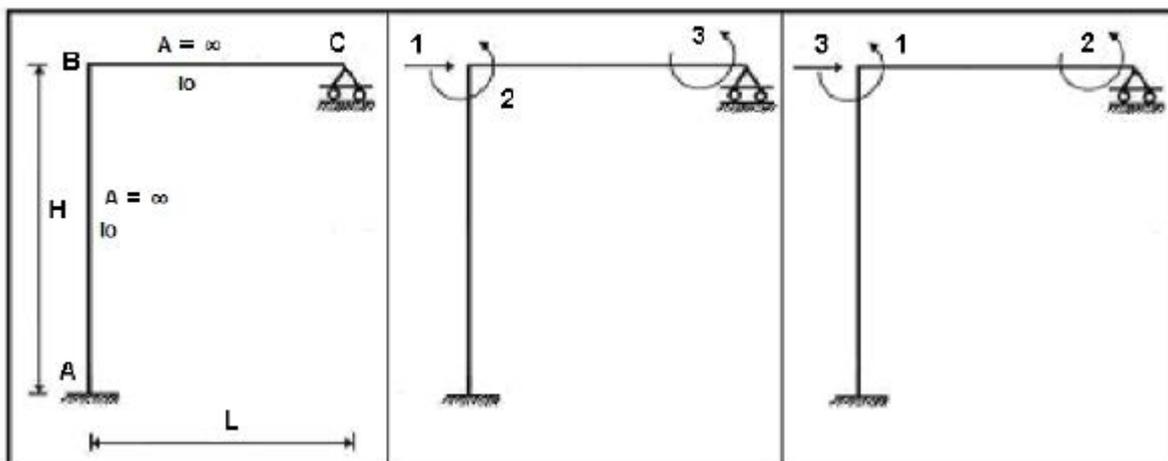


Figura 8.11.1

Figura 8.11.2 Sistema $Q - q$

Figura 8.11.3 Sistema $Q^* - q^*$

• SOLUCIÓN

Se establece una relación entre los dos sistemas de coordenadas de la siguiente manera:

$$q = T q^*$$

La relación así definida fue estudiada en el capítulo 5 por consiguiente el estudiante deberá dibujar cada una de las deformadas elementales y encontrar la siguiente matriz T .

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el Capítulo anterior se demostró que la matriz de rigidez de un elemento en otro sistema de coordenadas se obtiene con la siguiente ecuación:

$$k^* = T^t k T \tag{8.1}$$

La ecuación (8.1) que fue deducida para un elemento es aplicable a una estructura. Por lo tanto para hallar la matriz de rigidez de la estructura K^* (mayúscula) se utilizará la siguiente ecuación.

$$K^* = T^t K T$$

Para el ejemplo se tiene:

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI_o}{H^3} & \frac{6EI_o}{H^2} & 0 \\ \frac{6EI_o}{H^2} & \frac{4EI_o}{H} + \frac{4EI_1}{L} & \frac{2EI_1}{L} \\ 0 & \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez K^* para el sistema de coordenadas de la figura 8.11.3 es:

$$K = \frac{4}{E} \begin{bmatrix} H + L & 2 & \frac{2EI_1}{H^2} \\ *2EI_1 & L & \frac{4EI_1}{L} \\ \frac{6EI_o}{L} & - & 0 \end{bmatrix}$$

$$6EI_0 \left[\right.$$

|

|

$$\left. \begin{array}{c} 12EI_0 \\ H^3 \end{array} \right]$$

*

8.11.3, conocida la matriz de flexibilidad F para el sistema $Q - q$ de la figura 8.11.2, hay que hacerlo por medio de la matriz T_1 estudiada en el Capítulo 5.

$$Q = T_1 Q^*$$

La matriz de flexibilidad buscada se obtiene del siguiente triple producto matricial.

$$F^* = T_1^t F T_1$$

]

Si se desea calcular la matriz de flexibilidad F para el sistema de coordenadas de la figura

Se deja al lector la demostración de las formulas con las cuales se obtiene K^* y F^* en base a la teoría presentada en el Capítulo 5.

8.3.2 Regla práctica

Se puede obtener directamente la matriz de rigidez y de flexibilidad de una estructura cuyos elementos son totalmente flexibles, cuando se cambia el sistema de coordenadas generalizadas, por consiguiente no es necesario calcular las matrices T y T_1 respectivamente.

En efecto, para hallar K^* para el sistema de coordenadas $Q^* - q^*$ de la figura 8.11.3 a partir de la matriz K calculado para las coordenadas de la figura 8.11.2 se han de intercambiar las filas y columnas de ésta matriz de acuerdo al cambio de numeración del nuevo sistema de coordenadas.

La forma de pasar las coordenadas de la figura 8.11.2 a la 8.11.3 se presenta en dos fases a saber:

- 1) Se cambian la numeración de los dígitos uno y tres en el sistema $Q - q$ esto se presenta en la figura 8.11.4. Por lo tanto ahora q_1 es la rotación en el rodillo C y q_3 es el desplazamiento horizontal de la junta B.

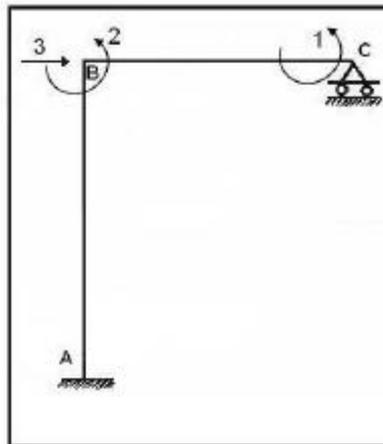


Figura 8.11.4 Sistema de coordenadas generalizadas de fase uno.

La matriz de rigidez para este nuevo sistema de coordenadas se obtiene intercambiando las columnas y las filas uno y tres de la matriz de rigidez, con lo que se halla:

$$K \text{ de la fase uno} = \begin{bmatrix} 4EI_1 & \frac{2EI_1}{L} & 0 \\ \frac{2EI_1}{L} & \frac{4EI_0}{HL} + \frac{4EI_1}{HL} & \frac{6EI_0}{H^2} \\ 0 & \frac{6EI_0}{H^2} & \frac{12EI_0}{H^3} \end{bmatrix}$$

- 2) Por último para pasar de las coordenadas de la figura 8.11.4 a las coordenadas de la figura 8.11.3 se intercambian los dígitos uno y dos. Por lo tanto en la matriz de rigidez de la fase uno se intercambian los elementos de la fila uno a la fila dos y luego los elementos de la columna uno a la columna dos, obteniendo de ésta manera la matriz K^* que ya fue presentada en el ejemplo anterior.

Un procedimiento similar se sigue para calcular la matriz de flexibilidad de una estructura en un nuevo sistema de coordenadas. El procedimiento de cálculo presentado es muy fácil programarlo.

8.4 EJERCICIOS RESUELTOS

En los ejercicios que se van a resolver en éste capítulo al igual que en el próximo, el lector deberá justificar cada uno de los pasos dados, toda vez que ya se han indicado la teoría respectiva.

• EJEMPLO 6

Obtener directamente a partir de su definición los elementos de la **segunda columna** de la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la figura 8.12.1, las vigas son totalmente rígidas y las columnas son axialmente rígidas. Todas las columnas tienen la misma sección transversal y longitud.

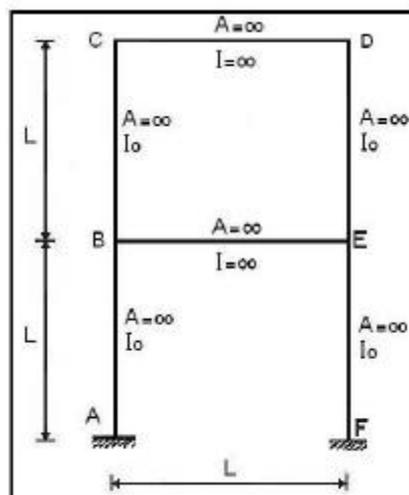


Figura 8.12.1 Estructura de Ejemplos 6 y 7.

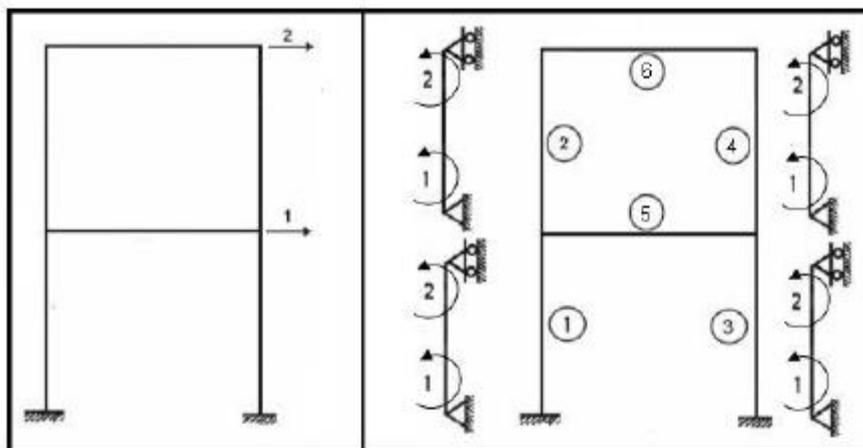


Figura 8.12.2 Sistema $Q - q$

Figura 8.12.3 Sistema $P - p$

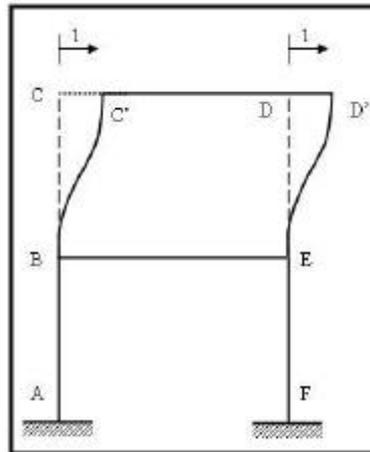
• SOLUCIÓN

La estructura tiene dos grados de libertad que son los desplazamientos horizontales de cada uno de los pisos. Estos grados de libertad se indican en la figura 8.12.2. Por ser los elementos verticales axialmente rígidos no existe deformación axial luego hay dos coordenadas en el sistema $P - p$ de

cada columna. En la figura 8.12.3 se muestra el sistema de coordenadas de los elementos de la estructura analizada y la numeración de los elementos. Nótese que no existe sistema $P - p$ en los elementos horizontales esto se debe a que son elementos completamente rígidos.

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.1.2 se construye la deformada elemental q_2 ya que se va a encontrar los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez.

- $q_2 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 2$



Deformada elemental q_2

$$\begin{array}{cccc} p_1^{(1)} = 0 & p_1^{(2)} = \frac{1}{L} & p_1^{(3)} = 0 & p_1^{(4)} = \frac{1}{L} \\ p_2^{(1)} = 0 & p_2^{(2)} = \frac{1}{L} & p_2^{(3)} = 0 & p_2^{(4)} = \frac{1}{L} \end{array}$$

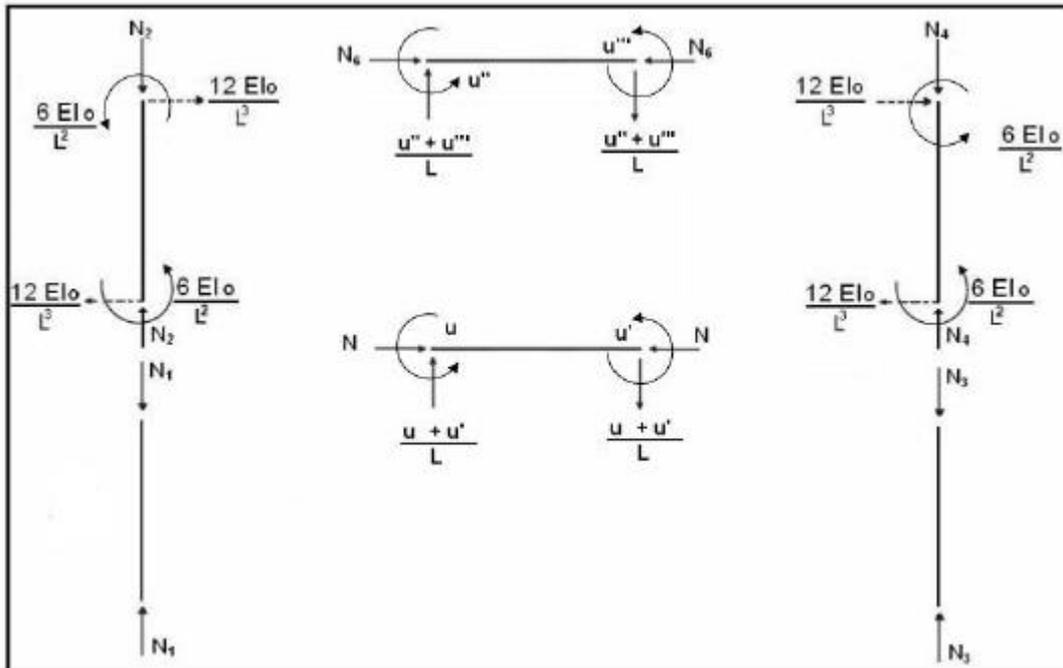
- Cargas Internas $P = k p$. Únicamente los elementos dos y cuatro tienen deformaciones.

$$P^{(2)} = P^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_0}{L} & -\frac{2EI_0}{L} \\ \frac{2EI_0}{L} & -\frac{4EI_0}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6EI_0}{L^2} \\ -\frac{6EI_0}{L^2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

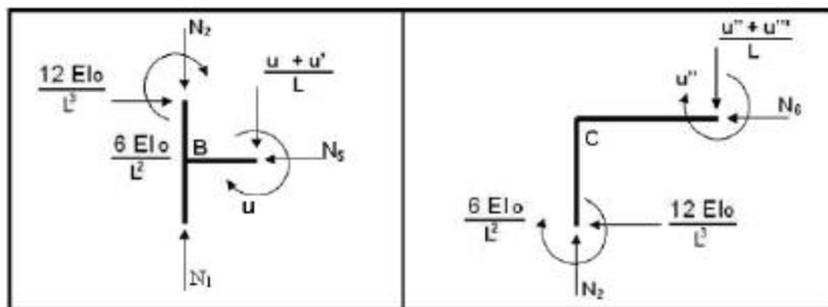
$$\begin{array}{cccc} P_1^{(1)} = 0 & P_1^{(2)} = \frac{6EI_0}{L^2} & P_1^{(3)} = 0 & P_1^{(4)} = \frac{6EI_0}{L^2} \\ P_2^{(1)} = 0 & P_2^{(2)} = \frac{6EI_0}{L^2} & P_2^{(3)} = 0 & P_2^{(4)} = \frac{6EI_0}{L^2} \end{array}$$

- Equilibrio de elementos



Equilibrio de los elementos

- Equilibrio de Juntas



Junta B

Junta C

- Junta B

$$\sum F_x = 0 = \frac{12EI_0}{L^3} - N_5$$

$$\sum F_y = 0 = N_1 - N_2 - \frac{u + u'}{L}$$

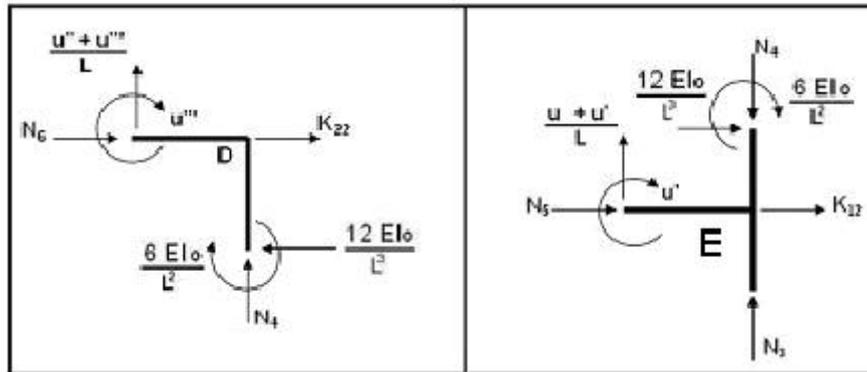
$$\sum M = 0 = \frac{6EI_0}{L^2} + u$$

○ Junta C

$$\sum F_x = 0 = N_6 + \frac{12EI_0}{L^3}$$

$$\sum F_y = 0 = N_2 - \frac{u''}{L} + u'''$$

$$\sum M = 0 = u + \frac{6EI_0}{-L^2}$$



Junta D

Junta E

○ Junta D

$$\sum F_x = 0 = K_{22} + N_6 - \frac{12EI_0}{L^3}$$

$$\sum F_y = 0 = N_4 + \frac{u''}{L} + u'''$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_0}{L^2} + u'''$$

○ Junta E

$$\sum F_x = 0 = \frac{12EI_0}{L^3} + N_5 + K_{12}$$

$$\sum F_y = 0 = N_3 - N_4 + \frac{u + u'}{L}$$

$$\sum M = 0 = \frac{6EI_0}{-L^2} + u$$

Al resolver las 12 ecuaciones con 12 incógnitas que se han presentado, se encuentra:

$$N_1 = -\frac{24EI_0}{L^3}$$

$$N_2 = -\frac{12EI_0}{L^3}$$

$$N_3 = \frac{24EI_0}{L^3}$$

$$N_4 = \frac{12EI_0}{L^3}$$

$$N_5 = \frac{12EI_0}{L^3}$$

$$N_6 = -\frac{12EI_0}{L^3}$$

$$u = -\frac{6EI_0}{L^2}$$

$$u' = -\frac{6EI_0}{L^2}$$

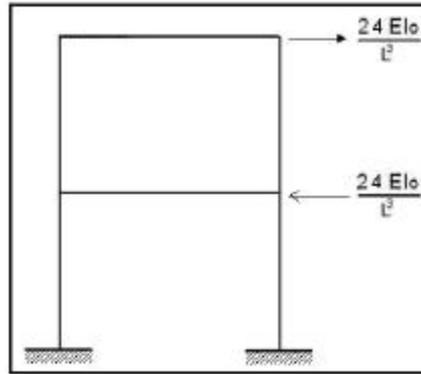
$$u'' = -\frac{6EI_0}{L^2}$$

$$u''' = -\frac{6EI_0}{L^2}$$

$$K_{12} = -\frac{24EI_0}{L^3}$$

$$K_{22} = \frac{24EI_0}{L^3}$$

- Fuerzas exteriores



Elementos de la segunda columna de K

De ésta manera se ha obtenido los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez a partir de su definición, se deja al estudiante el obtener los elementos de la primera columna de K . El resultado completo es:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{48EI_0}{L^3} & -\frac{24EI_0}{L^3} \\ -\frac{24EI_0}{L^3} & \frac{24EI_0}{L^3} \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 7

Encontrar a partir de su definición los elementos de la segunda columna de la matriz de flexibilidad de la estructura presentada en la figura 8.12.1

• SOLUCIÓN

De acuerdo al procedimiento de cálculo indicado en el apartado 8.2.2 se tiene:

- $Q_2 = 1$ y $Q_i = 0$ $i \neq 2$

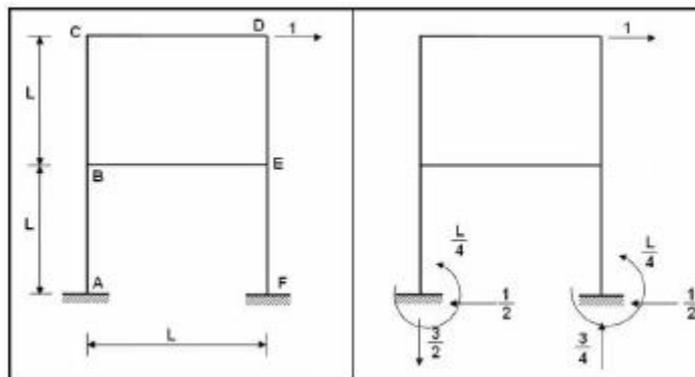


Figura 8.13.1 Fuerza unitaria. Figura 8.13.2 Equilibrio de estructura.

- Equilibrio de elementos

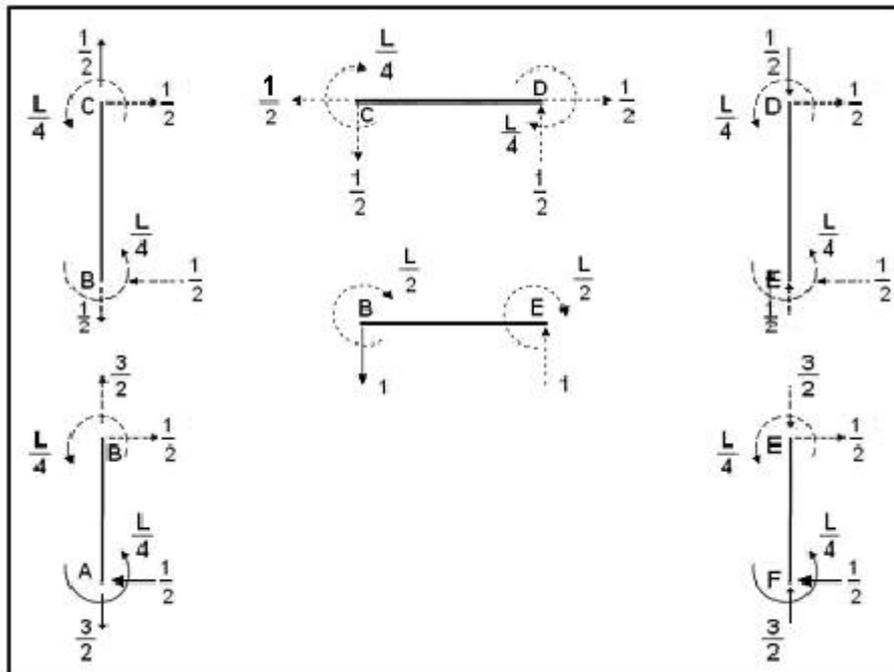


Figura 8.13.3 Fuerzas internas

Por consiguiente:

$$\begin{array}{cccc}
 P_1^{(1)} = \frac{L}{4} & P_1^{(2)} = \frac{L}{4} & P_1^{(3)} = \frac{L}{4} & P_1^{(4)} = \frac{L}{4} \\
 P_2^{(1)} = \frac{L}{4} & P_2^{(2)} = \frac{L}{4} & P_2^{(3)} = \frac{L}{4} & P_2^{(4)} = \frac{L}{4}
 \end{array}$$

- Cálculo de las deformaciones

$$f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f^{(4)} = -\frac{L}{6EI_o} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p = f P$$

$$\begin{array}{cccc}
 p_1^{(1)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_1^{(2)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_1^{(3)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_1^{(4)} = -\frac{L^2}{24EI_o} \\
 p_2^{(1)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_2^{(2)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_2^{(3)} = -\frac{L^2}{24EI_o} & p_2^{(4)} = -\frac{L^2}{24EI_o}
 \end{array}$$

- Cálculo del vector q

Se denomina $\alpha = -\frac{L^2}{24EI_o}$. Por lo tanto las deformaciones a flexión en cada uno de los elementos valen α toda vez que tienen ese valor.

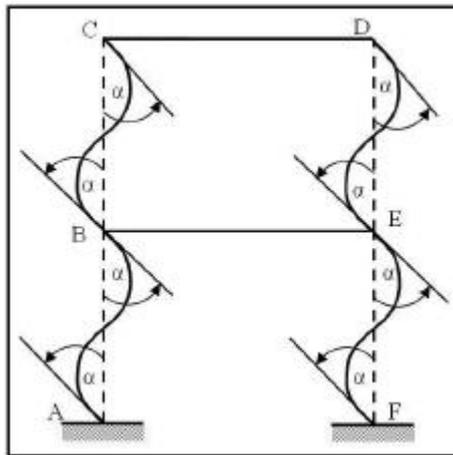


Figura 8.13.4 Deformaciones obtenidas

La estructura de la figura 8.13.4 no cumple con la geometría de deformación, para esto se procede de la siguiente forma:

- i) El nudo D se desplaza verticalmente una magnitud igual a αL como lo indica la figura 8.13.5 de esa manera las vigas giran un ángulo α y ya cumplen con el principio de Williot. Pero el nudo F se ha desplazado a F'. En consecuencia se solucionó un problema pero se creó otro y para solucionarlo se da el siguiente paso.
- ii) Con centro en el nudo A, se rota a la estructura en sentido horario un ángulo α como lo ilustra la figura 8.13.6.

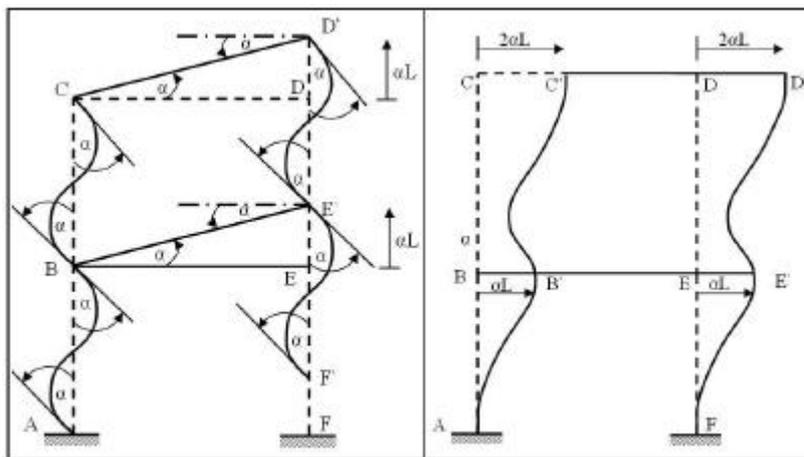


Figura 8.13.5

Figura 8.13.6

De la figura 8.13.6 se tiene:

$$q_1 = \alpha L = \frac{L^3}{24EI_o}$$

$$q_2 = 2\alpha L = \frac{L^3}{12EI_o}$$

Pero

$$q_1 = F_{12} = \frac{L^3}{24EI_o}$$

$$q_2 = F_{22} = \frac{L^3}{12EI_o}$$

- **EJEMPLO 8**

Si en conexión con el Ejemplo 6, la matriz T define una transformación de coordenadas de la forma $q = T q^*$. Interpretar las nuevas coordenadas $Q - q$ y encontrar la matriz de rigidez usando la ley de transformación de coordenadas de éste nuevo sistema.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN**

$$q = T q^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}$$

$$q_1 = 1 \cdot q_1^* + 0 \cdot q_2^* = q_1^*$$

$$q_2 = 1 \cdot q_1^* + 1 \cdot q_2^* = q_1^* + q_2^*$$

De donde:

$$q_1^* = q_1$$

$$q_2^* = q_2 - q_1$$

Por lo tanto las coordenadas q^* miden desplazamientos relativos.

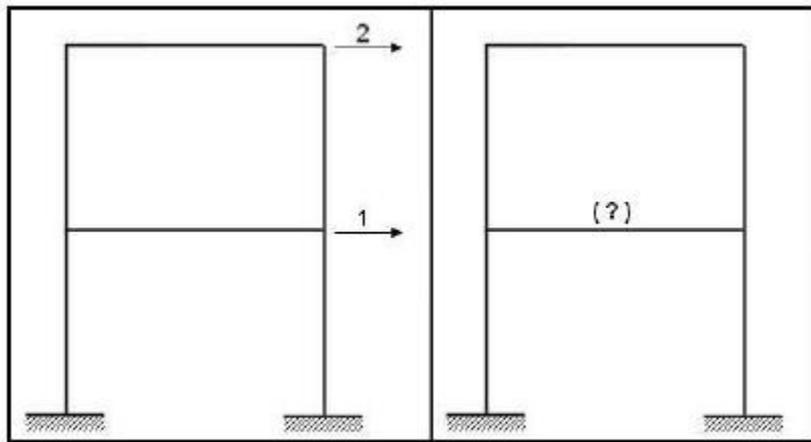


Figura 8.14.1 Sistema $Q - q$

Figura 8.14.2 Sistema $Q^* - q^*$

- Cálculo de K^*

$$K^* = T^t K T$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{48EI_0}{L^3} & -\frac{24EI_0}{L^3} \\ 24EI_0 & -\frac{24EI_0}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \frac{24EI_o}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 9**

La matriz de flexibilidad \mathbf{F} para la estructura del Ejemplo 7 es:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} L^3 & L^3 \\ -\frac{24EI_o}{24EI_o} & -\frac{24EI_o}{12EI_o} \\ \frac{24EI_o}{24EI_o} & \frac{L^3}{12EI_o} \end{bmatrix}$$

En este caso el sistema de coordenadas $\mathbf{Q} - \mathbf{q}$ es el presentado en la figura 8.14.1. Se pide calcular la matriz de flexibilidad \mathbf{F}^* para el sistema de coordenadas de la figura 8.15, utilizando la regla práctica.

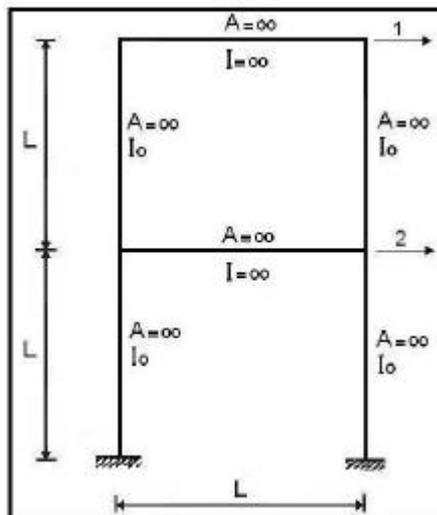


Figura 8.15 Coordenadas generalizadas del Ejemplo 9

- SOLUCIÓN**

Se cambia la fila uno a la fila dos.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} L^3 & L^3 \\ -\frac{24EI_o}{12EI_o} & -\frac{24EI_o}{24EI_o} \\ \frac{24EI_o}{24EI_o} & \frac{L^3}{12EI_o} \end{bmatrix}$$

Finalmente se cambia la columna uno por la columna dos.

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI} & \frac{L^3}{24EI_0} \\ \frac{L^3}{24EI_0} & \frac{L^3}{24EI_0} \end{bmatrix}$$

8.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio N.- 1

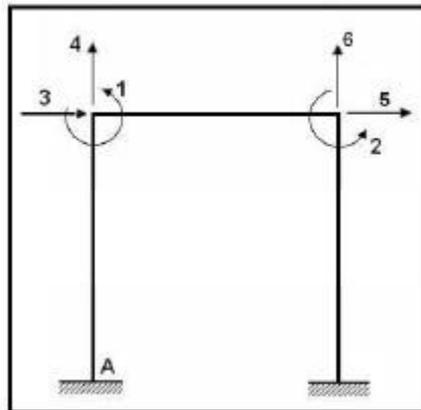
Encontrar la matriz de rigidez utilizando el concepto, de la estructura del Ejemplo 8, empleando las coordenadas $Q^* - q^*$.

Ejercicio N.- 2

Generar directamente de su definición los términos de la primera columna de la matriz de flexibilidad de la estructura mostrada en la figura 8.12.1

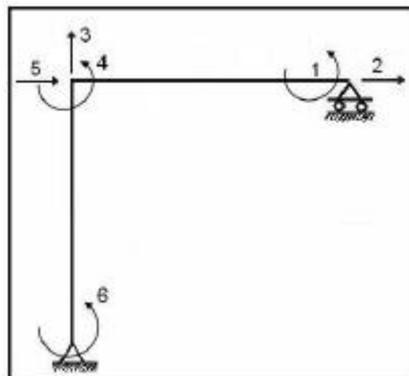
Ejercicio N.- 3

Calcular la matriz de rigidez para el pórtico de la figura 8.2 empleando la transformación de coordenadas. Si el nuevo sistema de coordenadas es:



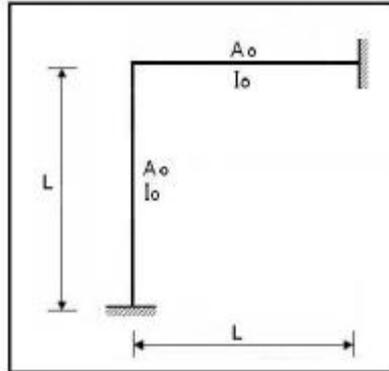
Ejercicio N.- 4

Para la estructura de la figura 8.6 obtener la matriz de flexibilidad si el sistema de coordenadas generalizadas es el mostrado a continuación. Utilice la regla práctica.

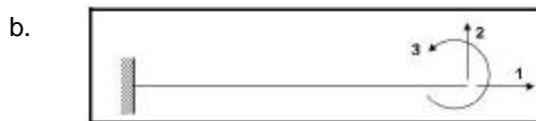
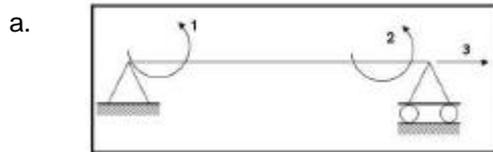


Ejercicio N.- 5

Hallar la matriz de rigidez usando el concepto del siguiente pórtico plano.



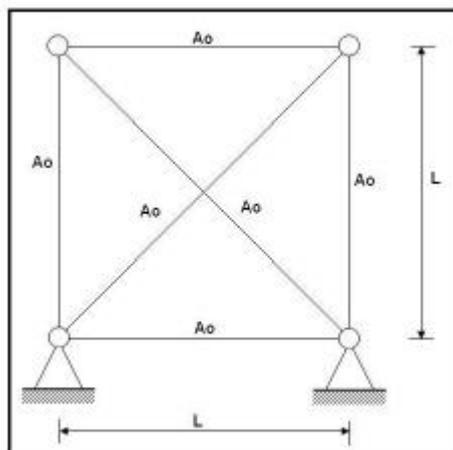
Emplear como sistemas de coordenadas del elemento:



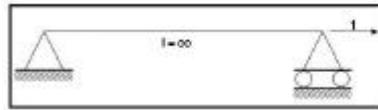
c. Sistema a. para elemento vertical y sistema b. para elemento horizontal.

Ejercicio N.- 6

Obtener la matriz de rigidez para la armadura presentada.



Usar como sistema de coordenadas del elemento el siguiente:



Sistema P-p

CAPITULO 9

MATRICES A y B

RESUMEN

Se presenta el cálculo de las matrices A y B las mismas que sirven para obtener las matrices de rigidez K y de flexibilidad F de estructuras. En éste capítulo se trabaja con pórticos planos y armaduras planas.

La matriz B se obtiene únicamente en estructuras isostáticas. Por ser muy importante su estudio se resuelven 11 ejemplos del cálculo de las matrices A y B .

9.1 RELACIÓN ENTRE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

9.1.1 Introducción

En el capítulo anterior la numeración de las deformaciones que experimentan los elementos de una estructura se realizó utilizando un subíndice para indicar el número del elemento. Ahora se va a omitir éste subíndice y se tendrá por ejemplo que el sistema de coordenadas $P - p$ para la estructura presentada a la izquierda de la figura 9.1, es el que aparece en la parte central.

Es decir que la numeración del sistema $P - p$ se lo hará de corrido, se entiende que las tres primeras deformaciones corresponden al elemento AB, las tres subsiguientes (4,5 y 6) al elemento BC y las tres últimas (7,8 y 9) al elemento CD. En éste caso por ser los elementos totalmente flexibles se tienen tres coordenadas por elemento. Es necesario recordar que el sistema $P - p$ con el cual se trabaja es arbitrario, el que más se utiliza es el indicado en la parte central de la figura 9.1

A la derecha de la figura 9.1, se indica el sistema de coordenadas $Q - q$ para el pórtico analizado. Se quiere establecer una relación entre los desplazamientos q y las deformaciones p . Esto se lo consigue por medio de la matriz A , definida de la siguiente manera:

$$p = A q \quad (10.1)$$

Donde A es la matriz de compatibilidad que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, en general será de orden $m \times n$. Siendo m el número de filas que es igual a las coordenadas p y n el número de columnas que es igual a las coordenadas q .

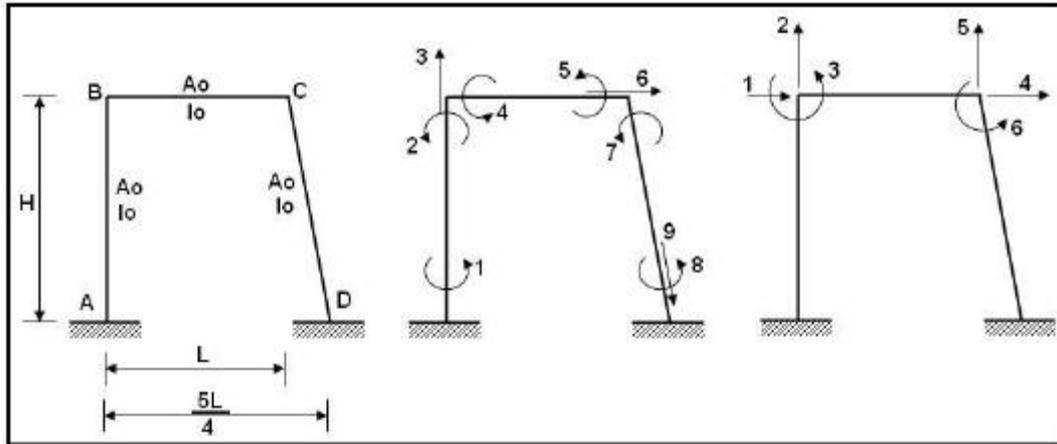


Figura 9.1 Estructura, sistema $P - p$; y sistema $Q - q$

De la definición de la matriz A se puede ver que un término A_{ij} no es más que el valor de la deformación p_i correspondiente a la deformada elemental $q_j = 1$ y las demás nulas. En consecuencia se obtiene utilizando exclusivamente la geometría de deformación. Finalmente cada elemento A_{ij} representa el coeficiente de influencia de las deformaciones para los desplazamientos.

9.1.2 Definición

Cuando la matriz A se determina usando solo la geometría se dice que el sistema es *cinemáticamente determinado*.

9.1.3 Matriz fuerza carga A^t

Si $p = A q$ se puede demostrar utilizando el principio de los trabajos virtuales que $Q = A^t P$. Donde A^t es la matriz transpuesta de A que relaciona las cargas internas P con el vector de cargas generalizadas Q .

Otra forma de demostrar es igualando la energía de deformación externa con la energía de deformación interna. En efecto se tiene:

$$\diamond \text{ Energía de deformación externa} = \frac{1}{2} q^t Q$$

$$\diamond \text{ Energía de deformación interna} = \frac{1}{2} p^t P$$

$$\text{Por lo tanto: } q^t Q = p^t P$$

$$\text{Pero } p = A q \quad \Rightarrow \quad q^t Q = (A q)^t P$$

$$\text{De donde: } q^t Q = q^t A^t P \quad \Rightarrow \quad Q = A^t P$$

9.2 CÁLCULO DE LA MATRIZ A

9.2.1 Pórticos Planos

La matriz A sirve para encontrar la matriz de rigidez de una estructura, con este objetivo el sistema de coordenadas de elemento que más se emplea es el presentado a la izquierda de la figura 9.2 para un elemento totalmente flexible.

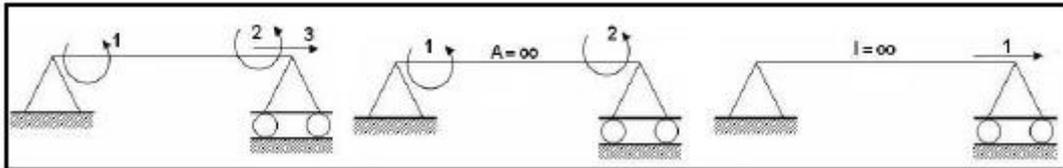


Figura 9.2 Sistema de coordenadas para un elemento totalmente flexible, axialmente rígido y transversalmente rígido

Si el elemento es axialmente rígido se tiene las coordenadas, indicadas en la gráfica central de la figura 9.2 y si el elemento es transversalmente rígido las coordenadas indicadas a la derecha de la figura 9.2. Las ecuaciones con las cuales se calcula las deformaciones para un elemento totalmente flexible son:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

En éste apartado se desarrollan tres ejercicios en los cuales se usa las coordenadas indicadas pero se puede calcular la matriz A empleando cualquier sistema de coordenadas $P - p$ como se ilustra en el apartado 9.2.3.

• EJEMPLO 1

Hallar la matriz de compatibilidad de deformaciones A de la estructura de la figura 9.3 compuesta por elementos totalmente flexibles.

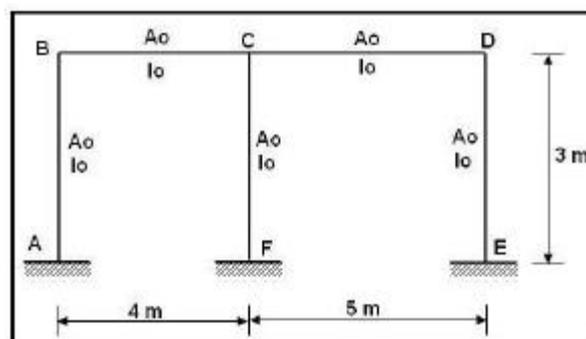


Figura 9.3 Estructura con elementos totalmente flexibles.

• SOLUCIÓN

En la figura 9.4 se indica el sistema de coordenadas de la estructura, existen 3 grados de libertad por nudo, que son las componentes de desplazamiento horizontal, vertical y la rotación.

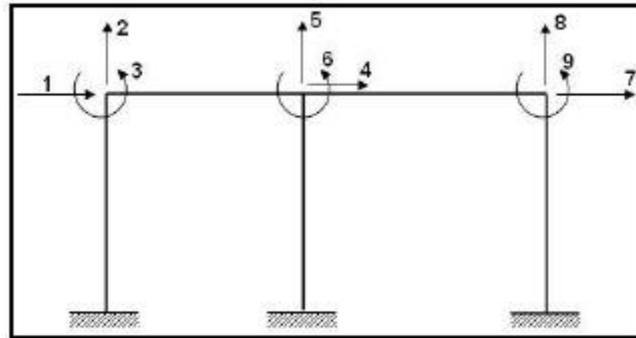


Figura 9.4 Sistema $Q - q$

En la figura 9.5 se presenta el sistema de coordenadas de los elementos, se ha considerado que el nudo inicial para las columnas se encuentra en la parte inferior y para la vigas a la izquierda del elemento.

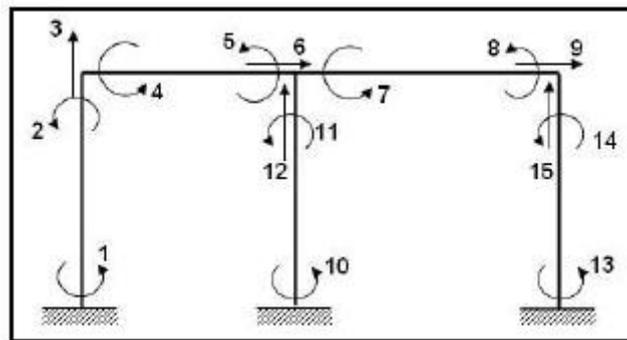
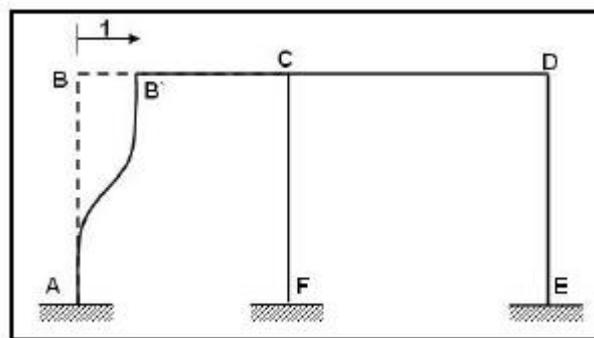


Figura 9.5 Sistema $P - p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

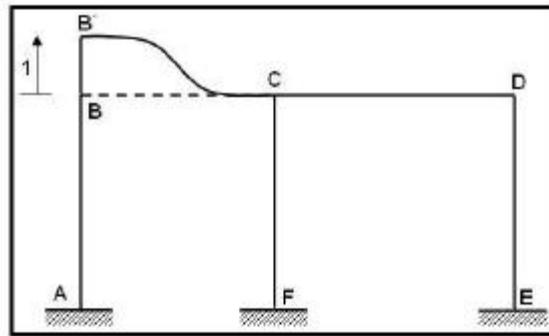


Deformada elemental q_1

$p_1 = \frac{1}{3}$	$p_4 = 0$	$p_7 = 0$	$p_{10} = 0$	$p_{13} = 0$
$p_2 = \frac{1}{3}$	$p_5 = 0$	$p_8 = 0$	$p_{11} = 0$	$p_{14} = 0$
$p_3 = 0$	$p_6 = -1$	$p_9 = 0$	$p_{12} = 0$	$p_{15} = 0$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 2$$

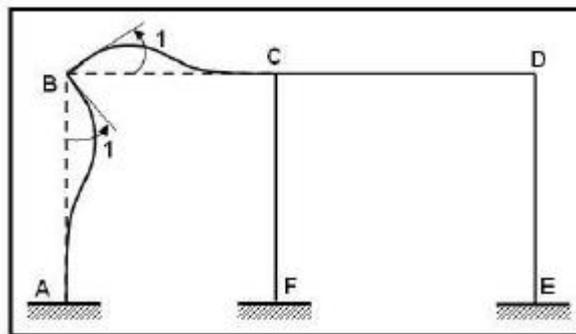


Deformada elemental q_2

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = \frac{1}{4} & p_7 = 0 & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\ p_2 = 0 & p_5 = \frac{1}{4} & p_8 = 0 & p_{11} = 0 & p_{14} = 0 \\ p_3 = 1 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0 \end{matrix}$$

- Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$

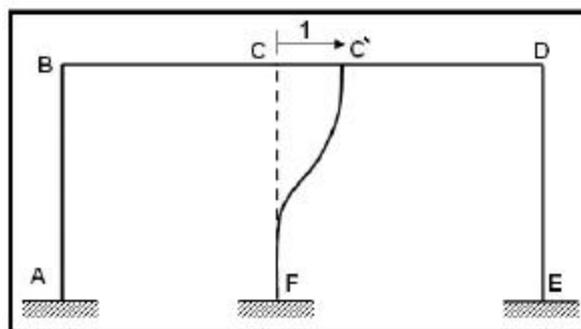


Deformada elemental q_3

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = 1 & p_7 = 0 & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\ p_2 = 1 & p_5 = 0 & p_8 = 0 & p_{11} = 0 & p_{14} = 0 \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0 \end{matrix}$$

- Cuarta columna de A

$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$

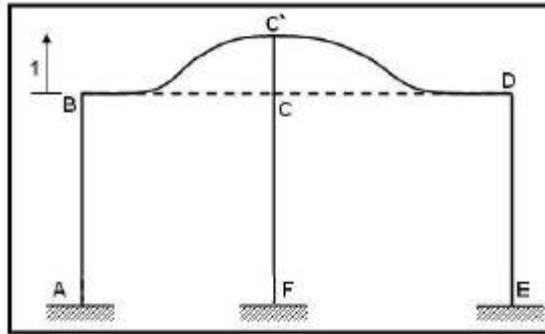


Deformada elemental q_4

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 0 & p_{10} = \frac{1}{3} & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_5 = 0 & p_8 = 0 & p_{11} = \frac{1}{3} & p_{14} = 0 \\
 p_3 = 0 & p_6 = 1 & p_9 = -1 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0
 \end{array}$$

- Quinta columna de A

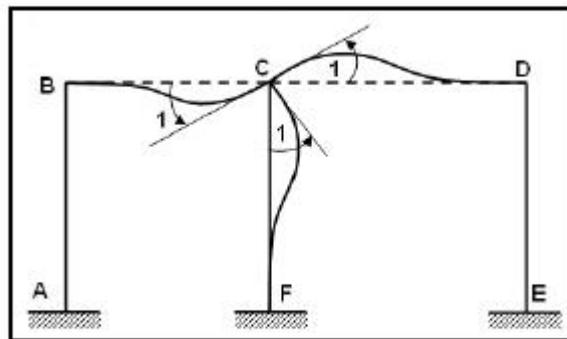
$$q_5 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 5$$

Deformada elemental q_5

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1 = 0 & p_4 = -\frac{1}{4} & p_7 = \frac{1}{5} & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_5 = -\frac{1}{4} & p_8 = \frac{1}{5} & p_{11} = 0 & p_{14} = 0 \\
 p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 1 & p_{15} = 0
 \end{array}$$

- Sexta columna de A

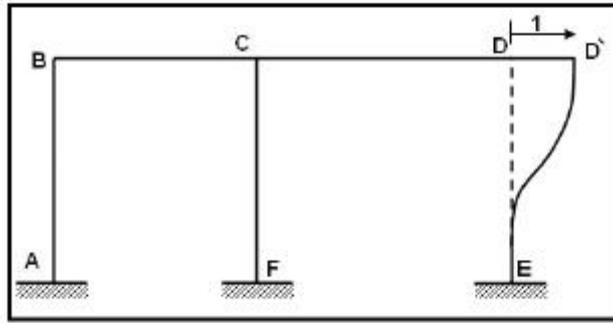
$$q_6 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 6$$

Deformada elemental q_6

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 1 & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_5 = 1 & p_8 = 0 & p_{11} = 1 & p_{14} = 0 \\
 p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0
 \end{array}$$

- Séptima columna de A

$$q_7 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 7$$

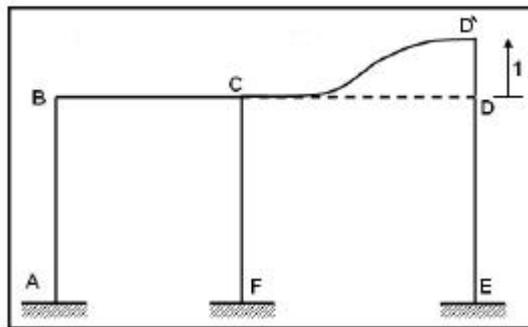


Deformada elemental q_7

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 0 & p_{10} = 0 & p_{13} = \frac{1}{3} \\ p_2 = 0 & p_5 = 0 & p_8 = 0 & p_{11} = 0 & p_{14} = \frac{1}{3} \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 1 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0 \end{matrix}$$

- Octava columna de A

$$q_8 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 8$$

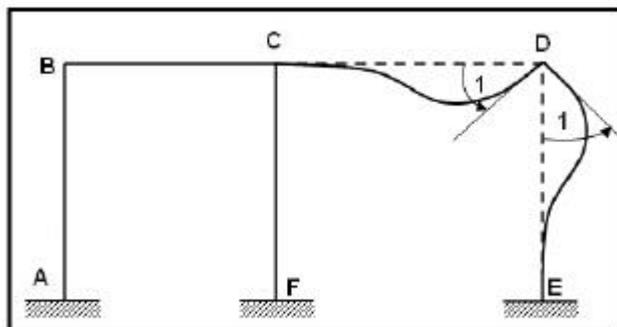


Deformada elemental q_8

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = -\frac{1}{5} & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\ p_2 = 0 & p_5 = 0 & p_8 = -\frac{1}{5} & p_{11} = 0 & p_{14} = 0 \\ p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 1 \end{matrix}$$

- Novena columna de A

$$q_9 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 9$$



Deformada elemental q_9

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1 = 0 & p_4 = 0 & p_7 = 0 & p_{10} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_5 = 0 & p_8 = 1 & p_{11} = 0 & p_{14} = 1 \\
 p_3 = 0 & p_6 = 0 & p_9 = 0 & p_{12} = 0 & p_{15} = 0
 \end{array}$$

Por lo tanto la matriz A resulta:

$$A = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

La matriz A es particionada. En efecto para la estructura que se está analizando las tres primeras columnas corresponden a las deformaciones del elemento 1, que viene a ser la columna izquierda, las tres restantes al elemento 2 que corresponde a la viga izquierda, etc.

Para encontrar la matriz de rigidez usando el concepto, se encontraba en primer lugar el diagrama elemental q_i , luego se hallaban las deformaciones del elemento. Estos dos pasos se realizan

por medio de la matriz A , de tal forma que la indicada matriz sirve para encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

• EJEMPLO 2

Para la estructura de la figura 9.6 Se pide:

- i) Seleccionar un sistema de coordenadas $Q - q$ apropiado.
- ii) Seleccionar un sistema de coordenadas $P - p$ apropiado.
- iii) Calcular la matriz A .

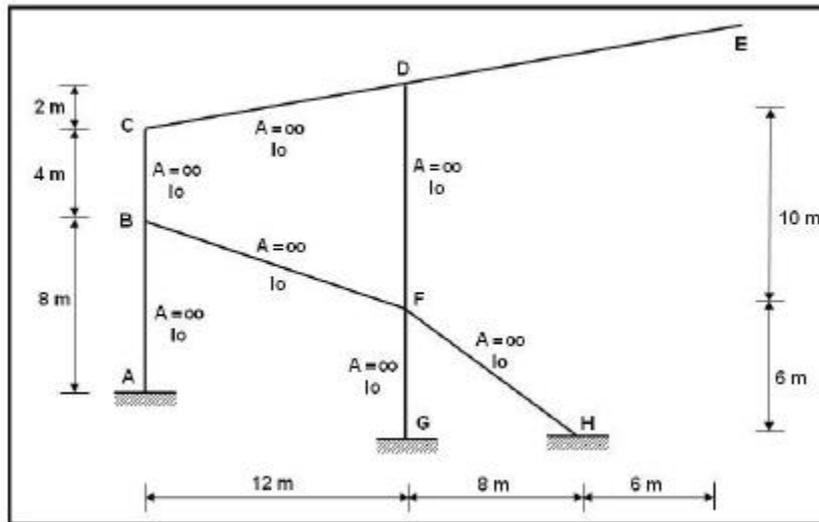


Figura 9.6 Estructura de ejemplo 2.

• SOLUCIÓN

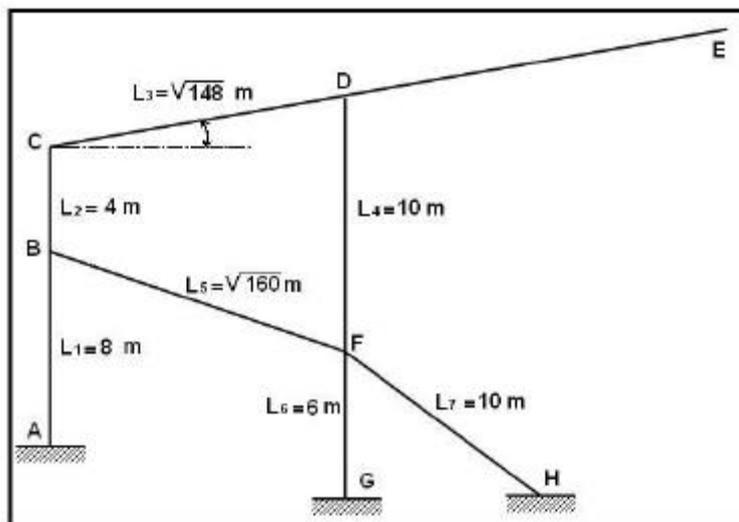


Figura 9.7 Parámetros geométricos

$$\text{sen}\alpha = \frac{2}{148} \quad \text{cos}\alpha = \frac{12}{148} \quad \text{tg}\alpha = \frac{1}{6}$$

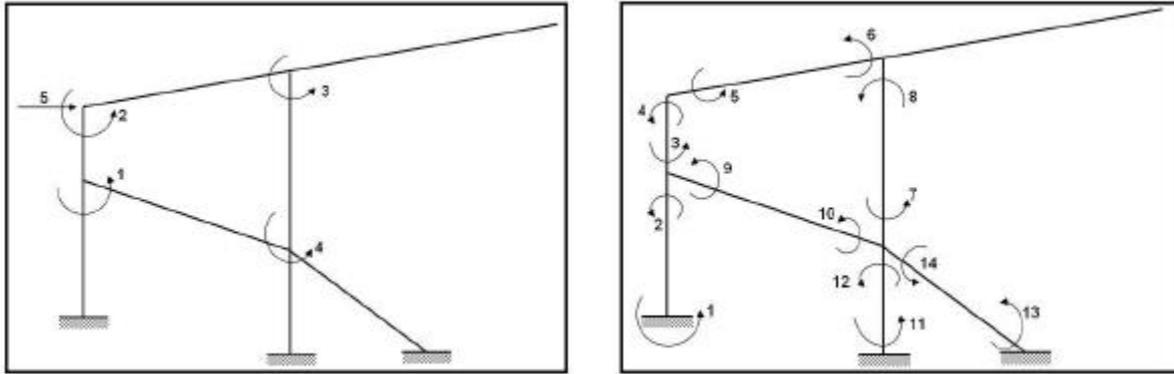
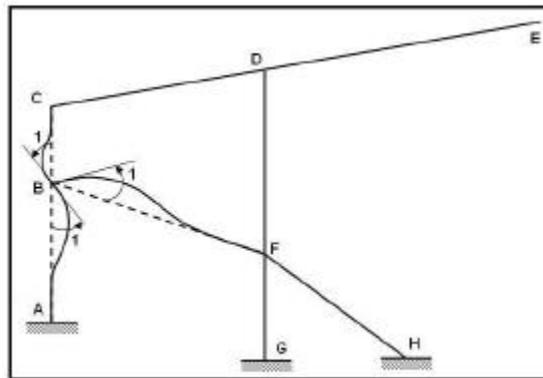


Figura 9.8 Sistema de coordenadas $q - q$ y sistema $P - p$

Nótese que no se consideran grados de libertad en el voladizo. Esta es una forma de resolver el problema. Las cargas que gravitan en los voladizos se los calculan aparte como que están empotrados y las reacciones de empotramiento se colocan con sentido contrario en la junta y se elimina el voladizo.

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

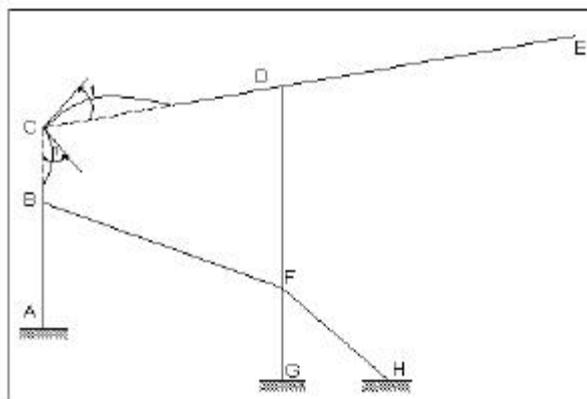


Deformada elemental q_1

$$\begin{matrix} p_1 = 0 & p_3 = 1 & p_5 = 0 & p_7 = 0 & p_9 = 1 & p_{11} = 0 & p_{13} = 0 \\ p_2 = 1 & p_4 = 0 & p_6 = 0 & p_8 = 0 & p_{10} = 0 & p_{12} = 0 & p_{14} = 0 \end{matrix}$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

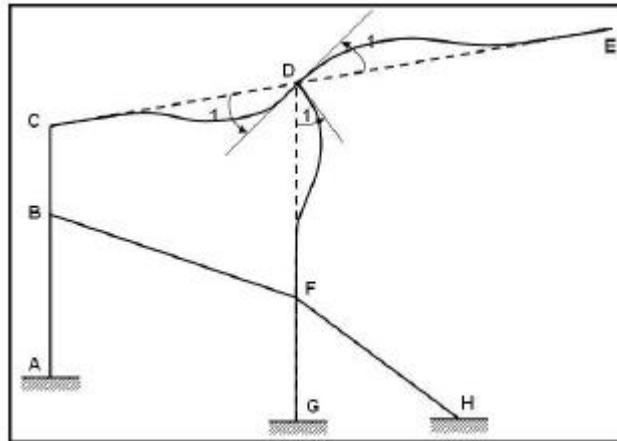


Deformada elemental q_2

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_1 = 0 & p_3 = 0 & p_5 = 1 & p_7 = 0 & p_9 = 0 & p_{11} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_4 = 1 & p_6 = 0 & p_8 = 0 & p_{10} = 0 & p_{12} = 0 & p_{14} = 0
 \end{array}$$

- Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$

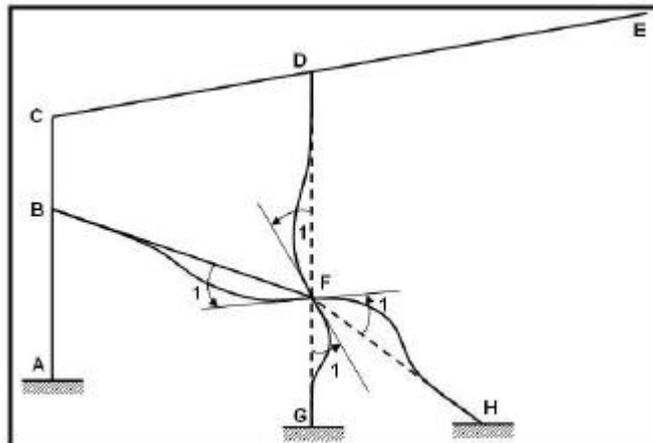


Deformada elemental q_3

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_1 = 0 & p_3 = 0 & p_5 = 0 & p_7 = 0 & p_9 = 0 & p_{11} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_4 = 0 & p_6 = 1 & p_8 = 1 & p_{10} = 0 & p_{12} = 0 & p_{14} = 0
 \end{array}$$

- Cuarta columna de A

$$q_4 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$

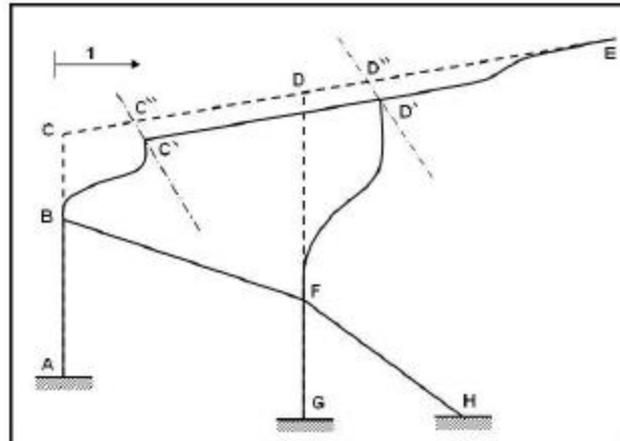


Deformada elemental q_4

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_1 = 0 & p_3 = 0 & p_5 = 0 & p_7 = 1 & p_9 = 0 & p_{11} = 0 & p_{13} = 0 \\
 p_2 = 0 & p_4 = 0 & p_6 = 0 & p_8 = 0 & p_{10} = 1 & p_{12} = 1 & p_{14} = 1
 \end{array}$$

- Quinta columna de A

$$q_5 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 5$$

Deformada elemental q_5

Para las deformaciones del elemento CD, se observa en el triángulo $CC'C''$

$$u_1 = \cos\alpha = -\frac{12}{148} \quad v_1 = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{148}$$

Triángulo $CC'C''$ es igual al triángulo $DD'D''$. Luego:

$$u_2 = \cos\alpha = -\frac{12}{148} \quad v_2 = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{148}$$

El elemento CD no se deforma a flexión luego $p_5 = p_6 = 0$. Las deformaciones del elemento DF es igual al desplazamiento horizontal DD' que vale la unidad sobre la longitud que es de 10 m.

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 = 0 & p_3 = \frac{1}{4} & p_5 = 0 & p_7 = \frac{1}{10} & p_9 = 0 & p_{11} = 0 & p_{13} = 0 \\ p_2 = 1 & p_4 = \frac{1}{4} & p_6 = 0 & p_8 = \frac{1}{10} & p_{10} = 0 & p_{12} = 0 & p_{14} = 0 \end{array}$$

En éste ejemplo la matriz A se particiona cada dos filas ya que cada elemento tiene dos coordenadas en su sistema $P - p$ por ser axialmente rígido. La matriz de compatibilidad de deformaciones A del ejemplo desarrollado resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 3

Encontrar la matriz A para el pórtico plano de la figura 9.9. Previamente seleccionar sistemas $Q - q$ y $P - p$ que sean apropiados.

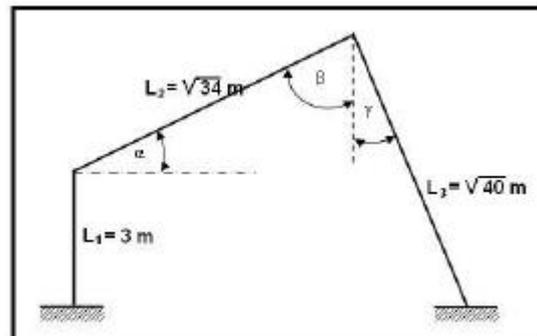
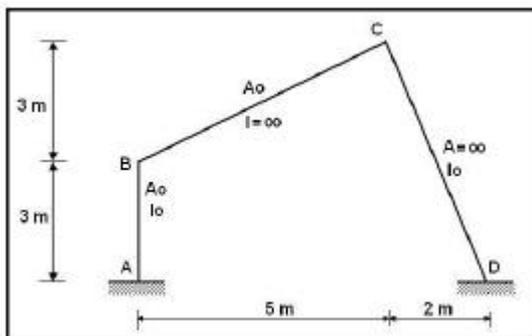


Figura 9.9 Estructura de Ejemplo 3 y dimensiones de sus elementos.

• **SOLUCIÓN**

En base a los ángulos presentados en la figura 9.9 se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{3}{34} & \cos\alpha &= \frac{5}{34} & \operatorname{tg}\alpha &= \frac{3}{5} \\ \operatorname{sen}\beta &= \frac{5}{34} & \cos\beta &= \frac{3}{34} & \operatorname{tg}\beta &= \frac{5}{3} \\ \operatorname{sen}\gamma &= \frac{2}{40} & \cos\gamma &= \frac{6}{40} & \operatorname{tg}\gamma &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

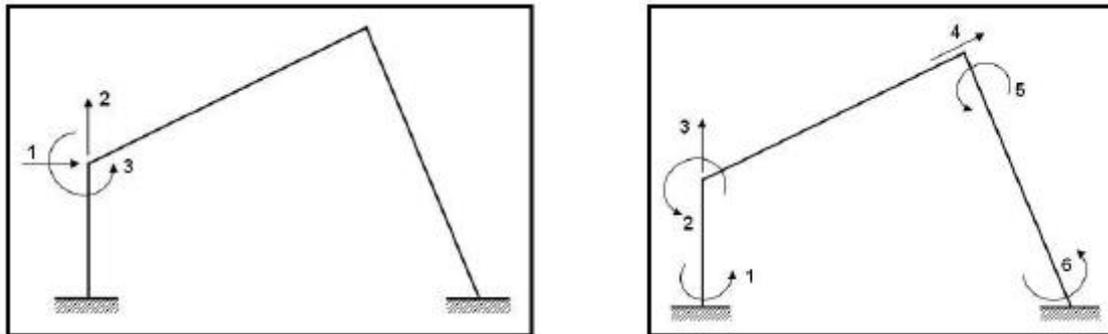
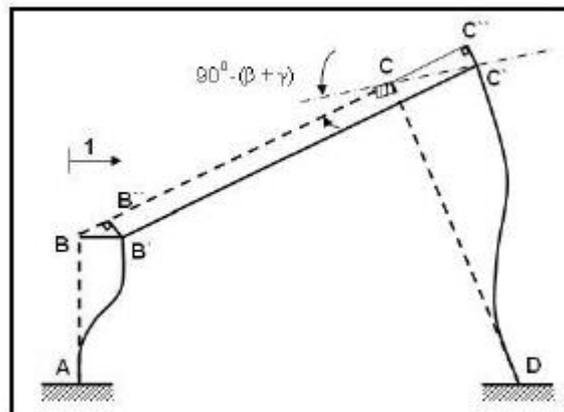


Figura 9.10 Sistema de coordenadas $Q - q$ y sistema $P - p$

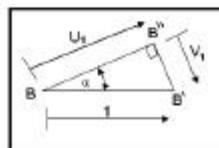
- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$



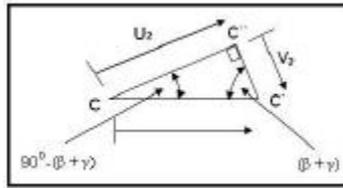
Deformada elemental q_1

Para analizar las deformaciones del elemento BC se examina el triángulo $BB'B''$



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{5}{34} \quad v_1 = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{34}$$

En la deformada elemental se observa que $v_2 = v_1 = -\frac{3}{34}$



En el triángulo rectángulo CC'C'' se tiene:

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{u_2}{v_2} \quad u_2 = v_2 \operatorname{tg}(\beta + \gamma)$$

El signo de u_2 es positivo (tracción en el nudo final)

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}$$

Luego: $u_2 = \frac{3 \cdot 9}{34 \cdot 2} = \frac{27}{68}$ (positivo)

$$CC' = \sqrt{\left(\frac{u_2}{2}\right)^2 + (v_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{136}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{729}{18496} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{729 + 40320}{18496}} = \sqrt{\frac{41049}{18496}} = 2.37$$

Nótese que CC' es el valor de v_1 para el elemento CD, por consiguiente:

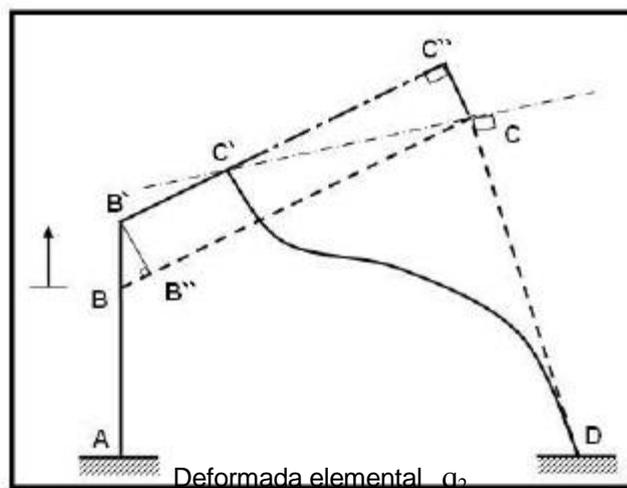
$$p_1 = \frac{1}{3} \quad p_4 = u_2 - u_1 = \frac{27}{68} - \frac{5}{34} = \frac{17}{68} \quad p_5 = \frac{v_1}{L_3} = \frac{CC'}{L_3} = \frac{2.37}{40}$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \quad p_6 = \frac{2.37}{40}$$

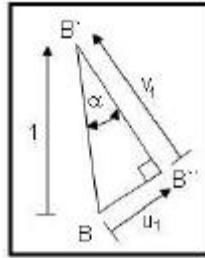
$$p_3 = 0$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

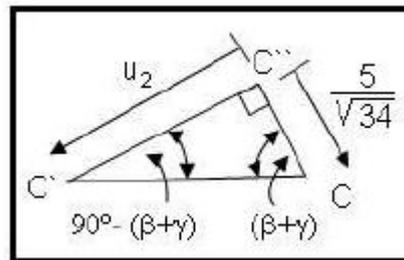


Para encontrar las deformaciones del elemento BC se analiza el triángulo BB'B''



$$u_1 = \operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{34} \quad v_1 = \operatorname{cos} \alpha = -\frac{5}{34}$$

$$B''B' = CC'' = v_1 = -\frac{5}{34}$$



$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -\frac{u_2}{\frac{5}{\sqrt{34}}} \quad (u_2 \text{ es negativo por su deformada})$$

$$u_2 = -\frac{5}{\sqrt{34}} \operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -\frac{5}{\sqrt{34}} \frac{9}{2} = -\frac{45}{2\sqrt{34}}$$

$$CC'' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C'C)^2} = \sqrt{\left(-\frac{45}{2\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2125}{136}} = 3.96$$

$$= \left(\frac{2}{34}\right)^{3/4}$$

De igual manera $CC' = v_1$ para el elemento CD y en éste caso es negativo. Por lo tanto:

$$p_1 = 0 \quad p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{45}{2\sqrt{34}} - \frac{3}{34} = -\frac{51}{2\sqrt{34}} \quad p_5 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{CC'}{L_3} = -\frac{3.96}{40}$$

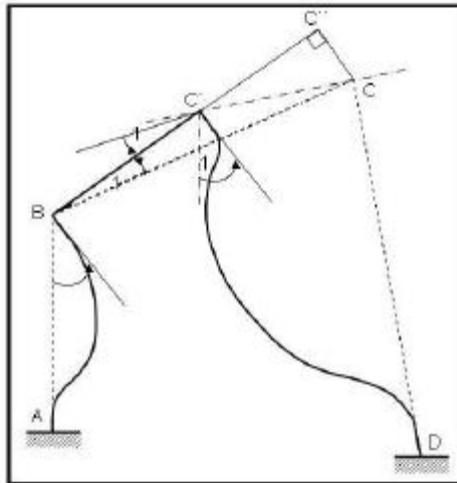
$$p_2 = 0$$

$$p_6 = -\frac{3.96}{40}$$

$$p_3 = 1$$

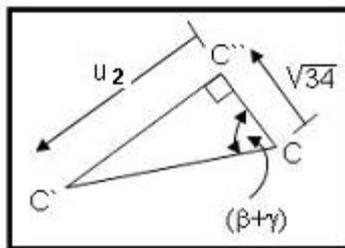
- Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$



Deformada elemental q_3

$CC'' = L_2 = \sqrt{34}$ (Arco= radio por ángulo). Por otra parte el ángulo $C'CC'' = (\beta + \gamma)$



$$\text{tg}(\beta + \gamma) = \frac{u_2}{\sqrt{34}} \Rightarrow u_2 = -\sqrt{34} \frac{9}{2}$$

u_2 es negativo ya que está a compresión en el nudo final.

$$CC' = \sqrt{(C'C'')^2 + (C''C)^2} = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{34}}{2}\right)^2 + (\sqrt{34})^2} = 26.88$$

$$p_1 = 0 \quad p_4 = u_2 - u_1 = -\frac{9}{2}\sqrt{34} \quad p_5 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1 - \frac{0 + 26.88}{40} = -3.25$$

$$p_2 = 1 \quad p_6 = -\frac{v_1}{L_3} = -\frac{26.88}{40} = -4.25$$

$$p_3 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 17 & 51 & 9 \cdot 34 \\ 2 \cdot 34 & 2 \cdot 34 & 2 \\ \hline 2.37 & \frac{3.96}{40} & -3.25 \\ 40 & 40 & \\ 2.37 & 3.96 & -4.25 \\ 40 & 40 & \end{bmatrix}$$

9.2.2 Armadura Plana

Ahora el sistema de coordenadas de un elemento es el presentado a la derecha de la figura 9.2. En consecuencia cada elemento de una armadura plana tiene una sola deformación que es la axial, la ubicación de ésta coordenada es arbitraria en el sentido de que puede colocarse a la izquierda o a la derecha de un elemento horizontal. Por ejemplo para la celosía de la figura 9.11.1 se puede considerar como sistema $P - p$ el presentado en la figura 9.11.2 o el indicado en la figura 9.11.3.

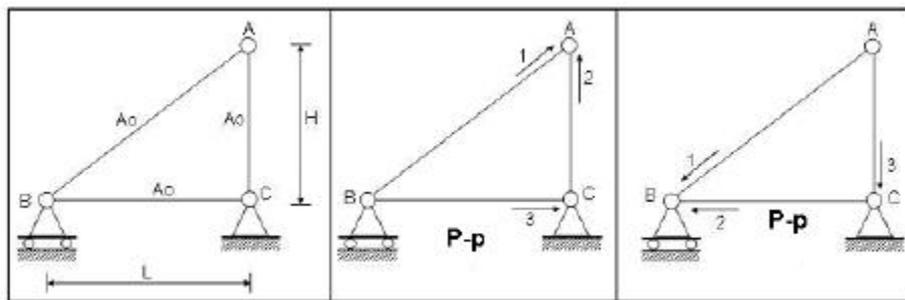


Figura 9.11.1

Figura 9.11.2

Figura 9.11.3

Se debe tener presente que la dirección de la coordenada p guarda relación con la determinación de las coordenadas u_1 y u_2 . Por ejemplo para el elemento BA, cuando se trabaja con el sistema $P - p$ mostrado en la figura 9.11.2 se tiene que u_1 es el corrimiento axial en el nudo B y que u_2 es el corrimiento axial en el nudo A. En cambio cuando se trabaja con las coordenadas de la figura 9.11.3 es lo contrario.

Para calcular las deformaciones p se debe tener presente que ésta es positiva si el elemento se alarga axialmente, caso contrario es negativa.

Finalmente para la obtención del sistema $Q - q$ se recuerda que cada nudo de una armadura plana tiene dos grados de libertad. Por consiguiente la estructura de la figura 9.11.1 tiene 3 grados de libertad, dos en el nudo A y uno en el nudo B por el tipo de vínculo.

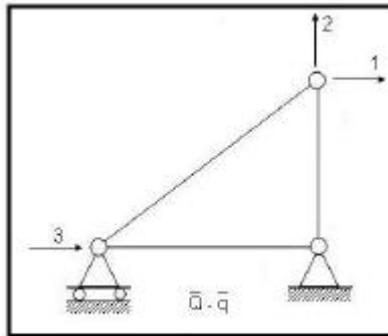
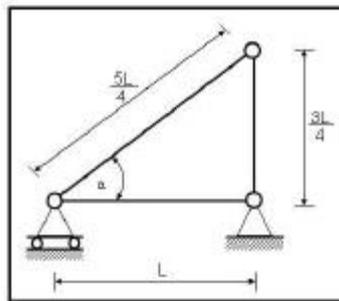


Figura 9.11.4 Coordenadas generalizadas

• EJEMPLO 4

Para la armadura plana de la figura 9.11.1 utilizando el sistema de coordenadas $Q - q$ y $P - p$ mostrados en las figuras 9.11.4 y 9.11.2 respectivamente. Se pide obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones A , tal que: $p = A q$. Además se conoce que $H=3L/4$.

• SOLUCIÓN

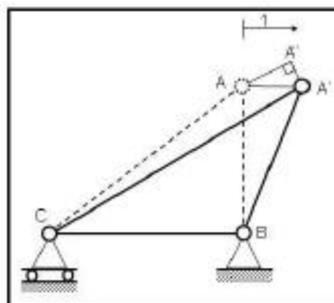


Parámetros Geométricos

$$\text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cos}\alpha = \frac{4}{5} \qquad \text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

- Primera columna de A

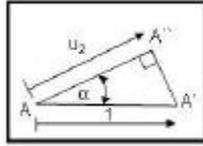
$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$



Deformada elemental q_1

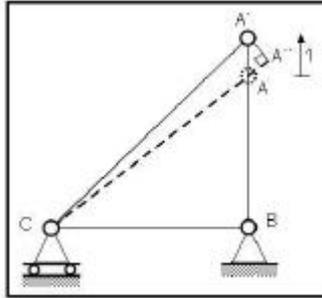
En el triángulo $AA'A''$ se tiene $u_2 = \text{cos}\alpha = \frac{4}{5}$. Luego las deformaciones p son:

$$p_1 = \frac{4}{5} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$

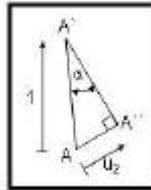


- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 2$$



Deformada elemental q_2

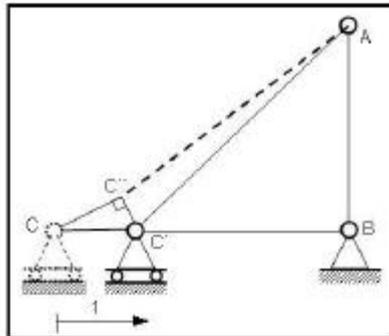


$$u_2 = \text{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

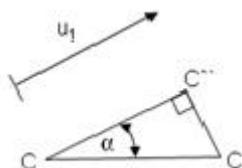
$$p_1 = \frac{3}{5} \quad p_2 = 1 \quad p_3 = 0$$

- Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$



Deformada elemental q_3



$$u_1 = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$p_1 = -\frac{4}{5} \quad p_2 = 0 \quad p_3 = -1$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para formar los triángulos con las deformaciones, en los elementos inclinados, lo mejor es primero colocar la deformación axial y luego la transversal. Por ejemplo en la última deformada elemental q_3 , para pasar de C a C' primero se tiene la deformación axial CC'' y luego la deformación transversal $C''C'$.

• EJEMPLO 5

Calcular la matriz A de la siguiente armadura plana.

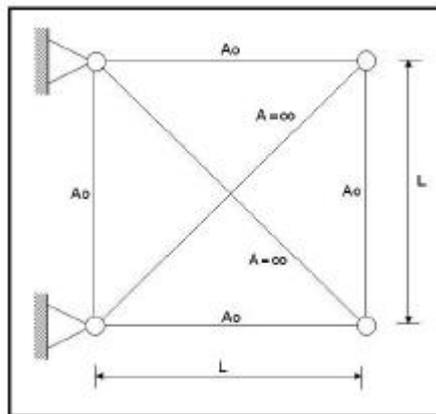


Figura 9.12 Armadura plana de ejemplo 5.

• SOLUCIÓN

Al igual que en los pórticos planos cuando se tiene elementos axialmente rígidos, el número de grados de libertad de la estructura disminuye una coordenada por cada elemento $A = \infty$. Por lo tanto en éste ejercicio se tienen 2 grados de libertad. En la figura 9.13, a la izquierda, se presenta una deformada general de la armadura en la cual se aprecia que los elementos trabajan únicamente axialmente.

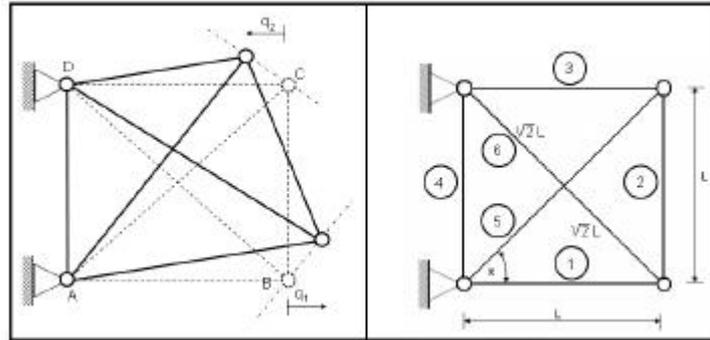


Figura 9.13 Deformada general y longitud de elementos

A la derecha de la figura 9.13, se presenta la geometría de la armadura plana, de ésta grafica se obtiene:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{cos}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tg}\alpha = 1$$

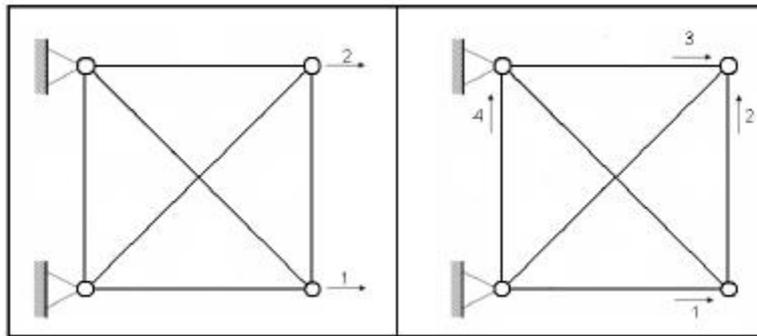
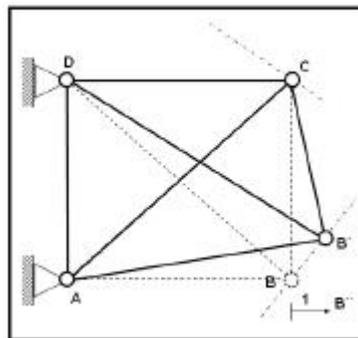


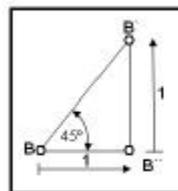
Figura 9.14 Sistema $Q - q$ y sistema $P - p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$



Deformada elemental q_1



$$p_1 = 1$$

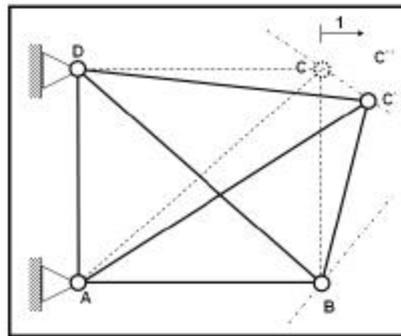
$$p_2 = -1$$

$$p_3 = 0$$

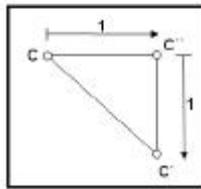
$$p_4 = 0$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$



Deformada elemental q_2



$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -1$$

$$p_3 = 1$$

$$p_4 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 6

Para la armadura plana de la figura 9.15 que tiene dos elementos axialmente rígidos se pide:

- Dibujar una deformada lo más general posible.
- Seleccionar un sistema de coordenadas $Q - q$ y $P - p$ apropiado.
- Determinar la matriz A

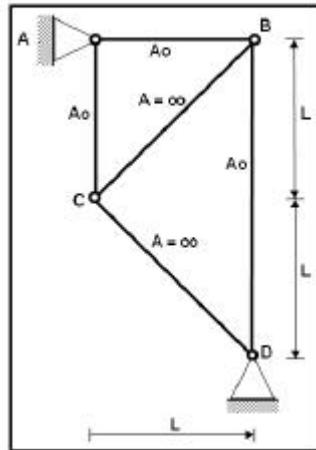


Figura 9.15 Armadura de ejemplo 6

• SOLUCIÓN

Como se ha indicado cada nudo de la armadura plana tiene dos grados de libertad, luego se tendrían 4 grados de libertad pero como existen dos elementos que son axialmente rígidos se eliminan dos grados de libertad, uno por cada elemento $A = \infty$. En consecuencia el sistema tiene 2 grados de libertad. En la figura 9.16 se presenta una deformada lo más general en la cual se ha colocado P.I. para indicar la posición inicial del nudo, ésta recta es perpendicular al elemento axialmente rígido y P.F. la recta en la cual se halla la posición final del nudo. A la izquierda de la figura 9.17 se indica el sistema $Q - q$ con el cual se resuelve el ejercicio y a la derecha el sistema $P - p$.

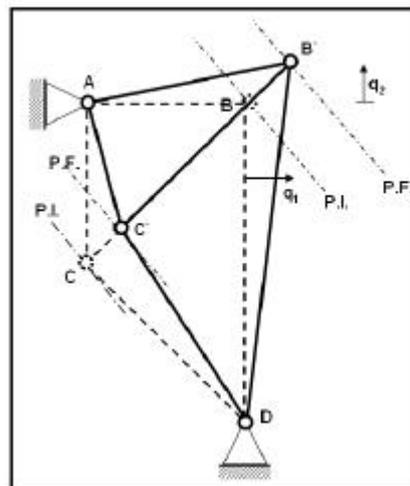


Figura 9.16 Deformada general.

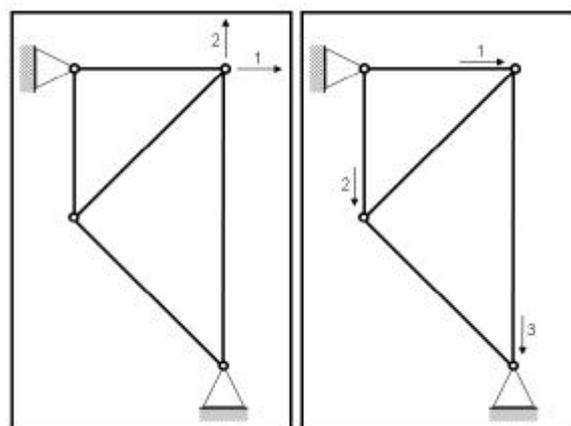
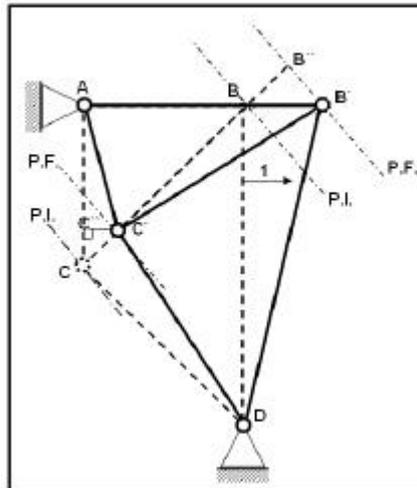


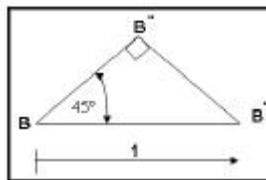
Figura 9.17 Sistema $Q - q$ y sistema $P - p$

- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

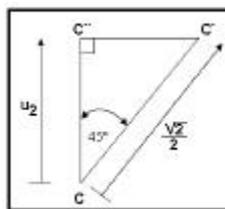


Deformada elemental q_1



$$BB'' = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En la deformada elemental se observa que $BB'' = CC'$ debido a que el elemento BC es axialmente rígido. Luego en el triángulo $CC'C''$ se tiene:



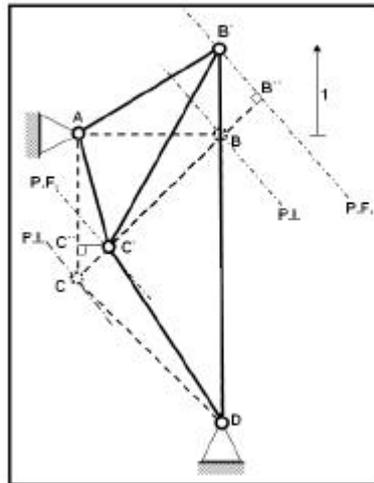
$$\cos 45 = \frac{u_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero u_2 es negativo para el elemento BC. Luego las deformaciones valen:

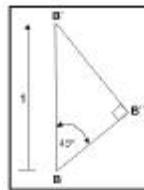
$$p_1 = 1 \quad p_2 = -\frac{1}{2} \quad p_3 = 0$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

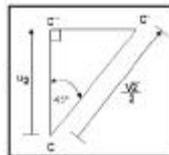


Deformada elemental q_2



$$BB'' = \cos 45^\circ \cdot 2 = \frac{2}{2}$$

$$BB'' = CC' = \frac{2}{2}$$



$$u_2 = \cos 45^\circ \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Pero u_2 es negativo para el elemento AC. Con ésta consideración las deformaciones son:

$$p_1 = 0 \quad p_2 = -\frac{1}{2} \quad p_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.2.3 Coordenadas $P - p$ arbitrarias

En los ejercicios anteriores se utilizó como sistema $P - p$ el presentado en las gráficas de la figuras 9.2. Para éstas coordenadas de los elementos en el capítulo 7 se encontró la respectiva matriz de rigidez, algo similar se hizo con el sistema de coordenadas de la figura 9.18 con el cual se van a resolver algunos ejercicios, para lo cual se recuerda las deformaciones de miembro.

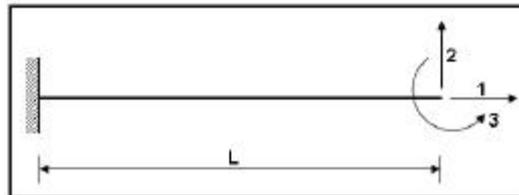


Figura 9.18 Otro sistema de coordenadas de elemento.

$$\begin{aligned} p_1 &= u_2 - u_1 \\ p_2 &= v_2 - v_1 - \theta_1 L \\ p_3 &= \theta_2 - \theta_1 \end{aligned}$$

En consecuencia se podía haber calculado la matriz A para los ejercicios resueltos en éste capítulo empleando estas coordenadas. Si éste es el caso, para la estructura de la figura 9.3, el sistema $P - p$ sería el siguiente.

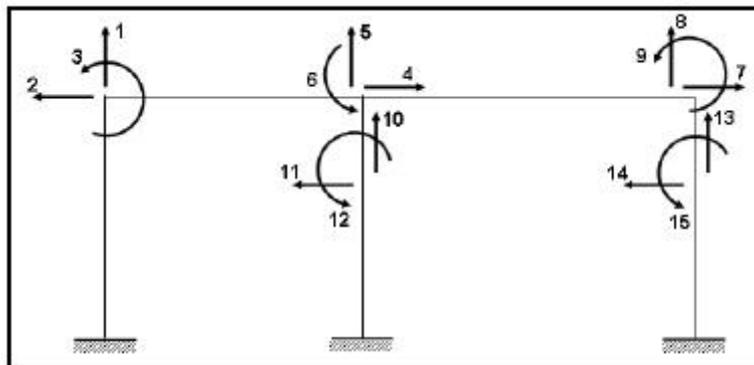


Figura 9.19 Otro sistema $P - p$ para Ejemplo 1.

Es evidente que ahora se obtendrá una matriz A diferente, lo cual se debe a la diferencia como se obtienen las deformaciones p .

Por último se debe indicar que se puede calcular la matriz A empleando cualquier sistema de coordenadas $P - p$ lo que se ilustra con el desarrollo del siguiente problema.

• EJEMPLO 7

Para el pórtico de la figura 9.20.1 se pide calcular la matriz A empleando como sistemas $Q - q$ y $P - p$ los presentados en las figuras 9.20.2 y 9.20.3, respectivamente. Si la longitud de todos los elementos es la misma. Para los elementos inclinados se considera como sistema de coordenadas el indicado en la figura 9.18 y para el elemento horizontal se tiene dos giros a flexión considerado positivo si el nudo inicial rota en forma horario y el nudo final rota anti horario y dos cortantes considerados positivos si van hacia arriba.

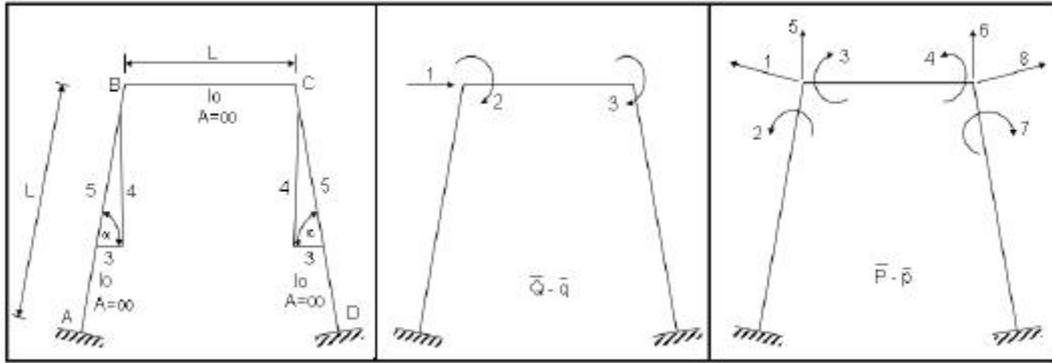


Figura 9.20.1

Figura 9.20.2

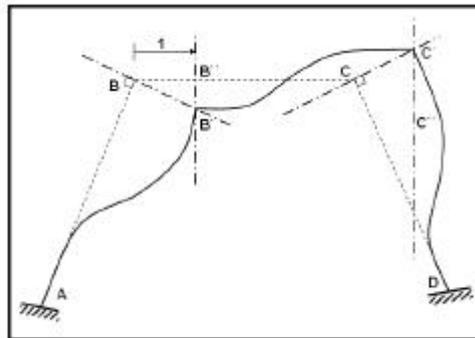
Figura 9.20.3

Nótese en éste ejercicio que las rotaciones se consideran horario positivo.

• SOLUCIÓN

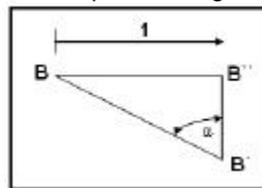
- Primera columna de A

$$q_1 = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$



Deformada elemental q_1

En la deformada elemental se observa que el triángulo $BB'B''$ es igual al triángulo $CC'C''$.



$$BB' = CC' = \cos \alpha = \frac{5}{4}$$

$$B'B'' = C'C'' = \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto:

$$p_1 = -BB' = -\frac{5}{4}$$

$$p_3 = 0$$

$$p_7 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_4 = 0$$

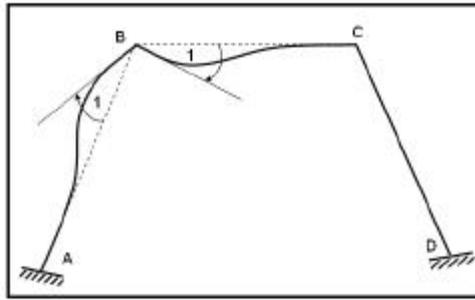
$$p_8 = CC' = \frac{5}{4}$$

$$p_5 = B''B' = -\frac{3}{4}$$

$$p_6 = CC' = \frac{5}{4}$$

- Segunda columna de A

$$q_2 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$

Deformada elemental q_2

En el ejemplo la rotación se considera horario positivo (figura 9.20.2) de ahí la forma de ésta deformada elemental y la siguiente.

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = 1$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = 0$$

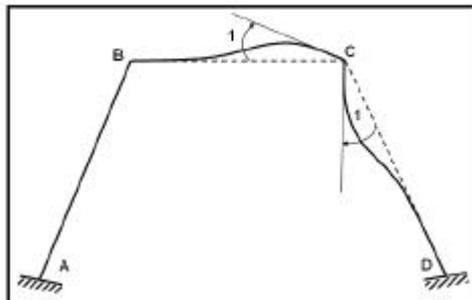
$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 0$$

$$p_8 = 0$$

- Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 3$$

Deformada elemental q_3

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = -1$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

$$p_7 = 1$$

$$p_8 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & \nu \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \nu \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.3 RELACIÓN ENTRE CARGAS GENERALIZADAS Y FUERZAS INTERNAS

9.3.1 Introducción

Las cargas generalizadas Q de una estructura pueden transformarse en cargas internas P por medio de la matriz B . En efecto se tiene por definición que:

$$P = B Q \quad (9.3)$$

Donde B es una matriz de equilibrio de orden $m \times n$, siendo m el número de filas que será igual al número de coordenadas P y n el número de columnas que es igual al número de grados de libertad de la estructura. Un término cualquiera B_i es el valor de la carga interna del elemento P_i correspondiente al estado de cargas generalizado $Q_j = 1$ y las demás nulas.

Si $P = B Q$ se puede demostrar fácilmente, aplicando el principio de los trabajos virtuales que: $q = B^t p$ con lo que se obtiene otra ecuación de compatibilidad, ahora se obtendrá B^t por geometría de deformación siendo más difícil su cálculo.

Finalmente se destaca que mediante la matriz B se obtiene la matriz de flexibilidad de la estructura F .

9.3.2 Definición

Cuando la matriz B se puede determinar usando solo la estática el sistema se llama: "Estáticamente Determinado".

9.3.3 Relación entre B y A

Se puede establecer una relación entre las dos matrices de la siguiente manera. Se sabe que:

$$P = k p \quad (9.4)$$

Pero $p = A q$. Al reemplazar en (9.4) se tiene:

$$P = k A q$$

A su vez $q = F Q$, sustituyendo se tiene:

$$P = (k A F) Q$$

Comparando ésta última expresión con la ecuación (9.3) se tiene:

$$B = k A F \quad (9.5)$$

En la ecuación (9.5) la matriz k es diagonal y está compuesta por la matriz de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura. Un ejemplo de aplicación de ésta relación se presenta en el ejemplo 10 del apartado 9.4.1.

9.4 CÁLCULO DE LA MATRIZ B

9.4.1 Coordenadas $P - p$ usuales

Para diferenciar del sistema de coordenadas $P - p$ arbitrario, se denominan coordenadas usuales de los elementos a las presentadas en la figura 9.2.

• EJEMPLO 8

Obtener la matriz B del pórtico plano indicado en la figura 9.21, cuyos elementos se consideran totalmente flexibles.

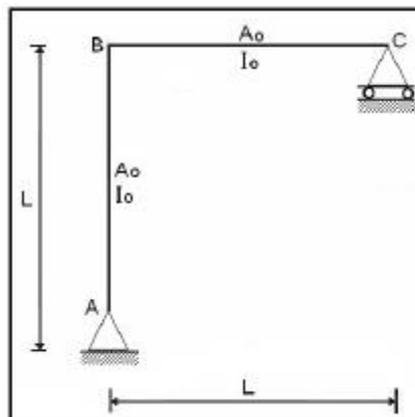


Figura 9.21 Estructura de Ejemplo 8

• SOLUCIÓN

La estructura tiene una rotación en el nudo A, por ser apoyo fijo; tres grados de libertad en el nudo B y dos grados de libertad en el C, por ser rodillo. En la figura 9.22.1 se presenta el sistema de coordenadas generalizadas y en la 9.22.2 el sistema de coordenadas de los elementos.

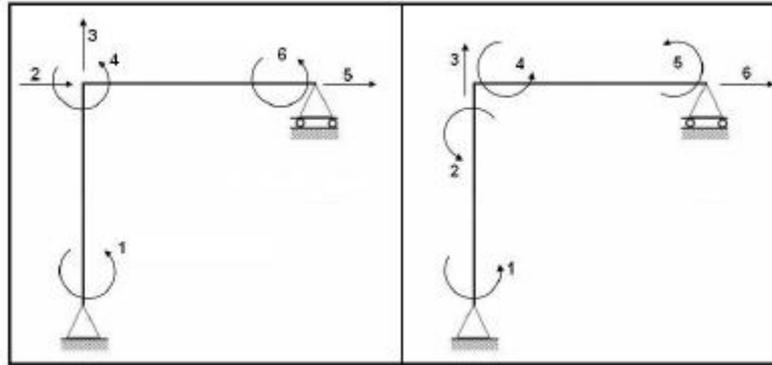
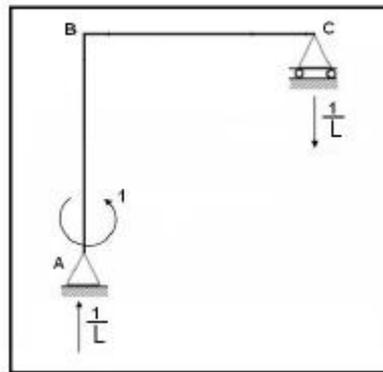


Figura 9.22.1 Sistema $Q - q$

Figura 9.22.2 Sistema $P - p$

- Primera columna de la matriz B

$$Q_1 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$



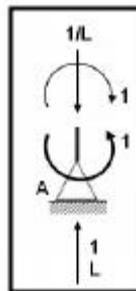
Q_1

Carga unitaria

$\frac{1}{L}$

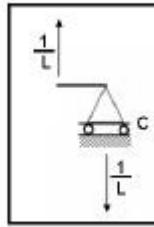
Al aplicar un momento unitario en el nudo A se producen dos reacciones que valen

- Equilibrio del nudo A



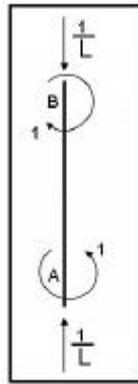
Del equilibrio de la junta A se obtiene que en el elemento AB actúa una fuerza axial de compresión que vale $\frac{1}{L}$ y un momento unitario. Nótese que estas acciones luego pasan al elemento cambiadas de signo, como se verá más adelante.

- Equilibrio del nudo C



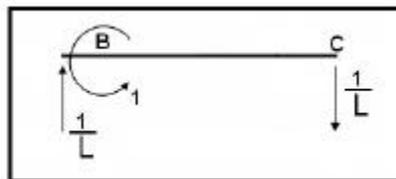
Para equilibrar el nudo C en el elemento BC existe una fuerza vertical de magnitud $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento AB



Para equilibrar el elemento AB se requiere que en el extremo superior actúe un momento horario unitario y una fuerza de compresión igual a $\frac{1}{L}$.

- Equilibrio del elemento BC



Para tener equilibrio de las fuerzas verticales es necesario que en el extremo izquierdo del elemento BC actúe una fuerza vertical $\frac{1}{L}$ hacia arriba y para obtener el equilibrio de momentos se necesita que en ese punto exista un momento unitario. Se deja al lector que verifique el equilibrio de la junta B. Una vez encontradas las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, por medio de equilibrio, se observa el sistema $P - p$ de la figura 9.22.2 y se encuentran las cargas P , que son las siguientes.

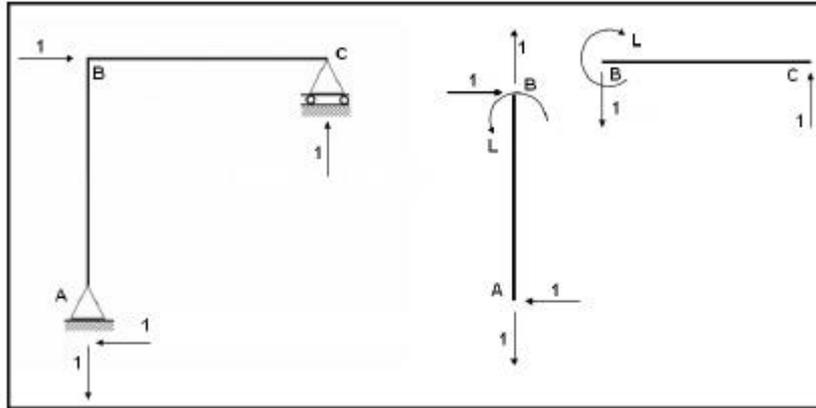
$$\begin{array}{ll} P_1 = I & P_4 = I \\ P_2 = -I & P_5 = 0 \\ P_3 = -\frac{I}{L} & P_6 = 0 \end{array}$$

Los elementos encontrados corresponden a los términos de la primera columna de B .

Para hallar las demás columnas de la matriz \mathbf{B} se procede en forma similar. En lo posterior se presenta el estado de carga elemental con las reacciones que actúan en la estructura y el equilibrio de elementos, dejando al lector la justificación de los pasos intermedios.

- Segunda columna de la matriz \mathbf{B}

$$Q_2 = 1 \quad \text{y} \quad Q_i = 0 \quad i \neq 2$$

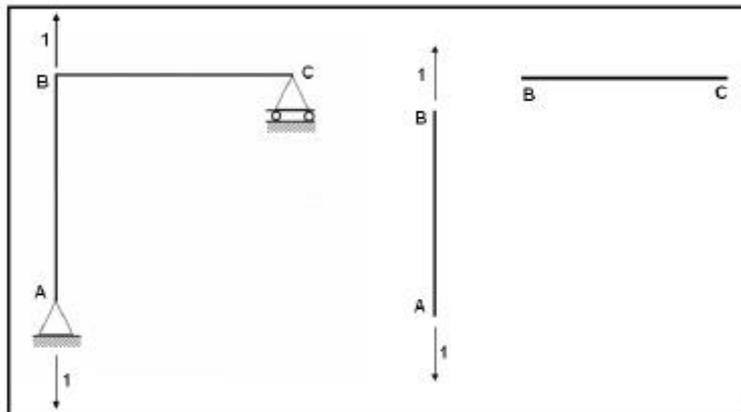


Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 & P_4 &= -L \\ P_2 &= L & P_5 &= 0 \\ P_3 &= 1 & P_6 &= 0 \end{aligned}$$

- Tercera columna de la matriz \mathbf{B}

$$Q_3 = 1 \quad \text{y} \quad Q_i = 0 \quad i \neq 3$$

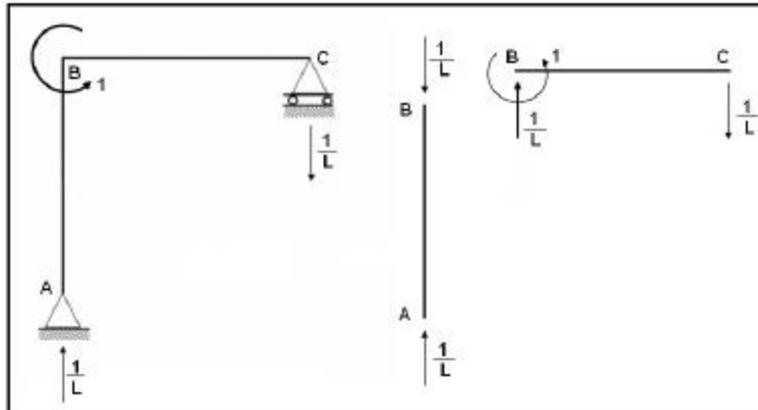


Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 & P_4 &= 0 \\ P_2 &= & P_5 &= 0 \\ 0 & & P_6 &= 0 \\ P_3 &= 1 & & \end{aligned}$$

- Cuarta columna de la matriz **B**

$$Q_4 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$

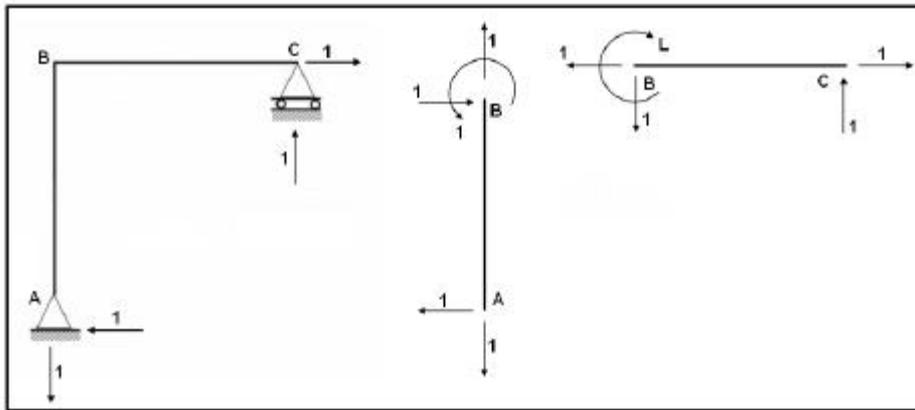


Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos.

$$\begin{array}{ll} P_1 = 0 & P_4 = 1 \\ P_2 = 0 & P_5 = 0 \\ P_3 = -\frac{1}{L} & P_6 = 0 \end{array}$$

- Quinta columna de la matriz **B**

$$Q_5 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 5$$

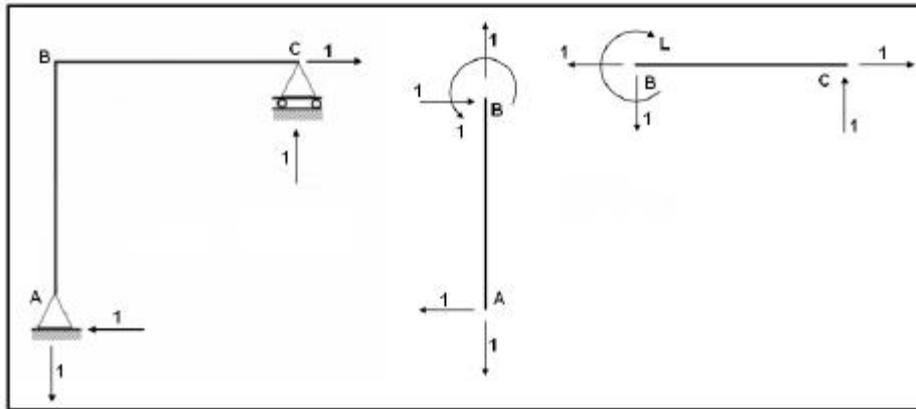


Carga unitaria Q_5 y equilibrio de elementos

$$\begin{array}{ll} P_1 = 0 & P_4 = -L \\ P_2 = L & P_5 = 0 \\ P_3 = 1 & P_6 = 1 \end{array}$$

- Sexta columna de la matriz **B**

$$Q_6 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 6$$



Carga unitaria q_6 y equilibrio de elementos

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 & P_4 &= -L \\ P_2 &= L & P_5 &= 0 \\ P_3 &= 1 & P_6 &= 1 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ -\frac{1}{L} & 1 & 1 & -\frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} \\ 1 & -L & 0 & 1 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 9

Hallar la matriz **B** para la estructura de la figura 9.23 en la cual sus elementos son axialmente rígidos. Si los sistemas $Q - q$ y $P - p$ son los indicados en la figura 9.24.

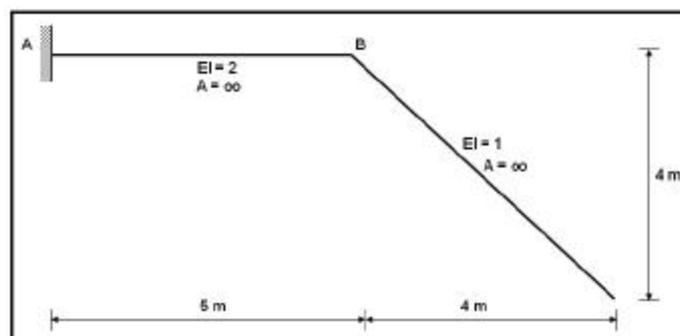


Figura 9.23 Estructura de ejemplo 9

• SOLUCIÓN

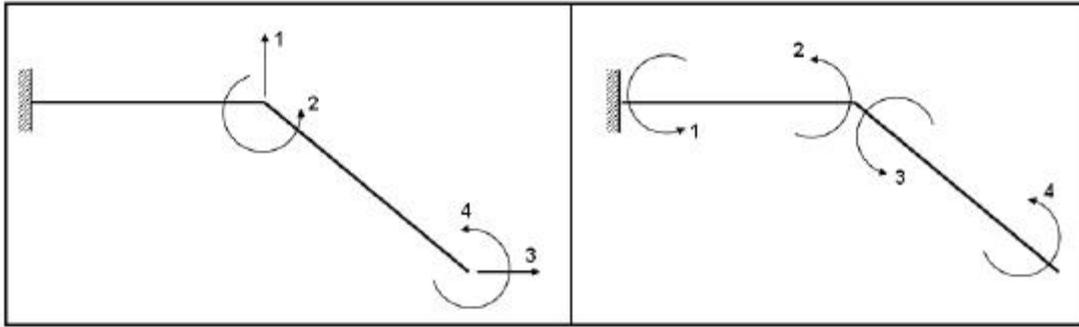
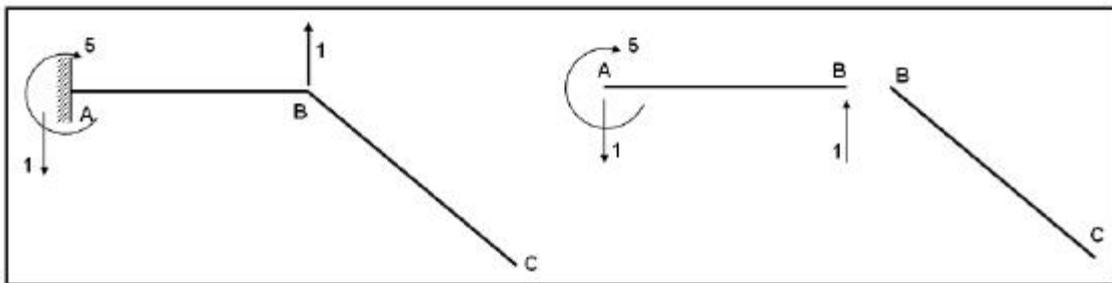


Figura 9.24 Sistema $Q - q$ y Sistema $P - p$

- Primera columna de la matriz B

$$Q_1 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$

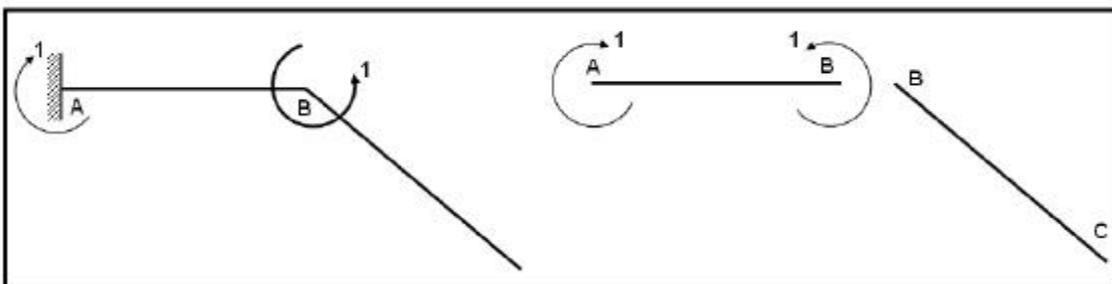


Carga unitaria Q_1 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} p_1 = -5 & p_3 = 0 \\ p_2 = 0 & p_4 = 0 \end{matrix}$$

- Segunda columna de la matriz B

$$Q_2 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 2$$

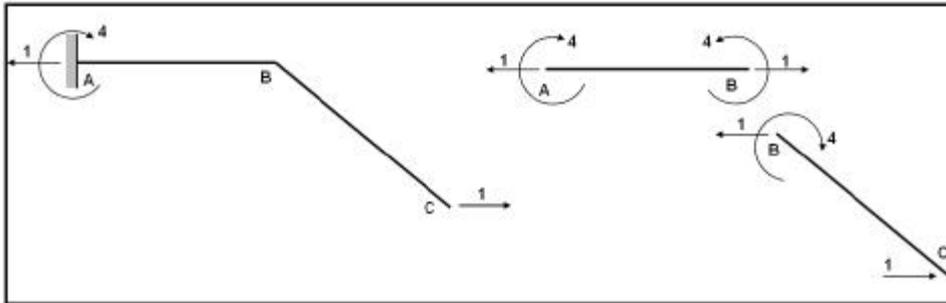


Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} p_1 = -1 & p_3 = 0 \\ p_2 = 1 & p_4 = 0 \end{matrix}$$

- Tercera columna de la matriz **B**

$$Q_3 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$

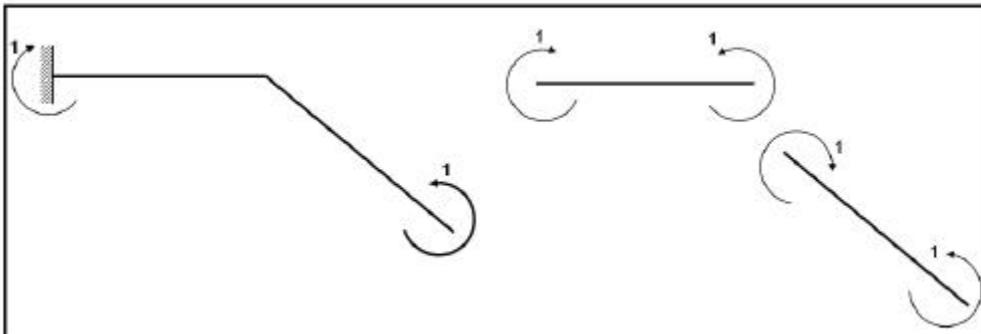


Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} p_1 = -4 & p_3 = -4 \\ p_2 = 4 & p_4 = 0 \end{matrix}$$

- Cuarta columna de la matriz **B**

$$Q_4 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$



Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} p_1 = -1 & p_3 = -1 \\ p_2 = 1 & p_4 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 10

Para la estructura estáticamente indeterminada de la figura 9.25.1. Hallar la matriz **B** si se conocen las matrices de flexibilidad de la estructura **F** y de compatibilidad de deformaciones **A** para el sistema de coordenadas **Q – q** de la figura 9.25.2 y **P – p** de la figura 9.25.3.

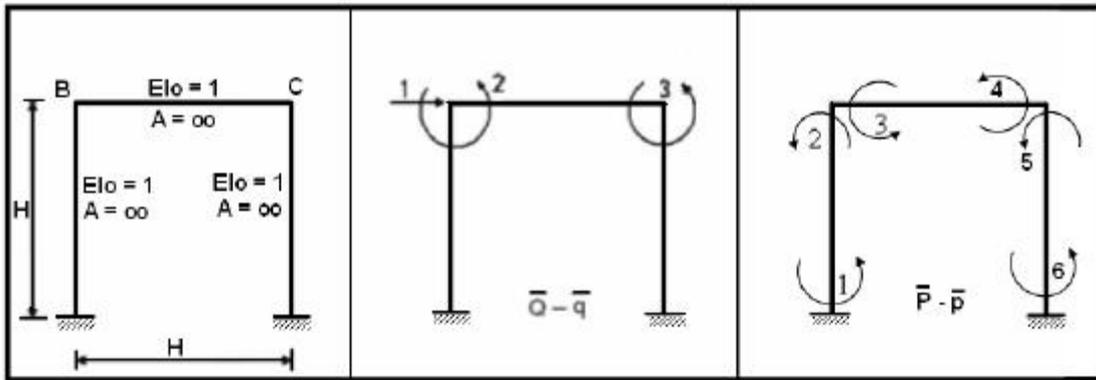


Figura 9.25.1

Figura 9.25.2

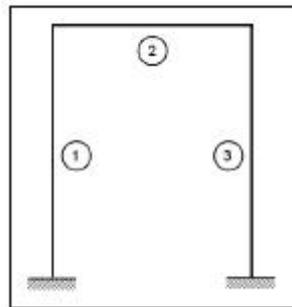
Figura 9.25.3

$$F = \frac{H}{84} \begin{bmatrix} 5H^2 & -3H & -3H \\ -3H & 13 & -1 \\ -3H & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & H & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• SOLUCIÓN

Las matrices de rigidez de los elementos, para el sistema $P - p$ indicado en la figura 9.25.3, son.



$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \\ k^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{2}{H} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = k \quad A \quad F$$

Figura 9.26.1

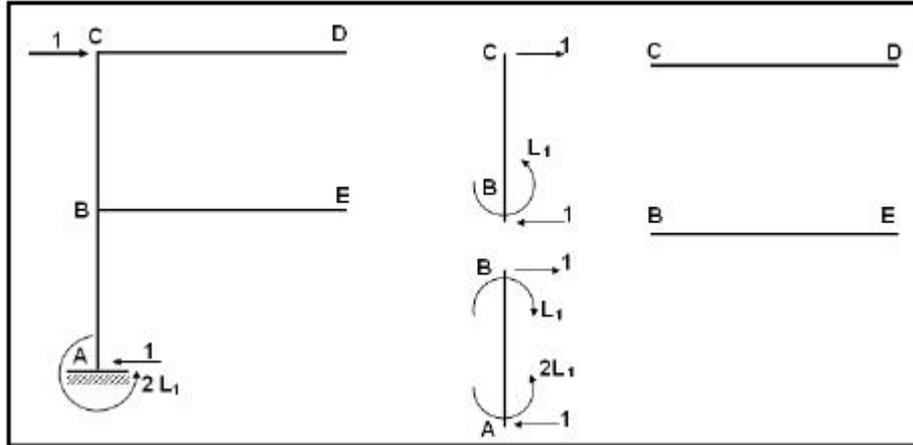
Figura 9.26.2

Figura 9.26.3

• **SOLUCIÓN**

- Primera columna de la matriz **B**

$$Q_1 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$

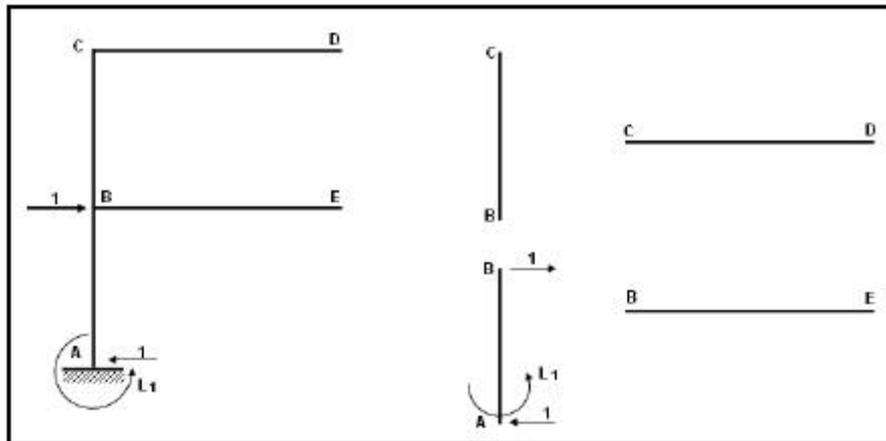


Carga unitaria Q_1 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = L_1 & P_3 = 0 & P_5 = -L_1 & P_7 = 0 \\ P_2 = -1 & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Segunda columna de la matriz **B**

$$Q_2 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 2$$

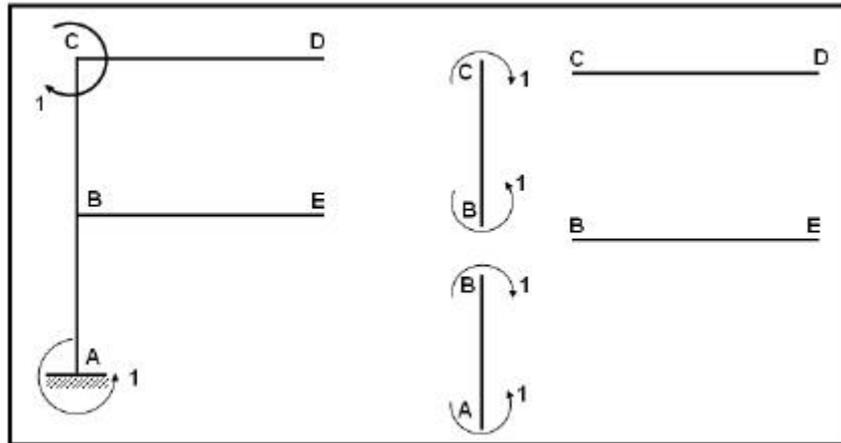


Carga unitaria Q_2 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = 0 & P_3 = 0 & P_5 = 0 & P_7 = 0 \\ P_2 = -1 & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Tercera columna de la matriz **B**

$$Q_3 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 3$$

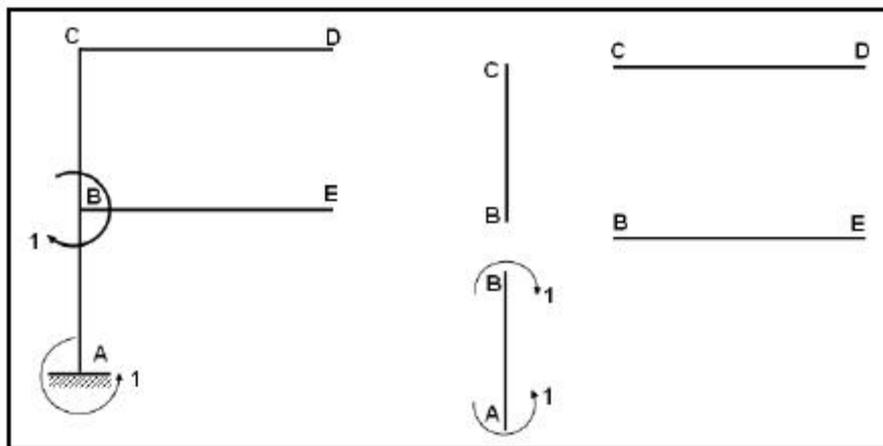


Carga unitaria Q_3 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = 1 & P_3 = 0 & P_5 = -1 & P_7 = 0 \\ P_2 = 0 & P_4 = 0 & P_6 = 1 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Cuarta columna de la matriz **B**

$$Q_4 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 4$$

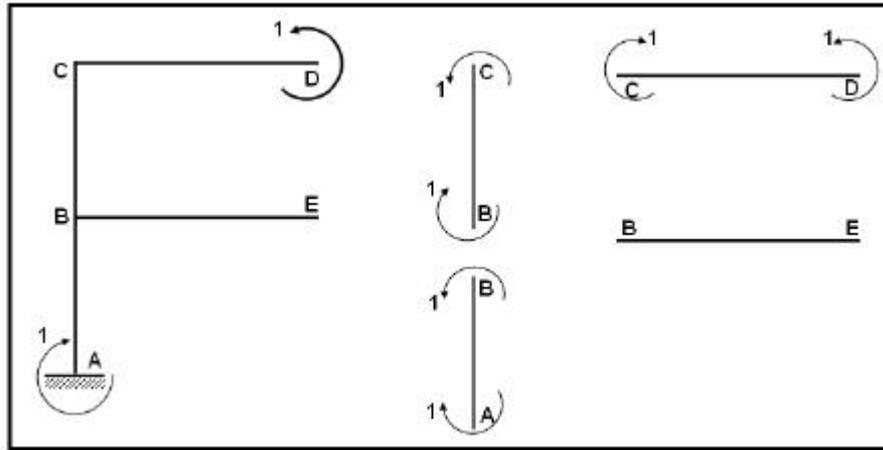


Carga unitaria Q_4 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = 1 & P_3 = 0 & P_5 = 0 & P_7 = 0 \\ P_2 = 0 & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Quinta columna de la matriz **B**

$$Q_5 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 5$$

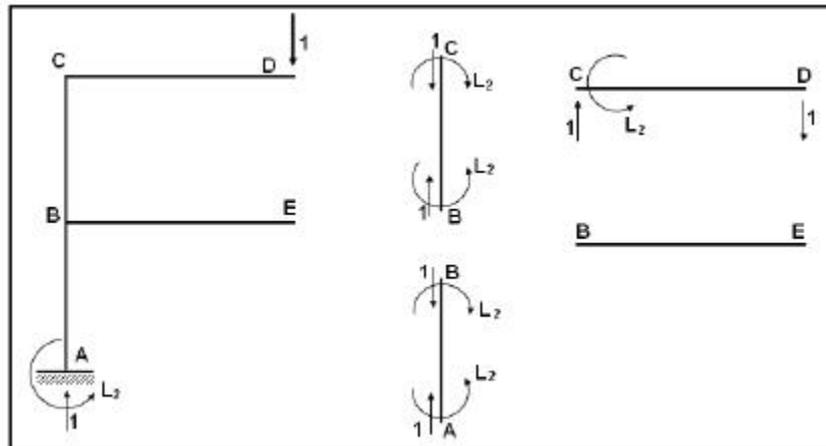


Carga unitaria Q_5 y equilibrio de elementos

$$\begin{array}{cccc} P_1 = -1 & P_3 = 0 & P_5 = 1 & P_7 = 1 \\ P_2 = 0 & P_4 = 0 & P_6 = -1 & P_8 = -1 \end{array}$$

- Sexta columna de la matriz **B**

$$Q_6 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 6$$

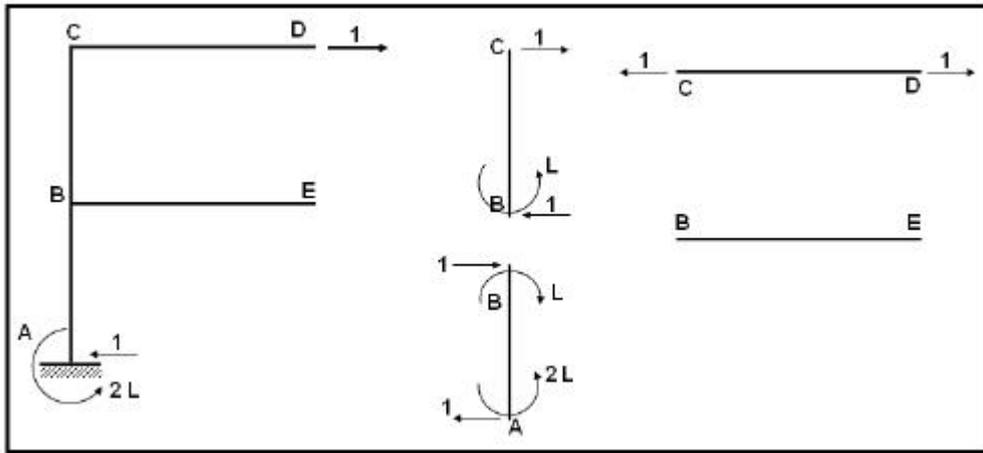


Carga unitaria Q_6 y equilibrio de elementos

$$\begin{array}{cccc} P_1 = L_2 & P_3 = 0 & P_5 = -L_2 & P_7 = -L_2 \\ P_2 = 0 & P_4 = 0 & P_6 = L_2 & P_8 = 0 \end{array}$$

- Séptima columna de la matriz **B**

$$Q_7 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 7$$

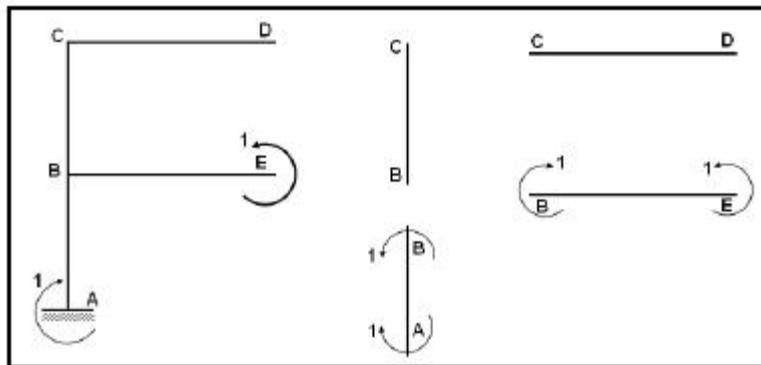


Carga unitaria Q_7 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = L_l & P_3 = 0 & P_5 = -L_l & P_7 = 0 \\ P_2 = -l & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Octava columna de la matriz **B**

$$Q_8 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 8$$

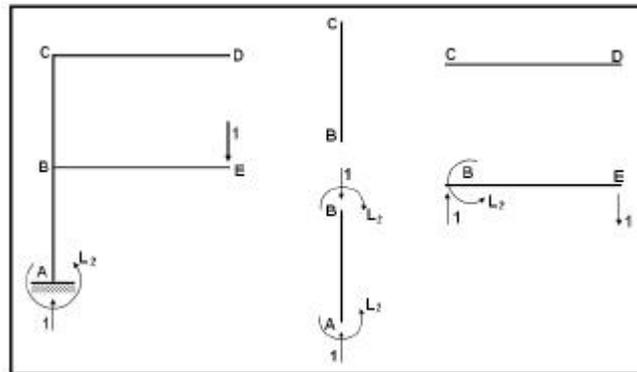


Carga unitaria Q_8 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = -1 & P_3 = 1 & P_5 = 0 & P_7 = 0 \\ P_2 = 0 & P_4 = -1 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Novena columna de la matriz **B**

$$Q_9 = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 9$$

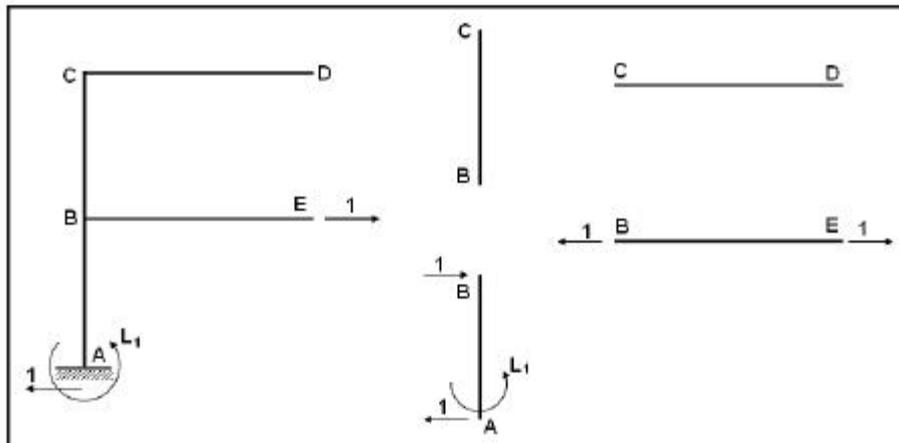


Carga unitaria Q_9 y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = L_2 & P_3 = -L_2 & P_5 = 0 & P_7 = 0 \\ P_2 = 0 & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

- Décima columna de la matriz **B**

$$Q_{10} = 1 \text{ y } Q_i = 0 \text{ } i \neq 10$$



Carga unitaria Q_{10} y equilibrio de elementos

$$\begin{matrix} P_1 = 0 & P_3 = 0 & P_5 = 0 & P_7 = 0 \\ P_2 = -1 & P_4 = 0 & P_6 = 0 & P_8 = 0 \end{matrix}$$

Luego, la matriz **B**, es la siguiente.

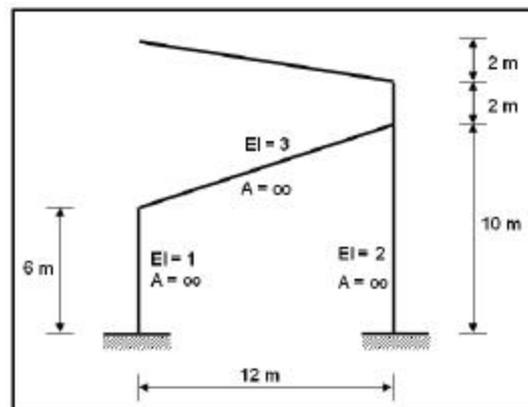
$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & L_2 & L_1 & -1 & L_2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -L_1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -L_2 & -L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

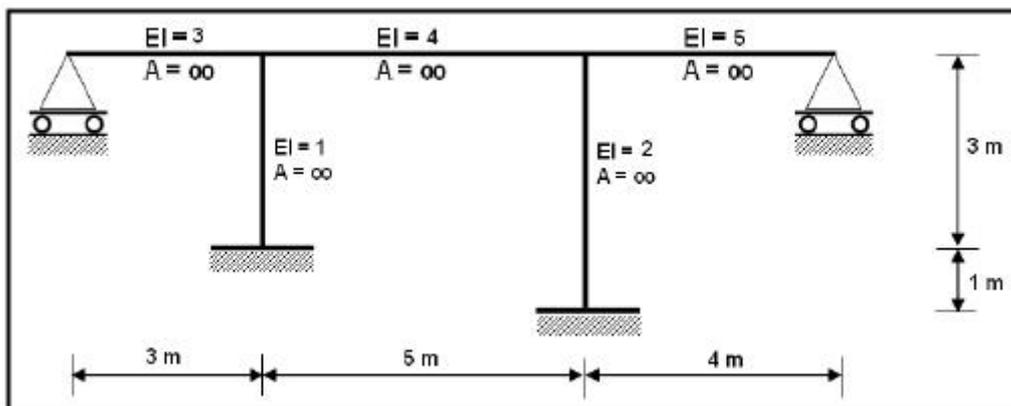
En las siguientes estructuras. Se pide:

- Seleccionar un sistema $Q-q$ y $P-p$ apropiados.
- Determinar la matriz A tal que $p = Aq$

Ejercicio N.- 1

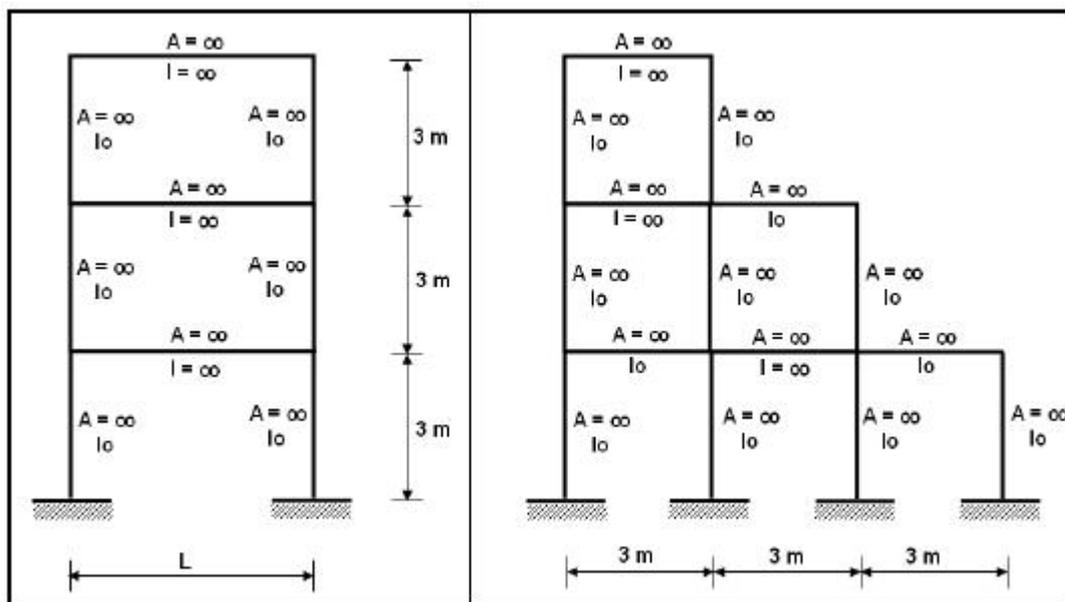


Ejercicio N.- 2

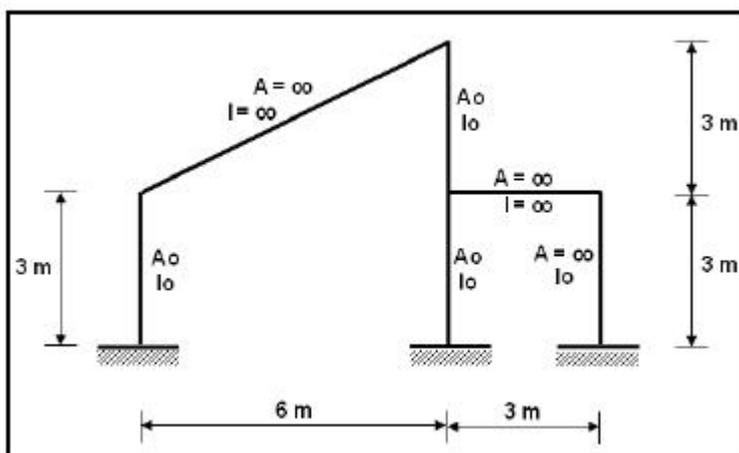


Ejercicio N.- 3

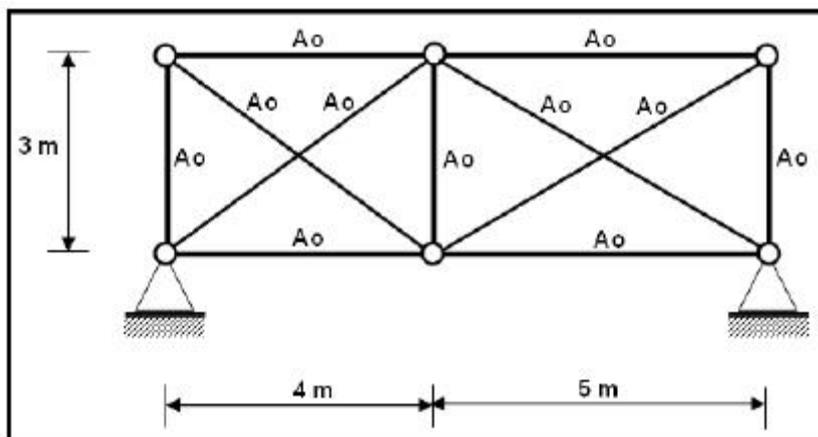
Ejercicio N.- 4



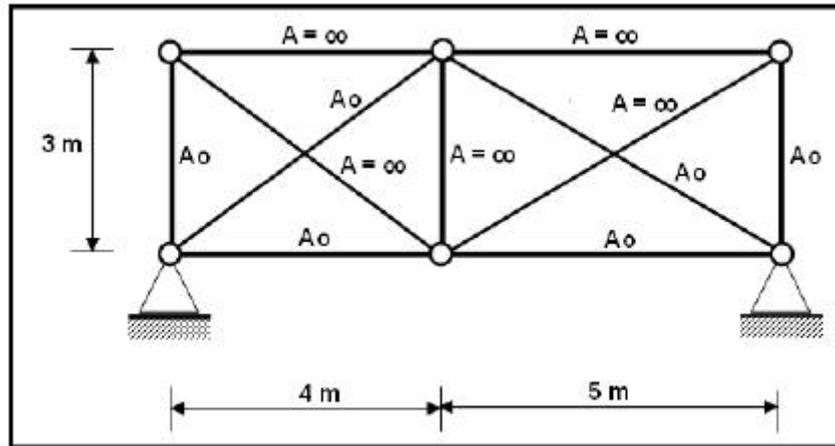
Ejercicio N.- 5



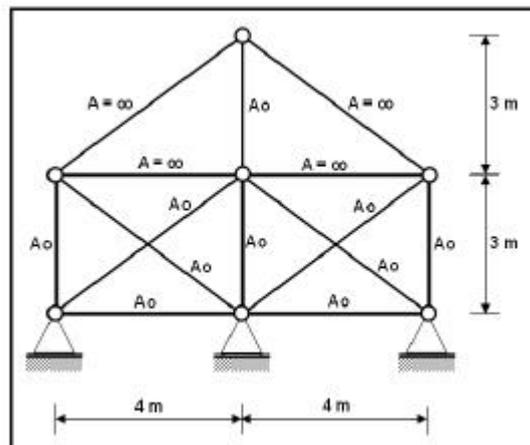
Ejercicio N.- 6



Ejercicio N.- 7

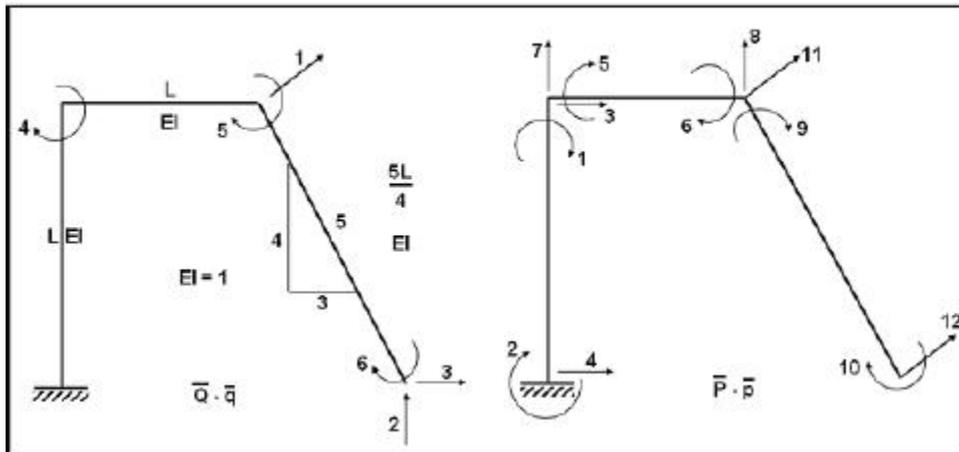


Ejercicio N.- 8



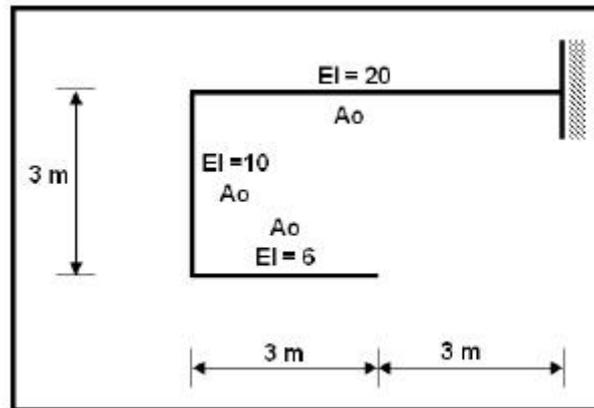
Ejercicio N.- 9

Encontrar la matriz A para la siguiente estructura, empleando los sistemas de coordenadas $Q - q$ y $P - p$ que se indican, si todos los elementos son axialmente rígidos. Existen 4 coordenadas $P - p$ en cada elemento.



En las siguientes estructuras seleccionar sistemas $Q - q$ y $P - p$ apropiados y determinar la matriz B tal que $P = BQ$

Ejercicio N.- 10

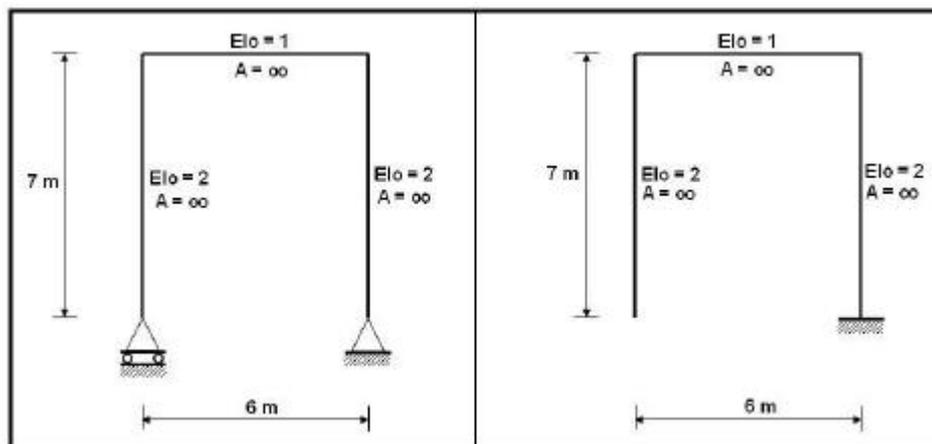


Ejercicio N.- 11

Resolver el ejercicio anterior considerando que todos los elementos son axialmente rígidos.

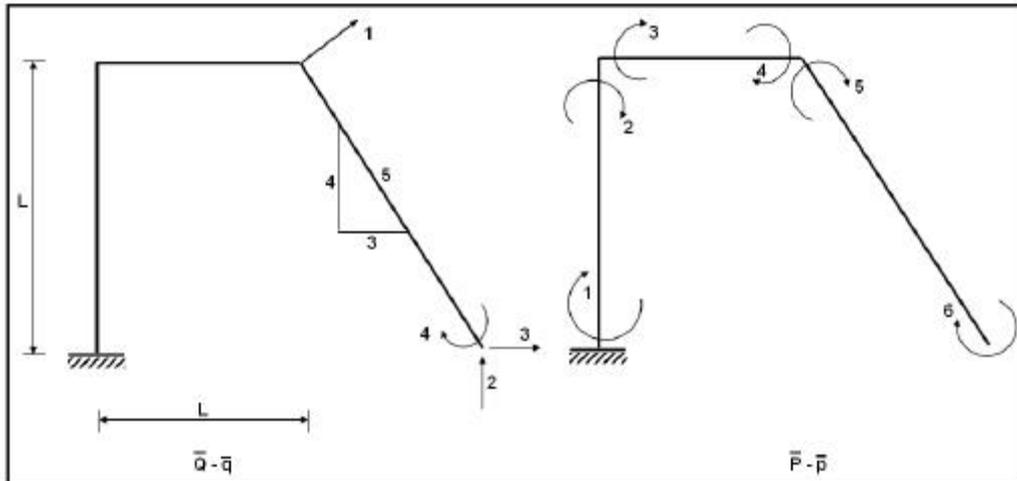
Ejercicio N.- 12

Ejercicio N.- 13



Ejercicio N.- 14

Calcular la matriz B para la siguiente estructura empleando los sistemas de coordenadas de la estructura y de los elementos que se indica a continuación.



CAPITULO 10

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA ESTRUCTURA POR MEDIO DE LA MATRIZ A

RESUMEN

Se presenta el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura de dos formas a saber: la primera trabajando con toda la matriz de compatibilidad de deformaciones y la segunda, que es la que más se utiliza, calculando con las sub matrices de la matriz A . Se realizan una serie de ejemplos considerando diferentes sistemas de coordenadas en los elementos y estructuras mixtas con elementos de hormigón y de acero.

Un pórtico de acero puede resolverse como que fuera de hormigón armado, considerando tres grados de libertad en cada uno de los nudos, siempre y cuando los nudos sean pre calificados por el AISC de tal forma que sus elementos tengan capacidad a flexión, para esto se presenta un nudo calificado para que el lector vea cuando puede modelar una estructura de acero, en el plano con tres grados de libertad; esto en contraste con las estructuras de acero con uniones simples.

Para que el lector pueda desarrollar los triples productos matriciales que se requieren para calcular la matriz de rigidez, se recomienda el uso de **MATLAB**.

10.1 FORMULACIÓN MATRICIAL

En los capítulos anteriores se estudió con detenimiento las siguientes ecuaciones:

$$p = A q \quad (10.1)$$

$$P = k p \quad (10.2)$$

$$Q = A^t P \quad (10.3)$$

Al sustituir la ecuación (10.2) en la ecuación (10.3) se tiene:

$$Q = A^t k p$$

Si en ésta última relación matricial se reemplaza la ecuación (10.1) se obtiene:

$$Q = (A^t k A) q \quad (10.4)$$

Por otra parte se conoce que:

$$Q = K q \quad (10.5)$$

De las ecuaciones (10.4) y (10.5) se deduce que la matriz de rigidez de una estructura se obtiene realizando el siguiente triple producto matricial:

$$K = A^t k A \quad (10.6)$$

Donde K es la matriz de rigidez de la estructura; A es la matriz de compatibilidad de deformaciones; k es la matriz que está conformada por las matrices de rigidez de cada uno de los elementos de la estructura colocados en la diagonal.

Desde el punto de vista matemático, la deducción de la ecuación (10.6) no es rigurosa, concretamente no se ha justificado el porqué de los paréntesis que se presenta en la ecuación (10.4). Esta omisión por parte del autor se lo ha realizado con el propósito de no desviar la atención del estudiante y lo más importante presentar el problema de una manera sencilla. Una demostración más rigurosa implicaría el estudiar primero aplicaciones lineales:

$$f : R^n \rightarrow R^n$$

Y posteriormente espacios vectoriales. Con ésta aclaración se pasa a realizar ejercicios que ayuden a comprender el uso de la ecuación (10.6).

• EJEMPLO 1

Para la estructura, presentada a la izquierda de la figura 10.1, cuyos elementos son axialmente rígidos, se pide calcular la matriz de rigidez, utilizando el sistema de coordenadas $Q - q$ indicadas a la derecha de 10.1. En las figuras 10.2 se presenta el sistema de coordenadas de los elementos $P - p$ y la numeración de los elementos con los cuales se halló la matriz A .

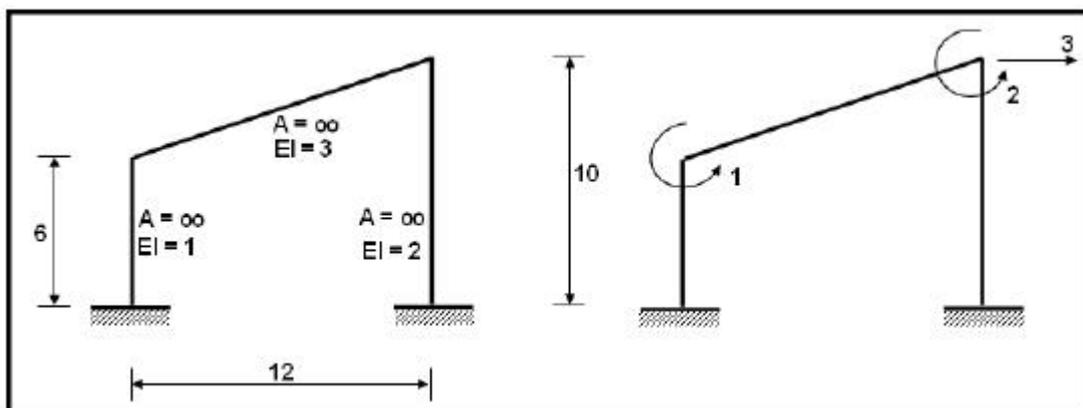


Figura 10.1 Estructura de Ejemplo 1 y sistema de coordenadas $Q - q$

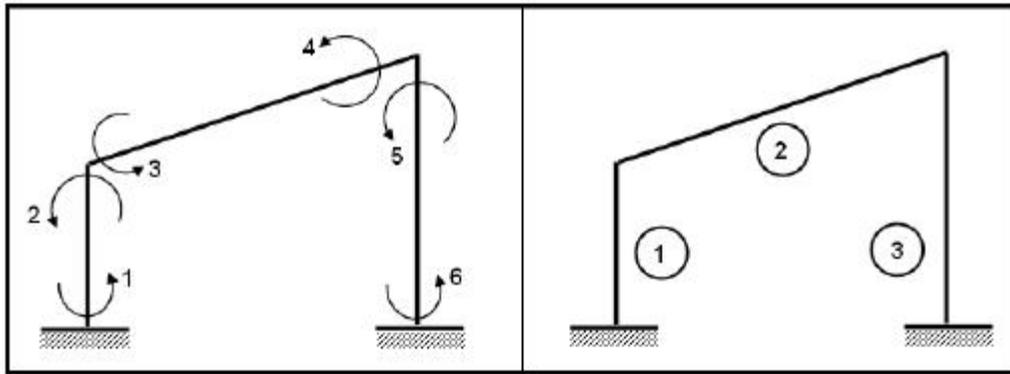


Figura 10.3 Sistema de coordenadas $P - p$ y numeración de los elementos.

La matriz A que se obtiene es:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & \frac{1}{6} \\
 1 & 0 & \frac{1}{6} \\
 \hline
 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & \frac{1}{10} \\
 0 & 0 & \frac{1}{10}
 \end{bmatrix}$$

• **SOLUCIÓN**

En éste capítulo no se calculará la matriz A que fue estudiada en el capítulo anterior. Es responsabilidad del lector realizar su comprobación.

Por ser los elementos axialmente rígidos, hipótesis del Ejemplo, la matriz de rigidez para elementos de sección constante y al despreciar el efecto de corte es:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -L & 2EI & 2 \\ \frac{2EI}{L} & 4EI & L & 1 \\ \frac{2EI}{L} & -L & 2EI & 2 \\ \frac{EI}{L} & 0 & EI & 1 \end{bmatrix}$$

Para los datos numéricos del Ejemplo, se tiene:

$$\underline{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz \underline{k} que consta en la ecuación (10.6) para el ejercicio es:

$$\underline{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & k^{(3)} \end{bmatrix}$$

Al sustituir los valores obtenidos se encuentra:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{20} & \frac{3}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Al efectuar el producto matricial $A^t k A$ se obtiene la matriz de rigidez de la estructura K .

$$K = \begin{bmatrix} 1.616 & 0.474 & 0.167 \\ 0.474 & 1.749 & 0.120 \\ 0.167 & 0.120 & 0.080 \end{bmatrix}$$

10.2 CÁLCULO DE K TRABAJANDO CON SUBMATRICES

El calcular la matriz de rigidez de una estructura por la forma propuesta en el apartado anterior implica trabajar con matrices cuyo orden es demasiado alto. Por éste motivo se busca un algoritmo de cálculo que conduzca a los mismos resultados pero trabajando con matrices de menor orden. Para lograr este objetivo se recuerda que la matriz A es particionada. En efecto ésta matriz está compuesta por sub matrices, tantas como elementos tenga la estructura.

En el ejemplo anterior se tiene que las dos primeras filas de la matriz de compatibilidad de deformaciones A corresponden al elemento 1, las dos siguientes al elemento 2 y las dos últimas al elemento 3.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

En función de las sub matrices, la matriz A para el ejemplo 1 es la siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ \text{---} \\ A^{(2)} \\ \text{---} \\ A^{(3)} \end{bmatrix}$$

Para el caso general la forma de la matriz de compatibilidad de deformaciones es:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ A^{(i)} \\ \dots \\ \dots \\ A^{(n)} \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz A^t resulta:

$$A^t = \left[A^{(1)t} \quad A^{(2)t} \quad \dots \quad \dots \quad A^{(i)t} \quad \dots \quad \dots \quad A^{(n)t} \right]$$

Al realizar el triple producto matricial $A^t k A$ con las sub matrices y considerando que la matriz k está compuesta por las matrices de rigidez de los elementos colocados en la diagonal se obtiene:

$$K = \sum_{i=1}^n A^{(i)t} k^{(i)} A^{(i)} \quad (10.7)$$

Donde n es el número de elementos que tiene la estructura. La sumatoria se realiza hasta n cuando la estructura analizada no tiene elementos totalmente flexibles. Para el caso de que la estructura tenga elementos totalmente rígidos, primero la matriz A ya no tendrá n sub matrices si no menos, tantas como elementos totalmente rígidos se tengan. Luego la sumatoria ya no será hasta n .

• EJEMPLO 2

Por el procedimiento descrito en el apartado 10.2 calcular la matriz de rigidez de la estructura presentada en la figura 10.5. Cuyo elemento vertical es transversalmente rígido.

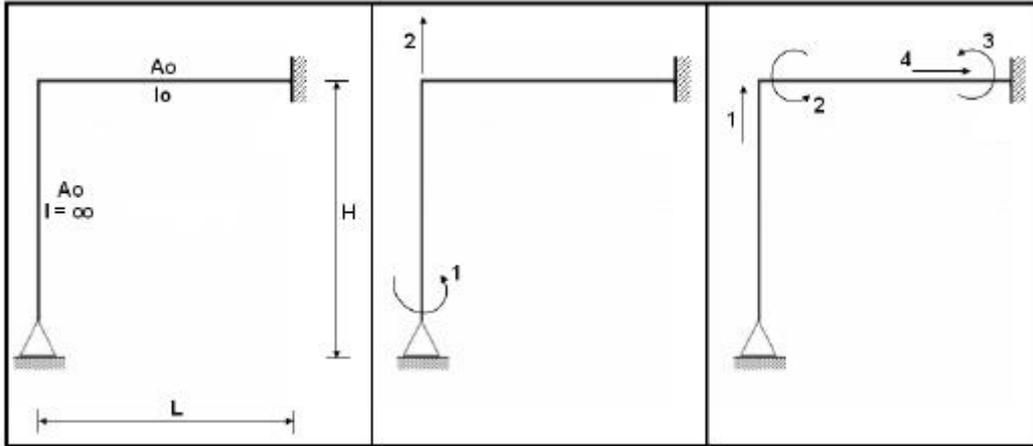


Figura 10.3 Sistema de coordenadas de la estructura $Q-q$ y de elementos $P-p$

• SOLUCIÓN

Al centro y a la derecha de la figura 10.3, se presentan los sistemas $Q-q$ y $P-p$ respectivamente, para los cuales se obtuvo la siguiente matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} \\ H & 0 \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo se tiene:

$$k^{(1)} = \begin{bmatrix} EA_0 \\ H \end{bmatrix} \quad k^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_0}{L} & \frac{2EI_0}{L} & 0 \\ \frac{2EI_0}{L} & \frac{4EI_0}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_0}{L} \end{bmatrix}$$

El resultado de los productos matriciales reporta:

$$A^{(1)T} k^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_0}{H} \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)T} k^{(2)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} + \frac{EA_o H^2}{L} & \frac{6EI_o}{L^2} \\ \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{12EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4EI_o}{L} + \frac{EA_o H^2}{L} & \frac{6EI_o}{L^2} \\ 0 & EA_o & \frac{6EI_o}{L^2} & \frac{12EI_o}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4EI_o}{L} + \frac{EA_o H^2}{L} & & & \\ & EA_o & & \\ & & \frac{12EI_o}{L^3} & \\ & & & \frac{EA_o}{H} \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 3

Las columnas y viga de la estructura de la figura 10.4 son de hormigón de armado y fue reforzada con una diagonal de acero, la misma que ha sido modelada como una unión simple. Se considera que la viga es axialmente rígida; las columnas tienen un área $2A_0$ y un momento de inercia a flexión $2I_0$; la viga tiene una inercia I_0 y la diagonal de acero A_0 .

En la figura 10.5, a la izquierda se indica el sistema de coordenadas generalizadas y a la derecha el sistema de coordenadas de los elementos. El módulo de elasticidad del hormigón es E_c y el módulo de elasticidad del acero E_s . Se pide:

- i) Obtener la matriz de compatibilidad de deformaciones A
- ii) Presentar los triples productos matriciales que conducen al cálculo de la matriz de rigidez por la segunda forma de cálculo.
- iii) Encontrar la matriz de rigidez de la estructura.

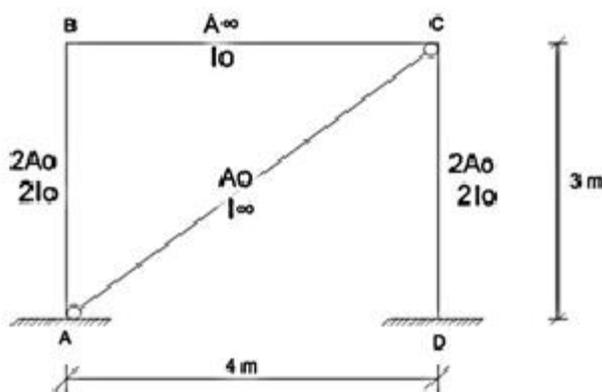


Figura 10.4 Estructura mixta de hormigón y acero.