

En resumen,  $Q_1$  es el trabajo virtual del sistema de cargas, presentado a la derecha de 4.26 en la deformada elemental correspondiente a  $\delta q_1$ . Para calcular  $Q_2$  se debe evaluar el trabajo virtual del sistema de cargas en la deformada elemental  $\delta q_2$ , etc. En consecuencia se evalúa una por una las componentes del vector de cargas generalizadas  $Q$

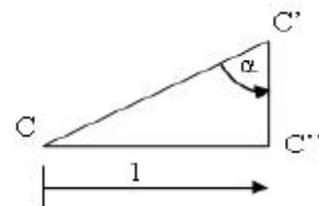
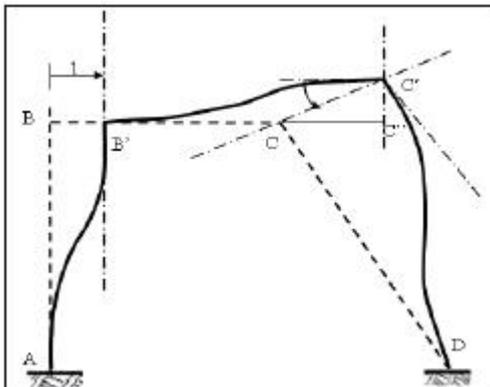
• EJEMPLO 6

Calcular el vector  $Q$ , empleando trabajos virtuales, para la estructura de la figura 4.16, que tiene dos elementos axialmente rígidos. Considerar el sistema de coordenadas generalizadas indicado en la mencionada figura.

• SOLUCIÓN

▪ Cálculo de  $Q_1$

$\delta q_1 = 1$                       y                       $\delta q_i = 0$                        $i \neq 1$



En el triángulo  $CC'C''$  se tiene:  
 $C'C'' = \text{Cotg } \alpha = 3/4$

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 4.26 en la deformada elemental dibujada, vale:

$$Q_1 = TV = 1000(\text{kg}) * 1 + 3000(\text{kg m}) * 0 - 8000(\text{kg}) * \frac{3}{4} + Y$$

La carga horizontal de 1000 Kg que actúa en la junta B produce un TV positivo, toda vez que el nudo B se desplaza a B' en la misma dirección de la aplicación de la carga. En cambio la carga vertical de 8000 Kg que gravita en el nudo C hacia abajo genera un trabajo vertical negativo ya que la junta C se desplaza hacia arriba hasta C'. El momento de 3000 Kg.m no produce TV ya que la junta B no rota.

Sea Y el trabajo virtual producido por la carga uniformemente distribuida, ver figura 4.27, en la deformada del elemento horizontal. Para un elemento diferencial  $dx$ , la carga concentrada vale  $P dx$ , hacia abajo y el desplazamiento para ese punto es  $v(x)$  hacia arriba. Por lo tanto, el trabajo virtual es negativo.

$$Y = \int_0^l - P v(x) dx$$

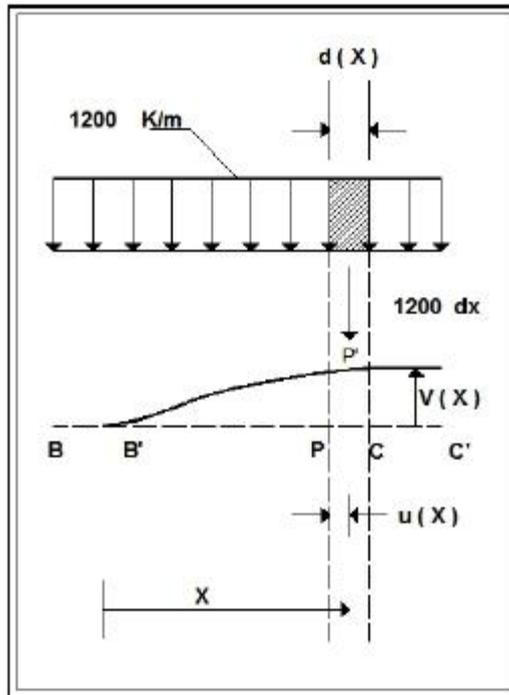


Figura 4.27 Trabajo virtual para una carga distribuida.

Al remplazar valores se tiene:

$$Y = \int_0^4 -1200 * v(x) dx$$

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)$$

En la deformada elemental se tiene que  $v_1 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$  y  $v_2 = \frac{3}{4}$ . Luego:

$$v(x) = \frac{3}{4} \left( \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \right)$$

Reemplazando en la integral el valor de  $v(x)$ :

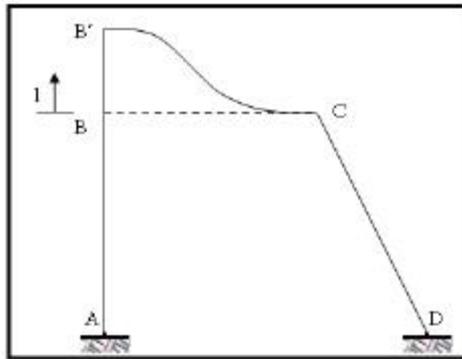
$$Y = -1200 \int_0^4 \frac{3}{4} \left( \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \right) dx = -900 \left[ \frac{3X^3}{L^2} - \frac{2X^4}{L^3} \right]_0^4 = -1800 \text{ Kg}$$

Por lo tanto, la carga generalizada correspondiente a la coordenada  $q_1$  vale:

$$Q_1 = 1000 \text{ Kg.} - 6000 \text{ Kg.} - 1800 \text{ Kg.} = - 6800 \text{ Kg.}$$

▪ Cálculo de  $Q_2$

$\delta q_2 = 0$       y       $\delta q_i = 0$        $i \neq 2$



En este caso solamente la carga distribuida produce trabajo virtual.

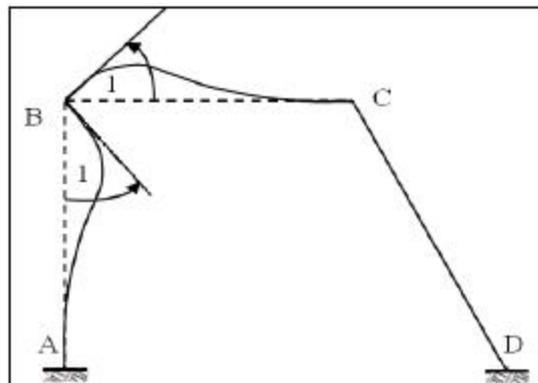
$$Q_2 = \int_0^L -1200 \cdot v(x) \cdot dx$$

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) = L \left( 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right)$$

$$Q_2 = -1200 \int_0^L \left( 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) dx = -2400 \text{ Kg}$$

▪ Cálculo de  $Q_3$

$\delta q_3 = 1$       y       $\delta q_i = 0$        $i \neq 3$



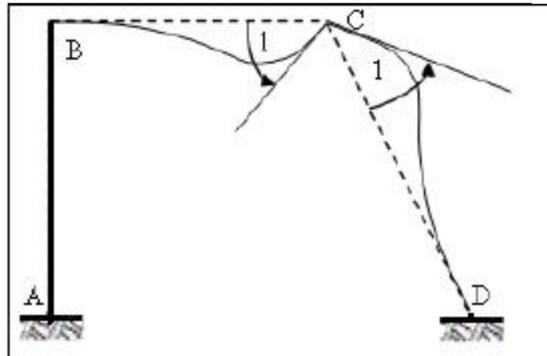
$$Q_3 = 3000 \text{ Kg m} \cdot 1 + \int_0^L -1200 v(x) dx$$

$$v(x) = \theta_1 \phi_3(x) = 1 * X \left( 1 - \frac{X}{L} \right)^2$$

$$Q_3 = 3000 - 1200 \int_0^4 X \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dx = 1400 \text{ (Kg.m)}$$

▪ Cálculo de  $Q_4$

$$\delta q_4 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$



$$Q_4 = \int_0^4 -1200 \cdot v(x) \cdot dx$$

$$v(x) = \theta_2 \phi_6(x) = -\frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

$$Q_4 = -1200 \int_0^4 -\frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L}\right) dx = 1600 \text{ kg.m}$$

Por lo tanto, el vector de cargas generalizadas, es:

$$Q = \begin{bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

Es más laborioso el cálculo del vector  $Q$  empleando trabajos virtuales pero para ciertos problemas puede ser de gran utilidad.

### 4.3 EJERCICIOS RESUELTOS

• EJEMPLO 7

Todos los elementos del pórtico de la figura 4.28 se consideran axialmente rígidos. Se pide:

- i) Seleccionar un sistema de coordinas  $Q - q$  apropiado.
- ii) Resolver el Problema Primario.
- iii) Señalar cual es el Problema Complementario.
- iv) Determinar el vector de cargas generalizadas  $Q$

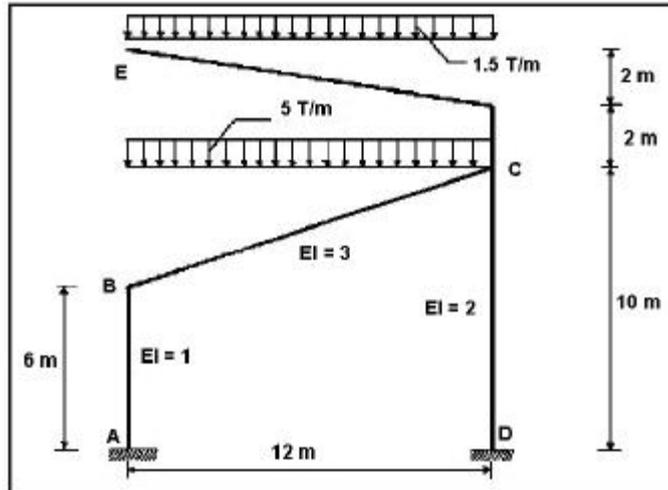


Figura 4.28 Estructura de Ejemplo 7

• SOLUCIÓN

i) Sistema de Coordenadas  $Q - q$

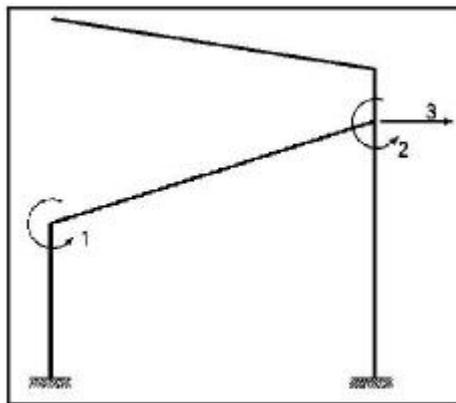
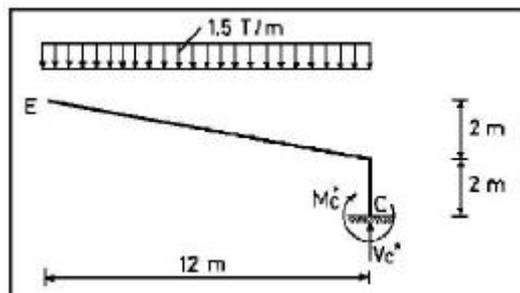


Figura 4.29 Sistema  $Q - q$

Al elemento EC se lo va a considerar como un voladizo. Por lo tanto hay que calcular las fuerzas exteriores que actúan en el nudo C por efecto de la carga de 1.5 T/m.



$$M_c^* = 1.5 * \frac{(12.0)^2}{2} = 108 \text{ Tm.}$$

$$V_c^* = 1.5 * 12 = 18 \text{ T}$$

Estas fuerzas  $V_C^*$  y  $M_C^*$  actúan en el nudo C, con sentido contrario en el resto de la estructura como se indica a continuación, sin el voladizo.

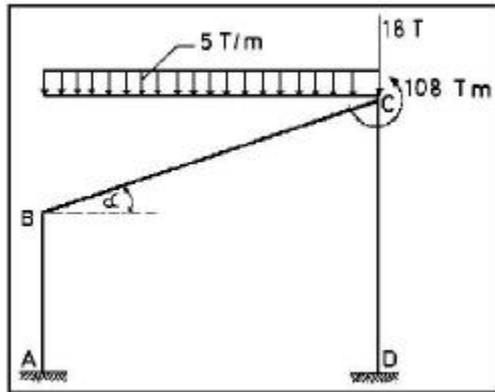


Figura 4.31 Estructura con carga equivalente del voladizo

$$\text{Sen } \alpha = \frac{4}{160} \quad \text{Cos } \alpha = \frac{12}{160} \quad \text{Longitud BC} = 160 \text{ m.}$$

iii) Problema Primario

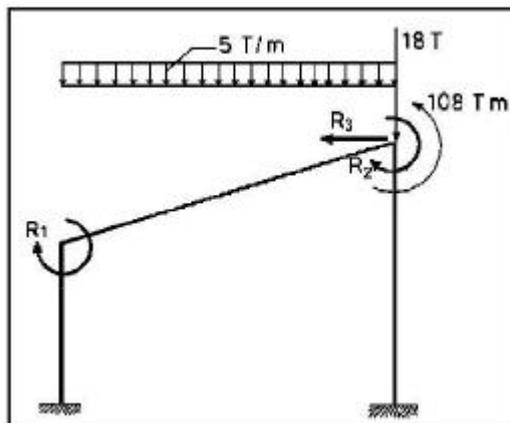
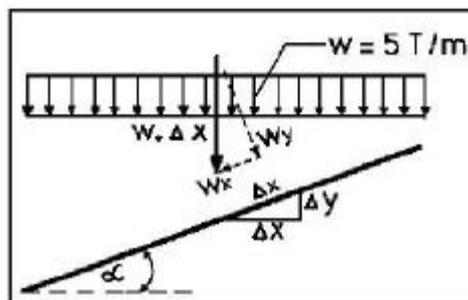
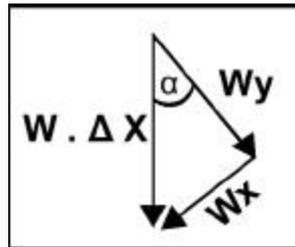


Figura 4.32 Problema Primario,  $q = 0$

- Descomposición de la carga distribuida



$$W_y = W \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} \text{Cos } \alpha \quad W_x = W \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} \text{Sen } \alpha$$



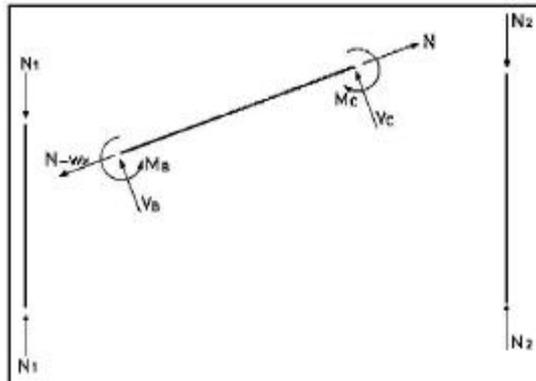
Pero  $\frac{\Delta X}{\Delta x} = \cos \alpha$ . Luego las cargas uniformes distribuidas perpendicular y axial al eje del elemento son:

$$w_y = W \cos^2 \alpha = W \frac{144}{160} = 4.5 \frac{T}{m}$$

$$w_x = W \sin \alpha \cos \alpha = W \cdot \frac{48}{160} = 1.5 \frac{T}{m}$$

Donde  $w_y$  es la carga uniforme distribuida que actúa perpendicular al eje del elemento y  $w_x$  es la carga uniforme distribuida que actúa axialmente al eje del elemento.

- **Equilibrio de Elementos**



La resultante de la fuerza axial  $W_x$  es igual a la carga uniforme distribuida axial por la longitud.

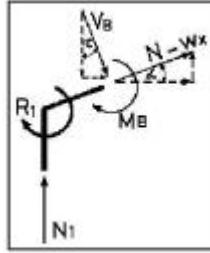
$$W_x = w_x \cdot 160 = 1.5 \cdot 160 = 18.974 T.$$

$$V_B = V_C = \frac{w_y \cdot 160}{2} = \frac{4.5 \cdot 160}{2} = 28.460 T.$$

$$M_B = M_C = \frac{w_y \cdot 160}{12} = \frac{4.5 \cdot 160}{12} = 60.00 Tm.$$

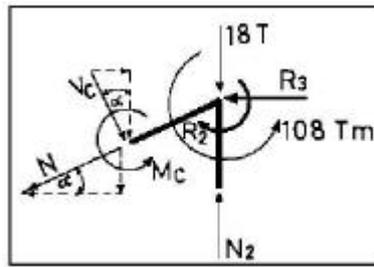
- Equilibrio de Nudos

## Nudo B



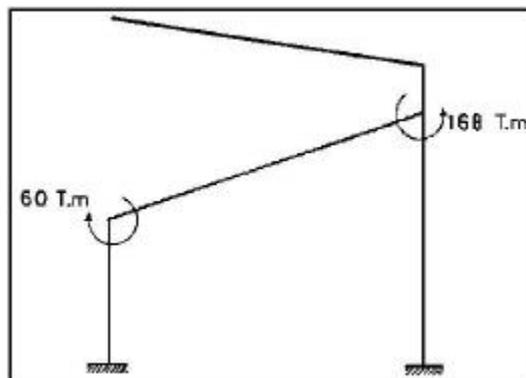
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow (N - W_x) \cos \alpha + V_B \operatorname{Sen} \alpha &\Rightarrow N = 9.487 T. \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_1 + (N - W_x) \operatorname{Sen} \alpha - V_B \operatorname{Cos} \alpha = 0 &\Rightarrow N_1 = 30.00 T. \\ \sum M = 0 &\Rightarrow M_B + R_1 = 0 &\Rightarrow R_1 = -60.00 Tm. \end{aligned}$$

## Nudo C



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V_c \operatorname{Sen} \alpha - N \operatorname{Cos} \alpha - R_3 &\Rightarrow R_3 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -V_c \operatorname{Cos} \alpha - N \operatorname{Sen} \alpha - 18 + N_2 = 0 &\Rightarrow N_2 = 48.00 T. \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_2 - 108 - M_c = 0 &\Rightarrow R_2 = 168.00 Tm. \end{aligned}$$

## iv) Problema Complementario



v) Vector  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -60.00 \\ 168.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 8

Obtener el vector de cargas generalizadas  $Q$  para el pórtico plano de la figura 4.8, empleando trabajos virtuales.

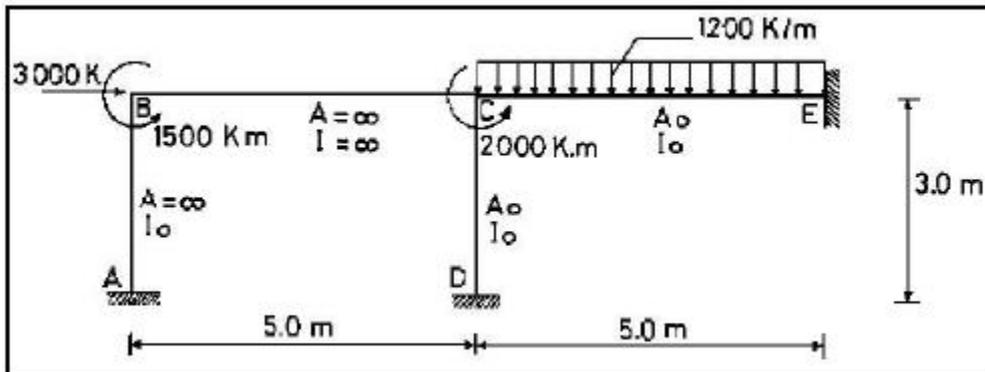


Figura 4.33 Estructura del Ejemplo 8.

• SOLUCIÓN

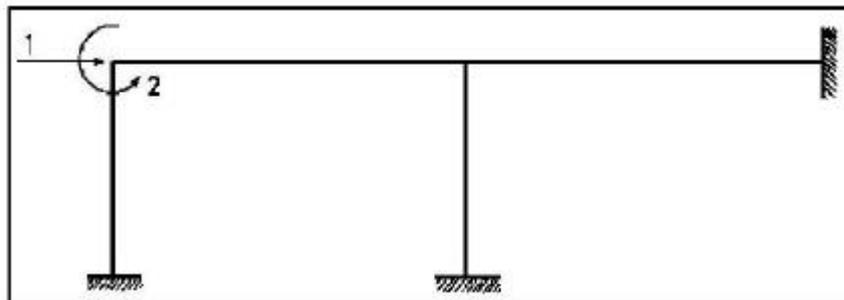
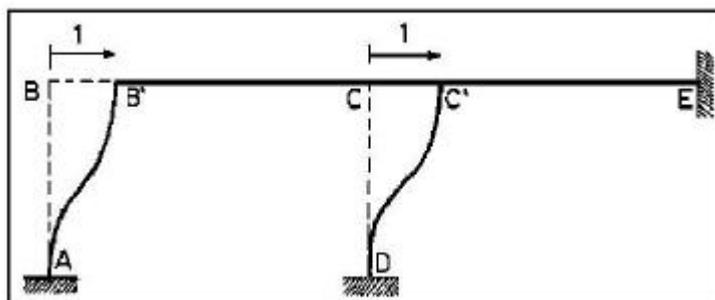


Figura 4.34 Sistema  $Q - q$

a. Cálculo de  $Q_i$

$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$

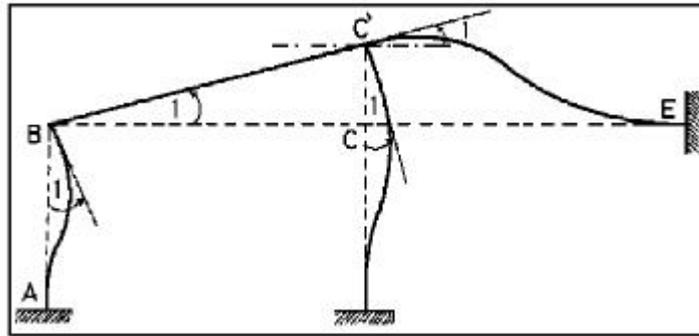


$$Q_1 = 3000 * 1 + 1500 * 0 + 2000 * 0 = 3000 \text{ Kg.}$$

La carga uniforme distribuida en este caso no produce trabajo virtual por la forma de la deformada elemental.

b. Cálculo de  $Q_2$

$$\delta q_2 = 2 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



$$Q_2 = 1500 * 1 + 2000 * 1 - \int_0^5 1200 v(x) dx$$

Para el elemento CE se tiene:

$$\begin{aligned} v_1 &= 5 & v_2 &= 0 \\ \theta_1 &= 1 & \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

El valor de  $v_1$  se obtiene aplicando el siguiente artificio en el elemento BC. Cuerda  $CC'$  dividido para el radio que viene a ser BC es igual al ángulo unitario. De donde  $CC' = BC$ . Este artificio únicamente se aplica en los elementos  $I = \infty$ . El valor de  $v(x)$  resulta:

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) = 5 \left[ \left( 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) \right] + \left( \frac{X}{L} \right) \left( 1 - \frac{X}{L} \right)^2$$

Sustituyendo el valor de  $v(x)$  en  $Q_2$  se tiene:

$$Q_2 = 3500 - 1200 \int_0^5 \left[ 5 \left( 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) + \left( \frac{X}{L} \right) \left( 1 - \frac{X}{L} \right)^2 \right] dx$$

Luego de realizar la integral y reemplazar los límites respectivos, se halla:

$$Q_2 = -14000 \text{ Kg.m.}$$

c. Vector  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -14000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

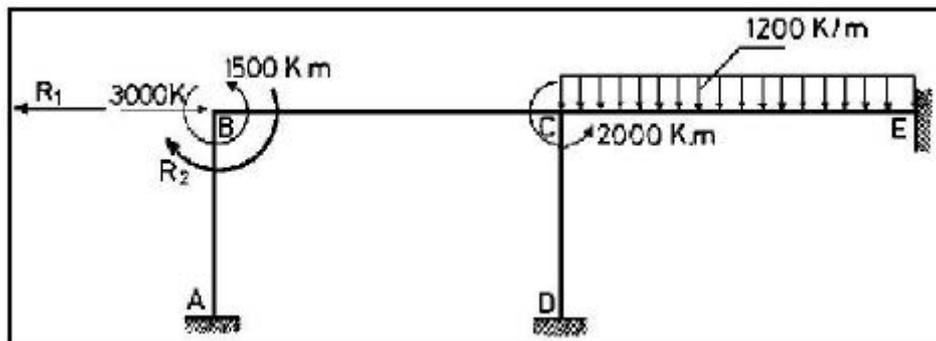
- **EJEMPLO 9**

Con relación al Ejemplo 8, ahora se pide:

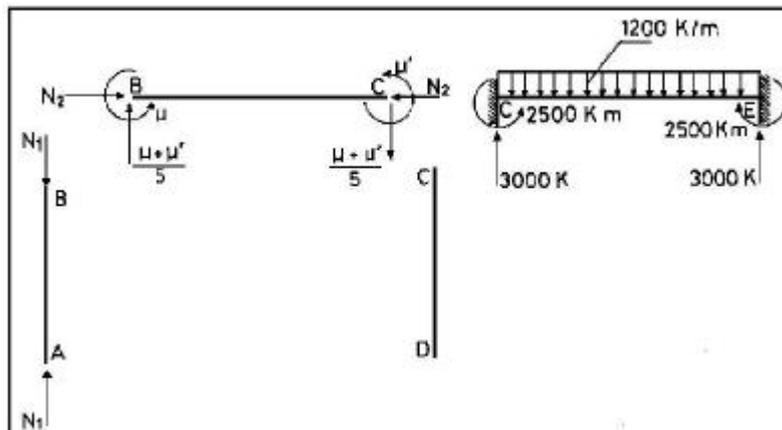
- Resolver el Problema Primario.
- Cuál es el problema Complementario.
- Obtener el vector  $Q$ .

- **SOLUCIÓN**

- Problema Primario

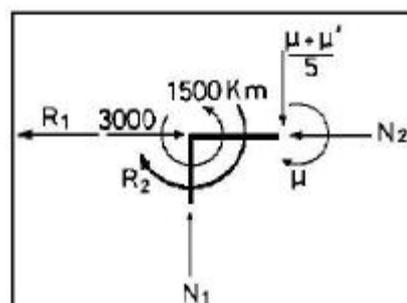


- **Equilibrio de Elementos**

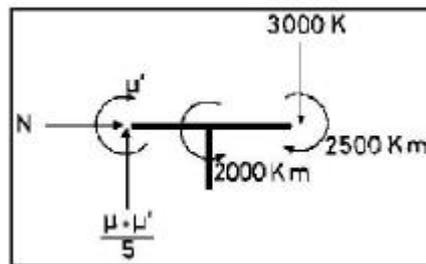


- **Equilibrio de Nudos**

**Nudo B**



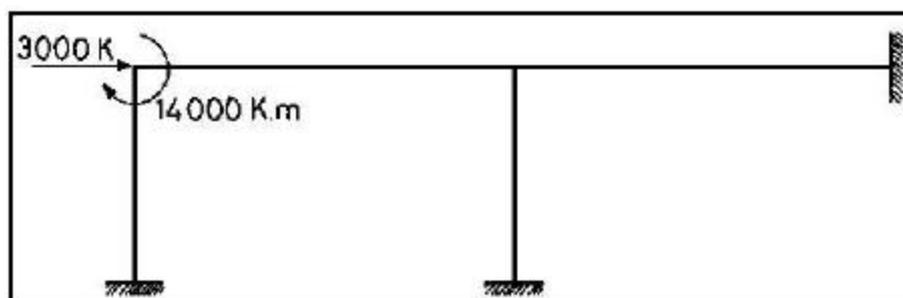
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow 3000 - R_1 - N_2 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_1 - \frac{(\mu + \mu')}{5} = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_2 + \mu - 1500 = 0\end{aligned}$$

**Nudo C****Figura 4.9.3**

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_2 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{(\mu + \mu')}{5} - 3000 = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow 2500 + \mu' - 2000 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}N_1 &= 3000 \text{ Kg.} & N_2 &= 0 & \mu &= 15500 \text{ Kg.m.} \\ \mu' &= -500 \text{ Kg. m.} & R_1 &= 3000 \text{ Kg.} & R_2 &= -14000 \text{ Kg. m.}\end{aligned}$$

**b) Problema Complementario****c) Vector de Cargas Generalizadas Q**

$$Q = \begin{bmatrix} 3000 \\ -14000 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 10

Para la estructura de la figura 4.35, encontrar el vector de Cargas Generalizadas  $Q$  a través del Problema Primario y Complementario.

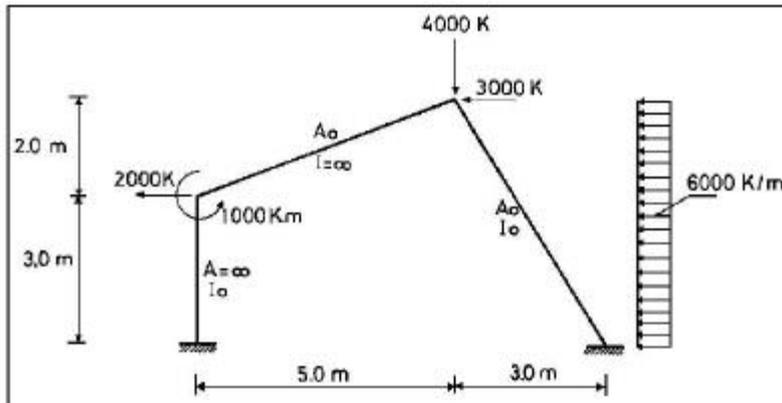


Figura 4.35 Estructura del Ejemplo 10.

Se va a calcular para los siguientes sistemas de coordenadas  $Q - q$ .

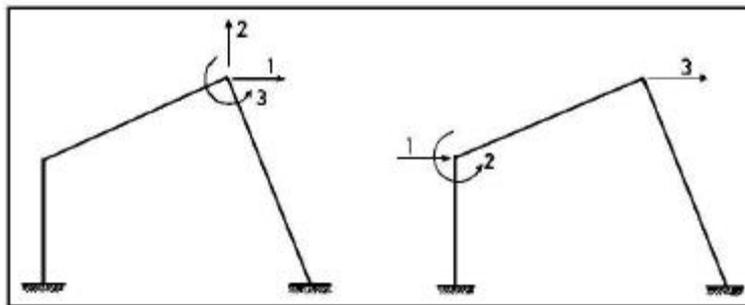


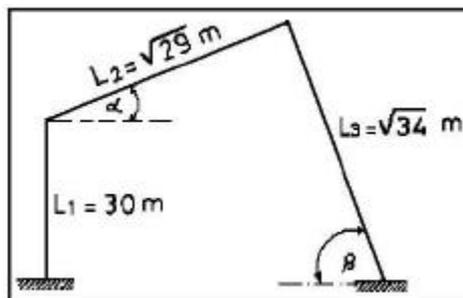
Figura 4.36 Sistemas de Coordenadas Seleccionadas

Sistema de coordenadas A

Sistema de Coordenadas B

• SOLUCIÓN

- Parámetros Geométricos



$$\begin{aligned} \operatorname{Sen}\alpha &= \frac{2}{29} & \operatorname{Sen}\beta &= \frac{5}{34} \\ \operatorname{Cos}\alpha &= \frac{5}{29} & \operatorname{Cos}\beta &= \frac{3}{34} \\ \operatorname{Tg}\alpha &= \frac{2}{5} & \operatorname{Tg}\beta &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Por didáctica se transforma la carga repartida en fuerzas y momentos actuando en los nudos, para ello se debe determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto que actúan en el elemento CD.

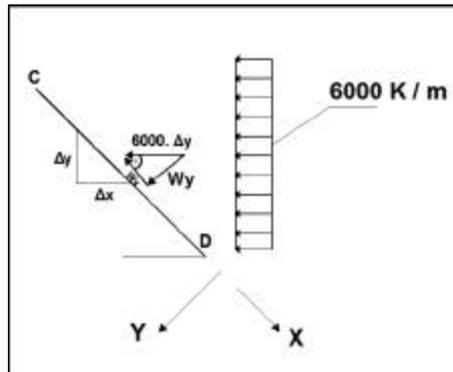


Figura 4.37 Descomposición de cargas

$$W_Y = 6000 \operatorname{Sen}\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 \operatorname{Sen}^2 \beta = 4411.765 \text{ Kg/m.}$$

$$W_X = 6000 \operatorname{Cos}\beta \frac{\Delta Y}{\Delta x} = 6000 \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sen}\beta = 2647.059 \text{ Kg/m.}$$

En consecuencia las acciones de empotramiento perfecto, son:

$$N_C = \int_0^{L_3} W_X \phi_1(x) dx = \int_0^{34} 2647.059 \left( \frac{1-X}{L_3} \right) dx = 7717.437 \text{ Kg.}$$

$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y \phi_2(x) dx = \int_0^{34} 4411.765 \left( 1 - \frac{3X^2}{L_3} + \frac{2X^3}{L_3} \right) dx = 12862.395 \text{ Kg.}$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_3(x) dx = \int_0^{34} 4411.765 \left( X - \frac{2X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3} \right) dx = 12500.001 \text{ Kg.m}$$

$$N_D = \int_0^{L_3} W_X \phi_4(x) dx = \int_0^{34} 2647.059 \left( \frac{X}{L_3} \right) dx = 7717.437 \text{ Kg.}$$

$$V_C = \int_0^{L_3} W_Y \phi_5(x) dx = \int_0^{34} 4411.765 \left( \frac{3X^2}{L_3} - \frac{2X^3}{L_3} \right) dx = 12862.395 \text{ Kg.}$$

$$M_c = \int_0^{L_3} W_Y \phi_6(x) dx = \int_0^{34} 4411.765 \left( -\frac{X^2}{L_3} + \frac{X^3}{L_3} \right) dx = -12500.001 \text{ Kg.m}$$

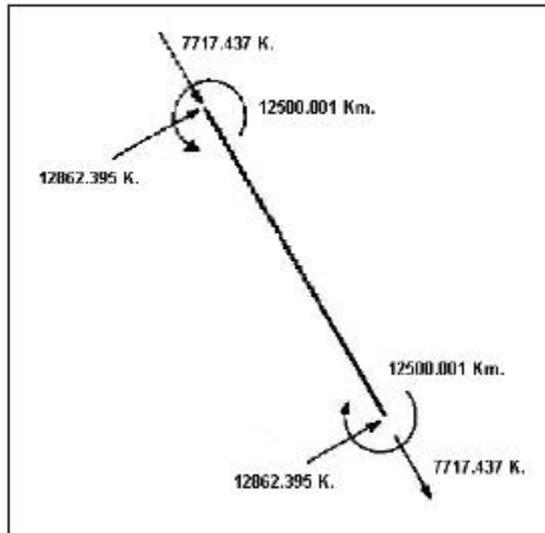


Figura 4.38 Acciones de empotramiento perfecto

En la estructura estas fuerzas actúan con sentido contrario. Por lo tanto el nuevo estado de cargas es el siguiente:

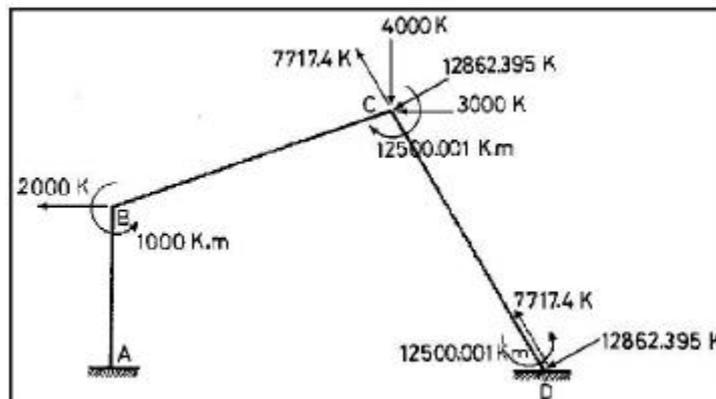
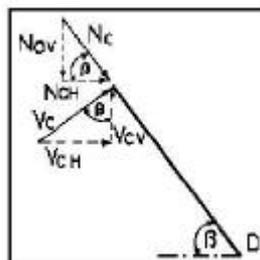


Figura 4.39 Estructura con cargas equivalentes.

Es conveniente tener solo fuerzas horizontales y verticales en el nudo C para esto se deben descomponer  $N_C$  y  $V_C$ .



$$N_{CV} = N_C \text{ Sen}\beta = 6617.648 (\downarrow)$$

$$N_{CH} = N_C \text{ Cos}\beta = 3970.589 (\rightarrow)$$

$$V_{CH} = V_C \text{ Sen}\beta = 11029.413 (\rightarrow)$$

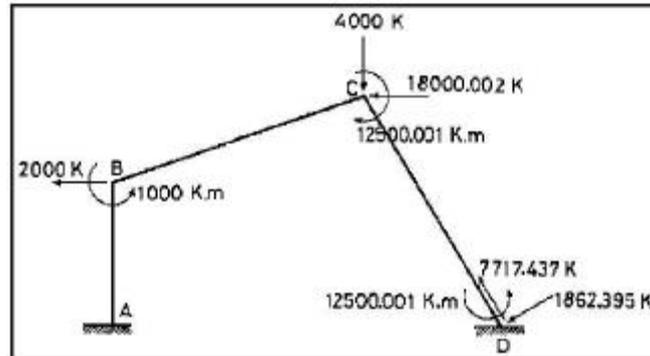
$$V_{CV} = V_C \text{ Cos}\beta = 6617.648 (\uparrow)$$

Por lo tanto, la fuerza horizontal que actúa en la Junta C, vale:

$$18000.002 \text{ Kg} = 3000 + 3970.589 + 11029.413 \quad (\leftarrow)$$

Y la fuerza vertical, vale:

$$4000 \text{ Kg} = 4000 + 6617.648 - 6617.648 \quad (\downarrow)$$



Al tener únicamente fuerzas y momentos en las juntas, la solución del problema se simplifica notablemente.

- SISTEMA DE COORDENADAS A
- Problema Primario

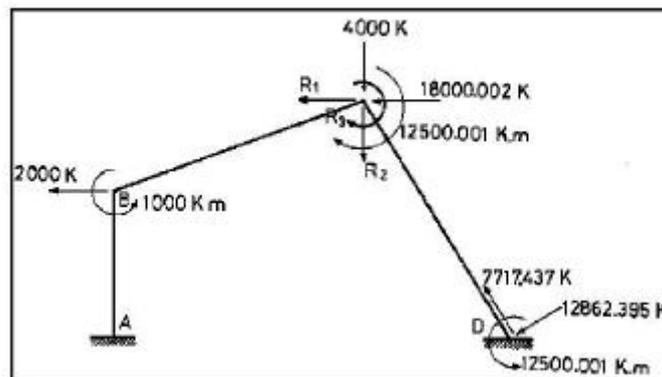
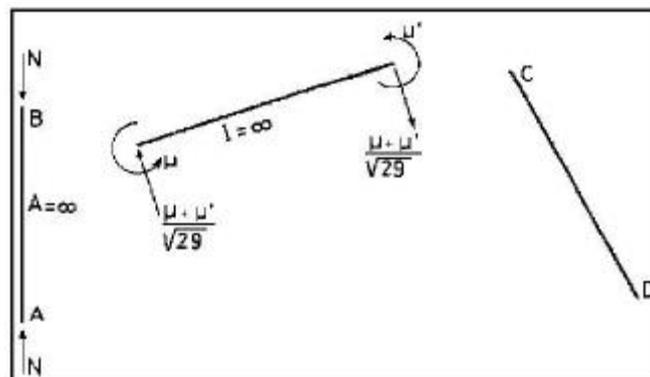


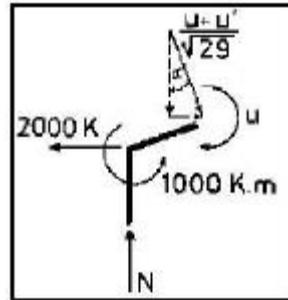
Figura 4.40 Problema Primario para sistema de coordenadas A.  $q = 0$

❖ Equilibrio de Elementos



## ❖ Equilibrio de Nudos

Nudo B

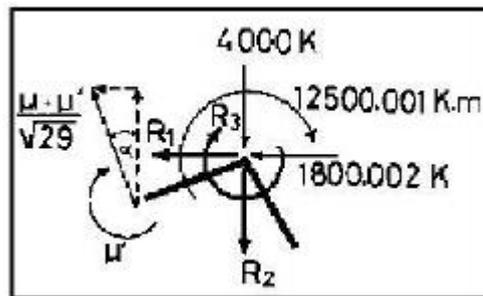


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu + \mu')}{29} - 2000 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - \frac{(\mu + \mu')}{29} \cdot 5 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu - 1000 = 0$$

Nudo C



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1800.002 + R_1 + \frac{(\mu + \mu')}{29} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\mu + \mu')}{29} \cdot 5 - 4000 - R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad 12500.001 + R_3 + \mu' = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\mu = 1000 \text{ Kg.m.}$$

$$R_1 = -20000.002 \text{ Kg.}$$

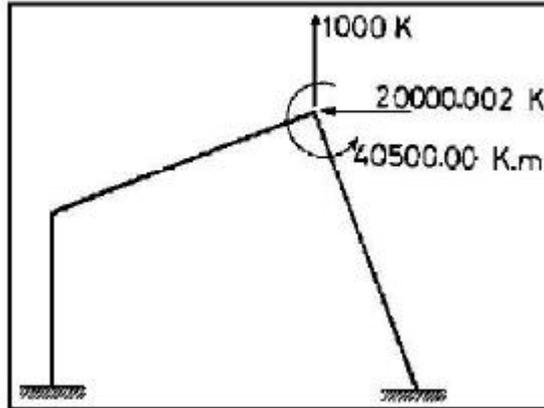
$$\mu' = 28000 \text{ Kg.m.}$$

$$R_2 = 1000 \text{ Kg.}$$

$$N = 5000 \text{ Kg.}$$

$$R_3 = -40500.01$$

▪ Problema Complementario



▪ Vector de Cargas Generalizadas  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

• SISTEMA DE COORDENADAS B

▪ Problema Primario

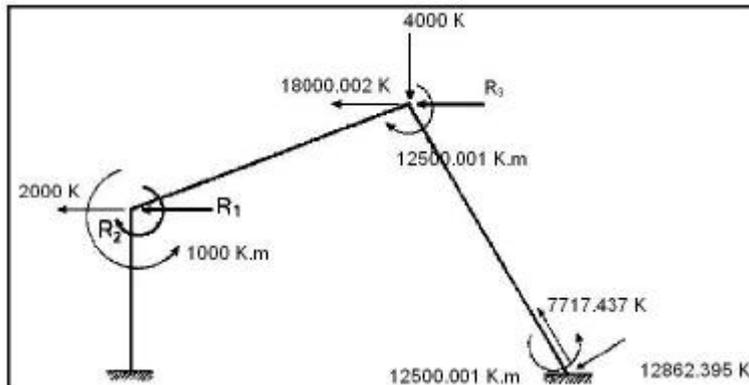
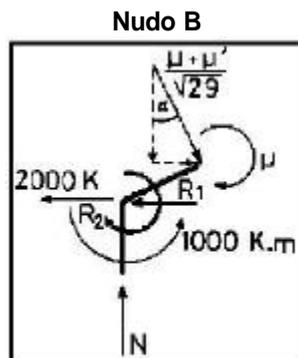


Figura 4.41 Problema Primario para el Sistema de Coordenadas B.

El equilibrio de los elementos es igual al anterior por lo que se omite su presentación.

❖ Equilibrio de Nudos

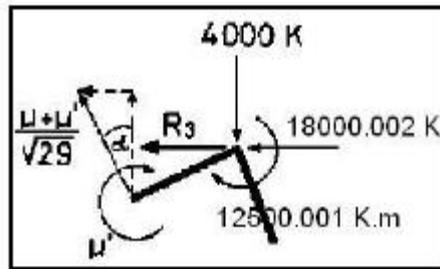


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{(\mu + \mu')}{29} \cdot 2 - 2000 - R_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - \frac{(\mu + \mu')}{29} \cdot 5 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow R_2 + \mu - 1000 = 0$$

**Nudo C**



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{(\mu + \mu')}{29} + R_3 + 18000.002 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{(\mu + \mu')}{29} - 4000 = 0$$

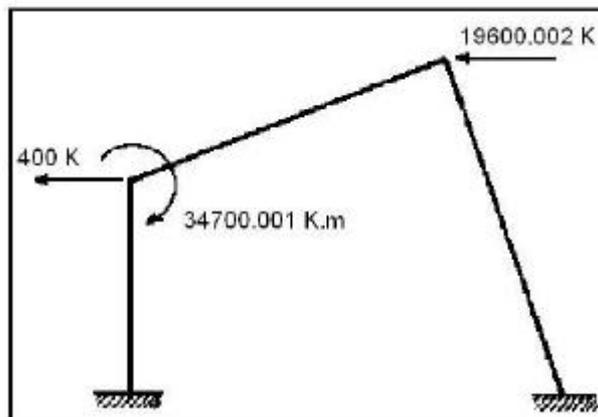
$$\sum M = 0 \Rightarrow 12500.001 + \mu' = 0$$

La solución de las ecuaciones reporta:

$$\mu = 35700.001 \text{ Kg.m.} \quad \mu' = -12500.001 \text{ Kg.m.} \quad N = 4000.000 \text{ Kg.}$$

$$R_1 = -400.000 \text{ Kg} \quad R_2 = -34700.001 \text{ Kg.m.} \quad R_3 = -19600.002 \text{ Kg.}$$

▪ **Problema Complementario**



- **Vector de Cargas Generalizadas  $Q$**

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

Nótese que se han obtenido dos vectores de cargas generalizadas diferentes. Esto se debe a que se trabaja con dos sistemas de coordenadas generalizadas diferentes. Pero la solución final total del ejercicio es la misma.

- **EJEMPLO 11**

Resolver el Ejemplo 10 para los dos sistemas de coordenadas  $Q - q$  pero mediante trabajos virtuales.

- **SOLUCIÓN**

Las cargas que actúan en la estructura son:

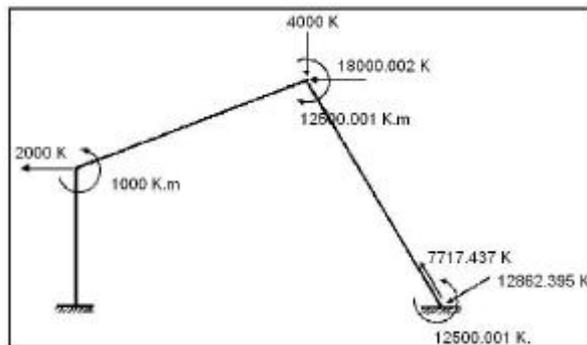
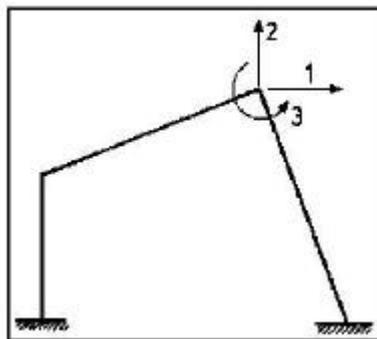


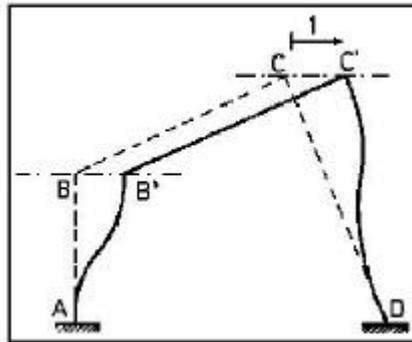
Figura 4.42 Cargas equivalentes que actúan en la estructura.

- **SISTEMA DE COORDENADAS A**



▪ Cálculo de  $Q_1$

$$\delta q_1 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

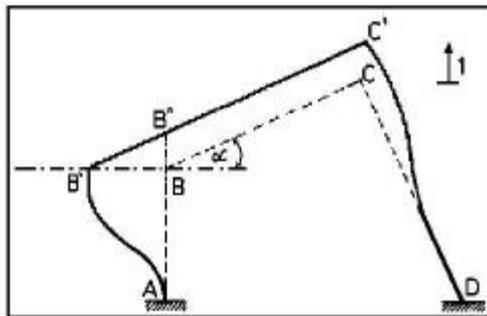


Debido a que el elemento BD es transversalmente rígido se cumple:  $BB' = C' = 1$

$$Q_1 = -2000 * 1 - 18000.002 * 1 = -20000.002 \text{ Kg.}$$

▪ Cálculo de  $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



Del gráfico se observa que  $CC' = BB'' = 1$ . En consecuencia en el triángulo  $BB'B''$  se tiene:

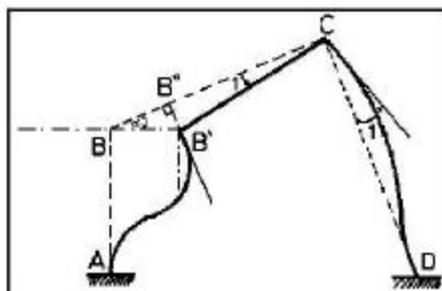
$$BB' = \text{Cotg } \alpha = \frac{5}{2}$$

Luego:

$$Q_2 = 2000 * \frac{5}{2} - 4000 * 1 = 1000 \text{ Kg}$$

▪ Cálculo de  $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$



Por construcción se tiene  $B'B'' = L_2 = \frac{29}{2}$ . Por lo tanto en el triángulo  $BB'B''$  se tiene:

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{B'B''}{BB'} \quad \Rightarrow \quad BB' = \operatorname{Cosc}\alpha \cdot B'B'' = \frac{29}{2} \cdot \frac{29}{2} = \frac{29}{2}$$

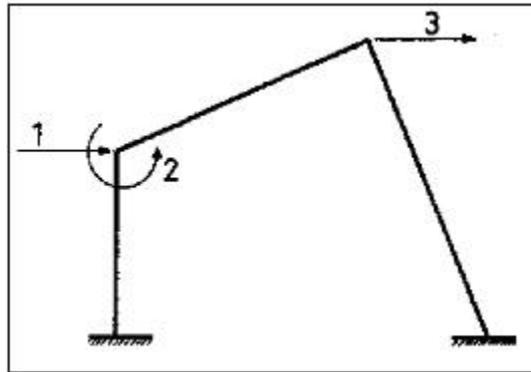
Luego:

$$Q_3 = -2000 * \frac{29}{2} + 1000 * 1 - 12500.001 * 1 = -40500.001 \text{ Kg.m.}$$

▪ **Vector de Cargas Generalizadas Q**

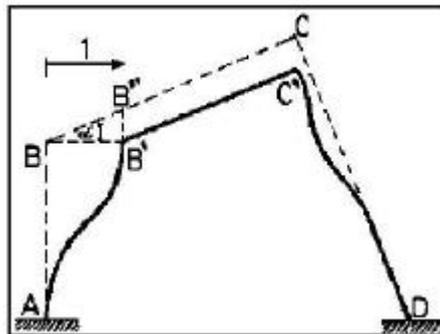
$$Q = \begin{bmatrix} -20000.002 \\ 1000.000 \\ -40500.001 \end{bmatrix}$$

• **SISTEMA DE COORDENADAS B**



▪ **Cálculo de  $Q_1$**

$$\delta q_1 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

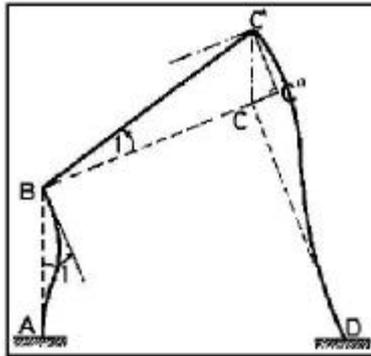


En el triángulo  $BB'B''$  se tiene:  $B'B'' = \operatorname{tg}\alpha = 2/5$ . Pero  $B'B'' = CC'$  debido a que  $BC$  es paralelo a  $B'C'$ . Por consiguiente.

$$Q_1 = -2000 * 1 + 4000 * \frac{2}{5} = -400 \text{ kg.}$$

▪ Cálculo de  $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



En el diagrama elemental se tiene  $C'C'' = L_2 = \sqrt{29}$ . Por otra parte en el triángulo  $CC'C''$  se tiene:

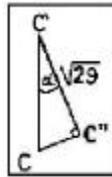


Figura 4.11.9

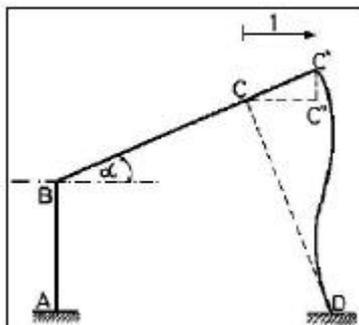
$$\cos \alpha = \frac{CC''}{C'C''} \Rightarrow CC'' = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{5}$$

De donde:

$$Q_2 = 1000 * 1 - 12500.001 * 1 - 4000 * \frac{29}{5} = 34700.001 \text{ Kg.m.}$$

▪ Cálculo de  $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$



En el triángulo  $CC'C''$  se observa que  $C'C'' = \text{tg} \alpha = 2/5$ . Luego el valor de  $Q_3$  resulta.

$$Q_3 = -4000 \frac{2}{5} - 18000.002 * 1 = -19600.002 \text{ Kg.}$$

- Vector de Cargas Generalizadas  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -400.000 \\ -34700.001 \\ -19600.002 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 12

Determinar el vector de cargas generalizadas  $Q$  para la armadura plana de la figura 4.43, por medio de trabajos virtuales. Todos los elementos son transversalmente rígidos.

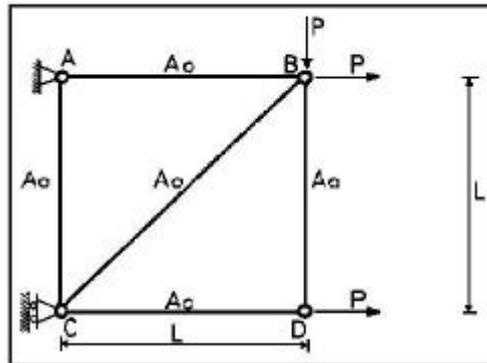


Figura 4.43 Armadura Plana del Ejemplo 12.

- SOLUCIÓN

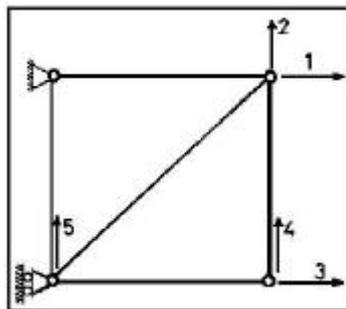
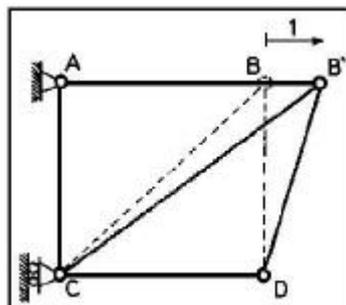


Figura 4.44 Sistema  $Q - q$

- Cálculo de  $Q_1$

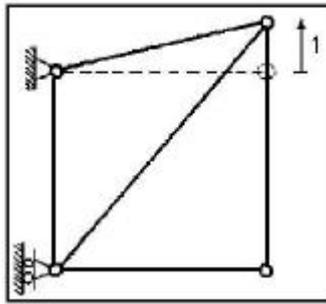
$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ } i \neq 1$$



$$Q_1 = P * 1 = P$$

▪ Cálculo de  $Q_2$

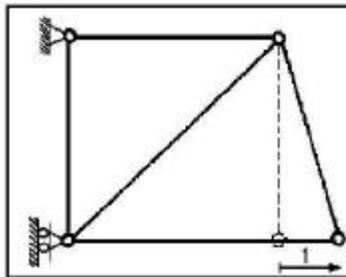
$$\delta q_2 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$



$$Q_2 = -P * l = -P$$

▪ Cálculo de  $Q_3$

$$\delta q_3 = 1 \quad y \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$



$$Q_3 = P * l = P$$

Se deja al lector el cálculo de  $Q_4$  y  $Q_5$ .

• EJEMPLO 13

En la siguiente estructura, la viga CD y la columna DE son axialmente rígidas, se pide:

- Seleccionar un sistema Q-q.
- Resolver el Problema Primario.
- Indicar el Problema Complementario.

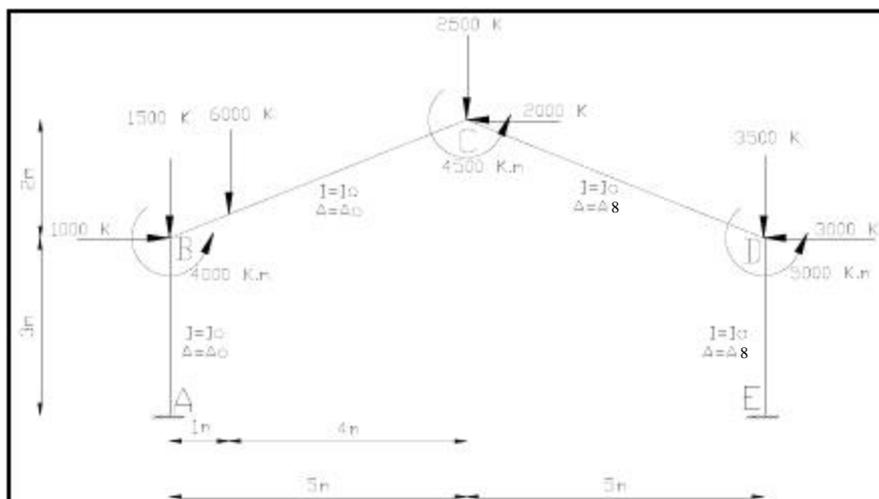


Figura 4.44 Estructura de Ejemplo 13

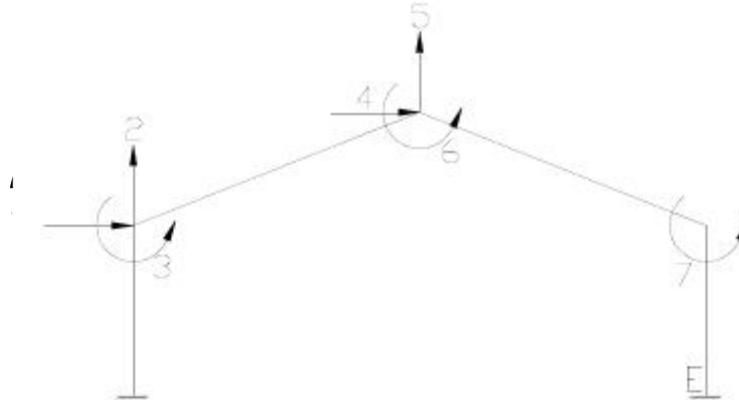


Figura 4.45 Sistema de coordenadas Q-q

Para calcular las acciones de empotramiento perfecto del elemento inclinado con una carga de 6000 K., se debe encontrar las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$l = \sqrt{29}$$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{l} = 1 - \frac{\sqrt{29}}{5 * \sqrt{29}} = 0.8$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3 * x^2}{2 * l^2} = 1 - \frac{3 * 29}{25 * 29} = 0.896$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.896 = 0.104$$

$$\phi_3(x) = x - \frac{2 * x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} = \frac{\sqrt{29}}{5} - \frac{2 * 29}{25 * \sqrt{29}} + \frac{25 * \sqrt{29}}{125 * 29} = 0.68$$

$$\phi_6(x) = x - \phi_3(x) - l * \phi_5(x) = \frac{\sqrt{29}}{5} - 0.689 - \sqrt{29} * 0.104 = -0.172$$

Por otra parte, para el elemento inclinado se tiene que:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

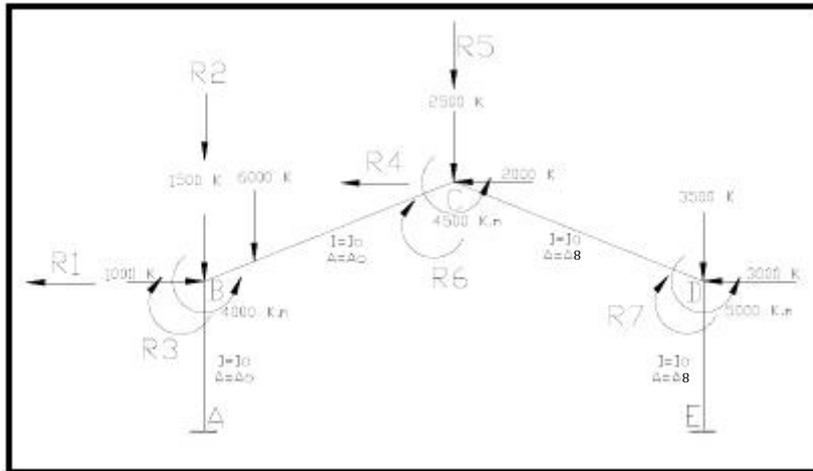
$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$

La carga vertical se descompone en una transversal y una axial al eje del elemento.

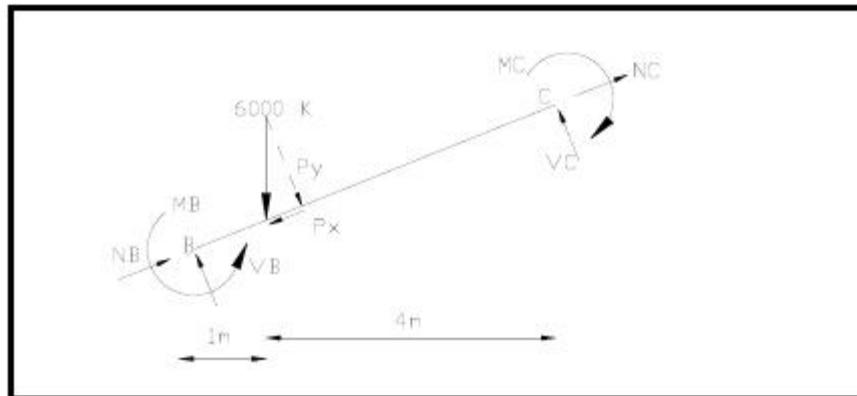
$$P_y = P * \cos \alpha = 6000 * \frac{5}{\sqrt{29}} = 5570.86$$

$$P_x = P * \sin \alpha = 6000 * \frac{2}{\sqrt{29}} = 2228.34$$

## PROBLEMA PRIMARIO



## Solución del Problema Primario



$$P_y = 5570.86$$

$$P_x = 2228.34$$

$$N_B = P_x * \phi_1(x) = 2228.34 * 0.8 = 1782.67$$

$$N_C = P_x * \phi_4(x) = 2228.34 * 0.2 = 445.67$$

$$V_B = P_y * \phi_2(x) = 5570.86 * 0.896 = 4491.49$$

$$V_C = P_y * \phi_5(x) = 5570.86 * 0.104 = 579.37$$

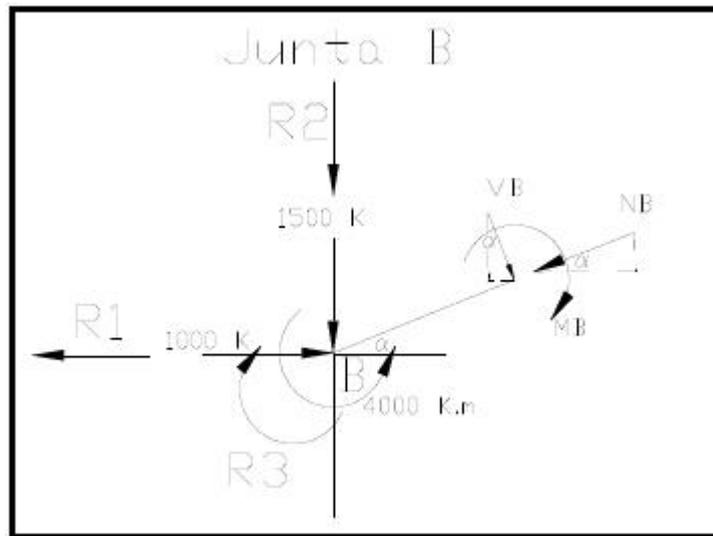
$$M_B = P_y * \phi_3(x) = 5570.86 * 0.689 = 3838.32$$

$$M_C = P_y * \phi_6(x) = 5570.86 * (-0.172) = 958.19$$

Los elementos CD y DE son axialmente rígidos luego existen fuerzas axiales  $N_1, N_2$  que se deben determinar, cuando se realiza el equilibrio de los nudos; en el elemento debe haber equilibrio de fuerzas axiales.



Equilibrio de juntas



→(+)

$$\sum F_x = 0$$

$$1000 - R_1 - N_B \cdot \cos \alpha + V_B \cdot \sin \alpha = 0$$

$$R_1 = 1000 - 1782.67 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + 4991.49 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$R_1 = 1198.63$$

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0$$

$$R_2 + 1500 + V_B \cdot \cos \alpha + N_B \cdot \sin \alpha = 0$$

$$-R_2 = 1500 + 1991.49 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + 1782.67 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}}$$

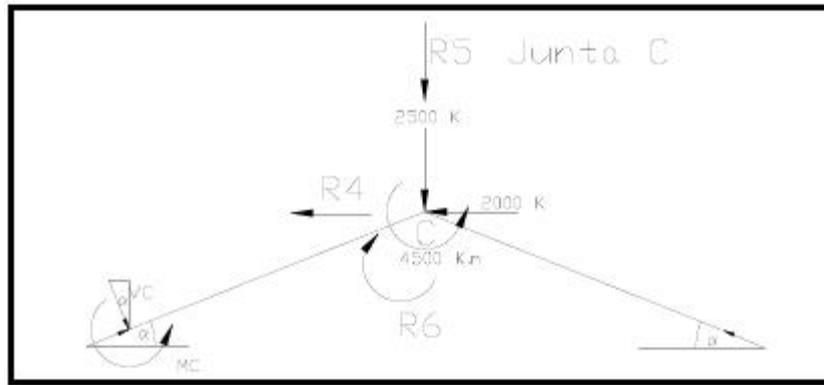
$$R_2 = -6796.71$$

$$\curvearrowright (+) \sum M = 0$$

$$M_B + R_3 = 4000$$

$$R_3 = 4000 - 3838.32$$

$$R_3 = 161.68$$



→(+)

$$\sum F_x = 0$$

$$V_c * \sin \alpha = N_c * \cos \alpha - R_4 = 2000 - \cos \alpha = 0$$

$$\downarrow (+) \sum F_y = 0$$

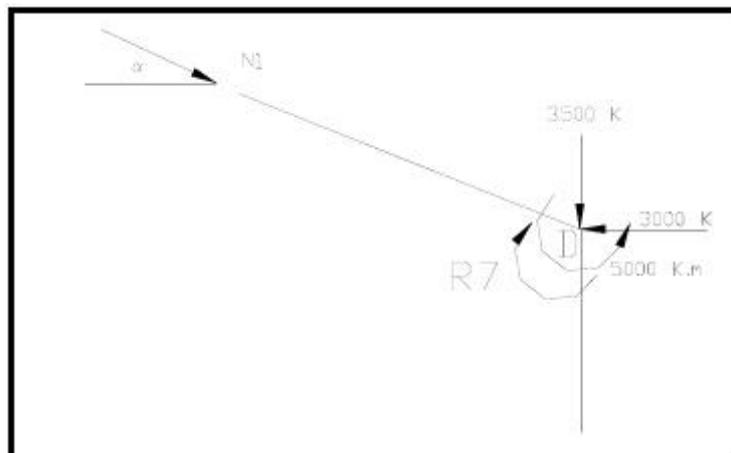
$$V_c * \cos \alpha + N_c * \sin \alpha + R_5 + 2500 - N_1 * \sin \alpha = 0$$

$$\curvearrowright (+) \sum M = 0$$

$$R_6 - 4500 - M_c = 0$$

$$R_6 = 4500 - M_c$$

$$R_6 = 4500 + 958.19 = 5458.19$$



→(+)

$$\sum F_x = 0$$

$$N_1 * \cos \alpha = 3000$$

$$N_1 = 3231$$

$$\uparrow (+) \sum F_y = 0$$

$$N_2 - 3500 - N_1 * \sin \alpha = 0$$

$$N_2 = 3500 + 1199,998$$

$$N_2 = 4670$$

$$\curvearrowright (+) \sum M = 0$$

$$R_7 = 5000$$

Se deja al lector que justifique los siguientes pasos.

$$R_4 = V_c * \sin \alpha - N_c * \cos \alpha - 2000 - N_1 * \cos \alpha$$

$$R_4 = 579.37 * \frac{2}{\sqrt{29}} - 445.67 * \frac{5}{\sqrt{29}} - 2000 - 3231 * \frac{5}{\sqrt{29}}$$

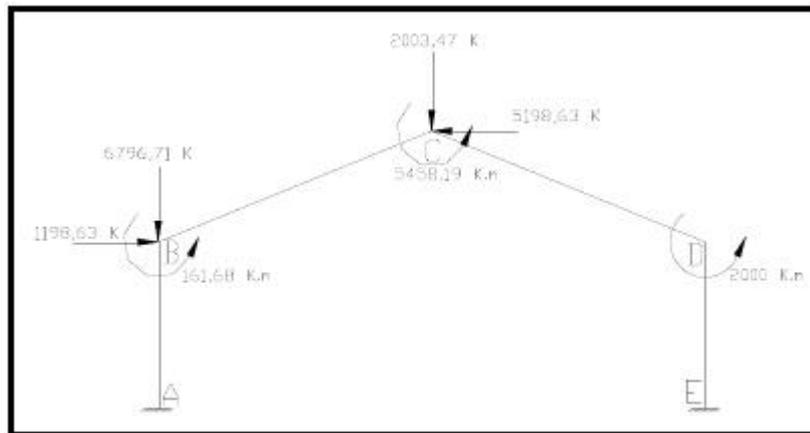
$$R_4 = -5198.63$$

$$-R_5 = V_c * \cos \alpha + N_c * \sin \alpha + 2500 - N_1 * \sin \alpha$$

$$-R_5 = 579.37 * \frac{5}{\sqrt{29}} + 445.67 * \frac{2}{\sqrt{29}} + 2500 - 3231 * \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$R_5 = -2003.47$$

Problema Complementario



De igual manera, a partir del Problema Complementario, el lector debe escribir el vector de cargas  $Q$ . Se recomienda que se obtenga este mismo vector empleando trabajos virtuales.

#### • EJEMPLO 14

Determinar el vector de cargas generalizadas, del marco plano indicado en la figura 4.46, empleando trabajos virtuales si los elementos inclinados son axialmente rígidos y el elemento horizontal es transversalmente rígido. (Examen tomado a los alumnos de Pregrado del período: Marzo-Julio de 2014.

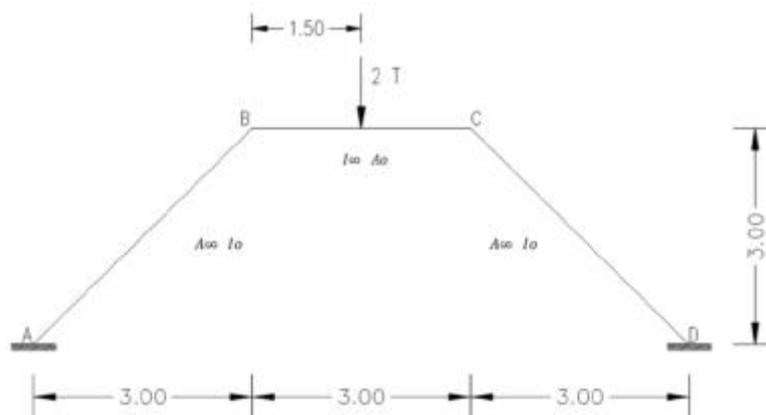


Figura 4.46 Estructura de Ejemplo 14.

• SOLUCIÓN

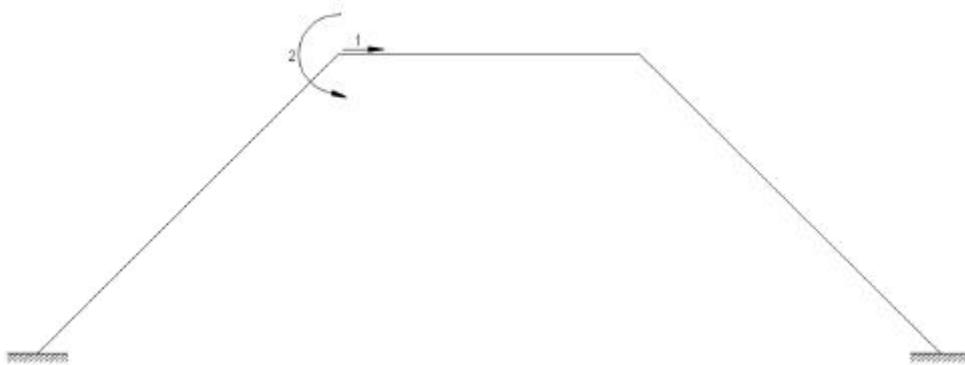
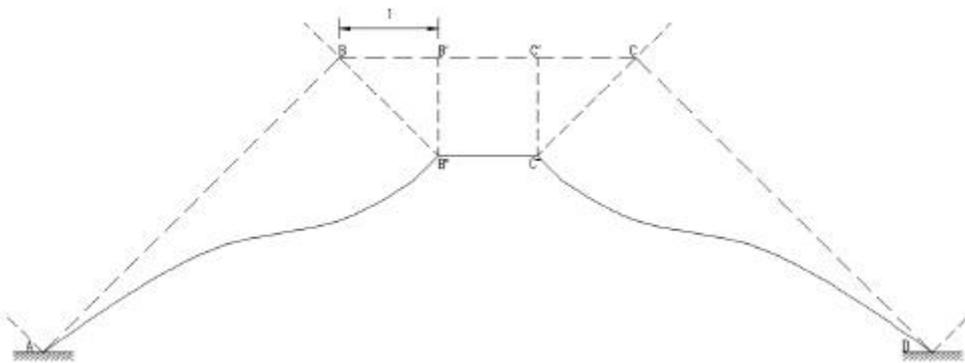


Figura 4.47 Sistema de coordenadas generalizadas.

• Cálculo de  $Q_1$

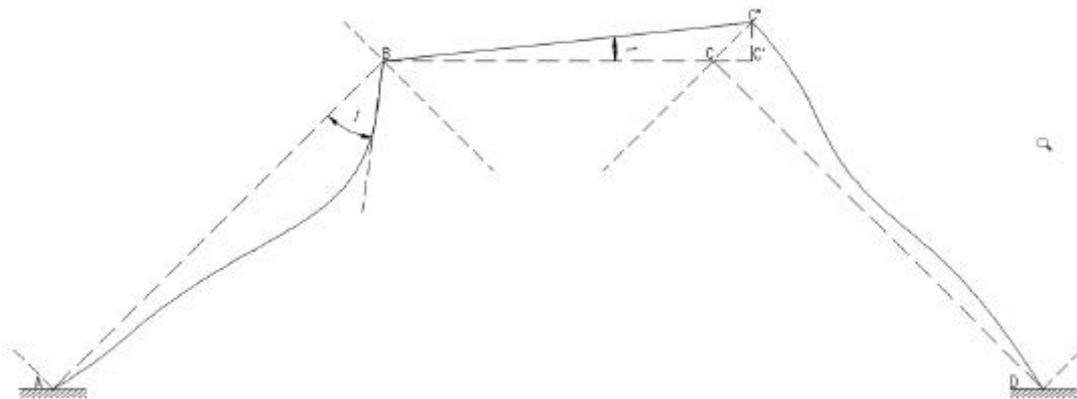
$q_1 = 1$  y  $q_i = 0; i \neq 1$



$Q_1 = 2 * 1 = 2T.$

• Cálculo de  $Q_2$

•  $q_2 = 1$  y  $q_i = 0; i \neq 2$



Por ser  $l = \infty$ , en la deformada elemental se tiene que  $\delta' \delta'' = 3$  y al ser lineal la deformación, en el punto medio de aplicación de la carga el desplazamiento vertical es la mitad. Luego.

$Q_2 = -2 * \frac{5}{2} = -3T.$

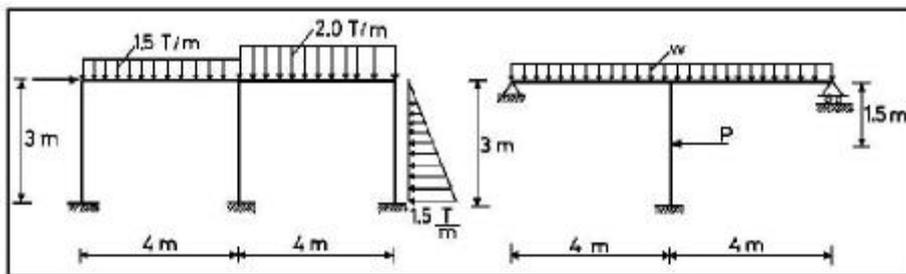
Se deja al lector que encuentre los mismos resultados de  $v(x)$  empleando las funciones de forma.

$$q = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

#### 4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras, se pide:

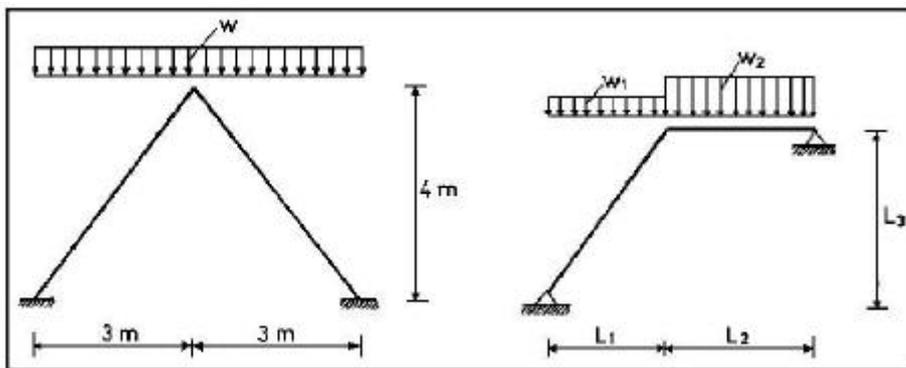
- Seleccionar el sistema de coordenadas  $Q - q$ .
- Obtener el vector de cargas generalizadas mediante trabajos virtuales.
- Resolver el Problema Primario.
- Indicar el Problema Complementario.



Ejercicio N.- 1

Ejercicio N.- 2

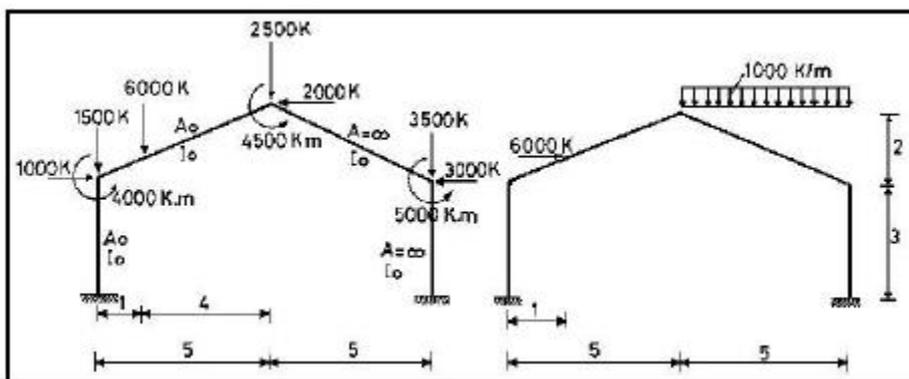
En los ejercicios 1 y 2, todos los elementos son completamente flexibles.

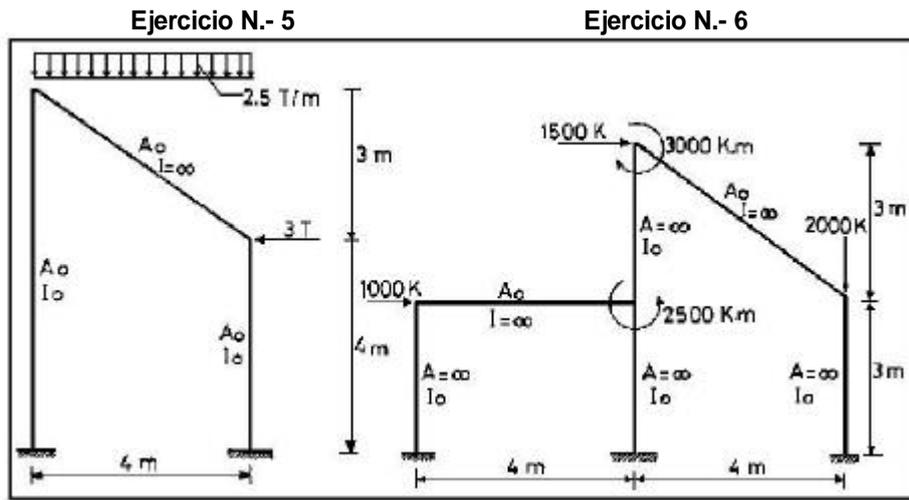


Ejercicio N.- 3

Ejercicio N.- 4

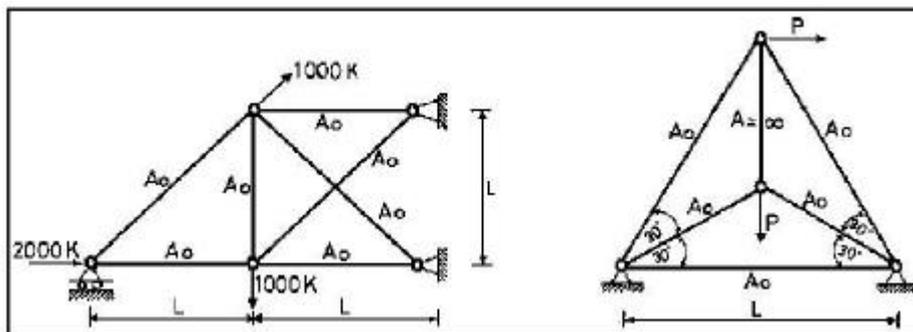
Para los ejercicios 3 y 4 considerar que todos los elementos son axialmente rígidos y transversalmente flexibles.





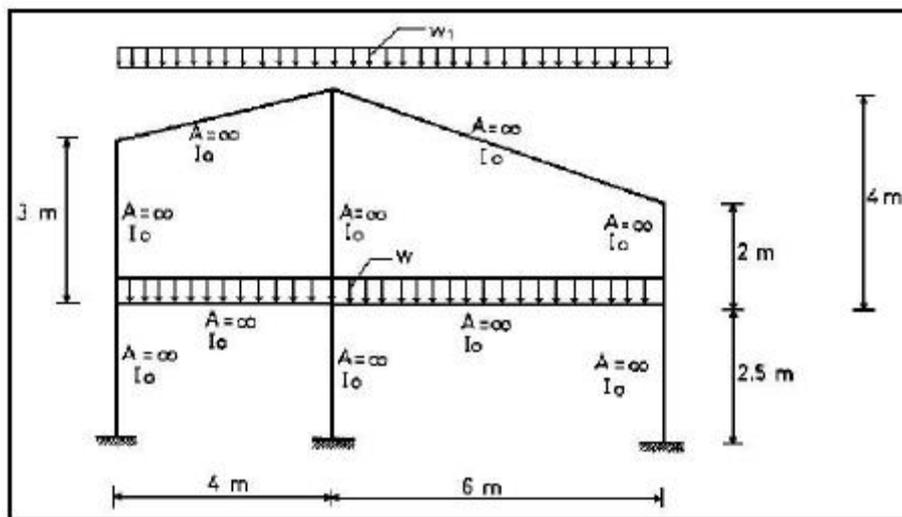
Ejercicio N.- 7

Ejercicio N.- 8



Ejercicio N.- 9

Ejercicio N.- 10



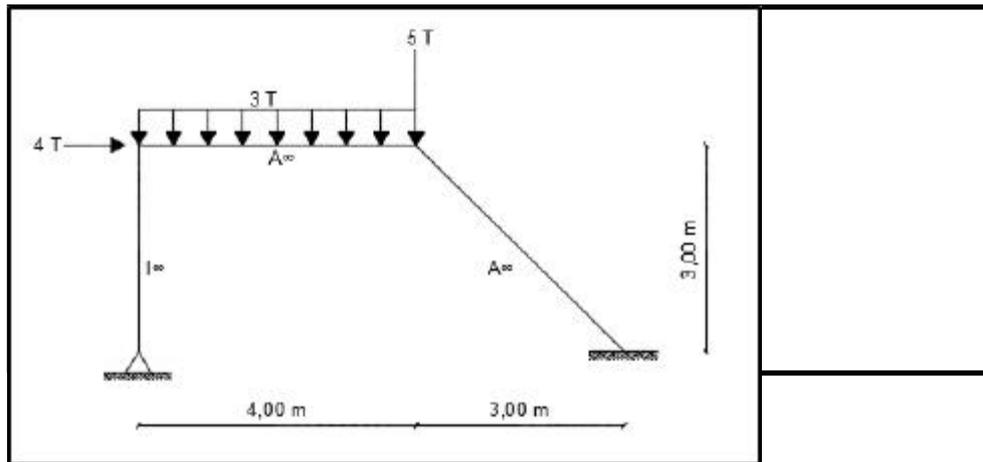
Ejercicio N.- 11

**Ejercicio N.- 12**

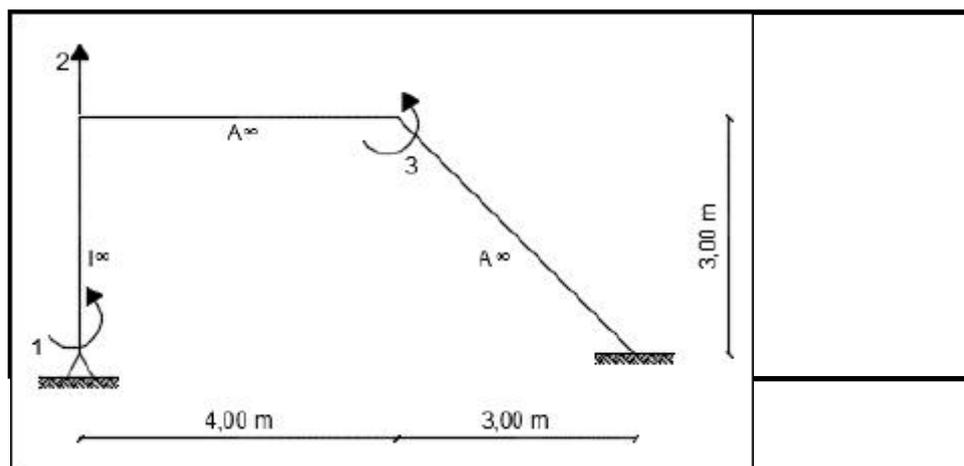
Determinar el vector de Cargas Generalizadas, por medio de trabajos virtuales, si la columna izquierda está apoyada y es  $A_0, I = \infty$ ; la viga es  $A = \infty, I_0$ ; la columna inclinada es viga es  $A = \infty, I_0$ . Trabajar con los grados de libertad y deformadas elementales que se indican a continuación.

**Respuesta**

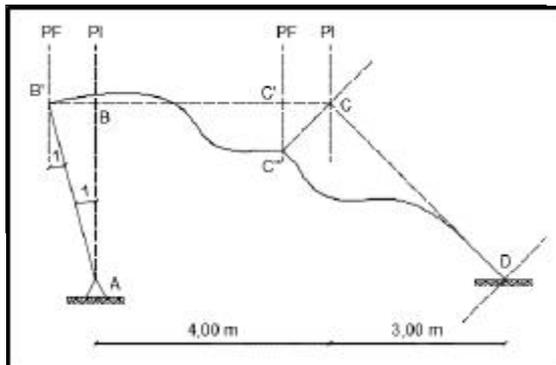
$$Q^j = [17 \quad -6 \quad 4]$$



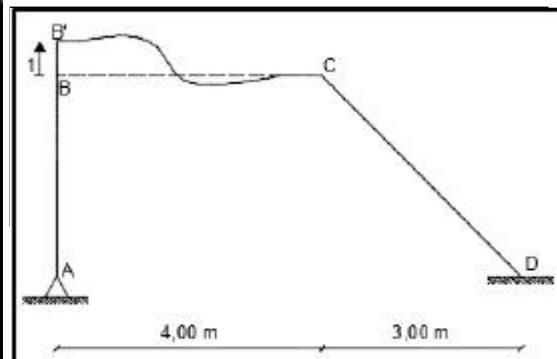
Ejercicio N.- 12



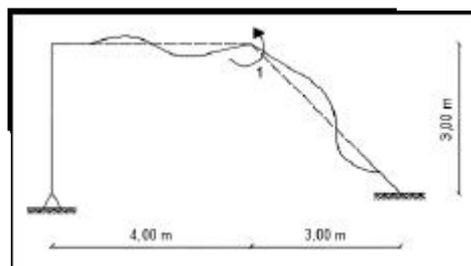
Grados de libertad de Ejercicio N.- 12



Deformada elemental  $q_1$



Deformada elemental  $q_2$



Deformada elemental  $q_3$

## CAPITULO 5

---

### RELACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

#### RESUMEN

Se presenta la transformación de coordenadas desde el punto de vista estructural, no matemático, para relacionar dos sistemas de coordenadas generalizadas o no generalizadas. Por otra parte se indican aplicaciones únicamente para el análisis estático de estructuras no para el análisis dinámico.

En el apartado 5.2 se calcula la matriz  $T$  que relaciona la geometría entre dos sistemas de coordenadas; en el apartado 5.3 se determina la matriz  $T_I$  que relaciona la estática entre dos sistemas y en el apartado 5.4 se presentan conceptos generales para relacionar coordenadas no generalizadas. Posteriormente, en el apartado 5.5 se presenta una aplicación muy importante orientada a la programación del vector de cargas generalizadas  $Q$  en pórticos planos con cargas en los nudos y en los elementos.

En el transcurso del capítulo se resuelven 11 ejemplos los mismos que sirven para aclarar la teoría que se ha presentado tanto en éste capítulo como en los anteriores, se recomienda el estudio con detenimiento de los ejemplos 8 a 10.

#### 5.1 CAMBIO DE COORDENADAS

Uno de los principales Capítulos del Análisis Matricial de Estructuras y porque no decirlo de la Dinámica de Estructuras es el estudio de la *Matriz de Transformación de Coordenadas* o también llamada *Matriz de Paso*, que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas  $Q - q$  a otro  $Q^* - q^*$ , cuando se lo requiere. En efecto en estática se puede empezar a resolver un problema con un determinado sistema de coordenadas, se puede calcular la matriz de rigidez  $K$ , el vector de cargas generalizadas  $Q$  de una determinada estructura pero por alguna razón se decide cambiar el sistema de coordenadas generalizadas. En este caso quedan dos alternativas a saber: la primera desechar el trabajo realizado y empezar de nuevo y la segunda alternativa que es la más óptima, por medio de la matriz de paso  $T$  continuar con la solución del problema aprovechando el trabajo realizado y calcular  $K^*$  y  $Q^*$  mediante simples operaciones matriciales.

Por otra parte la matriz de transformación de coordenadas  $T$  sirve para determinar la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales a partir de la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales, dichas coordenadas se indican en la figura 5.1. En general se puede determinar la matriz de rigidez en un elemento en un sistema de coordenadas a partir de otro conocido.

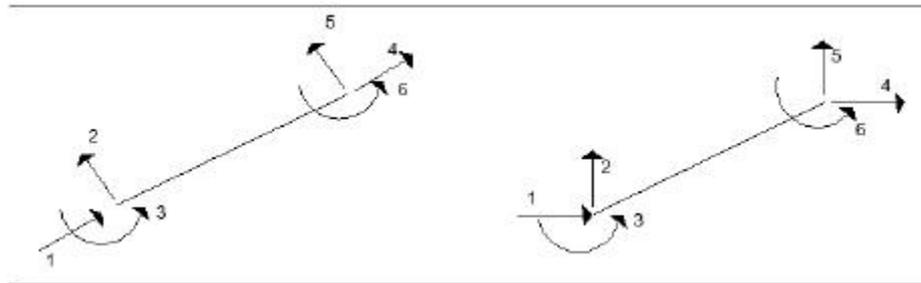


Figura 5.1 Coordenadas Locales y Globales de un elemento.

En Dinámica de Estructuras se puede ver a la matriz de transformación de coordenadas como aquella matriz que permite pasar de un determinado sistema de coordenadas en el cual el sistema de ecuaciones diferenciales está acoplado a otro sistema de coordenadas en que el sistema de ecuaciones diferenciales está desacoplado, siendo fácil la solución matemática en este último sistema de coordenadas. Todo esto siempre y cuando las matrices puedan convertirse en una matriz diagonal.

En fin es extenso el campo de aplicación de la matriz de transformación de coordenadas y tan fácil su cálculo como se lo verá posteriormente. Como se indicó el cambio de coordenadas se lo va a estudiar desde dos puntos de vista: Geométrico y Estático.

## 5.2 PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO

### 5.2.1 Relación entre dos sistemas de coordenadas generalizadas

Al sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$  se va a denominar “sistema original” o “sistema viejo” y al sistema de coordenadas  $Q^* - q^*$  se denomina “sistema nuevo”. En éste apartado se estudia la relación que existe entre  $q$  y  $q^*$ . Nótese que ambas son coordenadas generalizadas.

El pórtico plano de la figura 5.2 tiene tres grados de libertad, pudiendo ser el sistema  $Q - q$  el indicado en la parte central de la figura 5.2 y el sistema  $Q^* - q^*$  el presentado a la derecha de la figura 5.2.

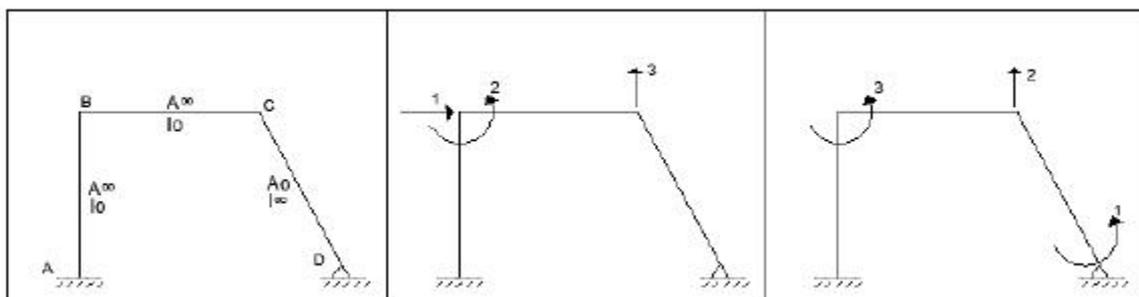


Figura 5.2 Estructura con dos sistemas de coordenadas:  $Q - q$  y  $Q^* - q^*$

Siempre cualquier transformación se realiza de la siguiente manera: expresar el sistema de coordenadas viejo en función del sistema de coordenadas nuevo. En este caso, se define una relación entre los sistemas de coordenadas generalizadas, de la siguiente forma:

$$q = T \cdot q^* \tag{5.1}$$

Donde  $T$  es la matriz de transformación de coordenadas. En consecuencia, se establece una relación geométrica entre dos sistemas de coordenadas. En este caso la matriz  $T$  es cuadrada porque los dos sistemas, indicados en la figura 5.2, son coordenadas generalizadas. En forma general se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & T_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{i1} & T_{i2} & T_{i3} & \dots & T_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ \dots \\ q_i^* \\ \dots \\ q_n^* \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, para un término cualquiera  $q_i$ , se tiene:

$$q_i = T_{i1}q_1^* + T_{i2}q_2^* + T_{i3}q_3^* + \dots + T_{in}q_n^* \quad (5.2)$$

¿Cómo calcular  $T_{i1}$ ? De la ecuación (5.2), se observa que para calcular  $T_{i1}$ , se construye la deformada elemental:  $q_1^* = 1$  y  $q_i^* = 0$  para  $i \neq 1$ . Entonces se tiene:  $q_i = T_{i1}$ , resultando que el valor de  $T_{i1}$  es el correspondiente valor de  $q_i$ .

En general un término cualquiera  $T_{ij}$  es el valor de  $q_i$  correspondiente a la deformación elemental  $q_j^* = 1$  y las demás nulas.

### • EJEMPLO 1

Calcular la matriz  $T$ , que relaciona el vector de coordenadas  $q$  de la figura 5.2, con el vector de coordenadas  $q^*$  de la misma figura.

### • SOLUCIÓN

Para obtener los elementos de la primera columna de la matriz de transformación, se dibuja la deformada elemental  $q_1^* = 1$  y  $q_i = 0$  para  $i \neq 1$ . Esto se presenta en la figura 5.3, se deja al estudiante la explicación de la deformada respectiva.

$$q_1^* = 1 \text{ y } q_i^* = 0 \text{ para } i \neq 1$$

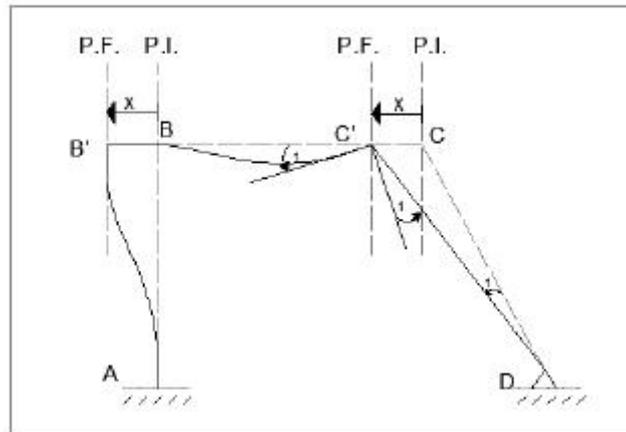


Figura 5.3 Diagrama elemental  $q_1$ .

Al medir los desplazamientos en el sistema de coordenadas  $q$ , se encuentra:

$$T_{11} = -x = q_1$$

$$T_{21} = 0 = q_2$$

$$T_{31} = 0 = q_3$$

Para obtener los términos de la segunda columna de  $T$  se construye la deformada elemental  $q_2$ .

$$q_2^* = 1 \text{ y } q_i^* = 0 \text{ para } i \neq 2$$

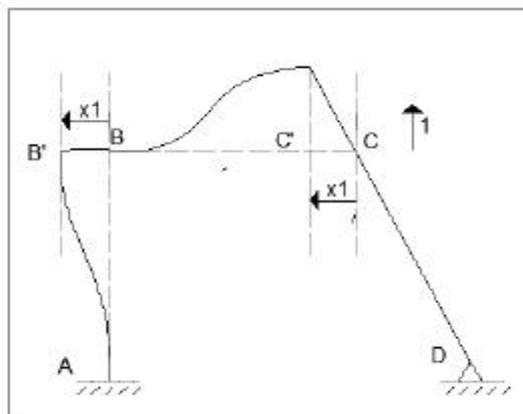


Figura 5.4 Diagrama elemental  $q_2$ .

El nudo B se desplaza horizontalmente hacia la izquierda  $x_1$ , por lo tanto:  $T_{12} = -x_1 = q_1$ . No rota el nudo B, esto implica que  $T_{22} = 0 = q_2$ . Finalmente el nudo C se desplaza verticalmente la unidad, de

$$T_{32} = 1 = q_3.$$

donde

La última columna de la matriz  $T$ , se obtendrá del diagrama elemental  $q_3$ .

$$q_3^* = 1 \text{ y } q_i^* = 0 \text{ para } i \neq 3$$

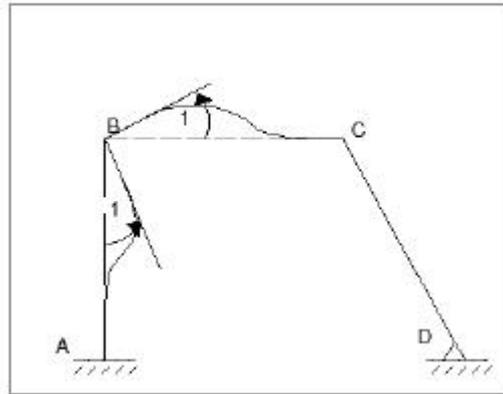


Figura 5.5 Diagrama elemental  $q_3^*$

De donde:

$$T_{13} = 0 = q_1$$

$$T_{23} = 1 = q_2$$

$$T_{33} = 0 = q_3$$

Por lo tanto, la matriz de transformación  $T$  es:

$$T = \begin{bmatrix} -x & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El cálculo de  $x$  y  $x_1$  se realiza empleando Geometría.

### 5.2.2 Relación entre dos sistemas de Cargas Generalizadas

Se desea saber qué relación existe entre  $Q^*$  y  $Q$ . Dado que  $q = T \cdot q^*$ . Para encontrar esta relación se da un desplazamiento virtual cualquiera a la estructura; por ejemplo, con relación al pórtico de la figura 5.2, en la parte izquierda de la figura 5.6, se presenta el diagrama virtual. Este es producido por un sistema de cargas que actúa sobre el pórtico.

Los desplazamientos virtuales se pueden medir en cualquiera de los dos sistemas de coordenadas. El "sistema viejo", presentado en la parte central de la figura 5.6 o el "sistema nuevo", mostrado a la derecha de la figura 5.6. La relación que existe entre estos dos sistemas de coordenadas es la siguiente:

$$\delta q = T \cdot \delta q^*$$

El trabajo virtual ( $TV_1$ ) de las cargas que actúan sobre el pórtico de la figura 5.2, en los desplazamientos virtuales de la estructura indicada en la parte central de la figura 5.6, es:

$$TV_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3$$

En forma matricial, se tiene:

$$TV_1 = [\delta q_1 \quad \delta q_2 \quad \delta q_3] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$TV_1 = \delta q^t Q$$

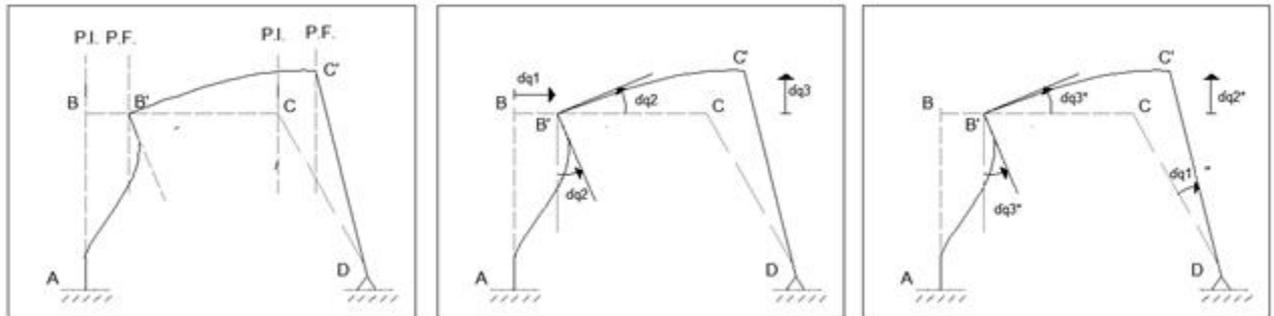


Figura 5.6 Diagrama virtual y sistema de coordenadas  $Q - q$  y  $Q^* - q^*$

El trabajo virtual calculado  $TV_1$ , debe ser exactamente igual al trabajo virtual  $TV_2$  producido por el sistema de cargas que gravitan en el pórtico de la figura 5.2 en los desplazamientos del marco presentado a la derecha de la figura 5.6. En virtud de que el trabajo virtual no depende del sistema de coordenadas, puesto que la solución es única.

$$TV_2 = [\delta q_1^* \quad \delta q_2^* \quad \delta q_3^*] \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ Q_3^* \end{bmatrix}$$

$$TV_2 = \delta q^{*t} Q^*$$

$$TV_1 = TV_2$$

Como:

$$\delta q^t Q = \delta q^{*t} Q^*$$

Al sustituir  $\delta q$  en esta última ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} (T \cdot \delta q) Q &= \delta q^{*t} Q^* \\ \delta q^t T^t Q &= \delta q^{*t} Q^* \end{aligned}$$

Se recuerda que en Álgebra Matricial, de la igualdad:

$$A \cdot B = A \cdot C$$

No siempre se puede concluir que:  $B = C$

En el problema, el vector  $\delta q$  no es una constante fija, sino que puede adoptar cualquier valor por el mismo hecho de ser virtual. Por lo tanto, se concluye que:

$$T^t Q = Q^* \tag{5.3}$$

Lo demostrado, a partir de la figura 5.2, puede generalizarse. En resumen, se tiene:

Si	$q = Tq^*$	entonces	$Q^* = T^t Q$
----	------------	----------	---------------

Una vez que se conoce el vector de cargas generalizadas  $Q$ , para un determinado sistema de coordenadas de una estructura, el mismo que ha sido obtenido aplicando el problema primario y complementario, o mediante trabajos virtuales, como se presentó en el Capítulo 4, se puede encontrar el vector de cargas generalizadas para un nuevo sistema de coordenadas mediante la ecuación (5.3), debiendo calcular únicamente la matriz  $T$ .

### 5.3 PUNTO DE VISTA ESTÁTICO

#### 5.3.1 Relación entre dos sistemas de cargas

El pórtico presentado a la izquierda de la figura 5.7 tiene tres grados de libertad y su sistema de coordenadas  $Q - q$  es el mostrado en la parte central de la figura 5.7, y en la parte derecha de 5.7 se presenta el sistema  $Q^* - q^*$ .

Se define, ahora, una relación entre los dos sistemas de cargas, de la siguiente manera:

$$Q = T_1 \cdot Q^* \tag{5.4}$$

$T_1$  Matriz de transformación, de orden  $(n \times n)$ .

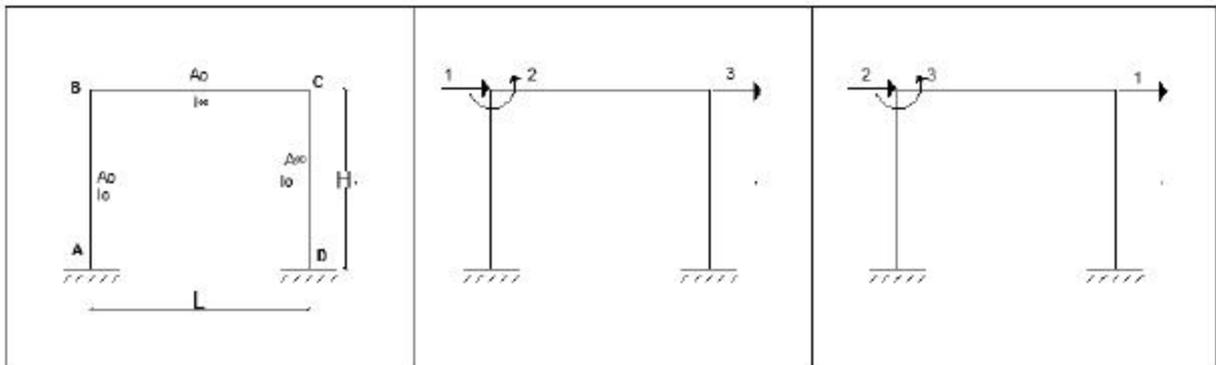


Figura 5.7 Estructura con dos sistemas de coordenadas  $Q - q$ , y  $Q^* - q^*$

Al desarrollar la ecuación matricial (5.4), para un sistema de  $n$  grados de libertad, se tiene:





Se procede a calcular los elementos de la primera columna de la matriz  $T_1'$ , por Trabajos Virtuales. Para ello en la figura 5.9 se presentan las deformadas elementales en el sistema  $q - q$ .

$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 1$$

$$\delta q_2 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 2$$

$$\delta q_3 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \text{ para } i \neq 3$$

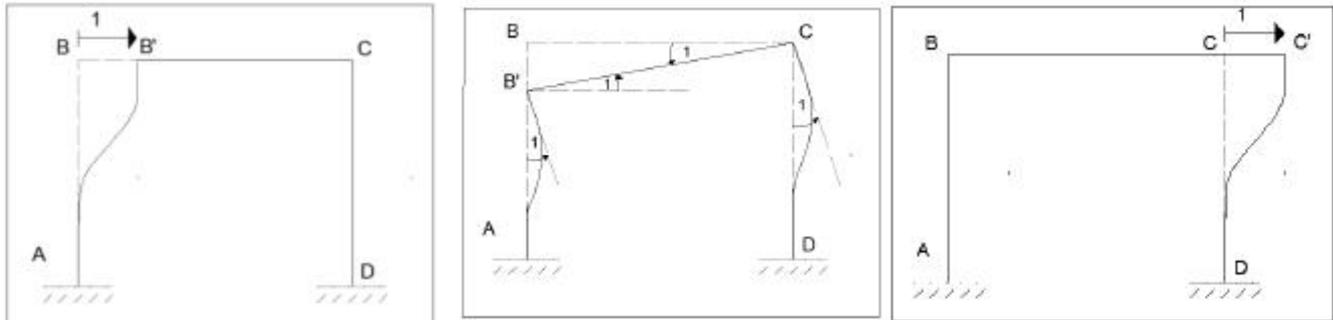


Figura 5.9 Deformadas elementales.

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 5.8, en cada una de las deformadas elementales de la figura 5.9, reporta:

$$Q_1 = T_{III} = 0$$

$$Q_2 = T_{121} = 0$$

$$Q_3 = T_{131} = 1$$

Los elementos de la segunda columna de la matriz  $T_1$ , se pueden hallar de la misma manera, con Trabajos Virtuales pero se lo va a realizar a través del Problema Primario y Complementario, esto se hace por didáctica únicamente. El estado de cargas, ahora es  $Q_2^* = 1$  y las restantes nulas que corresponde a una fuerza horizontal en el nudo B, como se muestra en la figura 5.10.

El Problema Primario se indica en la figura 5.11. Por definición se tiene que actúa la fuerza horizontal y la condición es que el vector de coordenadas  $q = 0$ . Esto conduce a tener fuerzas de fijación  $R_i$ , que se colocan con sentido contrario al sistema de coordenadas; el signo de estas fuerzas se halla en la solución del Problema Primario.

$$Q_2^* = 1 \text{ y } Q_j^* = 0 \text{ para } j \neq 2$$

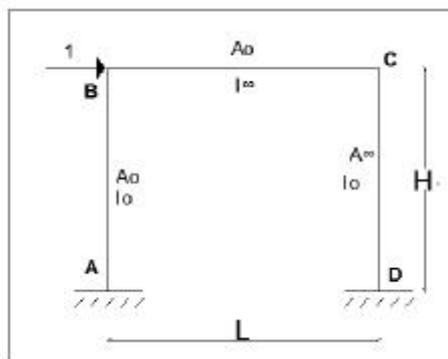


Figura 5.10 Estado de carga elemental  $Q_2^*$

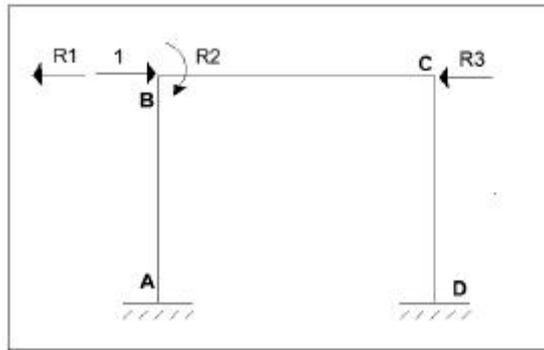
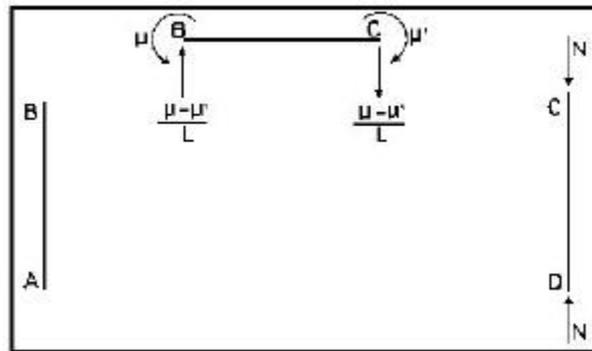


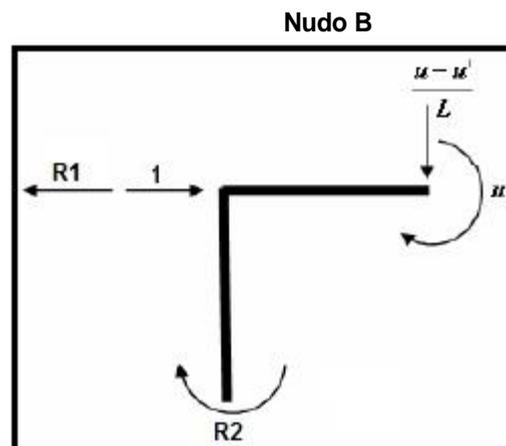
Figura 5.11 Problema Primario.

El Problema Primario tiene dos partes que son: Equilibrio de Elementos y Equilibrio de Nudos. Se recuerda que en los elemento  $l = \infty$  se tiene en sus extremos dos momentos  $\mu$  y  $\mu'$  que son necesarios para que el elemento no trabaje a flexión y estos a su vez generan cortantes. En el elemento axialmente rígido en cambio se debe encontrar una fuerza axial  $N$  que hacen que el elemento no trabaje axialmente.

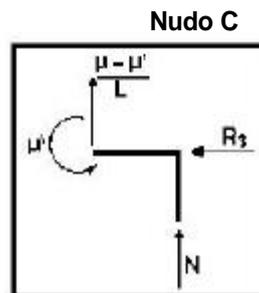
- Equilibrio de miembros



- Equilibrio de nudos



$$\begin{aligned} \rightarrow + \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow R_1 = 1 \\ \sum M = 0 & \Rightarrow R_2 + \mu = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 & \Rightarrow \mu = \mu' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow + \\ \sum F_x = 0 & \Rightarrow R_3 = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 & \Rightarrow N + \frac{\mu}{L} + \mu' = 0 \\ \sum M = 0 & \Rightarrow \mu' = 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se tiene que todo vale cero a excepción de  $R_1$  que es igual a uno. El problema complementario es muy sencillo, razón por la cual se escribe directamente la respuesta.

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 = T_{112} \\ &= 0 = T_{122} \\ Q_2 &= 0 = T_{132} \end{aligned}$$

La última columna de la matriz  $T_1$   $Q_3$

se deja a que el estudiante calcule, su resultado es:

$$\begin{aligned} T_{113} &= 0 \\ T_{123} &= 1 \\ T_{133} &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz  $T_1$  es:

$$T_1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

### 5.3.2 Relación entre dos sistemas de desplazamientos

Dada la relación:  $Q = T_1 Q^*$ , se desea saber qué relación existe entre  $q$  y  $q^*$ .

En este caso, sobre la estructura actúa un sistema de fuerzas virtuales arbitrarias y se calculan los trabajos virtuales en los desplazamientos reales. Para la estructura de la figura 5.7, por ejemplo, se tendrá las fuerzas virtuales mostradas en la figura 5.12

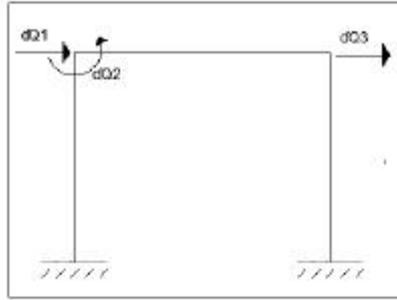


Figura 5.12 Fuerzas virtuales

Al calcular el trabajo virtual  $TV_1$  de las fuerzas virtuales indicadas en la figura 5.12, en el sistema de coordenadas  $Q - q$  indicados en la parte central de la figura 5.7, se tiene:

$$TV_1 = \delta Q_1 q_1 + \delta Q_2 q_2 + \delta Q_3 q_3 \quad (5.6.1)$$

De donde:

$$TV_1 = [\delta Q_1 \quad \delta Q_2 \quad \delta Q_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$TV_1 = \delta Q^t q \quad (5.6.2)$$

De igual forma, al calcular el trabajo virtual  $TV_2$  de las fuerzas virtuales de la figura 5.12, en el sistema  $Q^* - q^*$  se tiene:

$$TV_2 = \delta Q^*{}^t q^* \quad (5.6.3)$$

Pero el trabajo virtual es independiente del sistema de coordenadas. Luego

$$TV_1 = TV_2$$

$$\delta Q^t q = \delta Q^*{}^t q^* \quad (5.6.4)$$

Se sabe:

$$\delta Q = T_1 \delta Q^* \quad (5.6.5)$$

Al reemplazar (5.6.5) en (5.6.4) se encuentra:

$$\begin{aligned} (T_1 \delta Q^*{}^t) q &= Q^*{}^t q^* \\ \delta Q^*{}^t T_1^t q &= \delta Q^*{}^t q^* \end{aligned}$$

Como  $\delta Q^*$  es un sistema de cargas virtuales arbitrario y la igualdad anterior se verifica siempre, entonces se tiene:

$$T_1^t q = q^* \quad (5.6.6)$$

Resumen general:

Si	$Q = T_1 Q^*$	entonces	$q^* = T_1^t q$
----	---------------	----------	-----------------

**5.3.3 Relación entre  $T$  y  $T_1$**

En el numeral 5.2.1 de este capítulo se estudió la matriz  $T$  que relaciona:  $q = Tq^*$ , y en el numeral 5.3.1 se estudió la matriz  $T_1$ , teniéndose:  $Q = T_1 Q^*$ . Se desea encontrar ahora qué relación existe entre las matrices  $T$  y  $T_1$ .

Si:  $Q = T_1 Q^*$  se tiene que  $q^* = T_1^t q$ , sustituyendo este valor en la relación:  $q = Tq^*$ , se tiene:

$$q = T(T_1^t q)$$

Por ser  $q$  un vector general, se cumple:

$$T = (T_1^t)^{-1} \tag{5.7}$$

Se deja al estudiante que demuestre la siguiente relación que también existe entre  $T$  y  $T_1$ .

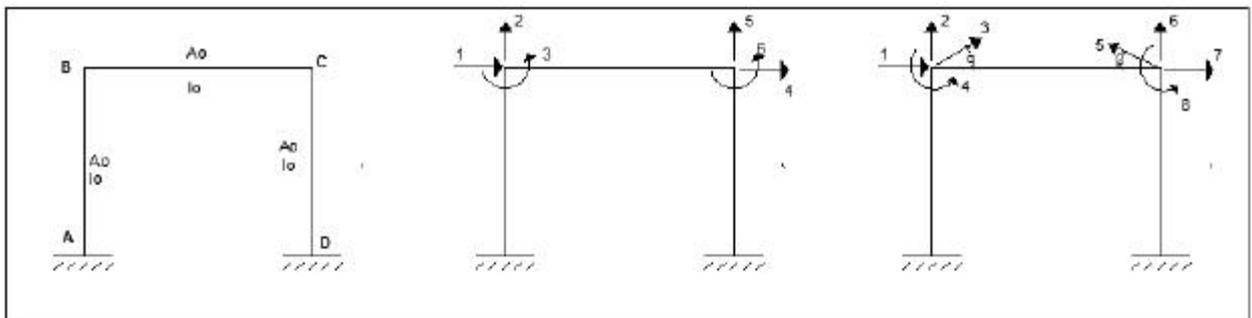
$$T^t = T_1^{-1} \tag{5.8}$$

La transpuesta de la matriz  $T$  es igual a la matriz inversa de  $T_1$ .

**5.4 RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS NO GENERALIZADAS**

**5.4.1 Relación  $q_{ng} = Tq$**

Para la estructura de la figura 5.13, cuyos elementos son totalmente flexibles, se han elegido dos sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la parte central y a la derecha de la mencionada figura. El primer sistema de coordenadas  $Q - q$  es generalizado ya que éste tiene coordenadas que son independientes. En cambio el segundo sistema  $Q_{ng} - q_{ng}$  **no es generalizado** ya que éste tiene coordenadas que son dependientes.



**Figura 5.13** Estructura con dos sistemas de coordenadas: generalizado  $Q - q$   
No generalizado  $Q_{ng} - q_{ng}$

La relación entre los dos sistemas de coordenadas se define de la siguiente manera:

$$q_{ng} = T q \tag{5.9}$$

Donde  $T$  es la matriz de transformación de coordenadas, en este caso no es cuadrada es de orden  $(n \times m)$  siendo  $n$  el número de coordenadas del sistema no generalizado  $q_{ng}$  y  $m$  es el número de coordenadas del sistema generalizado  $q$ . Para el ejemplo que se está analizando en la figura 5.13, la matriz  $T$  tendrá 8 filas y 6 columnas.

Por un procedimiento similar a los realizados anteriormente se puede demostrar fácilmente que un término cualquiera  $T_{ij}$  será el valor de la componente  $q_{ing}$  medido en el sistema de coordenadas no generalizado, correspondiente al diagrama elemental  $q_j = 1$  y demás coordenadas nulas, diagrama realizado en el sistema de coordenadas generalizadas.

Para el sistema de coordenadas presentado en la figura 5.13, no se puede escribir:  $q = T q_{ng}$ , puesto que no existen condiciones de restricción entre las coordenadas  $q$ . Por lo tanto la relación inversa será válida si los dos sistemas de coordenadas son generalizados.

#### 5.4.2 Relación $Q = T Q_{ng}$

Dada la relación:  $q_{ng} = T q$ , se demuestra por medio de trabajos virtuales que  $Q = T^t Q_{ng}$ . Esta ecuación indica que si se conoce los valores de  $Q_{ng}$  se podrá determinar  $Q$  por medio de la matriz  $T$  pero en general no se podrá determinar los valores de  $Q_{ng}$  conocido los valores de  $Q$ .

En resumen para calcular  $Q_{ng}$  a partir de  $Q$  se procederá de la siguiente manera:

- 1) Calcular la matriz  $T$  por geometría, utilizando la ecuación (5.9).

$$T^t.$$

- 2) Obtener

- 3) Calcular  $(T^t)^{-1}$ . Esto será posible si  $T^t$  es una matriz singular, caso contrario no se puede resolver el problema.

- 4) Calcular  $Q_{ng} = (T^t)^{-1} Q$

### 5.5 CALCULO DEL VECTOR $Q$ POR MEDIO DE LA MATRIZ $T$

#### 5.5.1 Matriz $T_{2-3}$

Como se verá en un Capítulo posterior de éste libro, se denomina matriz  $T_{2-3}$  a la matriz que relaciona los sistemas de coordenadas del elemento de la figura 5.14. Esta matriz permite pasar de Coordenadas Locales a Coordenadas Globales de un elemento. Por didáctica se presenta nuevamente estos dos sistemas de coordenadas, al centro y a la derecha de la figura 5.14. La diferencia fundamental entre estos dos sistemas es que en Coordenadas Locales se tienen componentes de desplazamiento axial y transversal al eje del elemento; en cambio en coordenadas globales las componentes de desplazamiento son horizontal y vertical.

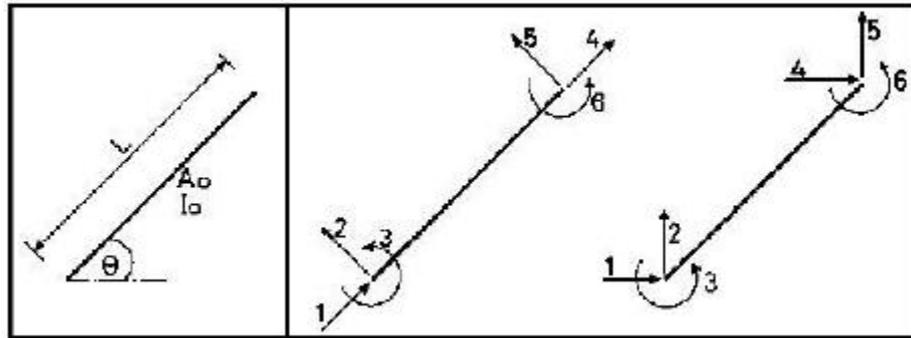


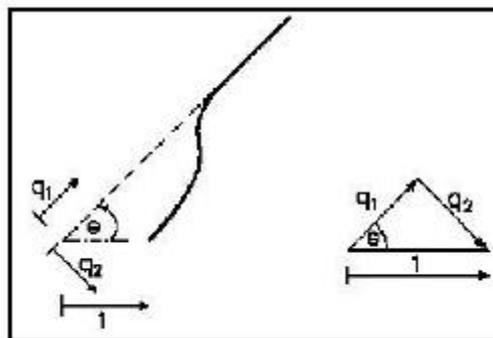
Figura 5.14 Elemento inclinado y sistemas de Coordenadas Locales y Globales

A la izquierda de la figura 5.14 se presenta un elemento inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal y que tiene una longitud L. Nótese que el ángulo  $\theta$  se mide a partir del eje horizontal X. Para una viga horizontal el valor de  $\theta = 0$ , para una columna vertical se tiene  $\theta = 90$ . Para calcular la matriz  $T_{2-3}$  se construirá las deformadas elementales en el sistema de coordenadas globales y se medirá en el sistema de coordenadas locales.

$$q = T_{2-3} q^*$$

❖ Primera columna de  $T_{2-3}$

$$q_1^* = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ para } i \neq 1$$



Deformada elemental  $q_1^*$

$$q_1 = \cos\theta$$

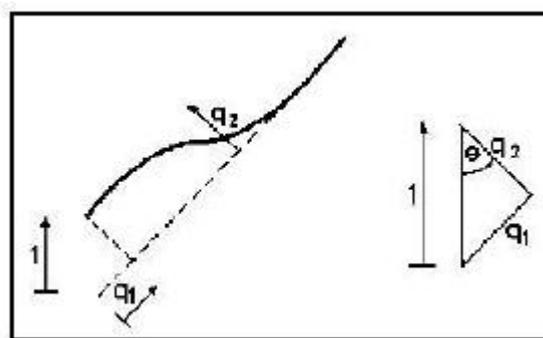
$$q_2 = -\text{sen}\theta$$

$$q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

Para entender el signo de  $q_2$  se debe recordar que en el nudo inicial se tiene el origen de coordenadas  $X - Y$ , donde la coordenada  $X$  va a lo largo del eje del elemento y la  $Y$  es perpendicular con sentido contrario al desplazamiento  $q_2$  de la deformada elemental  $q_1$ .

❖ Segunda columna de  $T_{2-3}$

$$q_2^* = 1 \text{ y } q_i = 0 \text{ para } i \neq 2$$

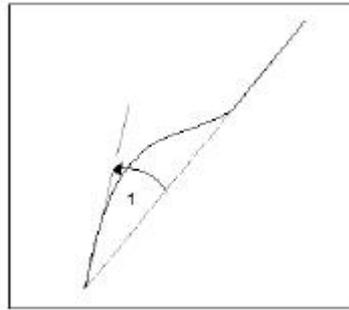


Deformada elemental  $q_2^*$

$$q_1 = \text{sen}\theta \quad q_2 = \text{cos}\theta \quad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

❖ Tercera columna de  $T_{2-3}$

$$q_3^* = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq 3$$



Deformada elemental  $q_3^*$

$$q_1 = 1 \quad q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

Se deja al lector el cálculo de las restantes columnas de la matriz  $T_{2-3}$ . El resultado final se indica a continuación.

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Es muy importante la matriz  $T_{2-3}$  en la programación de pórticos planos. A ésta matriz también se la conoce como Matriz de Rotación. Un Teorema de esta matriz es el siguiente.

$$\text{Si } q = T_{2-3} q^* \quad \text{Entonces } Q^* = T_{2-3}^t Q \quad (5.11)$$

Ahora bien, sea  $Q_2$  el vector de Cargas de Empotramiento de un elemento en Coordenadas Locales y  $Q_3$  el vector de Cargas de Empotramiento de un elemento en Coordenadas Globales. Con esta nomenclatura la ecuación (5.11) se transforma en:

$$Q_3 = T_{2-3}^t Q_2 \quad (5.12)$$

### 5.5.2 Cálculo de $Q$ orientado al ordenador

En base a la teoría expuesta en el capítulo 4 y en éste capítulo. El algoritmo para calcular el vector de cargas generalizadas  $Q$ , orientado al uso del ordenador es el siguiente.

### 5.5.2.1 Caso de cargas en las juntas

Cuando las cargas actúan únicamente en las juntas, el cálculo de  $Q$  es directo, solamente se identifican los grados de libertad en los cuales actúan las cargas.

El usuario de un programa de computación deberá indicar la junta cargada y después la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento que en ella actúan, considerando positivos si la fuerza horizontal es hacia la derecha, la vertical hacia arriba y el momento anti horario.

En base a la identificación de la junta cargada se obtienen los respectivos grados de libertad.

#### • EJEMPLO 3

Calcular el vector de cargas generalizadas  $Q$  para el marco plano de la figura 5.15 cuyos elementos se consideran totalmente flexibles. A la derecha de la figura 5.15 se presenta el respectivo sistema de coordenadas generalizadas. Únicamente actúan una fuerza horizontal hacia la derecha de 4 T, y un momento en sentido horario de 6 T m. A la izquierda de la figura 5.15 se han identificado los elementos y más adelante se numeran los nudos de la estructura.

#### • SOLUCIÓN

La fuerza horizontal de 4 T está aplicada en el grado de libertad 1 y el momento de 6 T.m. en el grado de libertad 6. Por lo tanto únicamente estos grados de libertad del vector  $Q$  tendrán valores diferentes de cero el primer valor será positivo porque está en el mismo sentido del sistema  $Q - q$  y el segundo negativo porque es horario.

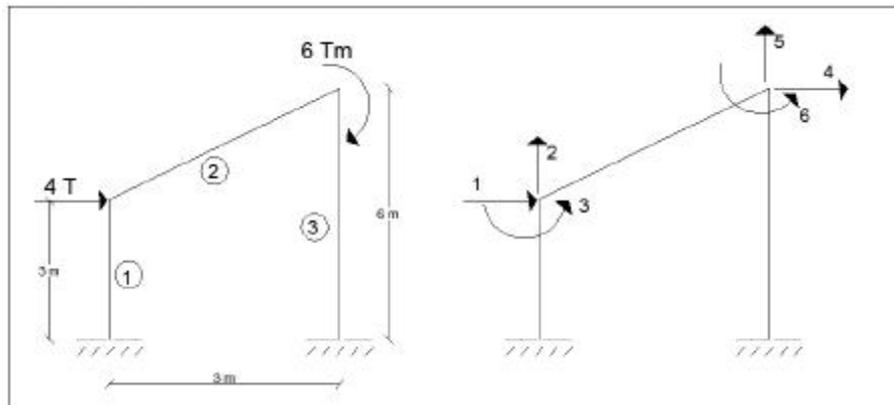
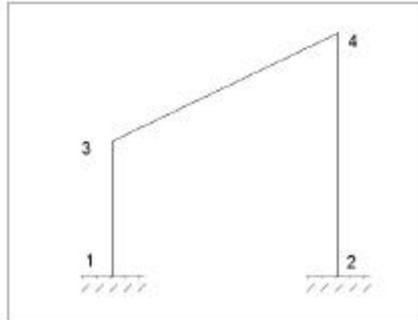


Figura 5.15 Cargas para Ejemplo 3 y sistema  $Q - q$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \textit{Posición 1} \\ \leftarrow & \textit{Posición 2} \\ \leftarrow & \textit{Posición 3} \\ \leftarrow & \textit{Posición 4} \\ \leftarrow & \textit{Posición 5} \\ \leftarrow & \textit{Posición 6} \end{matrix}$$

De tal manera que cuando se tiene solo cargas en las Juntas o Nudos, el cálculo del vector de cargas  $Q$  es directo.

Uno de los primeros datos de un programa de computación que resuelve estructuras es el número de nudos. En el ejemplo que se ha desarrollado son 4. Ahora bien se deben numerar los nudos, en principio se puede hacerlo de cualquier forma pero para utilizar el Sistema de Computación **CEINCI-LAB** desarrollado por el autor de este libro se deben numerar primero los nudos restringidos como se indica a continuación.



Numeración de los nudos.

Como es pórtico plano cada nudo tendrá tres grados de libertad. Con relación a la figura 5.15 se aprecia que los nudos 1 y 2 son empotramientos, en consecuencia no existe grados de libertad en esos nudos. Con esta información el programa genera un arreglo que se denomina **CG** (Coordenadas Generalizadas) que tendrá n filas y 3 columnas. Siendo n el número de nudos. Para el ejemplo este arreglo es:

↳ Arreglo **CG**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Nudo 1} \\ \leftarrow \text{Nudo 2} \\ \leftarrow \text{Nudo 3} \\ \leftarrow \text{Nudo 4} \end{matrix}$$

La primera columna de **CG** corresponde al grado de libertad en sentido horizontal; la segunda columna al grado de libertad en sentido vertical y la tercera la rotación.

En un programa el usuario identifica la junta cargada, en este caso la número 3. El programa va al arreglo **CG** a la tercera fila y encuentra la identificación de los grados de libertad, la primera será para la fuerza horizontal, la segunda para la vertical y la tercera para el momento. En el ejemplo la única carga, que tiene valor es la fuerza horizontal que vale 4 T. El programa toma este valor y lo ubica en la posición 1 del vector de cargas generalizadas **Q**.

Luego el usuario del programa indica la otra junta cargada que en este caso es la 4, con esta información se va a la cuarta fila del arreglo **CG** y como solo actúa un momento de - 6 Tm. Este dato lo ubica en la posición 6.

Por otra parte el usuario del programa debe identificar a cada uno de los elementos y para cada uno de ellos debe indicar el nudo inicial y final del elemento. Para el ejemplo esta información se indica en la Tabla 5.1

Tabla 5.1 Nudo Inicial y Final de cada elemento

Elemento	Nudo Inicial	Nudo Final
1	1	3
2	3	4
3	2	4

En base a la información de la tabla 5.1, que el usuario da como dato y en base al arreglo **CG**, se obtiene el arreglo **VC** (Vector de Colocación). Para pórticos planos este arreglo tiene m filas y 6 columnas, siendo m el número de elementos del pórtico. En las tres primeras columnas van los grados de libertad del nudo inicial y en las tres siguientes columnas van los grados de libertad del nudo final.

A manera de ejemplo la primera fila del arreglo VC corresponde al elemento 1, con el dato del nudo inicial igual a 1 se obtiene del arreglo **CG** los valores 0 0 0 y con la identificación del nudo final 3 del arreglo **CG** se encuentra 1 2 3. Lo propio se hace para los restantes elementos.

#### ↪ Arreglo VC

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \textit{Elemento 1} \\ \leftarrow \textit{Elemento 2} \\ \leftarrow \textit{Elemento 3} \end{array}$$

El arreglo **VC** sirve para encontrar el vector de cargas generalizadas cuando se tienen cargas en los elementos. Posteriormente se verá que también sirve para hallar la matriz de rigidez de la estructura y para encontrar las fuerzas y momentos finales en cada uno de sus elementos.

Nótese que se está resolviendo un pórtico no ortogonal. La única condición que se ha puesto es que todos los elementos sean totalmente flexibles. Se puede programar para pórticos con todos los elementos axialmente rígidos pero para empezar se hace el caso más fácil que es todos los elementos son completamente flexibles.

#### 5.5.2.2 Caso de cargas en los elementos

Se define el vector de colocación de un elemento i como  $VC^{(i)}$ , a un vector de 6 elementos que contiene los grados de libertad del nudo inicial y del nudo final de un elemento, en coordenadas globales. Para los elementos de la figura 5.15 los vectores de colocación son las filas del arreglo **VC** indicado que se repite a continuación.

$$\begin{aligned} VC^{(1)} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \\ VC^{(2)} &= [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6] \\ VC^{(3)} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad 6] \end{aligned}$$

El procedimiento de cálculo del vector de cargas generalizadas  $Q$ , cuando existen cargas en los elementos, es el siguiente:

- 1) Encontrar el vector de empotramiento perfecto de cargas, en coordenadas locales  $Q_2$  de cada uno de los elementos cargados.

$$T_{2-3} \text{ de cada uno de los elementos cargados.}$$

- 2) Obtener la matriz

- 3) Calcular el vector de empotramiento perfecto en coordenadas globales  $Q_3$  y cambiarle de signo para tener cargas en las juntas.

$$Q_3 = -T_{2-3}^t Q_2$$

- 4) Mediante el vector de colocación correspondiente al elemento cargado se realiza el ensamblaje del vector  $Q$ . Si a una determinada posición del vector  $Q$  llegan varios aportes, estos se van sumando.

• **EJEMPLO 4**

Calcular el vector  $Q$  de la estructura de la figura 5.16, cuyos elementos son totalmente flexibles. Calcular por medio de la matriz  $T_{2-3}$  es decir aplicando un procedimiento orientado al uso del ordenador.

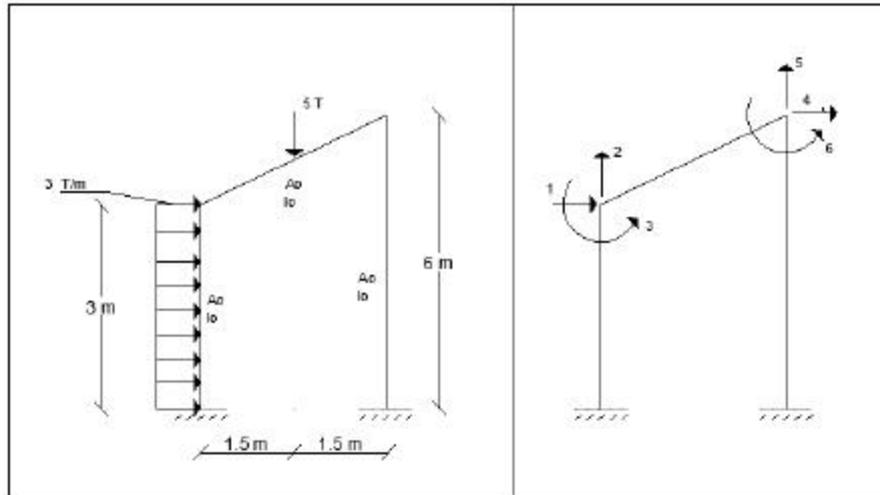


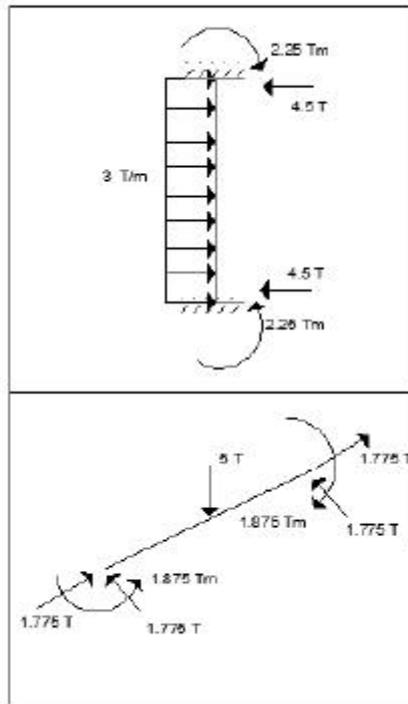
Figura 5.16 Datos de cargas de Ejemplo 4 y grados de libertad

• **SOLUCIÓN**

- i) Vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales  $Q_2$ . Se indica el vector transpuesto para ahorrar espacio en la escritura.

$$Q_2^{(1)} = [0.00 \quad 4.50 \quad 2.25 \quad 0.00 \quad 4.50 \quad -2.25]$$

$$Q_2^{(2)} = [1.775 \quad 1.775 \quad 1.875 \quad 1.775 \quad 1.775 \quad -1.875]$$



ii) Matriz  $T_{2-3}$  de elementos cargados

▪ Elemento 1

$$\theta = 90^\circ$$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Elemento 2

$$\theta = 45^\circ$$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Vector  $Q_3$ 

$$Q_3 = -T_{2-3}^t Q_2$$

$$Q_3^{(1)} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00 \\ 4.50 \\ 2.25 \\ 0.00 \\ 4.50 \\ -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{(2)} = - \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.707 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.775 \\ 1.875 \\ 1.775 \\ 1.775 \\ -1.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

iv) Ensamblaje de Q

$$VC^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$VC^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

$$Q_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.00 \\ -2.25 \\ 4.50 \\ 0.00 \\ 2.25 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Posición } 0 \\ \text{Posición } 0 \\ \text{Posición } 0 \\ \text{Posición } 1 \\ \text{Posición } 2 \\ \text{Posición } 3 \end{array}$$

$$Q_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -2.500 \\ -1.875 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Posición } 1 \\ \text{Posición } 2 \\ \text{Posición } 3 \\ \text{Posición } 4 \\ \text{Posición } 5 \\ \text{Posición } 6 \end{array}$$

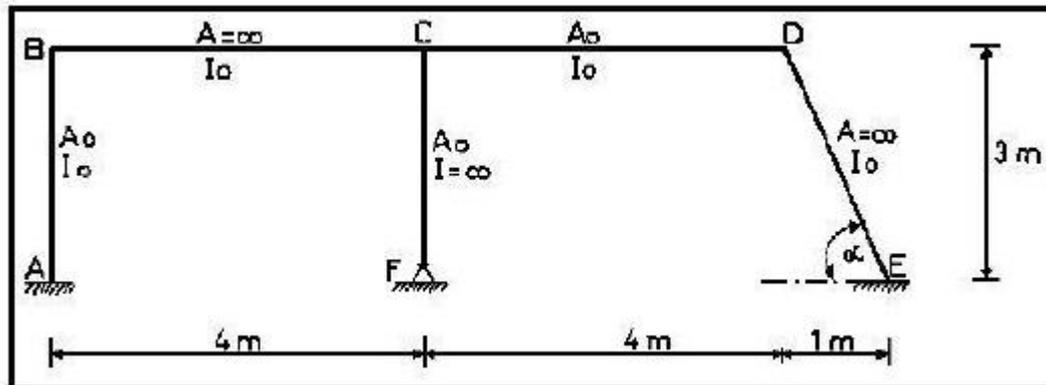
El  $VC$  indica la posición a la cual va el término de  $Q_3$  dentro del vector  $Q$ . Si la posición es 0 simplemente no contribuye y se pasa al siguiente. El vector resultante es:

$$Q = \begin{bmatrix} 4.5 + 0.0 \\ 0.0 - 2.5 \\ 2.25 - 1.875 \\ 0.0 \\ -2.5 \\ 1.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.500 \\ -2.500 \\ 0.375 \\ 0.000 \\ -2.500 \\ 1.875 \end{bmatrix}$$

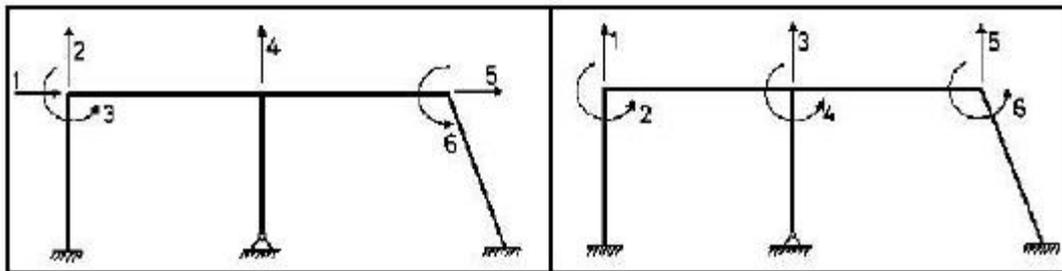
5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

• EJEMPLO 5

Para la estructura indicada en la parte superior de la figura 5.17 se presentan dos sistemas de coordenadas generalizadas en la parte inferior. Se pide calcular la matriz T de transformación de coordenadas tal que  $q = T q^*$



Estructura de Ejemplo 5



Sistema Q - q

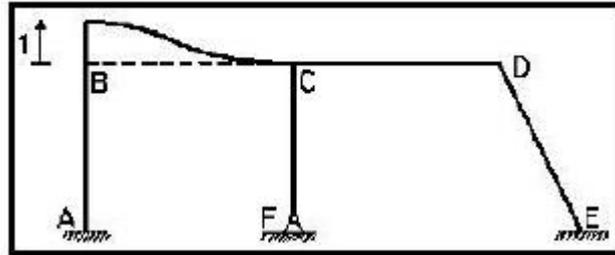
Sistema Q\* - q\*

Figura 5.17 Estructura de Ejemplo 5 y dos sistemas de coordenadas.

• SOLUCIÓN

- Primera columna de  $T$

$$q_i^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 1$$

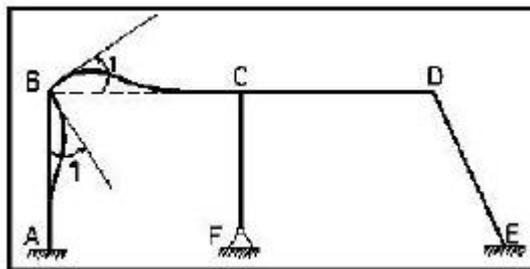


Deformada elemental  $q_1^*$

$$q_1 = 0 \quad q_2 = 1 \quad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- Segunda columna de  $T$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 2$$

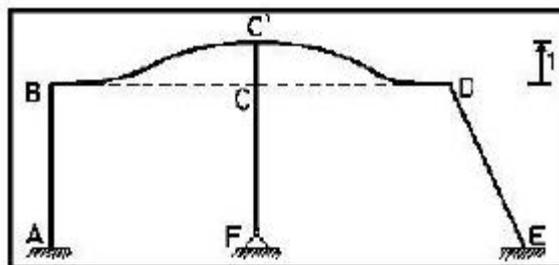


Deformada elemental  $q_2^*$

$$q_1 = q_2 = 0 \quad q_3 = 1 \quad q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- Tercera columna de  $T$

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 3$$

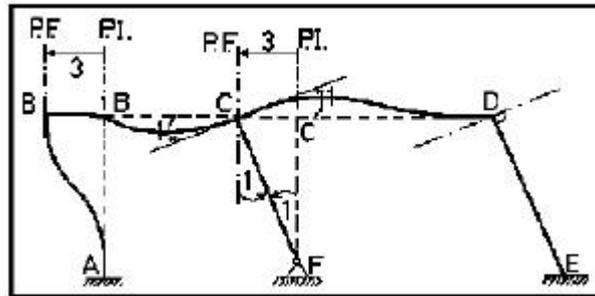


Deformada elemental  $q_3^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \quad q_4 = 1 \quad q_5 = q_6 = 0$$

- Cuarta columna de  $T$

$$q_4^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 4$$

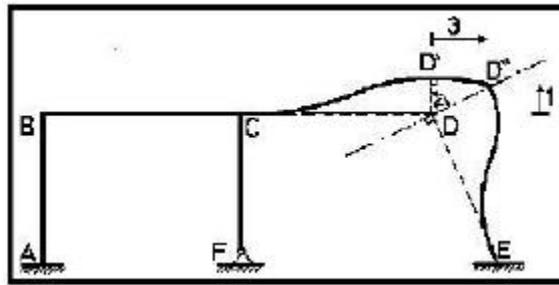


Deformada elemental  $q_4^*$

$$q_1 = -3 \quad q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

- Quinta columna de  $T$

$$q_5^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 5$$

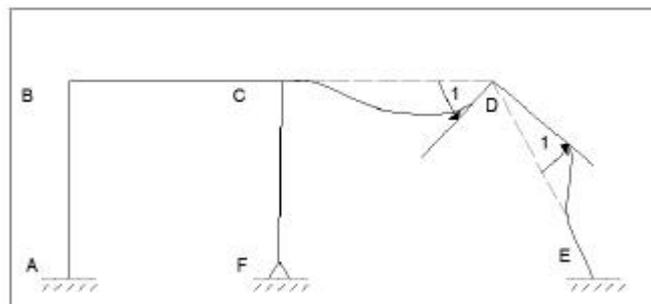


Deformada elemental  $q_5^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0 \quad q_5 = 3 \quad q_6 = 0$$

- Sexta columna de  $T$

$$q_6^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 6$$



Deformada elemental  $q_6^*$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0 \quad q_6 = 1$$

- Matriz  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO 6

En el pórtico plano que se presenta en la figura 5.18 se han seleccionado los sistemas de coordenadas generalizadas, indicados en la parte central ( $Q - q$ ) y al lado derecha ( $Q^* - q^*$ ) de la figura 5.18. Encontrar la matriz de transformación de coordenadas  $T$ , tal que:  $q = T q^*$ .

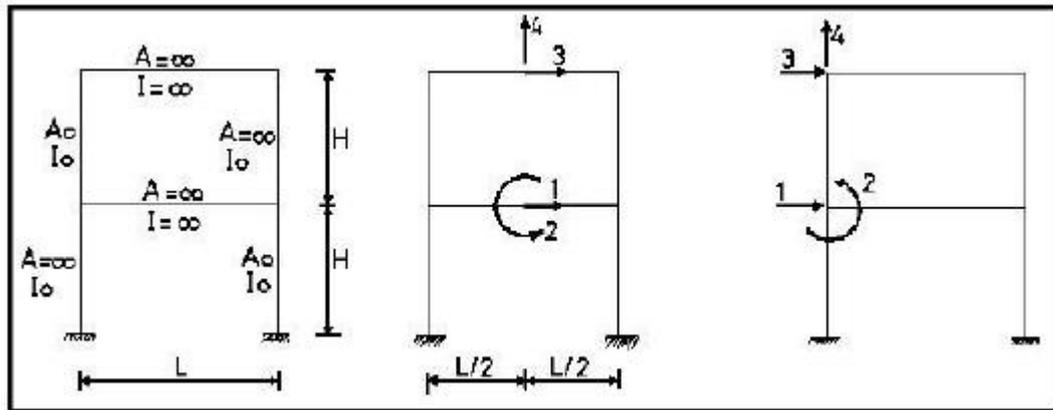
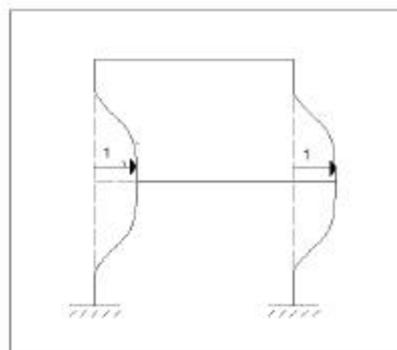


Figura 5.18 Estructura de Ejemplo 6 y sistemas de coordenadas  $Q - q$  y  $Q^* - q^*$

- SOLUCIÓN

- Primera columna de  $T$

$$q_i^* = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq 1$$

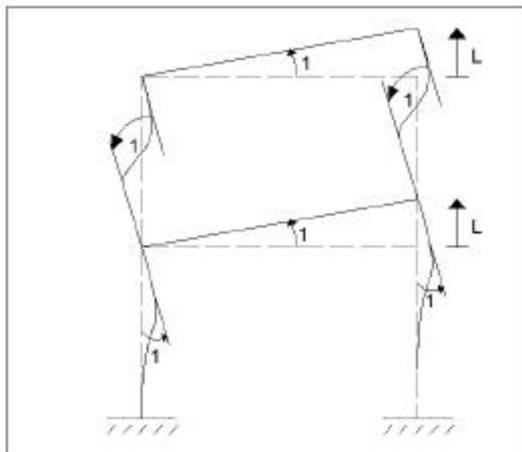


Deformada elemental  $q_1^*$

$$q_1 = 1 \quad q_2 = q_3 = q_4 = 0$$

- Segunda columna de  $T$

$$q_2^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 2$$



Deformada elemental  $q_2^*$

$$q_1 = 0$$

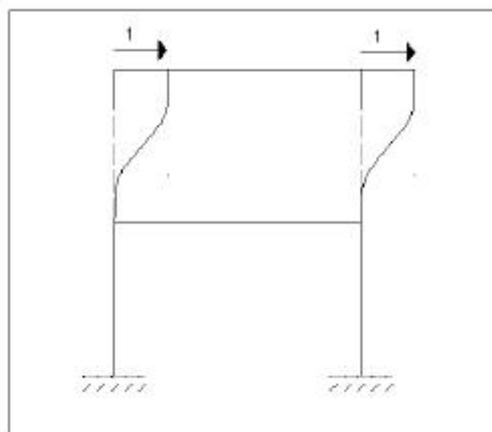
$$q_2 = 1$$

$$q_3 = 0$$

$$q_4 = \frac{L}{2}$$

- Tercera columna de  $T$

$$q_3^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 3$$



Deformada elemental  $q_3^*$

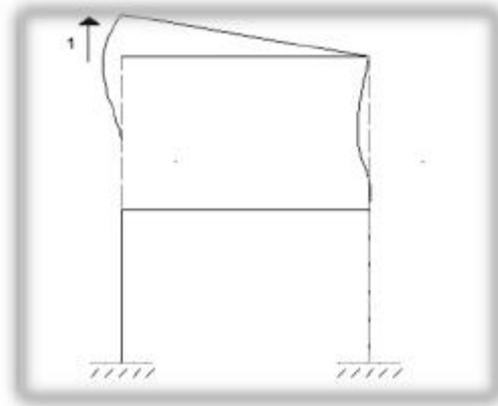
$$q_1 = q_2 = 0$$

$$q_3 = 1$$

$$q_4 = 0$$

- Cuarta columna de  $T$

$$q_4^* = 1 \quad y \quad q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 4$$

Deformada elemental  $q_4^*$ 

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0 \quad q_4 = \frac{1}{2}$$

- Matriz  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

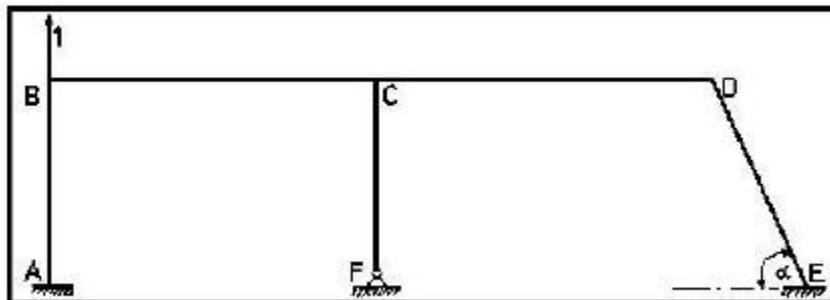
### • EJEMPLO 7

En relación con la estructura y sistemas de coordenadas del ejemplo 5, calcular la matriz  $T_1$ , tal que:  $Q = T_1 Q^*$ .

### • SOLUCIÓN

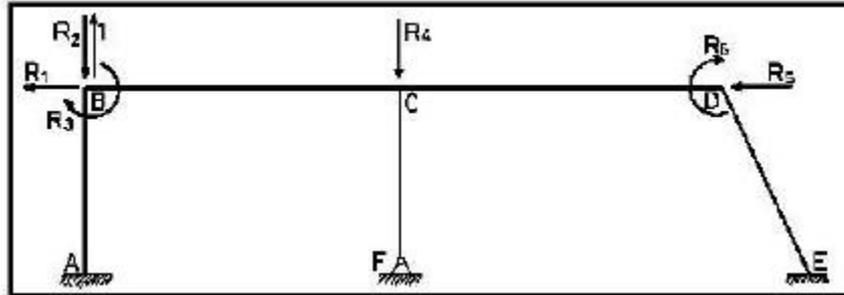
- Primera columna de  $T_1$

$$Q_1 = 1 \quad y \quad Q_i = 0 \quad \text{para } i \neq 1$$

Estado de carga para la primera columna de  $T_1$ .

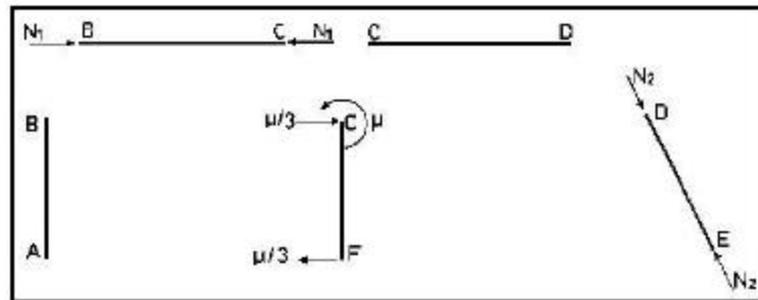
Se va a calcular la primera columna de la matriz  $T_1$  por empleando el Problema Primario y Complementario.

▪ Problema Primario



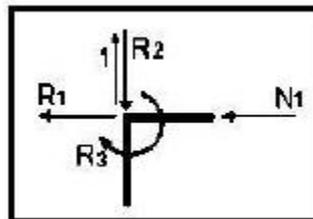
Problema Primario para la primera columna de  $T_1$ .

○ Equilibrio de Elementos



○ Equilibrio de Juntas

Junta B

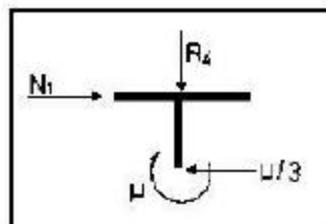


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_1 - R_1 = 0$$

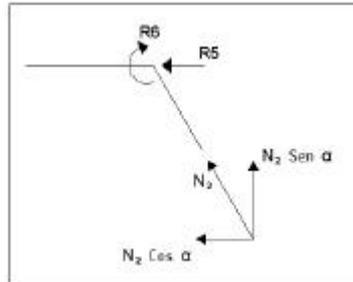
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 - R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow R_3 = 0$$

Junta C



$$\begin{aligned}\sum F_X = 0 &\Rightarrow N_1 - \frac{\mu}{3} = 0 \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow -R_4 = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow \mu = 0\end{aligned}$$

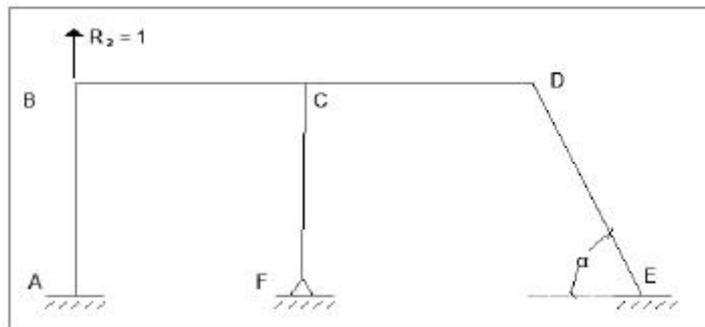
**Junta D**

$$\begin{aligned}\sum F_X = 0 &\Rightarrow R_5 + N_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow N_2 \text{ sen} \alpha = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_6 = 0\end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

$$R_1 = 0 \quad R_2 = 1 \quad R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 0 \quad N_1 = N_2 = \mu = 0$$

- **Problema Complementario**



$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = 1 \quad Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$$

Por un procedimiento parecido se obtendrán las diferentes columnas de la matriz  $T_1$ . Como se conoce el vector  $Q$  también se puede obtener por medio de trabajos virtuales. Se deja al estudiante que obtenga las demás columnas de la matriz  $T_1$ , en especial la cuarta y quinta columna.

- Matriz  $T_1$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **EJEMPLO 8**

Con relación a la estructura de la figura 5.19, en que la viga es transversalmente rígida, se pide:

1. Seleccionar un sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$  apropiado.
2. Encontrar el valor de  $Q$  que corresponde a la carga mostrada por trabajos virtuales y por medio del problema primario y complementario.
3. Encontrar la expresión de la elástica horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas  $q_i$  y de las funciones de forma.
4. Se efectúa una transformación de coordenadas  $q = T q^*$ . Donde  $T$  es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Dibujar la deformada elemental  $q_2^* = 1$  y las demás coordenadas nulas.

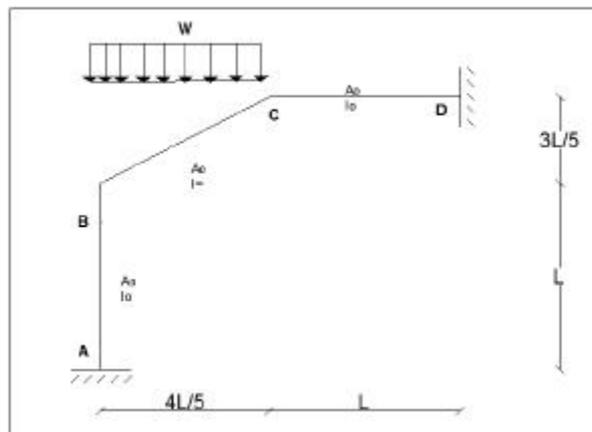
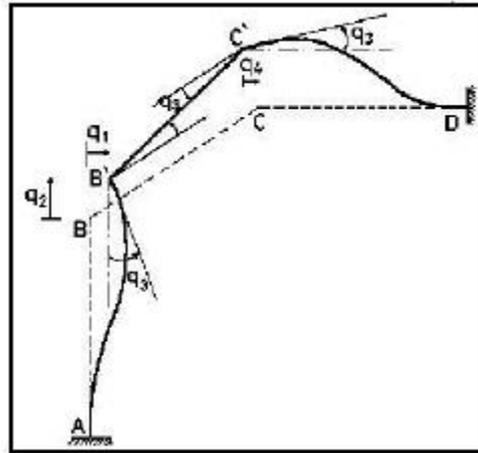


Figura 5.19 Estructura de los ejemplos 8, 9 y 10.

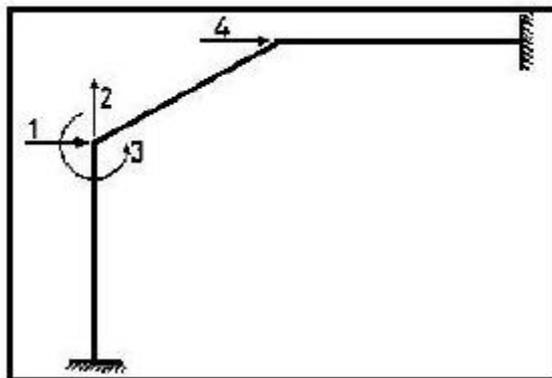
- **SOLUCIÓN**

Para seleccionar el sistema de coordenadas  $Q - q$  apropiado se debe dibujar una deformada general. Conviene aplicar las fórmulas indicadas en el Capítulo 1 para tener idea de los grados de libertad, se recuerda que el elemento  $I = \infty$  disminuye en 2 grados de libertad.

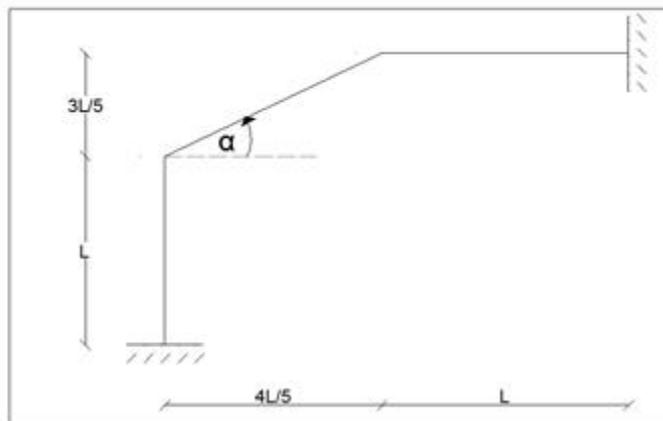


Deformada general

En base a la deformada general se encuentra el siguiente sistema de coordenadas  $Q - q$

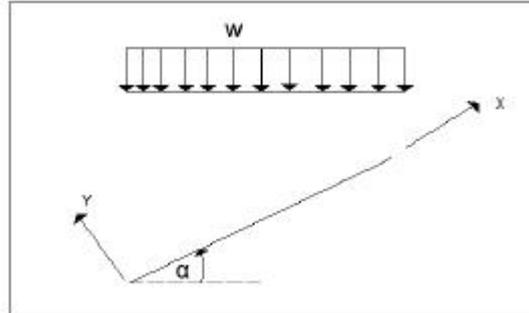
Sistema de coordenadas  $Q - q$ 

Antes de encontrar el vector de cargas  $Q$  conviene encontrar algunos parámetros geométricos que se necesitan en la solución del problema.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{Longitud } BC = L$$

La carga vertical debe ser descompuesta en una vertical y una horizontal distribuidas.



$$W_y = -W \operatorname{cos}^2 \alpha = -\frac{16}{25} W \quad W_x = -W \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = -\frac{12}{25} W$$

Se va a calcular el vector  $Q$  aplicando trabajos virtuales. Para ello es necesario tener en cuenta que el elemento BC es transversalmente rígido. En consecuencia las ordenadas de la elástica de éste elemento, son:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1 X$$

▪ Cálculo de  $Q_1$

$$\delta q_1 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

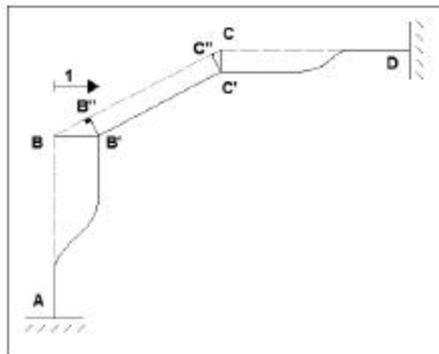
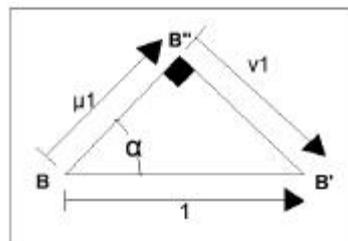
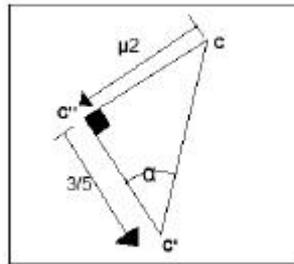


Figura 5.19.1 Deformada elemental  $\delta q_1 = 1$



En el triángulo BB'B'' se tiene:  $u_1 = \operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5} \quad v_1 = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$

En la deformada elemental se observa que B'B'' es igual a C'C'' y es igual a 3/5.



En el triángulo CC'C'' se tiene:  $u_2 = -\frac{3}{5} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{9}{20}$ .

En resumen para el elemento BC se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{4}{5} & u_2 &= -\frac{9}{20} \\ v_1 &= -\frac{3}{5} & v_2 &= -\frac{3}{5} \\ \theta_1 &= 0 & \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$Q_1 = \int_0^L W_x u(x) dx + \int_0^L W_y v(x) dx$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W [u_1(x) \phi_1(x) + u_2(x) \phi_4(x)] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W [v_1 + \theta_1 X]$$

$$Q_1 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[ \frac{4}{5} \left(1 - \frac{X}{L}\right) - \frac{9}{20} \frac{X}{L} \right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L \left[ -\frac{3}{5} \right] dx = \frac{3}{10} WL$$

▪ **Cálculo de  $Q_2$**

$$\delta q_2 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

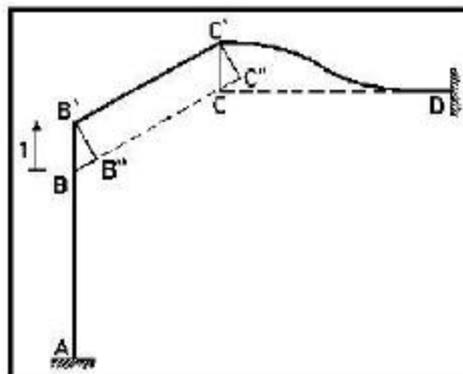
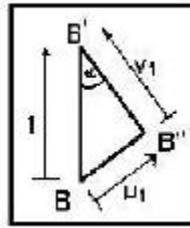


Figura 5.19.2 Deformada elemental  $\delta q_2 = 1$

En la figura se aprecia que el triángulo rectángulo BB'B'' es igual al triángulo CC'C''.



$$u_1 = \text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \qquad v_1 = \text{cos } \alpha = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto para el elemento inclinado BC se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{5} & u_2 &= \frac{3}{5} \\ v_1 &= \frac{4}{5} & v_2 &= \frac{4}{5} \\ \theta_1 &= 0 & \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_0^L W_x u(x) dx + \int_0^L W_y v(x) dx \\ Q_2 &= \int_0^L -\frac{12W}{25} [u_1(x) \phi_1(x) + u_2(x) \phi_4(x)] dx + \int_0^L -\frac{16W}{25} [v_1 + \theta_1 X] \\ Q_2 &= -\frac{12W}{25} \int_0^L \left[ \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{X}{L} \right) + \frac{3}{5} \frac{X}{L} \right] dx - \frac{16W}{25} \int_0^L \left[ \frac{4}{5} \right] dx = -4WL \end{aligned}$$

▪ **Cálculo de  $Q_3$**

En la deformada elemental  $\delta q_3$  que se indica a continuación, se debe aplicar el artificio para elementos  $I = \infty$  con el cual se obtiene que  $C'C''$  es igual a longitud del elemento L.

$$\delta q_3 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 3$$

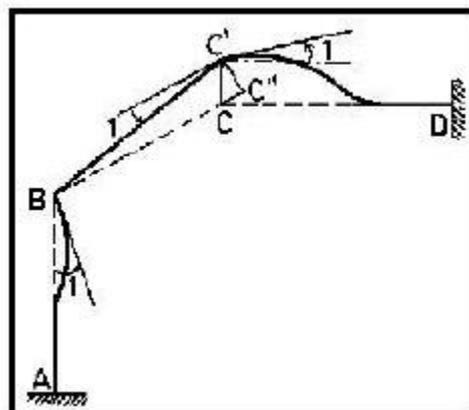
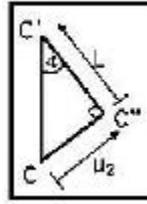


Figura 5.19.3 Deformada elemental  $\delta q_3 = 1$



En el triángulo CC'C'' se tiene que:  $u_2 = L \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} L$ . Para el elemento BC se tiene:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = \frac{3}{4} L$$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = L$$

$$\theta_1 = 1 \qquad \theta_2 = 1$$

$$Q_3 = \int_0^L W_x u(x) dx + \int_0^L W_y v(x) dx = \int_0^L \frac{12}{25} W [u_1(x) \phi_1(x) + u_2(x) \phi_4(x)] dx + \int_0^L \frac{16}{25} W [v_1 + \theta_1 X]$$

$$Q_3 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[ \frac{3L}{4} \frac{X}{L} \right] dx - \frac{16}{25} W \int_0^L [X] dx = -\frac{9}{25} W \cdot \frac{1}{2} X^2 \Big|_0^L - \frac{16}{25} W \cdot \frac{1}{2} X^2 \Big|_0^L$$

$$Q_3 = -\frac{9}{50} WL^2 - \frac{16}{50} WL^2 = -\frac{25}{50} WL^2 = -\frac{1}{2} WL^2$$

▪ Cálculo de  $Q_4$

$$\delta q_4 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

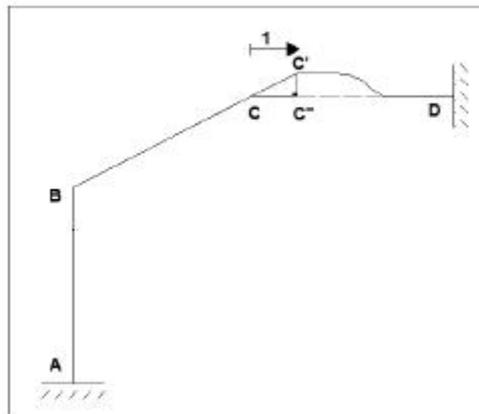
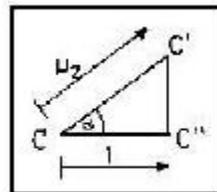


Figura 5.19.4 Deformada elemental  $\delta q_4$

En el triángulo CC'C'' de la figura 5.11.7 se tiene que:  $u_2 = \sec \alpha = \frac{5}{4}$



En consecuencia las coordenadas del elemento BC, son:

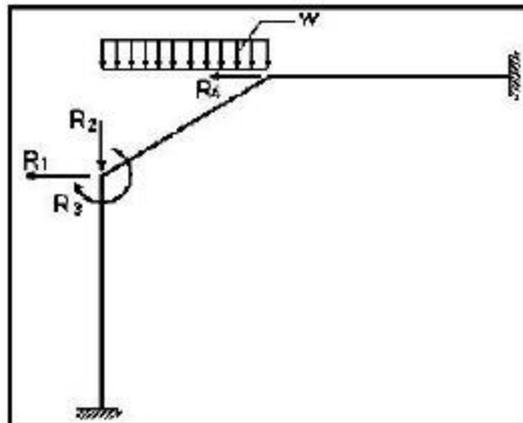
$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0 \quad u_2 = \frac{5}{4} \quad v_2 = \theta_2 = 0$$

$$Q_4 = \int_0^L W_X u(x) dx + \int_0^L W_Y v(x) dx = \int_0^L \frac{12}{25} W [u_1(x) \phi_1(x) + u_2(x) \phi_4(x)] dx + \int_0^L \frac{16}{25} W [v_1 + \theta_1 X]$$

$$Q_4 = -\frac{12}{25} W \int_0^L \left[ \frac{5}{4} \frac{X}{L} \right] dx = -\frac{3}{5} W \cdot \frac{1}{2L} X^2 \Big|_0^L = -\frac{3}{10} WL$$

$$Q = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha terminado el cálculo del vector de cargas  $Q$  por trabajos virtuales se procede a su cálculo por medio del Problema Primario y Complementario.

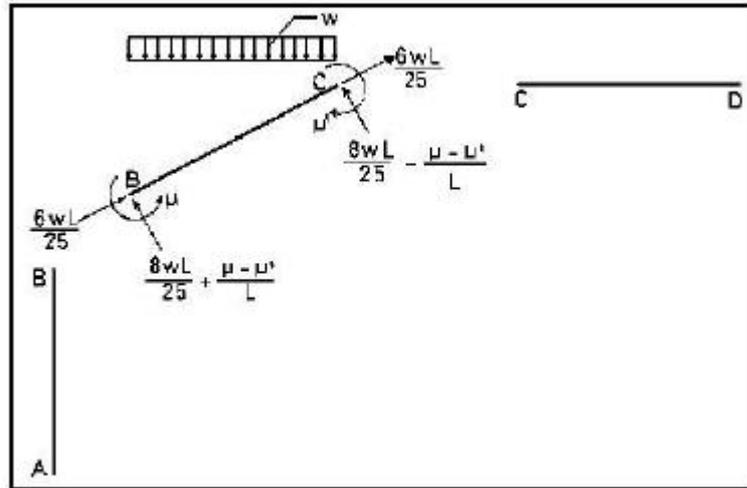


Problema Primario  $q = 0$

- **Equilibrio de elementos**

$$N_B = \int_0^L W_X \phi^1(x) dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \left( 1 - \frac{X}{L} \right) dx = \frac{12}{25} W \left[ X - \frac{X^2}{2L} \right]_0^L = \frac{6}{25} WL$$

$$N_C = \int_0^L W_X \phi^4(x) dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \cdot \frac{X}{L} dx = \frac{12}{25} W \cdot \frac{1}{2L} X^2 \Big|_0^L = \frac{6}{25} WL$$

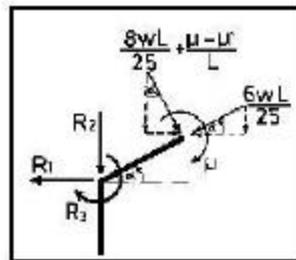


El cortante  $V_B$  se puede encontrar integrando entre 0 y L la carga  $W_Y$  multiplicando por la función de forma  $\phi_2(x)$  y para el cortante  $V_C$  multiplicando dicha carga por  $\phi_5(x)$  e integrando. Otra forma de hacerlo es la siguiente:

$$V_B = V_C = \frac{W_Y * L}{2} = \frac{16}{25} W \frac{L}{2} = \frac{8}{25} WL$$

▪ **Equilibrio de Juntas**

**Junta B**

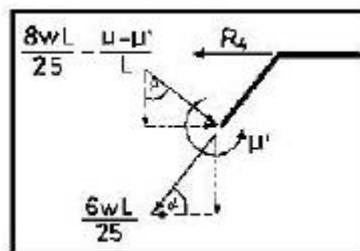


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \left( \frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \sin \alpha - \frac{6}{25} WL \cos \alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \left( \frac{8\mu}{25} WL + \frac{-\mu'}{L} \right) \cos \alpha - \frac{6}{25} WL \sin \alpha + R_2 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow L$$

**Junta C**



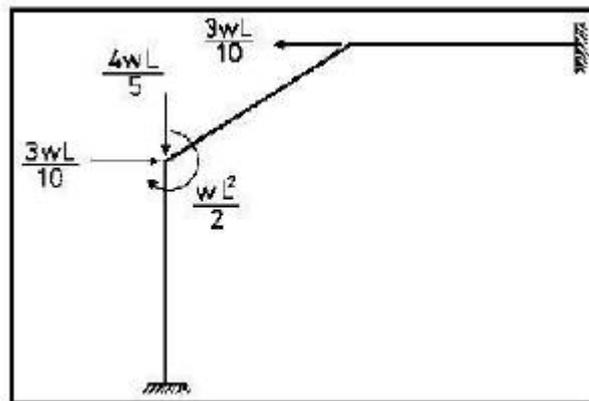
$$R_3 + \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{l} 8 \\ 25 \end{array} \right) WL - \frac{\mu}{L} \mu' = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{l} 8 \\ 25 \end{array} \right) WL - \frac{\mu}{L} \mu' = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow -\mu' = 0 \end{aligned}$$

Al reemplazar  $\text{sen } \alpha = 3/5$ ,  $\text{cos } \alpha = 4/5$  y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3}{10} WL & R_2 &= -\frac{4}{5} WL \\ R_3 &= -\frac{WL^2}{2} & R_4 &= -\frac{3}{10} WL \\ \mu &= -\frac{WL^2}{2} & \mu' &= 0 \end{aligned}$$

El problema complementario se indica a continuación



Problema complementario.

$$Q = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de las ordenadas de la elástica del elemento BC en términos de las coordenadas  $q_i$  y de las funciones de forma  $\phi$  es necesario encontrar el desplazamiento vertical del nudo C, que se ha denominado  $q_5$ . El valor de  $q_5$  se halla en cada uno de los diagramas de deformación elementales que se han dibujado (figuras 5.19.1 a 5.19.4) pero en estos diagramas en lugar de considerar deformación unitaria considerar la deformación de la coordenada para la cual se obtiene el diagrama elemental. Con esta consideración en la figura 5.19.1 se tendría que:

$$B'B'' = q_1 \text{sen } \alpha = \frac{3}{5} q_1$$

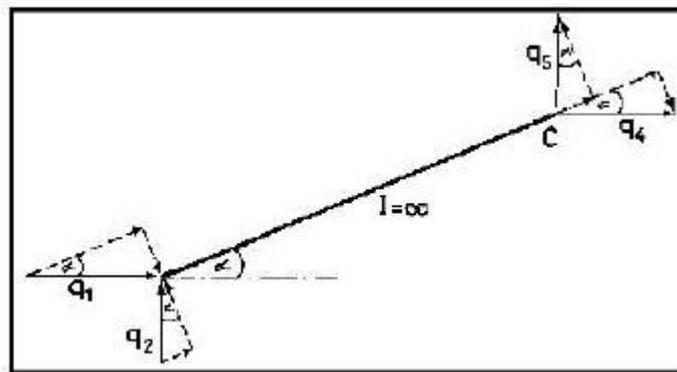
En la figura 5.19.1 se aprecia que B'B'' es igual a C'C''. Luego en el triángulo CC'C'' de la figura 5.19.1 se tiene que la componente de desplazamiento vertical CC' es negativo porque va hacia abajo y vale.

$$CC' = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\cos\alpha} = -\frac{\frac{3}{5}q_1}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}q_1$$

Por lo tanto la contribución de  $q_1$  en el desplazamiento vertical del nudo C que se ha denominado  $q_5$  es  $-\frac{3}{4}q_1$  que se lo ha obtenido de la figura 5.19.1. Al proceder de igual manera en la figura 5.19.2 la contribución de  $q_2$  en el desplazamiento vertical de C es igual a  $q_2$ . De la figura 5.19.3 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea  $\frac{5}{4}Lq_3$ . Finalmente de la figura 5.19.4 se obtiene que el desplazamiento vertical de C sea  $\frac{3}{4}q_4$ . Al sumar estas contribuciones elementales se halla la componente de desplazamiento vertical del nudo C denominada  $q_5$ .

$$q_5 = -\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}Lq_3 + \frac{3}{4}q_4$$

Ahora se debe calcular las coordenadas del elemento  $u_1, u_2, v_1$  y  $\theta_1$  para encontrar las ordenadas de la elástica de BC.



$$u_1 = q_1 \cos\alpha + q_2 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_2$$

$$v_1 = q_2 \cos\alpha - q_1 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_2 - \frac{3}{5}q_1$$

$$u_2 = q_4 \cos\alpha + q_5 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_4 + \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}q_1 + q_2 + \frac{5}{4}Lq_3 + \frac{3}{4}q_4\right)$$

$$u_2 = -\frac{9}{20}q_1 + \frac{3}{5}q_2 + \frac{3}{4}Lq_3 + \frac{5}{4}q_4$$

Por ser el elemento transversalmente rígido las ordenadas axial y transversal de la elástica son:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1 X$$

Reemplazando valores:

$$u(x) = \left( \frac{4}{5} q_1 + \frac{3}{5} q_2 \right) \left( 1 - \frac{X}{L} \right) + \left( -\frac{9}{20} q_1 + \frac{3}{5} q_2 + \frac{3}{4} L q_3 + \frac{5}{4} q_4 \right) \frac{X}{L}$$

$$u(x) = \frac{4}{5} q_1 + \frac{3}{5} q_2 - \frac{5}{4} q_1 \cdot \frac{X}{L} + \frac{3}{L} X q_3 + \frac{5}{4} \frac{X}{L} q_4$$

$$v(x) = \left( \frac{4}{5} q_2 - \frac{3}{5} q_1 \right) + q_3 X$$

Finalmente para dibujar el estado de desplazamiento  $q_2^* = 1$  y las demás coordenadas nulas se debe reemplazar la matriz  $T$  en:

$$q = T q^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial  $T q^*$  e igualar al vector  $q$  se tiene.

$$q_1 = q_1^*$$

$$q_2 = q_1^* + q_2^*$$

$$q_3 = q_2^* + 2 q_3^*$$

$$q_4 = q_2^* + q_4^*$$

Si reemplazamos  $q_2^* = 1$  y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1 = 0 \quad q_2 = 1 \quad q_3 = 1 \quad q_4 = 1$$

Por consiguiente el diagrama elemental buscado es:

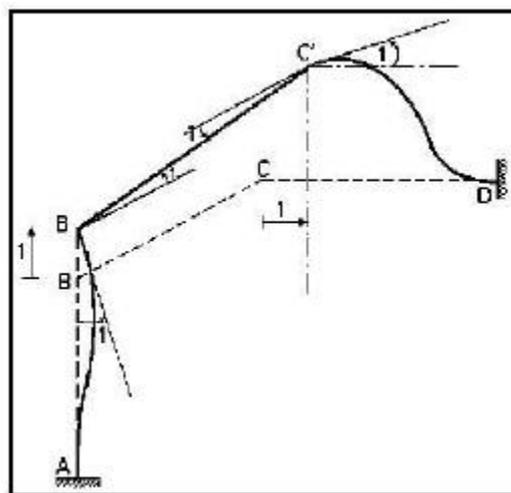


Figura 5.19.5 Deformada elemental  $q_2^*$

• EJEMPLO 9

Resolver el ejemplo 8 considerando el sistema de coordenadas indicado en la figura 5.20.

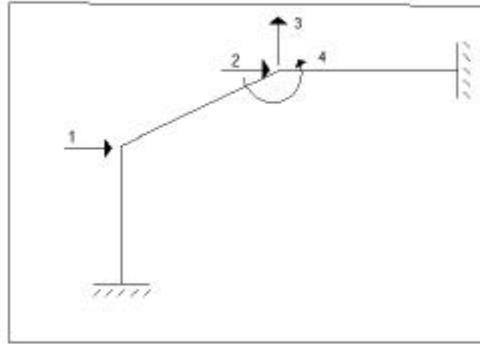


Figura 5.20 Nuevo sistema de coordenadas  $Q - q$

❖ Cálculo de  $Q$  por trabajos virtuales.

▪ Cálculo de  $Q_1$

$$\delta q_1 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

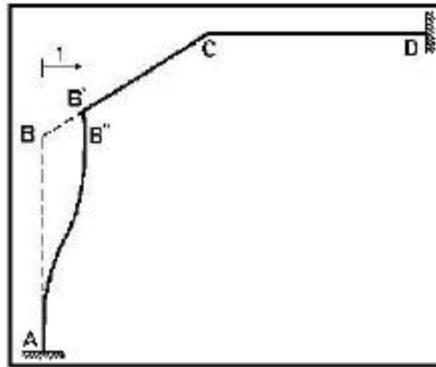
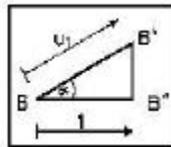


Figura 5.20.1 Deformada elemental  $\delta q_1$



En triángulo  $BB'B''$  se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{1}{u_1} \quad u_1 = \frac{5}{4}$$

$$Q_1 = \int_0^L W_x u(x) dx + \int_0^L W_y v(x) dx$$

$$u(x) = \frac{5}{4} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad v(x) = 0$$

$$Q_1 = \int_0^L -\frac{12}{25} W * \frac{5}{4} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \frac{3}{5} dx = - W X - \frac{X^{21L}}{2L_0} = -\frac{3}{5} W * \frac{L}{2} = -\frac{3}{10} WL$$

▪ Cálculo de  $Q_2$

$$\delta q_2 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 2$$

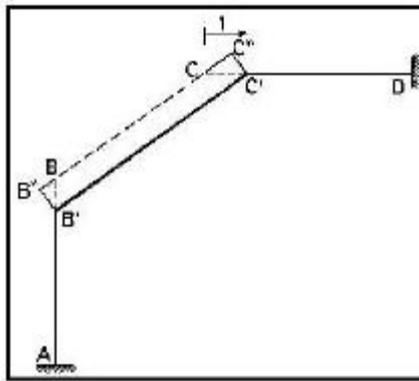
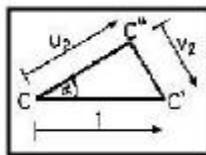


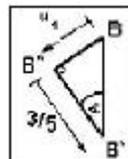
Figura 5.20.2 Deformada elemental  $\delta q_2$



Triángulo CC'C''

$$u_2 = \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad v_2 = -\text{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$$

C''C' es igual a B''B' porque el elemento BC es  $I = \infty$



Triángulo BB'B''

$$\text{tg } \alpha = \frac{u_1}{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{9}{20}$$

Pero  $u_1$  es negativo, luego:

$$u_1 = -\frac{9}{20} \qquad v_1 = -\frac{3}{5}$$

$$u(x) = -\frac{9}{20} \left(1 - \frac{X}{L}\right) + \frac{4}{5} \frac{X}{L} = \frac{5}{4} \frac{X}{L} - \frac{9}{20}$$



- Cálculo de  $Q_4$

$$\delta q_4 = 1 \quad \text{y} \quad \delta q_i = 0 \quad i \neq 4$$

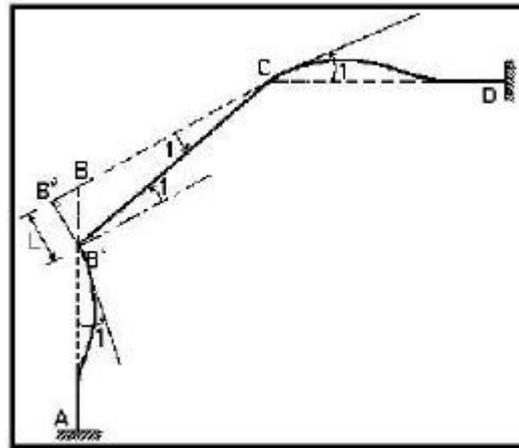
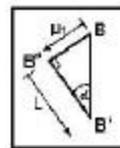


Figura 5.20.4 Deformada elemental  $\delta q_4$



$$u_1 = -tg\alpha \quad L = -\frac{3}{4}L \quad v_1 = -L \quad \theta_1 = 1$$

$$u(x) = -\frac{3}{4}L\left(1 - \frac{X}{L}\right) \quad v(x) = -L + X$$

$$Q_4 = \int_0^L W_x u(x) dx + \int_0^L W_y v(x) dx = \int_0^L \frac{12}{25} W \left[ -\frac{3}{4}L \left(1 - \frac{X}{L}\right) \right] dx + \int_0^L -\frac{16}{25} W (-L + X) dx$$

$$Q_4 = \frac{36}{100} WL X - \frac{X^2}{2L} - \frac{16}{25} W (-LX) + \frac{X^2}{2} = \frac{36}{200} WL^2 + \frac{16}{50} WL^2 = \frac{WL^2}{2}$$

$$Q = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

❖ Cálculo de  $Q$  por problema primario y complementario

- Problema Primario

En la figura 5.20.5 se presenta el Problema Primario que debe cumplir la condición de que el vector de coordenadas generalizadas  $q = 0$ . Para ello se necesitan fuerzas de fijación  $R$  que son de sentido contrario al de las coordenadas que se quiere que sean nulas.

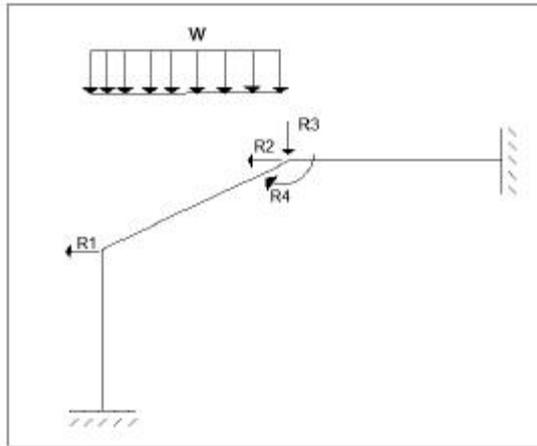
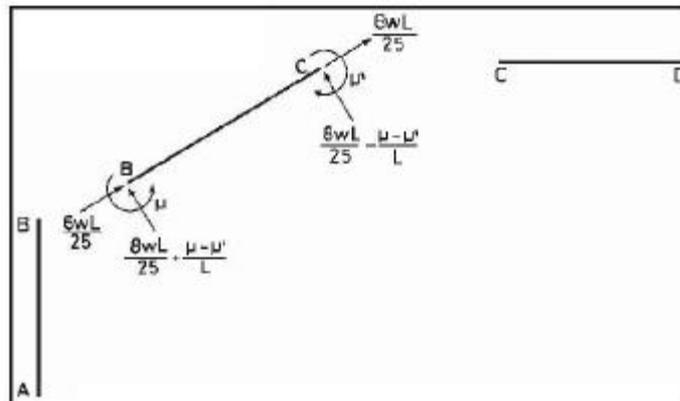
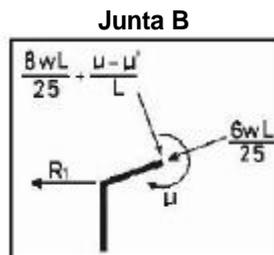


Figura 5.20.5 Problema Primario  $q=0$

○ Equilibrio de elementos



○ Equilibrio de juntas

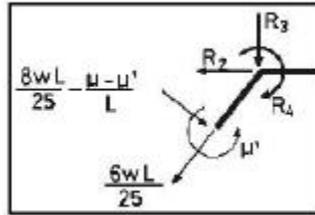


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \left( \left| \frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right| \right) \text{sen } \alpha - \frac{6}{25} WL \cos \alpha - R_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \left( \left| \frac{8}{25} WL + \frac{\mu - \mu'}{L} \right| \right) \cos \alpha - \frac{6}{25} WL \text{sen } \alpha = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Junta C



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \left( \frac{8wL}{25} - \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \sin \alpha - \frac{6wL}{25} \cos \alpha - R_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \left( \frac{8wL}{25} - \frac{\mu - \mu'}{L} \right) \cos \alpha - \frac{6wL}{25} \sin \alpha + R_3 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow R_4 - \mu' = 0$$

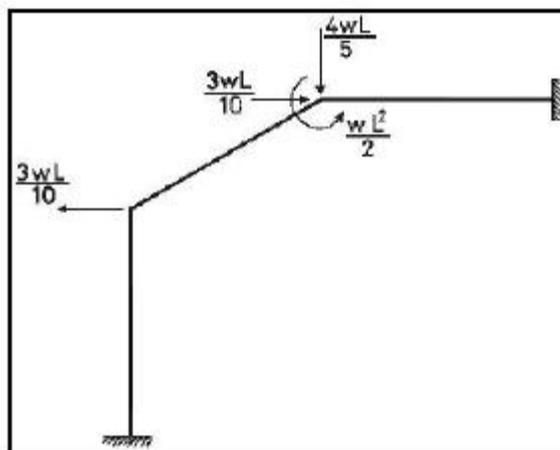
De la solución de las ecuaciones se obtiene:

$$R_1 = -\frac{3}{10} WL \qquad R_2 = \frac{3}{10} WL$$

$$R_3 = -\frac{4}{5} WL \qquad R_4 = \frac{WL^2}{2}$$

$$\mu = 0 \qquad \mu' = -\frac{WL^2}{2}$$

▪ Problema Complementario



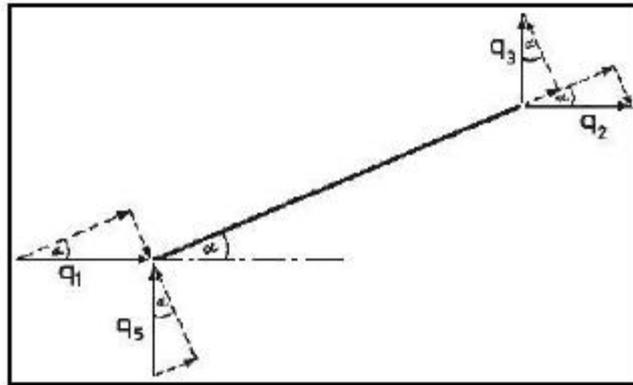
Problema Complementario

$$Q = \frac{WL}{10} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -8 \\ 5L \end{bmatrix}$$

Para encontrar las expresiones de la elástica  $u(x)$  y  $v(x)$  del elemento BC. En este caso se necesita conocer el desplazamiento vertical del nudo B. A este desplazamiento se va a denominar  $q_5$  El

cálculo se realiza aplicando el principio de superposición en cada una de las deformadas elementales, es así como de la figura 5.20.1 se obtiene que el corrimiento vertical de B vale  $\frac{3}{4}q_1$ . De la figura 5.20.2 se tiene que el desplazamiento vertical de B es negativo y vale  $-\frac{3}{4}q_2$ . En la figura 5.20.3 se aprecia que este desplazamiento es igual a  $q_3$ . Finalmente en la figura 5.20.4 se halla que el desplazamiento vale  $-\frac{5}{4}Lq_4$ . Por lo tanto:

$$q_5 = \frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}Lq_4$$



$$u_1 = q_1 \cos\alpha + q_5 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5}q_5$$

$$u_1 = \frac{4}{5}q_1 + \frac{3}{5} \left[ \frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}Lq_4 \right] = \frac{4}{5}q_1 + \frac{9}{20}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}Lq_4$$

$$u_1 = \frac{5}{4}q_1 - \frac{9}{20}q_2 + \frac{3}{5}q_3 - \frac{3}{4}Lq_4$$

$$v_1 = q_5 \cos\alpha - q_1 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_5 - \frac{3}{5}q_1 = \frac{4}{5} \left[ \frac{3}{4}q_1 - \frac{3}{4}q_2 + q_3 - \frac{5}{4}Lq_4 \right] - \frac{3}{5}q_1$$

$$v_1 = -\frac{3}{5}q_2 + \frac{4}{5}q_3 - Lq_4$$

$$u_2 = q_2 \cos\alpha + q_3 \sin\alpha = \frac{4}{5}q_2 + \frac{3}{5}q_3$$

Las expresiones de la elástica resultan:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x) = u_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + u_2 \cdot \frac{x}{L}$$

$$u(x) = \left( \frac{5}{4} q_1 - \frac{9}{20} q_2 + \frac{3}{5} q_3 - \frac{3}{4} q_4 \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \left( \frac{4}{5} q_2 + \frac{3}{5} q_3 \right) \frac{x}{L}$$

$$u(x) = \frac{5}{4} q_1 - \frac{9}{20} q_2 + \frac{3}{5} q_3 - \frac{3}{4} q_4 - \frac{5x}{4L} q_1 + \frac{9x}{20L} q_2 - \frac{3x}{5L} q_3 + \frac{3x}{4} q_4 + \frac{4x}{5L} q_2 + \frac{3x}{5L} q_3$$

$$u(x) = \frac{5}{4} q_1 - \frac{9}{20} q_2 + \frac{3}{5} q_3 - \frac{3}{4} q_4 - \frac{5x}{4L} q_1 + \frac{5x}{4L} q_2 + \frac{3x}{4} q_4$$

$$v(x) = v_1 + \theta_1 X = -\frac{3}{5} q_2 + \frac{4}{5} q_3 - L q_4 + q_4 X$$

Ahora se tiene:

$$q = T q^*$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto matricial  $T q^*$  e igualar al vector  $q$  se tiene:

$$q_1 = q_1^*$$

$$q_2 = q_1^* + q_2^*$$

$$q_3 = q_2^* + 2 q_3^*$$

$$q_4 = q_2^* + q_4^*$$

Si reemplazamos  $q_2^* = 1$  y las demás coordenadas nulas se encuentra:

$$q_1 = 0 \quad q_2 = 1 \quad q_3 = 1 \quad q_4 = 1$$

Son los mismos valores del ejercicio anterior pero la deformada elemental buscada es diferente ya que las coordenadas son diferentes. Esta deformada se presenta en la figura 5.20.6

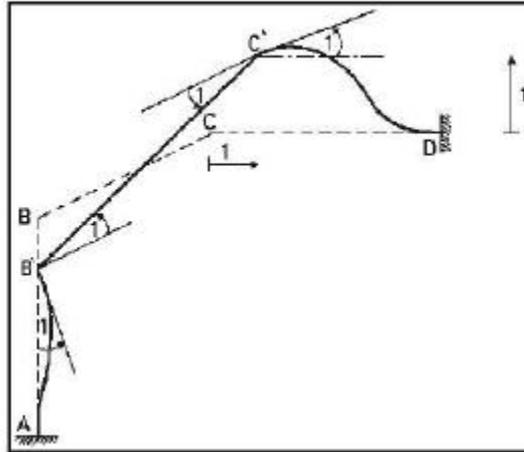


Figura 5.20.6 Deformada elemental  $q_1^*$

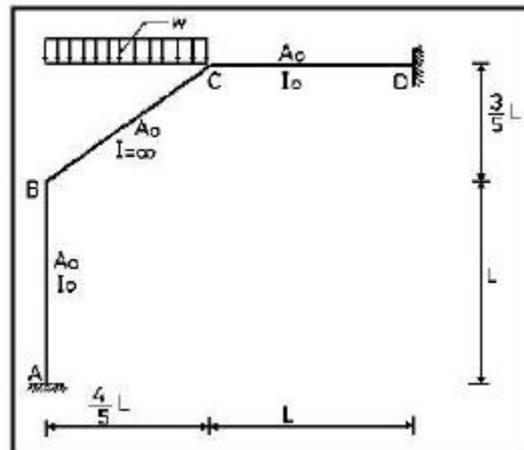
• EJEMPLO 10

En los Ejemplos 8 y 9 se resolvió la misma estructura con diferentes sistemas de coordenadas, los mismos que se indican en la parte inferior de la figura 5.21; al de la izquierda se denomina  $q - q$  corresponde al Ejemplo 8, cuyo vector  $q$  se indica a continuación. En el ejemplo 9 fue resuelto con el sistema de coordenadas de la derecha, a este sistema se denomina  $q^* - q^*$

$$Q = \begin{matrix} WL \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -5L \\ -3 \end{bmatrix}$$

Con esta nueva notación para los sistemas de coordenadas generalizadas se desea encontrar:

1. La matriz de transformación de coordenadas  $T$  tal que  $q = T q^*$ .
2. Encontrar el vector de cargas generalizadas  $Q^*$ . Empleando la siguiente ecuación  $Q^* = T^t Q$ .



Estructura de Ejemplos 8 a 10

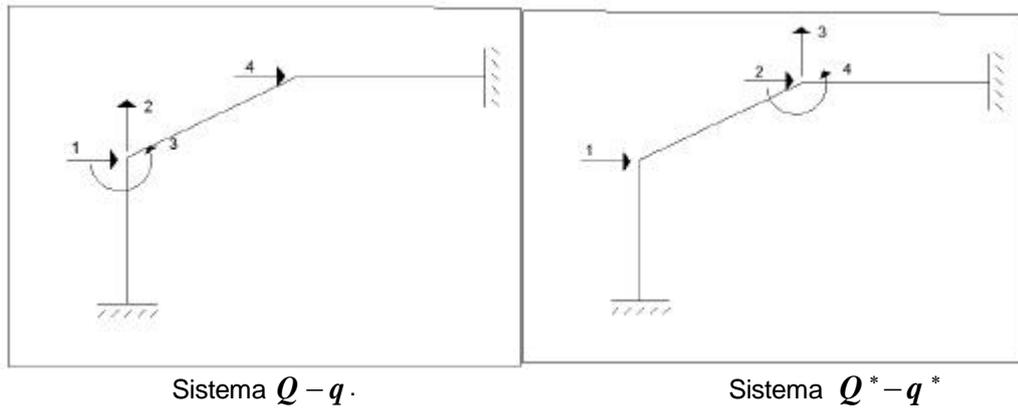


Figura 5.21 Estructura con dos sistemas de coordenadas generalizadas.

• SOLUCIÓN

En base a las deformadas elementales indicadas en las figuras 5.20.1 a 5.20.4 se obtienen los elementos de la matriz  $T$ . Con la figura 5.20.1 se obtienen los elementos de la primera columna de  $T$  con la figura 5.20.2 la segunda columna de  $T$ , etc. La matriz que se obtiene es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{5}{4}L \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas generalizadas  $Q^*$  resulta:

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4}L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} \begin{matrix} WL \\ -8 \\ WL \\ -3 \end{matrix}$$

El vector  $Q^*$  como tenía que ser, es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 9.

• EJEMPLO 11

En la figura 5.22 se presenta, a la izquierda un pórtico cuya viga es infinitamente rígida, al centro se indica un posible sistema de coordenadas  $Q-q$  y a la derecha otro sistema  $Q^*-q^*$ . Se desea hallar la matriz de transformación de coordenadas  $T$ , tal que  $q = Tq^*$ .

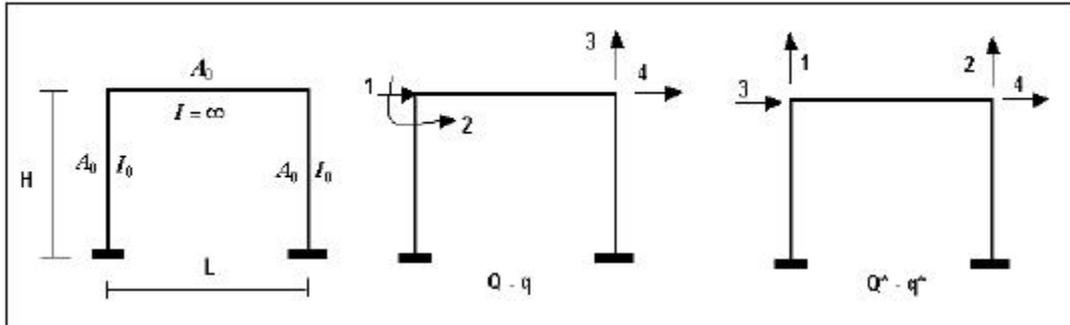
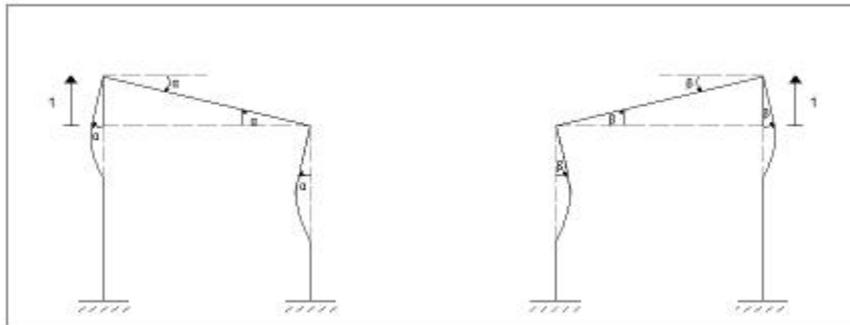


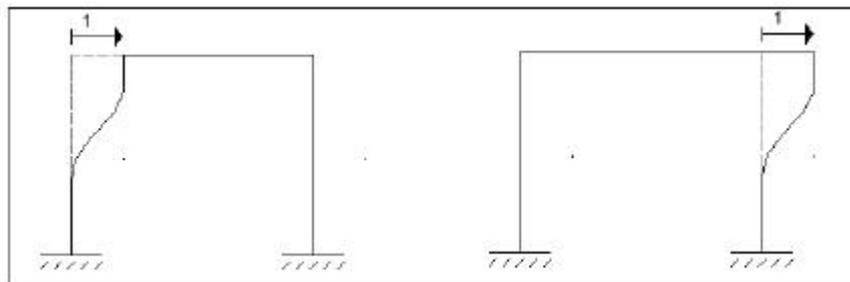
Figura 5.22 Estructura de ejemplo 11 y dos sistemas de coordenadas generalizadas.

• SOLUCIÓN



Deformada elemental  $q_1^*=1$

Deformada elemental  $q_2^*=1$



Deformada elemental  $q_3^*=1$

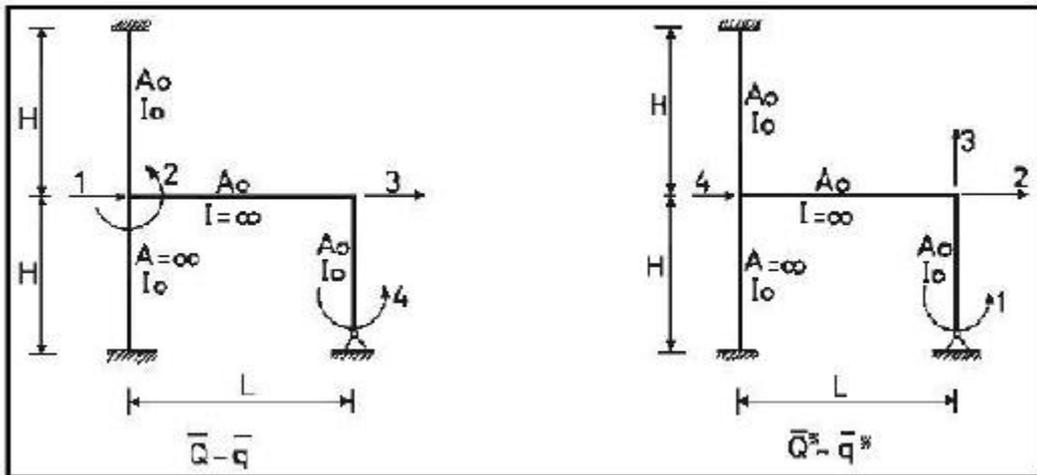
Deformada elemental  $q_4^*=1$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/L & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

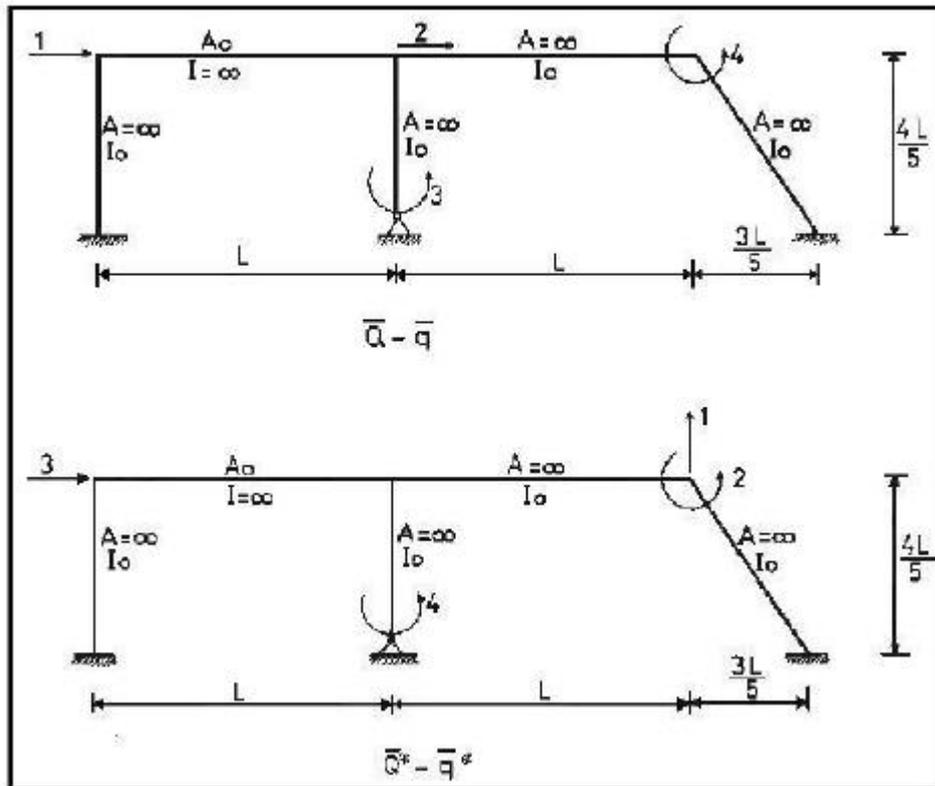
5.7 EJERCICIOS PROPUESTO

Dados los sistemas  $Q - q$  y  $Q^* - q^*$  en los ejercicios 1, 2 y 3. Se pide calcular:

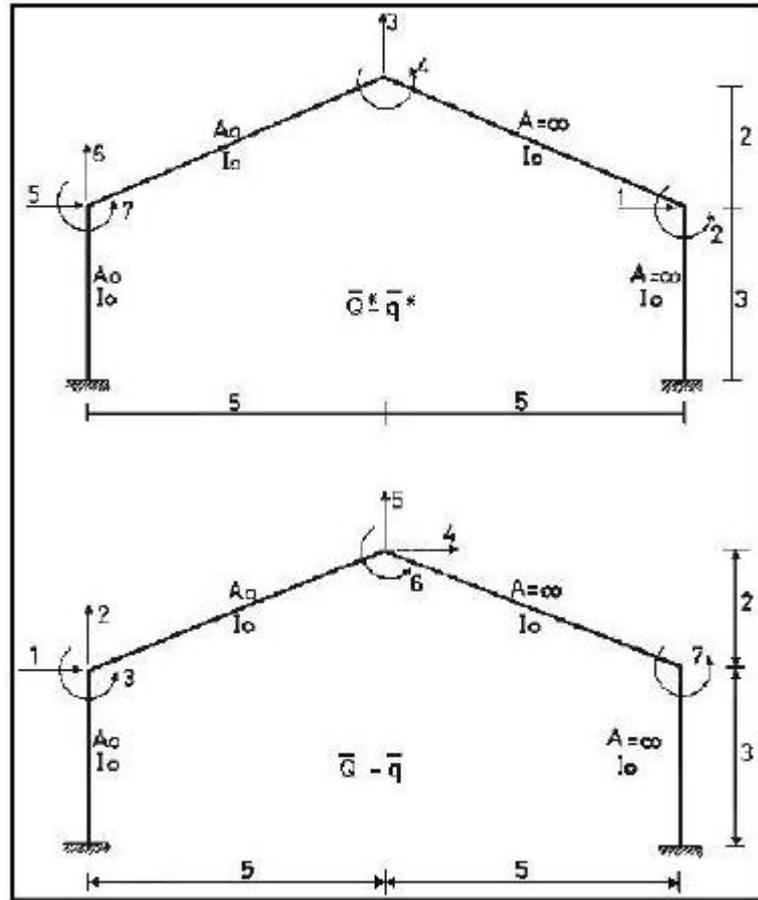
- i) La matriz  $T$ , tal que  $q = T q^*$ .
- ii) La matriz  $T_I$ , tal que  $Q = T_I Q^*$ .
- iii) Comprobar que  $T^T \equiv T_I$



Ejercicio N.- 1



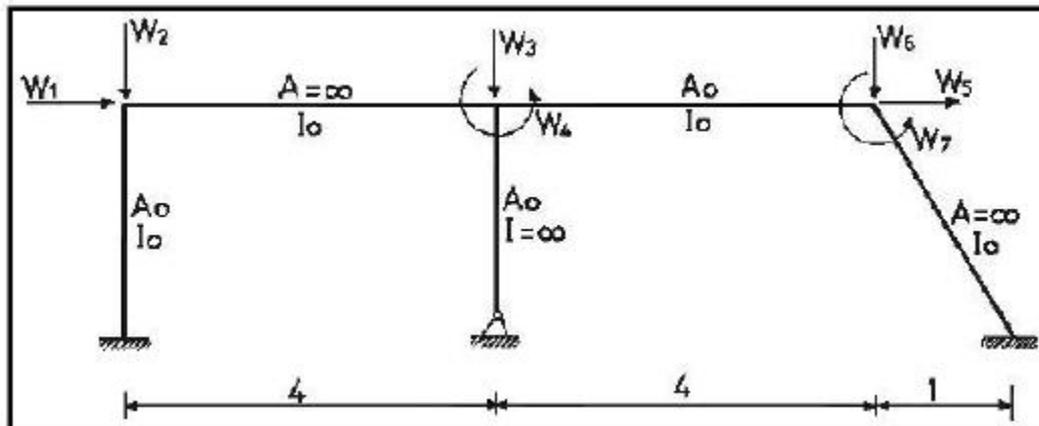
Ejercicio N.- 2



Ejercicio N.- 3

Ejercicio N.- 4

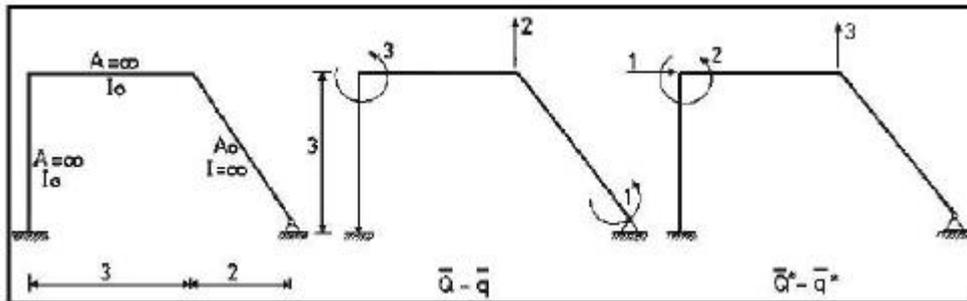
Si sobre la estructura de la figura 5.17 actúa el sistema de cargas presentado a continuación. Se pide calcular los vectores de cargas generalizadas  $\bar{Q}$  y  $\bar{Q}^*$  para los sistemas de coordenadas presentados en las figura 5.17. Comprobar el resultado obtenido utilizando la matriz  $T$  del ejemplo 5, si  $\bar{Q}^* = T^t \bar{Q}$ .



Ejercicio N.- 4

Ejercicio N.- 5

Para el pórtico plano de la figura 5.2 se desea calcular la relación inversa que existe entre las coordenadas generalizadas. Por consiguiente ahora se tienen los siguientes sistemas de coordenadas.

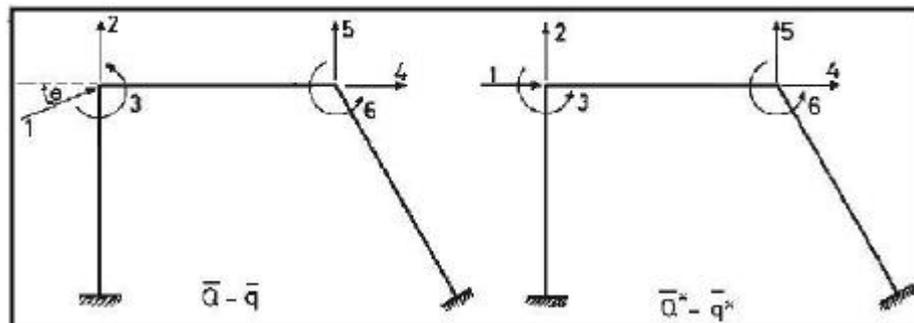


Ejercicio N.- 5

Calcular la matriz  $T$  tal que  $q = T q^*$ .

Ejercicio N.- 6

Para la siguiente estructura compuesta por elementos totalmente flexibles se dan dos sistemas de coordenadas generalizados, el primero difiere del segundo en la coordenada uno, está inclinado un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal. Se pide calcular la matriz  $T$  tal que  $q = T q^*$ .

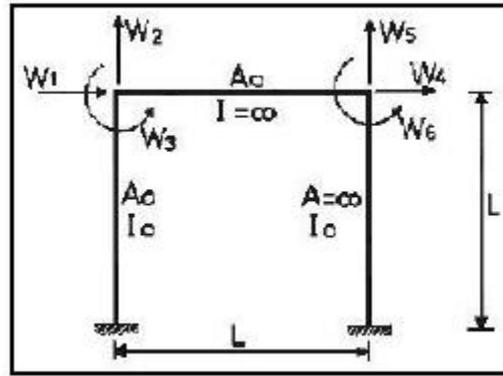


Ejercicio N.- 6

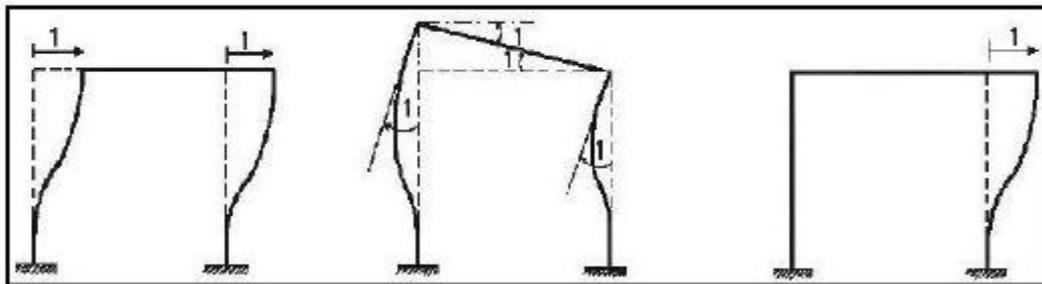
Ejercicio N.- 7

Las siguientes figuras muestran una estructura y las fuerzas externas que actúan, así como los diagramas de deformación elementales, para un determinado sistema de coordenadas. Calcular:

- i) El vector de cargas generalizadas  $Q$ .
- ii) Dibujar los diagramas de cargas elementales.
- iii) Interpretar geoméricamente cada una de las componentes de  $q$ .



Estado de carga

Deformada elemental  $q_1$ Deformada elemental  $q_2$ Deformada elemental  $q_3$ **Ejercicio N.- 8**

Elaborar un programa de computación para obtener el vector de cargas generalizadas  $Q$  en el que se da como dato el vector de empotramiento perfecto en coordenadas locales para los elementos cargados.

**Ejercicio N.- 9**

Elaborar un programa de computación para encontrar el vector de cargas generalizadas  $Q$  para un pórtico plano con elementos ortogonales, si sobre los elementos horizontales actúan cargas triangulares y trapezoidales. El programa deberá calcular las acciones de empotramiento perfecto.

## CAPITULO 6

---

# RELACIÓN ENTRE CARGAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

## RESUMEN

Los objetivos que se persiguen en el presente capítulo son los siguientes:

- 1) Presentar conceptos básicos sobre la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y de flexibilidad  $\mathbf{F}$  de una estructura. No interesa por ahora saber cómo se calcula sino más bien el significado físico de sus elementos.
- 2) Presentar algunos modelos numéricos para el estudio de las deformaciones de los elementos lineales de un marco plano.
- 3) Realizar ejercicios que refuercen lo estudiado en éste capítulo, como en los capítulos anteriores, en lo referente a:
  - ❖ Definir las coordenadas generalizadas en marcos planos con elementos axial y transversalmente rígidos.
  - ❖ Presentar el cálculo de matrices de transformación de coordenadas en elementos que se usarán en los capítulos posteriores.

Todo esto en función de la teoría que se indica en éste capítulo.

## 6.1 MATRIZ DE RIGIDEZ

### 6.1.1 Relación entre $Q - q$

Dado un pórtico cualquiera como por ejemplo el de la figura 6.1 en el cual se ha definido un sistema de coordenadas  $Q - q$ . Se va a establecer una relación entre el vector de cargas generalizadas  $Q$  y el vector de desplazamientos generalizados  $q$ .

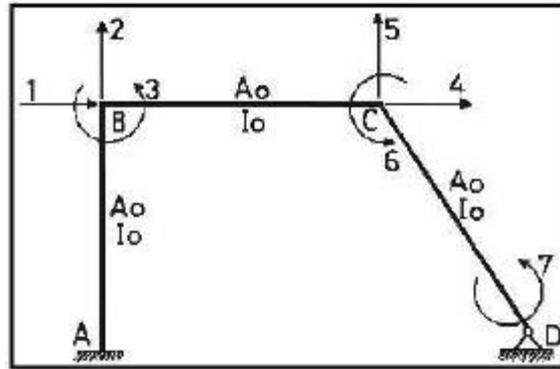


Figura 6.1 Sistema  $Q - q$

La relación entre  $Q$  y  $q$  se consigue por medio de la matriz de rigidez  $K$  de la siguiente manera:

$$Q = K q \tag{6.1}$$

Se ha establecido una relación lineal entre  $Q$  y  $q$ . Esto implica lo siguiente:

- Que el material cumple con la ley de Hooke en sus tres dimensiones.
- Que las deformaciones son pequeñas, entonces se podrá aplicar la teoría de los desplazamientos infinitesimos.
- No existe interacción entre los efectos axiales y de flexión en los elementos. Es decir se estudia la teoría de primer orden.

Cuando se cumple con los tres requisitos indicados se dice también que la estructura es linealmente elástica o que trabaja en el rango elástico y se puede aplicar el principio de superposición.

En la ecuación (6.1) se tiene que la matriz de rigidez es de orden  $(n \times n)$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad de la estructura. Si  $Q$  es un Vector de Cargas, de  $n$  filas y  $q$  es otro Vector de Coordenadas, de  $n$  elementos la ecuación (6.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ \dots \\ Q_i \\ \dots \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera  $Q_i$  es igual a:

$$Q_i = K_{i1} q_1 + K_{i2} q_2 + \dots \dots + K_{in} q_n$$

Al examinar esta última ecuación se observa que  $K_{i1}$ , por ejemplo, es el valor de la carga  $Q_i$  correspondiente al estado de desplazamiento  $q_1 = 1$  y  $q_i = 0$   $i \neq 1$ . Es decir  $K_{i1}$  es el valor de  $Q_i$  en la deformada elemental  $q_1$ . La expresión anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j$$

En general se tendrá que un elemento cualquiera  $K_{ij}$  es el valor de la carga generalizada  $Q_i$  correspondiente a la deformada elemental  $q_j$ .

Para el pórtico plano de la figura 6.1 se tiene que la matriz de rigidez  $K$  es de  $(7 \times 7)$ . La notación de los grados de libertad de la figura 6.1 es la que se ha venido utilizando en el libro y se seguirá utilizando sin embargo es necesario que el lector conozca que se puede numerar los grados de libertad considerando como grado de libertad a los apoyos aunque sea este empotramiento y en este caso se tendrá la notación indicada en la figura 6.2. Vale la pena indicar que con éstos grados de libertad se obtiene en forma directa las reacciones y momentos del empotramiento.

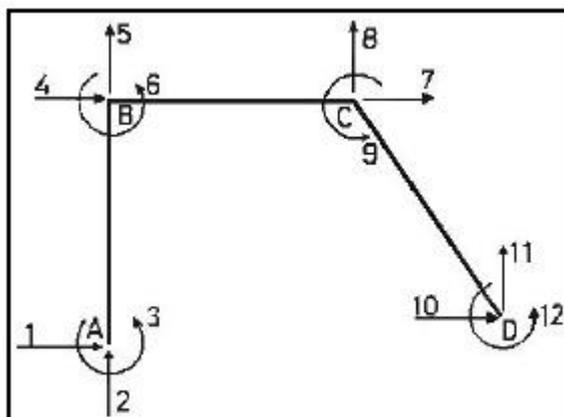


Figura 6.2 Sistema  $Q - q$  orientado al cálculo de reacciones en apoyos.

En estas condiciones la matriz de rigidez es de  $(12 \times 12)$  y es singular, por consiguiente su determinante es igual a cero. El rango de la matriz  $K$  es 9. Esto significa que en la relación (6.1) no se consiguen 12 ecuaciones independientes sino únicamente nueve ya que tres son dependientes y estas son:

$$1^{ra} Ec + 4^{ta} Ec + 7^{ma} Ec + 10^{ma} Ec = 0$$

$$2^{da} Ec + 5^{ta} Ec + 8^{va} Ec + 11^{va} Ec = 0$$

Se deja al lector que indique cual es la tercera ecuación (Ec) dependiente. Estas se han obtenido haciendo equilibrio es decir:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

En resumen, el pórtico de la figura 6.2 si tiene matriz de rigidez ya que es posible construir las respectivas deformadas elementales y encontrar el sistema de cargas generalizadas correspondiente. Lo que no es posible obtener es que su determinante sea diferente de cero. Su determinante es cero.

Conviene utilizar el sistema de coordenadas de la figura 6.2 cuando se tienen desplazamientos en los apoyos adicionalmente del cálculo de las reacciones de los apoyos.

Por otra parte al estudiar la estructura indicada en la figura 6.3 constituida por elementos totalmente flexibles, con dos rodillos en los apoyos tiene los 10 grados de libertad presentados. En este caso la matriz de rigidez es de (10 x 10) pero el rango de la misma es 9. Esto se debe a que hay una ecuación dependiente.

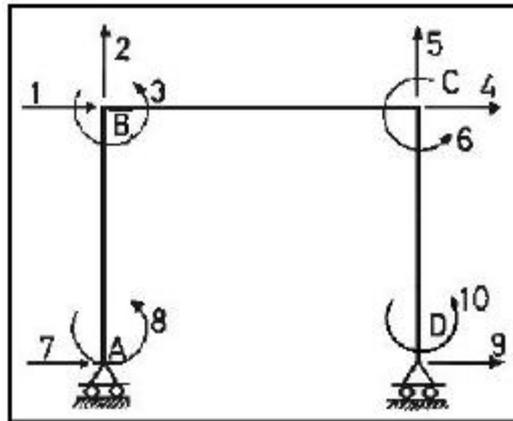


Figura 6.3 Estructura Inestable y grados de libertad.

$$1^{ra} Ec + 4^{ta} Ec + 7^{ma} Ec + 9^{na} Ec = 0$$

Las estructuras de las figuras 6.2 y 6.3 son inestables.

### 6.1.2 Características de la matriz de rigidez

Las principales características de la matriz de rigidez en **estructuras estables**, son las siguientes:

1. El valor del determinante es diferente de cero y positivo por consiguiente  $\mathbf{K}$  es regular.
2. Los términos de la diagonal son todos positivos.
3. La matriz es cuadrada.
4.  $\mathbf{K}$  es simétrica con respecto a la diagonal.

Para demostrar esta última característica, se va a calcular la matriz de rigidez en la estructura de la figura 6.4.1, compuesta por elementos totalmente flexibles.

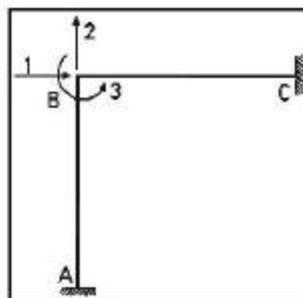


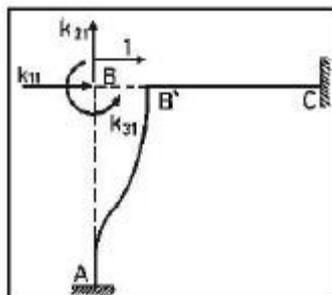
Figura 6.4.1 Sistema Q – q

Para el presente ejemplo la matriz de rigidez tendrá la siguiente configuración:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}$$

- Primera columna de la matriz de rigidez

$$q_1 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 1$$

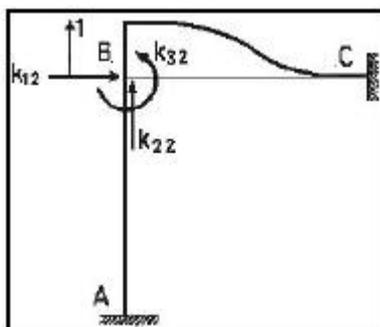


**Figura 6.4.2** Elementos de la primera columna de  $\mathbf{K}$ . Sistema A.

Las fuerzas necesarias para producir la deformada de la figura 6.4.2 son  $\mathbf{K}_{11}$  fuerza horizontal en el nudo B,  $\mathbf{K}_{21}$  fuerza vertical en el nudo B y  $\mathbf{K}_{31}$  momento en el nudo B. Estas cargas se determinan utilizando la teoría de estructuras que se verá posteriormente.

- Segunda columna de la matriz de rigidez

$$q_2 = 1 \quad \text{y} \quad q_i = 0 \quad i \neq 2$$



**Figura 6.4.3** Elementos de la segunda columna de  $\mathbf{K}$ . Sistema B.

De igual forma  $\mathbf{K}_{12}$ ,  $\mathbf{K}_{22}$  y  $\mathbf{K}_{32}$  son las cargas necesarias aplicadas en el nudo B para tener la deformada elemental  $q_2$ . Para obtener los elementos de la tercera columna de  $\mathbf{K}$  se procede en forma similar en la deformada elemental  $q_3$ .

El problema que se tiene es demostrar que la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es simétrica, para lo cual basta con demostrar que la fuerza  $\mathbf{K}_{12}$  es igual a la fuerza  $\mathbf{K}_{21}$ .

Aplicando el teorema de E. Betti se tiene que el trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema A de la figura 6.4.2 sobre los desplazamientos del sistema B mostrado en la figura 6.4.3,  $\mathbf{TV}_{A-B}$ . Es igual al trabajo virtual de las fuerzas que actúan en el sistema B sobre los desplazamientos virtuales del sistema A, a este trabajo virtual se denomina  $\mathbf{TV}_{B-A}$ .

$$TV_{A-B} = K_{11} * 0 + K_{21} * 1 + K_{31} * 0 = K_{21} * 1 = K_{21}$$

$$TV_{B-A} = K_{12} * 1 + K_{22} * 0 + K_{32} * 0 = K_{12} * 1 = K_{12}$$

Como se tiene que  $TV_{A-B} = TV_{B-A}$  se concluye que  $K_{12} = K_{21}$  que era lo que se quería demostrar.

Finalmente debe indicarse que la matriz de rigidez transforma los desplazamientos en cargas y para que esto exista los desplazamientos deben ser independientes.

## 6.2 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

### 6.2.1 Relación entre $q - Q$

Ahora se desea establecer una expresión lineal para las coordenadas generalizadas  $q$  que contiene desplazamientos y giros en función de las cargas generalizadas  $Q$  que contiene momentos y fuerzas, mediante la matriz de flexibilidad  $F$ , la misma que será de orden  $(n \times n)$  siendo  $n$  el número de grados de libertad de la estructura. Dicha relación es:

$$q = F Q \quad (6.2)$$

Nótese nuevamente que se está considerando que el modelo es lineal es decir es válido para el rango elástico. Al desarrollar la ecuación (6.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & \dots & f_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ \dots \\ Q_i \\ \dots \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

De donde un término cualquiera  $q_i$  es igual a:

$$q_i = f_{i1} Q_1 + f_{i2} Q_2 + \dots \quad \dots + f_{in} Q_n$$

Expresando en forma de sumatoria se tiene:

$$q_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} Q_j$$

Por consiguiente  $f_{ij}$  es el valor de la coordenada  $q_i$  que corresponde al estado de cargas  $Q_j = 1$  y  $Q_i = 0$   $i \neq j$ . La primera columna de la matriz de flexibilidad será el vector de coordenadas  $q$  para el estado de cargas  $Q_1 = 1$  y las demás nulas. Para la segunda columna de  $F$  habrá que encontrar el vector  $q$  para el estado de cargas  $Q_2 = 1$  y las restantes nulas, etc. De tal manera que los elementos de la matriz de flexibilidad tienen unidades de desplazamientos y giros.

La matriz de flexibilidad  $F$  existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto no existe matriz de flexibilidad para las estructuras indicadas en las figuras 6.2 y 6.3.

Al aplicar el teorema de los efectos recíprocos de Maxwell que dice: *En una estructura linealmente elástica, el desplazamiento  $i$  debido a una fuerza unitaria  $j$  es igual al desplazamiento correspondiente  $j$  debido a una fuerza unitaria  $i$ , o,  $q_{ij} = q_{ji}$ .* Al desplazamiento  $i$  se le llama grado de libertad  $i$ . Mediante este teorema se puede demostrar que la matriz de flexibilidad es simétrica.

Por otra parte todos los términos de la diagonal son positivos. Finalmente se indica que si  $q = F Q$  es indispensable que el vector  $Q$  sea independiente.

### 6.2.2 Relación entre F y K

En este apartado se estudia la relación que existe entre la matriz de flexibilidad y la matriz de rigidez de una estructura. Para el efecto se conoce que:

$$\begin{aligned} Q &= K q \\ q &= F Q \end{aligned}$$

Al reemplazar ésta última ecuación se tiene:

$$Q = K F Q$$

Al utilizar la matriz unitaria  $I$  se tiene que:

$$Q = I Q$$

De donde:

$$I Q = K F Q$$

Como ésta igualdad se cumple para cualquier valor de  $Q$ . Se concluye que:

$$K F = I \quad F K = I$$

En consecuencia:

$$K = F^{-1} \quad F = K^{-1}$$

**La matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad o viceversa.** Se hace hincapié en que la matriz de rigidez siempre existe en cambio la matriz de flexibilidad existe únicamente en estructuras estables. Por lo tanto habrá ocasiones en que  $K^{-1}$  no existe.

- **EJEMPLO 1**

A la izquierda de la figura 6.5 se tiene un pórtico plano compuesto por elementos flexibles y a la derecha de la mencionada figura se presenta el correspondiente sistema de coordenadas generalizadas. Se pide presentar el significado físico de los elementos de la primera columna de las matrices de rigidez y de flexibilidad.

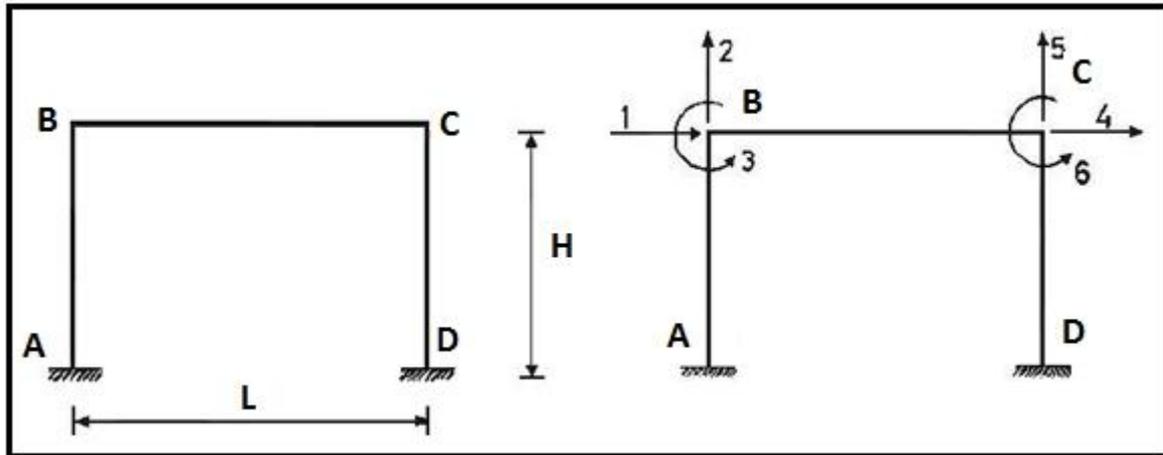


Figura 6.5 Pórtico plano con elementos totalmente flexibles y sistema de coordenadas.

### • SOLUCIÓN

Los elementos de las matrices de rigidez y flexibilidad son:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la primera columna de  $K$  son las fuerzas y momentos que hay que aplicar a la estructura para que únicamente el nudo B se desplace horizontalmente la unidad, como se indica en la figura 6.6

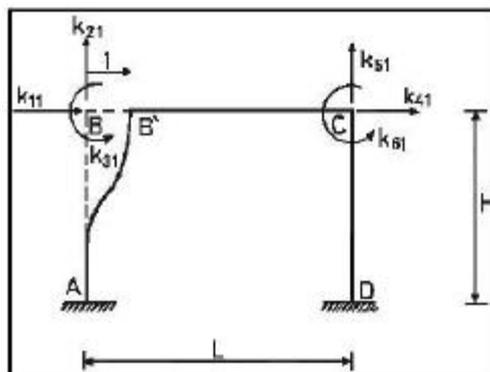


Figura 6.6 Elementos de la primera columna de  $K$ .

Por otro lado al aplicar una fuerza horizontal en el nudo B, como se muestra en la figura 6.7 los desplazamientos y giros que se generan son los elementos de la primera columna de  $F$ .

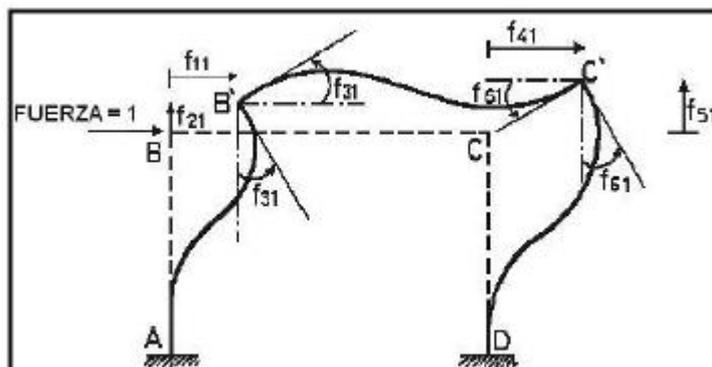


Figura 6.7 Elementos de la primera columna de  $F$ .

En las figuras 6.6 y 6.7 las cargas y corrimientos se han dibujado con sentido positivo, puede ser que en el cálculo alguno de ellos sea negativo o nulo.

Es importante destacar que los elementos de la matriz de rigidez tienen unidades de fuerza o momento y los elementos de la matriz de flexibilidad de desplazamiento o giro.

### 6.3 DEFORMACIONES DE LOS ELEMENTOS

En capítulos anteriores se había indicado que un elemento lineal de un pórtico plano tiene tres desplazamientos como cuerpo rígido y tres deformaciones del elemento. Se procede a estudiar y recordar estas definiciones para lo cual se analiza una deformada general del pórtico de la figura 6.8

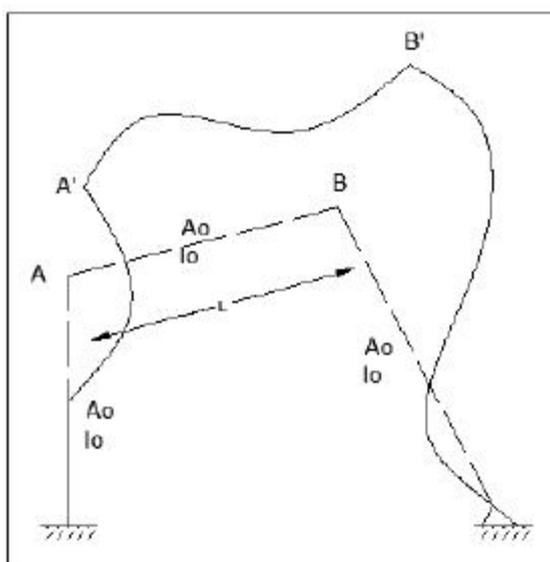
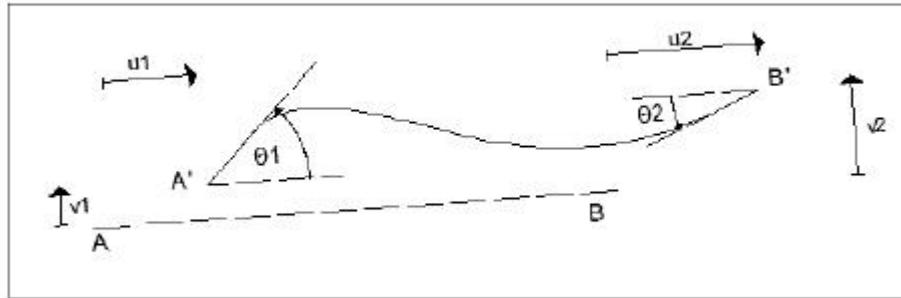


Figura 6.8 Deformación general de un pórtico plano.

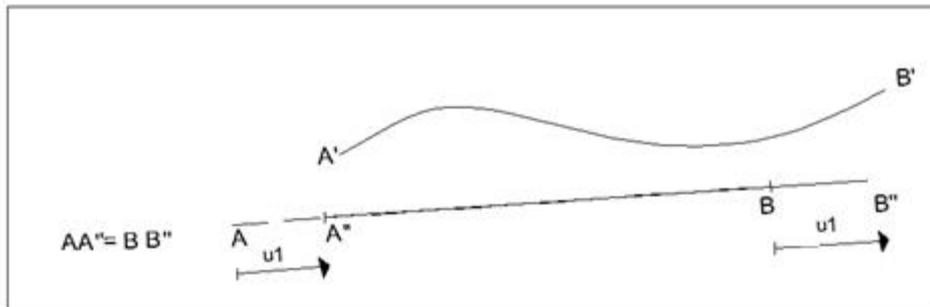
A continuación se presenta un modelo numérico para ver como un elemento cualquiera de la estructura se ha deformado. Por ejemplo se desea saber cómo el elemento AB pasa de su posición inicial indicada en la figura 6.8 en líneas entrecortadas a su posición final A'B' indicada con líneas continuas. Para ello en la figura 6.9 se ha dibujado el elemento AB antes y después de deformarse; en la mencionada figura se ha identificado las coordenadas del elemento.



**Figura 6.9** Coordenadas del elemento AB.

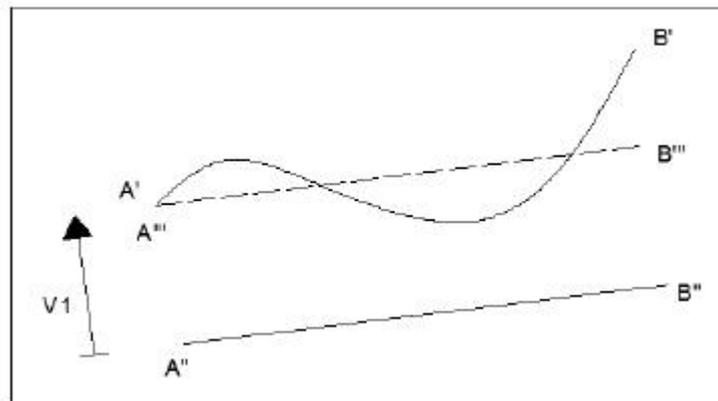
El paso de la posición inicial del elemento AB a A'B' se lo analiza en cinco etapas. En líneas entrecortadas se indicará cual es la posición del elemento al inicio de cada etapa y en todas se va a indicar la deformada final A'B'. Estas etapas son las siguientes:

- 1) Se produce únicamente la traslación  $u_1$  como cuerpo rígido. Esto se ilustra en la figura 6.10 en que el nudo A pasa a A'' y el nudo B pasa a B''. El elemento A''B'' tiene una longitud L.



**Figura 6.10** Primera etapa del modelo. Solo existe  $u_1$ .

- 2) Sube el elemento de la posición A''B'' a la posición A'''B''' una distancia igual a  $v_1$  como cuerpo rígido de tal manera que A'''B''' es paralela a A''B''. Además al haberse desplazado el nudo A, axialmente  $u_1$  y transversalmente  $v_1$  la posición de A''' coincide con la posición final del nudo A' como lo ilustra la figura 6.11



**Figura 6.11** Segunda etapa del modelo. Solo existe  $v_1$ .

- 3) Se rota el nudo A un ángulo  $\psi$  en la posición A''' como cuerpo rígido de manera que el elemento A'''B''' se encuentre en la alineación de A'''B'. El punto B''' pasa a la posición B'' como se aprecia en la figura 6.12. Nótese que B'' no coincide con B'.

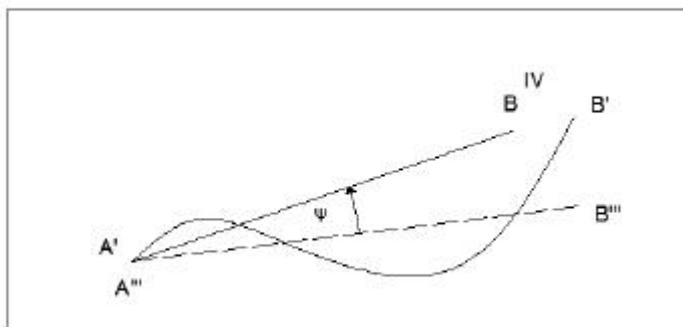


Figura 6.12 Tercera etapa del modelo. Solo existe  $\psi$ .

Al mirar las figuras 6.9 y 6.12 se puede ver que el ángulo  $\psi$  se calcula con la siguiente ecuación:

$$\psi = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad (6.5)$$

Hasta aquí se han realizado tres desplazamientos como cuerpo rígido.

- 4) Se deforma al elemento axialmente, alargándolo para pasar de la posición  $B''$  a la posición final  $B'$ . Esta deformación axial se denomina  $\Delta L$  en la figura 6.13 y se evalúa de la siguiente manera:

$$\Delta L = u_2 - u_1 \quad (6.6)$$

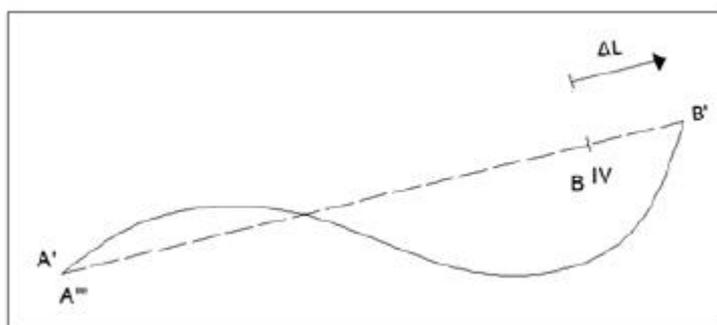


Figura 6.13 Cuarta etapa del modelo. Deformación axial  $\Delta L$ .

- 5) Por último para tener al elemento en la posición final lo que falta es deformarlo a flexión para lo cual se rotan los nudos  $A'''$  y  $B'$ . En el nudo inicial se deforma  $\theta_1 - \psi$  y en el nudo final un valor  $\theta_2 - \psi$ , como se muestra en la figura 6.14

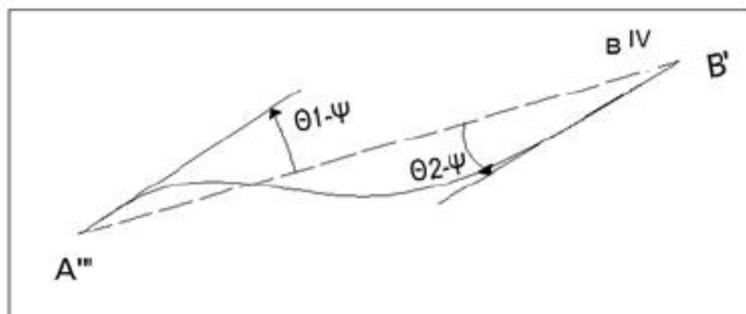


Figura 6.14 Quinta etapa del modelo. Deformación a flexión.

- 6) Para comprender bien el modelo presentado, en la figura 6.15 se resumen las cinco etapas.

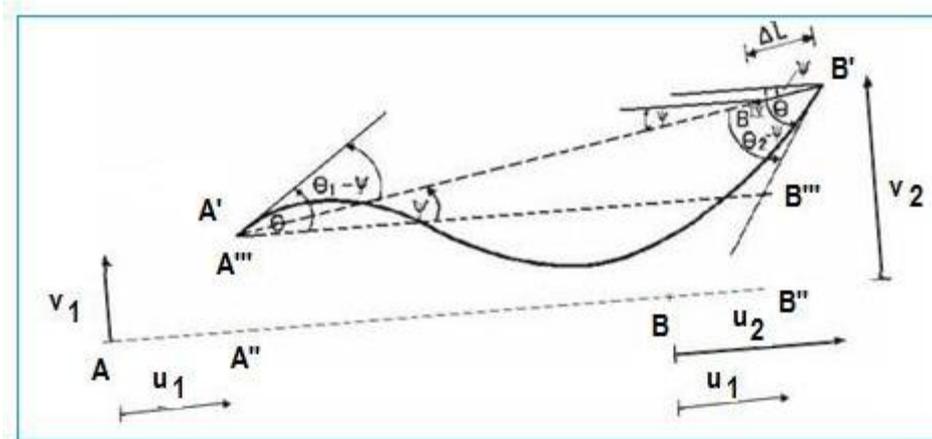


Figura 6.15 Resumen del modelo numérico presentado.

### 6.3.1 Deformaciones de un elemento

Para el elemento AB que se acaba de estudiar, si se desea eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido, se debe colocar en el nudo A un vínculo que impida el desplazamiento axial y transversal y en el nudo B un rodillo que impida que el elemento rote, que impida la rotación  $\psi$ .

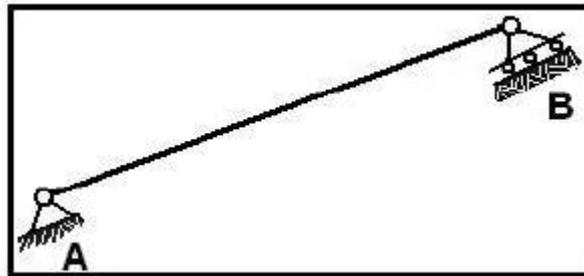


Figura 6.16 Modelo para el estudio de las deformaciones de un elemento.

En consecuencia al eliminar los desplazamientos como cuerpo rígido del elemento AB con la colocación del vínculo y del rodillo se tiene en el elemento de la figura 6.16 únicamente las deformaciones.

Ahora, al analizar al elemento AB de la figura 6.16 como si se tratará de una estructura, no un elemento se observa que la estructura tiene 3 grados de libertad los mismos que pueden obtenerse con la fórmula estudiada en el Capítulo 1.

$$NGL = 2(3) - 1 - 2 = 3$$

En la figura 6.17 al elemento que se lo ha venido estudiando se lo ha dibujado horizontal y en él se han identificado los 3 grados de libertad que corresponden a las deformaciones del elemento que en resumen son: una deformación a flexión del nudo inicial; una deformación a flexión del nudo final y una deformación axial del elemento. Las deformaciones a flexión se dieron en la etapa 5 del modelo y la deformación axial en la etapa 4.

A las deformaciones del elemento se les identifica con la letra  $p$  minúscula y a las cargas internas (momentos y fuerza) con la letra  $P$  mayúscula. Se destaca que tanto  $p$  como  $P$  son vectores.

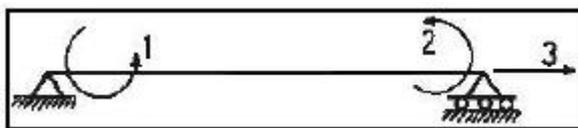


Figura 6.17 Sistema de coordenadas de un elemento.

La forma del vector  $p$  para el elemento de la figura 6.17 es como sigue:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Donde  $p_1$  es la deformación a flexión del nudo inicial;  $p_2$  es la deformación a flexión del nudo final y  $p_3$  es la deformación axial, las mismas que se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \psi = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.7.1}$$

$$p_2 = \theta_2 - \psi = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} \tag{6.7.2}$$

$$p_3 = \Delta L = u_2 - u_1 \tag{6.7.3}$$

Por otra parte, el vector  $P$  está formado por:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Donde  $P_1$  es el momento que actúa en el nudo inicial;  $P_2$  es el momento que actúa en el nudo final y  $P_3$  es la fuerza axial en el nudo final.

• EJEMPLO 2

El pórtico plano que se indica a la izquierda de la figura 6.18 tiene 5 grados de libertad, los mismos que se indican en la figura de la derecha. Se desea encontrar el valor de la coordenada dependiente que es el desplazamiento vertical del nudo C.

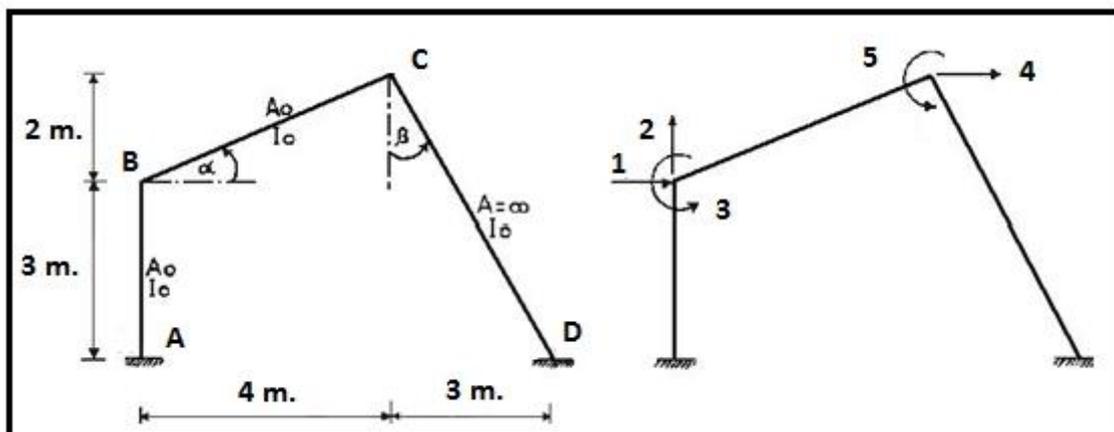
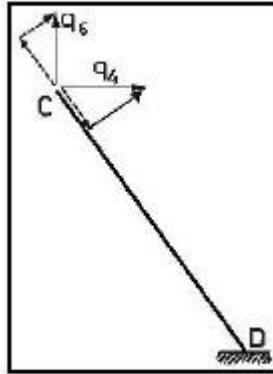


Figura 6.18 Estructura de Ejemplo 2 y sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$

- **SOLUCIÓN**

Existen varias formas para encontrar el valor de la coordenada dependiente que se va a denominar  $q_6$  en función de las coordenadas independientes. Una forma de hacerlo es como se realizó en algunos ejemplos del capítulo 5 en que a partir de cada uno de los diagramas elementales se obtiene la o las coordenadas dependientes. Ahora en este ejemplo se ilustra otra forma de hacerlo, que es una aplicación inmediata del estudio de las deformaciones. Para el elemento CD de la estructura de la figura 6.18, se tiene.



Sea C el nudo inicial y D, el nudo final, con esta notación se tiene:

$$u_1 = q_4 \operatorname{sen}\beta - q_6 \operatorname{cos}\beta \quad u_2 = 0$$

Al ser el elemento CD axialmente rígido no existe la deformación axial  $\Delta L$ . En consecuencia se tiene:

$$\Delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 - u_1 = 0$$

Al reemplazar los valores de  $u_2$  y  $u_1$  para el elemento CD se encuentra:

$$0 - (q_4 \operatorname{sen}\beta - q_6 \operatorname{cos}\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_6 = q_4 \operatorname{tg}\beta$$

- **EJEMPLO 3**

En el marco plano presentado a la izquierda de la figura 6.19 el elemento BC es transversalmente rígido y el elemento CD es axialmente rígido. Para este pórtico se ha seleccionado el sistema de coordenadas generalizadas indicado a la derecha de la figura 6.19. Se desea encontrar el valor de las coordenadas dependientes.

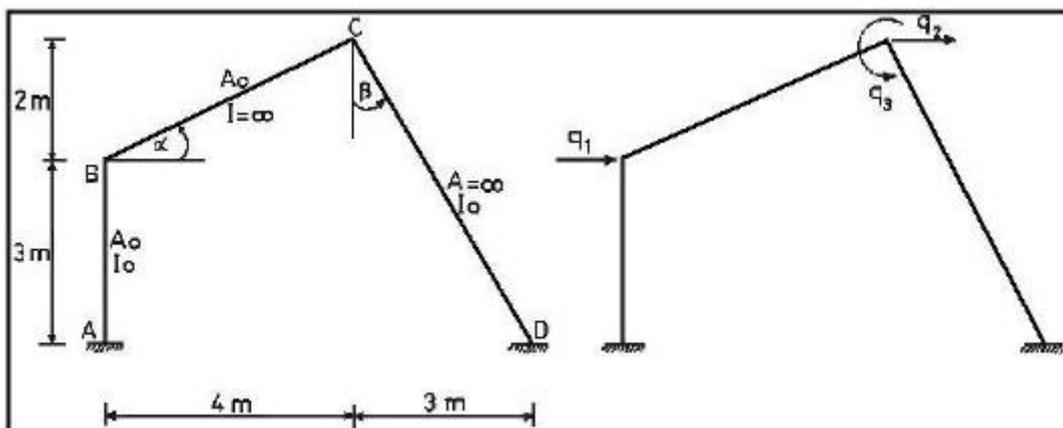


Figura 6.19 Estructura de Ejemplo 3 y sistema de coordenadas generalizadas  $Q - q$

- SOLUCIÓN

Sean  $q_4, q_5$  y  $q_6$  las coordenadas dependientes, las mismas que deben expresarse en función de  $q_1, q_2$  y  $q_3$ . En la figura 6.20 se indican estas coordenadas.

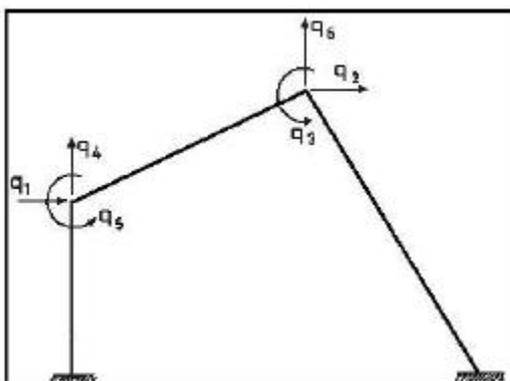
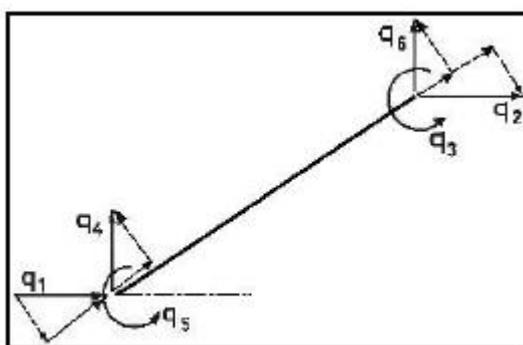


Figura 6.20 Coordenadas dependientes e independientes de Ejemplo3.

Para el elemento BC, al considerar el nudo inicial en B y el nudo final en C, se tiene que las coordenadas del elemento valen:



$$v_1 = q_4 \cos\alpha - q_1 \operatorname{sen}\alpha \quad \theta_1 = q_5$$

$$v_2 = -q_2 \operatorname{sen}\alpha + q_6 \cos\alpha \quad \theta_2 = q_3$$

Por ser transversalmente rígido, la deformación a flexión en el nudo inicial y final son cero. En consecuencia se tiene:

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_5 - \frac{-q_2 \operatorname{sen}\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 \operatorname{sen}\alpha}{L} = 0$$

$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 - \frac{-q_2 \operatorname{sen}\alpha + q_6 \cos\alpha - q_4 \cos\alpha + q_1 \operatorname{sen}\alpha}{L} = 0$$

Donde L es la longitud del elemento BC. De las dos ecuaciones indicadas se obtiene:

$$-q_4 \cos\alpha + q_6 \cos\alpha = -q_1 \operatorname{sen}\alpha + q_2 \operatorname{sen}\alpha + q_3 L$$

Al proceder en forma similar al ejemplo 2; para el elemento CD que es axialmente rígido se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= q_2 \operatorname{sen}\beta - q_6 \cos\beta & u_2 &= 0 \\
 u_2 - u_1 &= 0 & \Rightarrow & -q_2 \operatorname{sen}\beta + q_6 \cos\beta = 0 \\
 q_6 &= q_2 \operatorname{tg}\beta
 \end{aligned}$$

Al reemplazar el valor de  $q_6$  en la expresión que se obtuvo de la condición de que el elemento BC es transversalmente rígido se obtiene:

$$q_4 = q_1 \operatorname{tg}\beta + q_2 (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) - q_3 \frac{L}{\cos\alpha}$$

Finalmente al sustituir  $q_4$  y  $q_6$ , y al despejar  $q_5$  de la primera ecuación se halla.

$$q_5 = q_3$$

#### • EJEMPLO 4

Con relación a la estructura de la figura 6.19 se desea saber si pueden ser coordenadas generalizadas las mostradas en la figura 6.21 usando las ecuaciones de deformación de un elemento.

#### • SOLUCIÓN

Sean  $q_4$ ,  $q_5$  y  $q_6$  las coordenadas dependientes, ver figura 6.22, y,  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  las coordenadas independientes. Para el elemento BC que es transversalmente rígido se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= q_5 \cos\alpha - q_4 \operatorname{sen}\alpha & \theta_1 &= q_1 \\
 v_2 &= q_6 \cos\alpha - q_3 \operatorname{sen}\alpha & \theta_2 &= q_2
 \end{aligned}$$

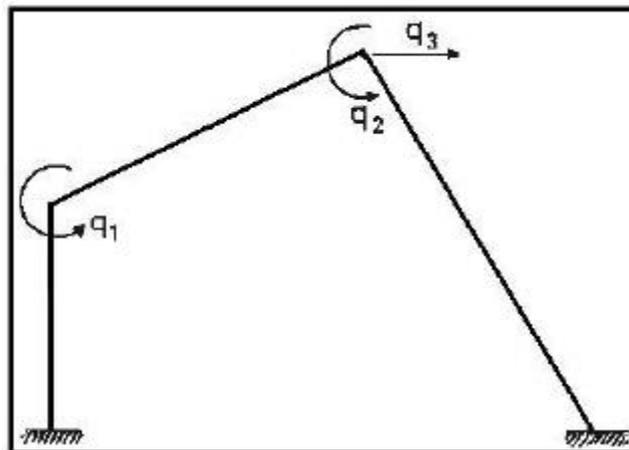


Figura 6.21 ¿Posibles coordenadas generalizadas?.

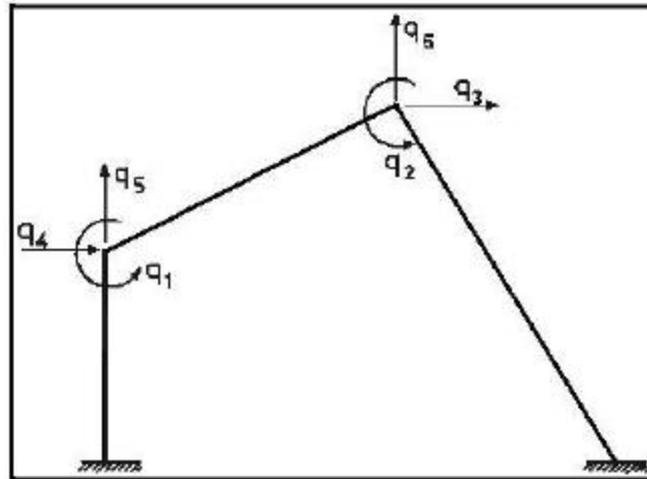


Figura 6.22 Posibles coordenadas dependientes e independientes.

$$\theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 \operatorname{sen}\alpha}{L \cos\alpha + q_3 \operatorname{sen}\alpha} = 0$$

$$\theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 - \frac{q_6 \cos\alpha - q_3 \operatorname{sen}\alpha}{L \cos\alpha + q_3 \operatorname{sen}\alpha} = 0$$

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene son:

$$q_4 \operatorname{sen}\alpha - q_5 \cos\alpha = L q_1 - q_6 \cos\alpha + q_3 \operatorname{sen}\alpha$$

$$q_4 \operatorname{sen}\alpha - q_5 \cos\alpha = L q_2 - q_6 \cos\alpha + q_3 \operatorname{sen}\alpha$$

De la condición de que el elemento CD es transversalmente rígido se encuentra:

$$q_6 = q_3 \operatorname{tg}\beta$$

De esta manera se ha expresado la coordenada dependiente  $q_6$  en función de la coordenada independiente  $q_3$ . Al sustituir  $q_6$  en el sistema de ecuaciones lineales que conducen al cálculo de  $q_4$  y  $q_5$  se obtiene en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & -q_3 \operatorname{sen}\alpha \\ L & -q_3 \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_3 \operatorname{sen}\alpha \\ -q_3 \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

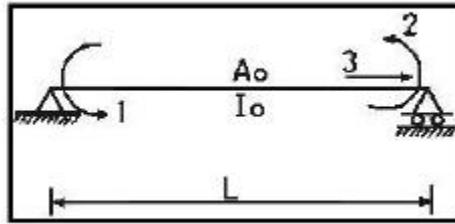
$$- \cos \alpha \begin{bmatrix} q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L q_1 - q_6 \cos \alpha + q_3 \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución debido a que el determinante de las incógnitas vale cero. Luego al despejar  $q_4$  o  $q_5$  se tendrían divisiones para cero. Al no poder despejar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes el sistema de coordenadas generalizado de la figura 6.9.4 está mal planteado.

- **RESUMEN DEL APARTADO**

El resumen de lo estudiado en el presente apartado y de acuerdo al modelo numérico de cálculo, para el estudio de las deformaciones se tiene:

♣ Elementos Totalmente Flexibles



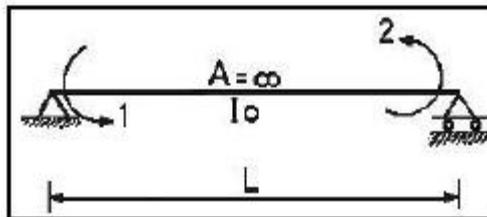
Sistema  $P - p$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

♣ Elementos Axialmente Rígidos

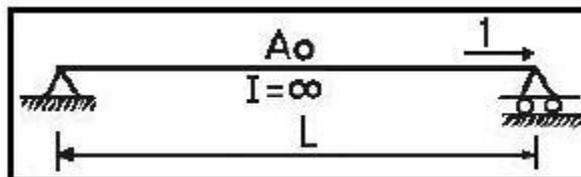


Sistema  $P - p$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

♣ Elementos Transversalmente Rígidos



Sistema  $P - p$

$$p_1 = u_2 - u_1$$

Se pudo haber trabajado con otro modelo para el estudio de las deformaciones, como por ejemplo con cualquiera de los presentados en la figura 6.23.

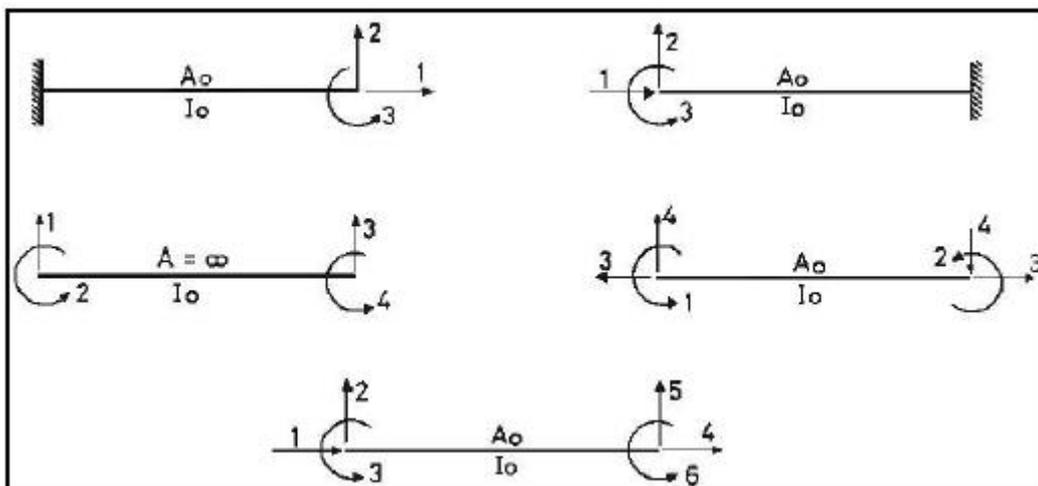


Figura 6.23 Algunos modelos para el estudio de las deformaciones.

En los capítulos posteriores del libro se trabajará con el modelo numérico estudiado y que está indicado en la figura 6.17 ya que éste es apropiado para resolver marcos planos. Cuando se piensa en la solución mediante el computador los tres últimos modelos indicados en la figura 6.23 son los más apropiados.

El primero de éstos tres últimos modelos es para cuando el elemento es axialmente rígido, el segundo es el que utiliza el programa CAL desarrollado por el Profesor Wilson que fue muy utilizado en las dos últimas décadas del siglo pasado y el tercero es el que utilizan la mayor parte de programas.

### 6.3.2 Cálculo mediante Trabajos Virtuales

Las ecuaciones (6.7.1) a (6.7.3) que corresponden al modelo numérico de la figura 6.17 se pueden obtener mediante trabajos virtuales como se indica a continuación, en lugar de presentar las cinco etapas con las que se pasó de BC a B'C'. Para encontrar las mencionadas ecuaciones por Trabajos Virtuales, a la izquierda de la figura 6.24 se ha colocado las cargas P que actúan en el elemento, las mismas que han generado las reacciones de los apoyos. A la derecha de la figura 6.24 se indican las deformaciones con la letra p minúscula.

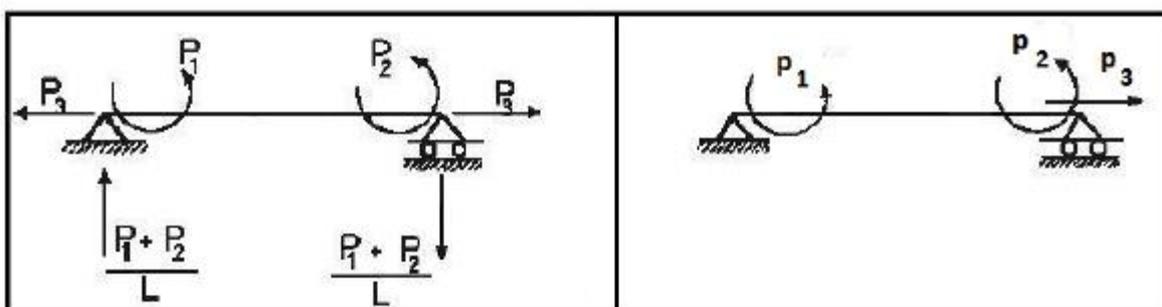


Figura 6.24 Cargas y deformaciones actuantes en modelo de análisis.

El trabajo virtual del sistema de cargas que actúan a la izquierda de la figura 6.24 en las deformaciones de la gráfica de la derecha de la figura 6.24, vale:

$$TV = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3$$

Por lo tanto para calcular  $p_1$  se debe aplicar un momento virtual unitario en el nudo inicial y todas las demás cargas nulas como se indica a la izquierda de la figura 6.25. A la derecha de esta figura se indican las reacciones en los apoyos, correspondiente a este estado de carga.

$P_1 = 1$  y demás nulas.

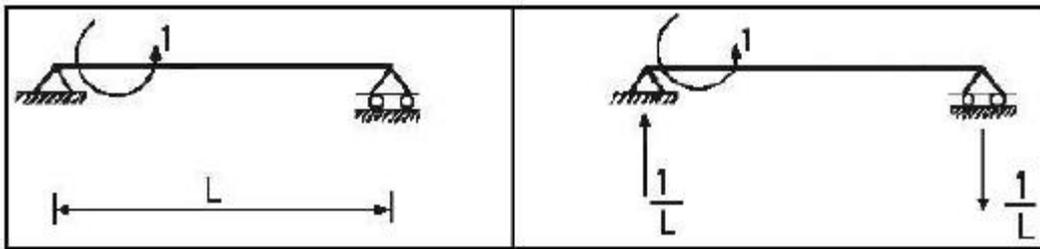


Figura 6.25 Carga Virtual Unitaria y Reacciones para la carga virtual.

En la figura 6.26 se presentan las coordenadas para un elemento de un pórtico plano, se recuerda que  $u_1, v_1, \theta_1$  son las coordenadas para el nudo inicial y  $u_2, v_2, \theta_2$  para el nudo final.

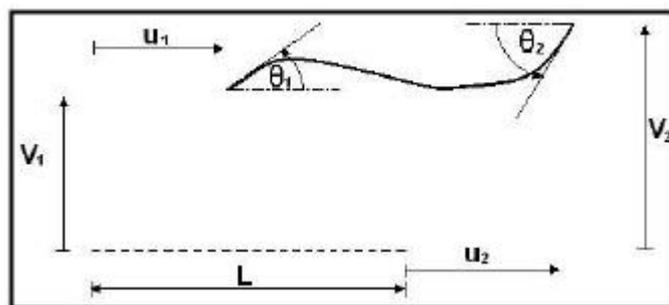


Figura 6.26 Coordenadas de un elemento.

Para el estado de carga virtual estudiado se tiene que el trabajo virtual es igual a  $1 * p_1$ , y este a su vez es igual al trabajo virtual que producen las fuerzas y momentos virtuales de la gráfica derecha de la figura 6.25 en la figura 6.26. Por lo tanto se tiene:

$$1 * p_1 = 1 * \theta_1 + \frac{1}{L} * v_1 - \frac{1}{L} * v_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

Al aplicar un momento virtual unitario en el nudo final y todos los restantes nulos y por un procedimiento similar se halla  $p_2$ . En forma similar se hará para hallar  $p_3$ .

### 6.3.3 Otro sistema de coordenadas del elemento

Para el sistema de coordenadas del elemento de la figura 6.27 se va a calcular las deformaciones  $p_1^*, p_2^*, p_3^*$ . El asterisco únicamente se emplea por didáctica.

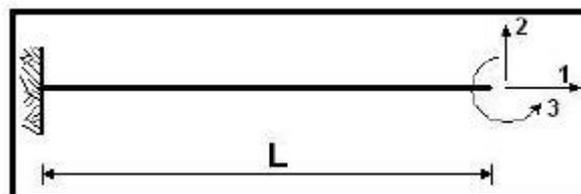


Figura 6.27 Sistema  $P^* - p^*$

Para el modelo de la figura 6.27, los desplazamientos como cuerpo rígido están asociados a las componentes  $u_1, v_1, \theta_1$  las mismas que se eliminan con el empotramiento en el nudo inicial. En la figura 6.28 se presenta en forma gráfica el estudio de las deformaciones.

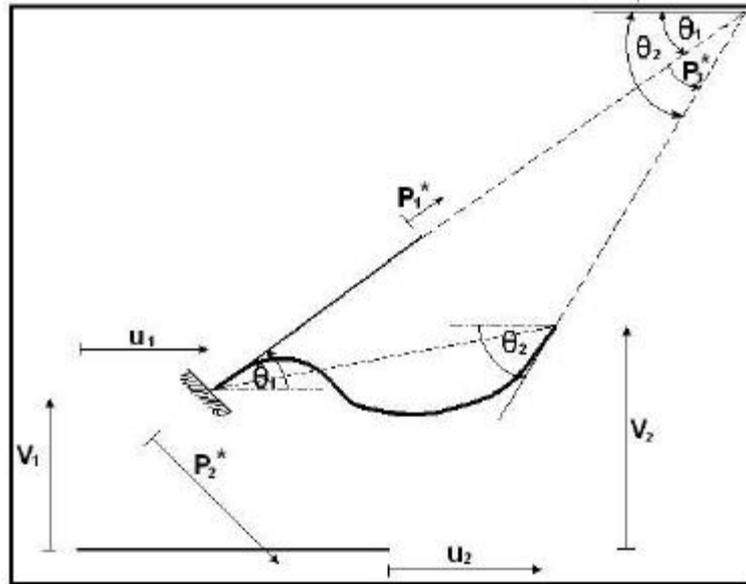


Figura 6.28 Estudio de las deformaciones para el sistema  $P^* - p^*$ .

En forma similar al presentado en el anterior modelo indicado en 6.3.1 se puede demostrar que:

$$p_1^* = u_2 - u_1 \tag{6.8.1}$$

$$p_2^* = v_2 - v_1 - \theta_1 L \tag{6.8.2}$$

Ahora  $p_3^*$

$$p_3^* = \theta_2 - \theta_1 \tag{6.8.3}$$

$p_1^*$  es el cambio de longitud del elemento medido en la dirección de la tangente a la deformada en A (nudo inicial);  $p_2^*$  es la deformación de B (nudo final) en la dirección perpendicular al elemento como si A se encontrara empotrado y finalmente  $p_3^*$  es el ángulo de rotación del nudo final B, suponiendo que el nudo inicial A no gira por encontrarse empotrado.

• EJEMPLO 5

Demostrar la ecuación (6.8.2) mediante trabajos virtuales para el modelo numérico indicado en la figura 6.27

• SOLUCIÓN

En el nudo final se aplica una fuerza virtual vertical como lo señala la figura 6.29 y se obtienen las reacciones correspondientes.

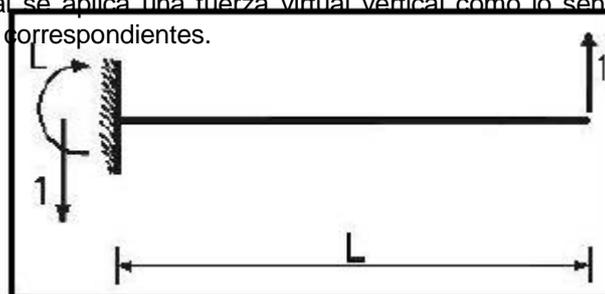


Figura 6.29 Carga virtual unitaria y reacciones.

El trabajo virtual del sistema de cargas de la figura 6.29 en las coordenadas del elemento de la figura 6.26 determinan el valor de  $p_2^*$

$$p_2^* = -1 * v_1 + 1 * v_2 - L \theta_1 \quad \Rightarrow \quad p_2^* = v_2 - v_1 - L \theta_1$$

• EJEMPLO 6

En la figura 6.30 se presenta el sistema de coordenadas del elemento que considera el programa CAL (Computer Assisted Learning of Structural Analysis). Se desea encontrar la fórmula que define la deformación  $p_3$ .

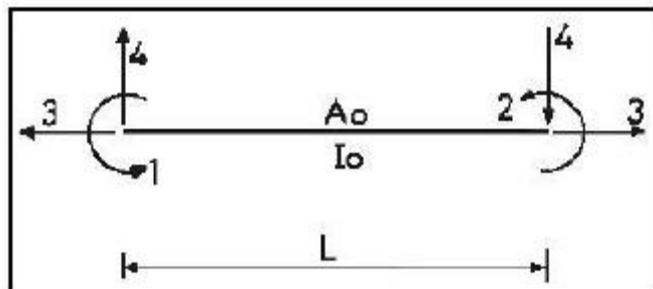


Figura 6.30 Sistema de coordenadas P – p que considera programa CAL.

• SOLUCIÓN

Para calcular  $p_3$  se aplica una carga axial unitaria y las demás nulas como lo muestra la figura 6.31. Ahora el trabajo virtual de las cargas de la figura 6.31 en las deformaciones del sistema 6.30 vale:

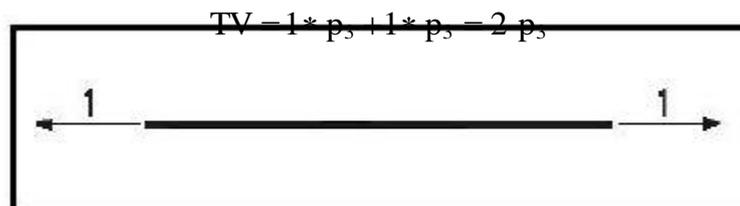


Figura 6.31 Carga axial virtual unitaria.

Este trabajo virtual es igual al producido por las cargas que gravitan en la figura 6.31 en las coordenadas del elemento de la figura 6.26. Luego:

$$2 p_3 = 1 * u_2 - 1 * u_1 \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2}$$

Se deja al estudiante la deducción de las restantes deformaciones del elemento para el modelo numérico utilizado por el programa CAL. Estas son:

$$p_1 = \theta_2 \quad p_2 = \theta_1$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} \quad p_4 = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

### 6.4 EJERCICIOS RESUELTOS

Se presentan dos ejercicios que complementan lo estudiado en este capítulo y en el anterior cuando se estudió la matriz de transformación de coordenadas. En capítulos posteriores se verá su aplicación.

• **EJEMPLO 7**

Con relación a las coordenadas del elemento utilizadas por el programa CAL y que se ha indicado en la figura 6.30. Se desea encontrar las tres primeras columnas de la matriz de transformación de coordenadas locales a globales. En la figura 6.32 se indican estos sistemas de coordenadas.

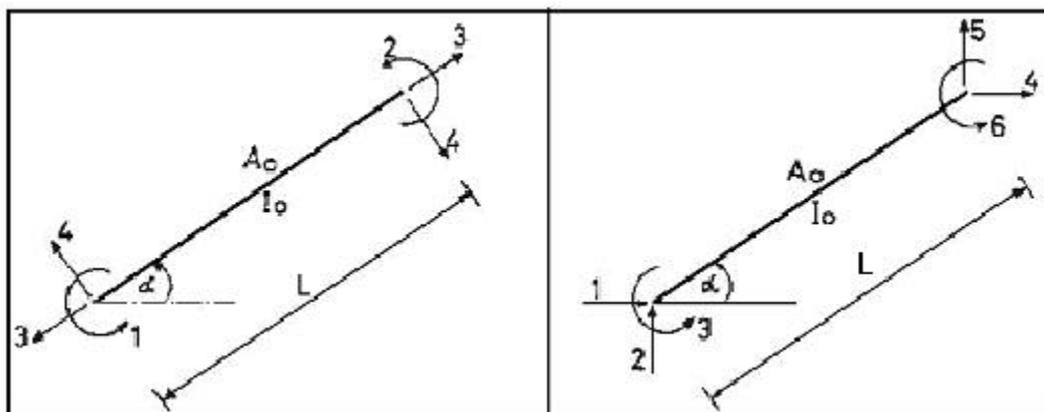


Figura 6.32 Coordenadas Locales de CAL y Coordenadas Globales.

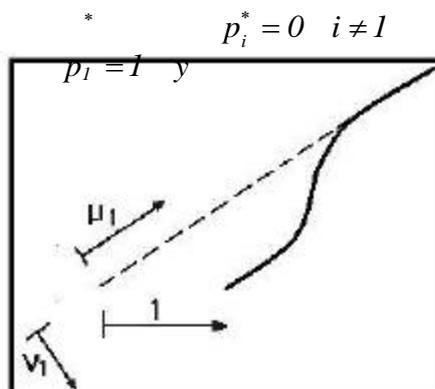
• **SOLUCIÓN**

Se define la matriz de transformación de coordenadas  $T$  de la siguiente manera:

$$p = T p^*$$

Donde  $p$  es el sistema de coordenadas indicado a la izquierda de la figura 6.32 y  $p^*$  el sistema de coordenadas de la derecha de la misma figura.

- **Primera columna de T**



$$\begin{array}{ll} u_1 = \cos\alpha & u_2 = 0 \\ v_1 = -\sin\alpha & v_2 = 0 \\ \theta_1 = 0 & \theta_2 = 0 \end{array}$$

$$p_1 = \theta_1 = 0$$

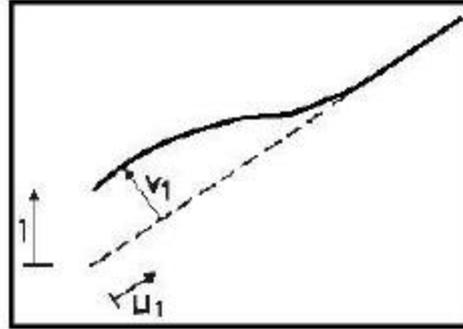
$$p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{\cos\alpha}{2}$$

$$p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = -\frac{\sin\alpha}{2}$$

▪ Segunda columna de T

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$u_1 = \sin\alpha$$

$$u_2 = 0$$

$$v_1 = \cos\alpha$$

$$v_2 = 0$$

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 0$$

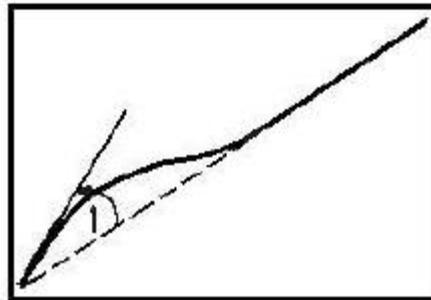
$$p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = -\frac{\sin\alpha}{2}$$

$$p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{\cos\alpha}{2}$$

▪ Tercera columna de T

$$p_3^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 3$$



$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$\theta_1 = 1$$

$$\theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 = 1$$

$$p_2 = \theta_2 = 0$$

$$p_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} = 0$$

$$p_4 = \frac{v_1 - v_2}{2} = 0$$

Al proceder en forma similar con la cuarta, quinta y sexta columna de T se tiene:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\cos \alpha}{2} & -\frac{\sen \alpha}{2} & 0 & \frac{\cos \alpha}{2} & \frac{\sen \alpha}{2} & 0 \\ \frac{\sen \alpha}{2} & \frac{\cos \alpha}{2} & 0 & \frac{\sen \alpha}{2} & -\frac{\cos \alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 8

A la izquierda de la figura 6.33, se presenta el sistema de coordenadas que se ha denominado  $P - p$ , para un elemento axialmente rígido y a la derecha el sistema  $P^* - p^*$  en coordenadas locales. Con la mayúscula se refiere a las cargas y la minúscula las deformaciones. Se pide encontrar la matriz de paso  $T$ , tal que  $p = T p^*$

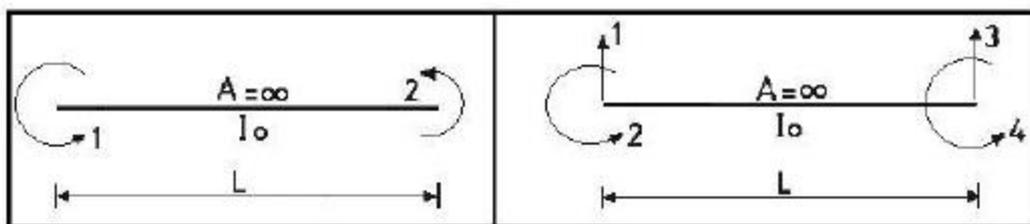
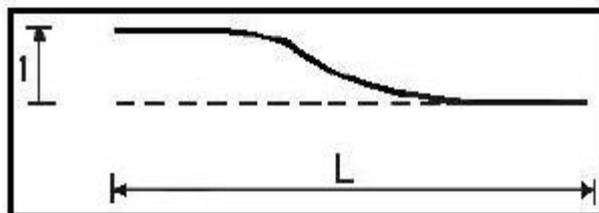


Figura 6.33 Sistema  $P - p$ , y Sistema  $P^* - p^*$

• SOLUCIÓN

- Primera columna de  $T$

$$p_i^* = 1 \text{ y } p_i^* = 0 \text{ } i \neq 1$$



$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0$$

$$v_1 = 1 \quad v_2 = 0$$

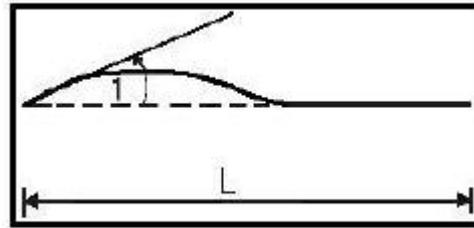
$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = \frac{1}{L}$$

- Segunda columna de T

$$p_2^* = 1 \quad y \quad p_i^* = 0 \quad i \neq 2$$



$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0$$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0$$

$$\theta_1 = 1 \quad \theta_2 = 0$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 1$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L} = 0$$

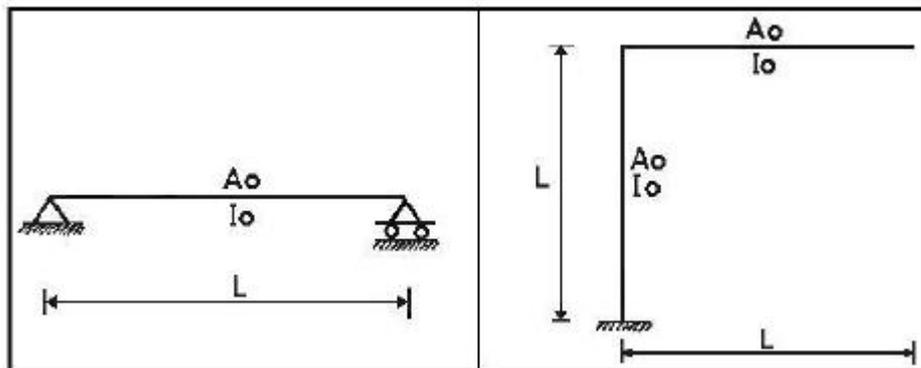
Se deja al estudiante el cálculo de la tercera y cuarta columna de la matriz T que resulta:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix}$$

## 6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las estructuras presentadas a continuación, se desea:

1. Seleccionar un sistema de coordenadas  $Q - q$ .
2. Indicar la forma de la matriz de rigidez y de flexibilidad.
3. El significado físico de los elementos de la matriz de rigidez y de flexibilidad.

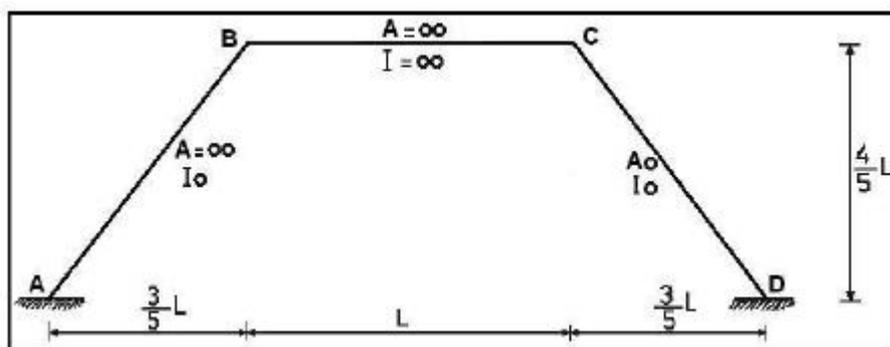


Ejercicio N.- 1

Ejercicio N.- 2

**Ejercicio N.- 3**

Para la siguiente estructura, definir un sistema de coordenadas y expresar las coordenadas dependientes en función de las coordenadas independientes.

**Ejercicio N.- 4**

Demostrar que no pueden ser coordenadas generalizadas de la estructura del ejercicio N.- 3 las componentes de desplazamiento horizontal del nudo B y del nudo C.

**Ejercicio N.- 5**

Resolver el Ejemplo 3 desarrollado en el numeral 6.3 de otra manera. Mediante la construcción de diagramas elementales de cada una de las coordenadas generalizadas seleccionadas.

**Ejercicio N.- 6**

Demostrar las ecuaciones (6.8.1) y (6.8.3) de éste capítulo, mediante trabajos virtuales.

**Ejercicio N.- 7**

Con relación al sistema de coordenadas del elemento que utiliza el programa CAL, demostrar la ecuación  $p_4 = -\frac{v_1 - v_2}{2}$ .

**Ejercicio N.- 8**

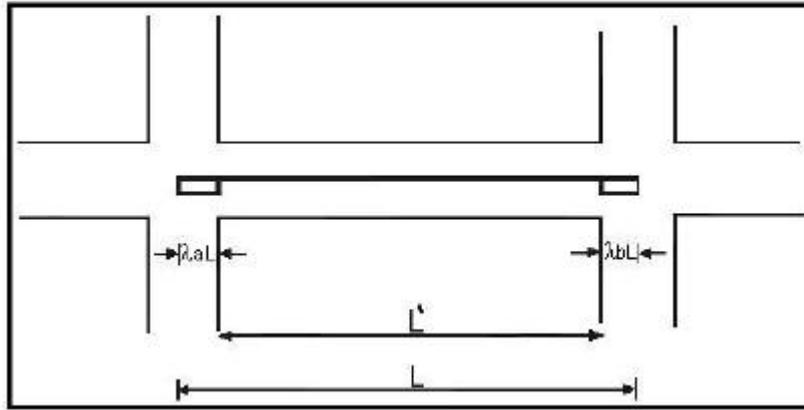
Encontrar las tres últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo 7.

**Ejercicio N.- 9**

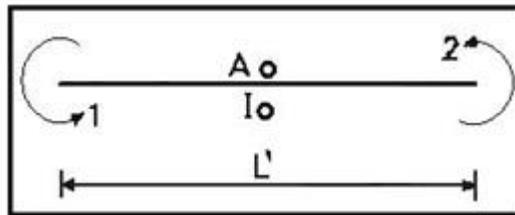
Encontrar las dos últimas columnas de la matriz **T** del Ejemplo 8.

**Ejercicio N.- 10**

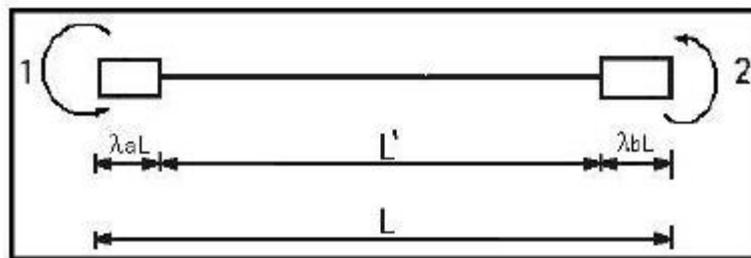
Sea  $\lambda_a L$  y  $\lambda_b L$  las longitudes del nudo rígido inicial y final del elemento que se presenta a continuación.



En el elemento en estudio se tiene que  $L'$  es la luz libre y  $L$  la luz entre ejes. Se definen dos sistemas de coordenadas uno para el elemento de longitud  $L'$  que se denominará sistema  $P - p$  y otro para el de longitud  $L$  que se llamará sistema  $P^* - p^*$ .



Sistema  $P - p$



Sistema  $P^* - p^*$

Demostrar que la matriz de transformación de coordenadas para pasar del sistema  $P - p$  al sistema  $P^* - p^*$  es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \lambda_b & \lambda_b \\ \lambda_a & 1 - \lambda_a \end{bmatrix} \frac{1}{1 - \lambda_a - \lambda_b}$$

El modelo presentado en este Ejercicio se utiliza para calcular la matriz de rigidez de un elemento viga que se encuentra entre dos muros de corte.

## CAPITULO 7

---

# MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO LINEAL

## RESUMEN

Se presenta con bastante detenimiento el cálculo de las matrices de flexibilidad y de rigidez de un elemento de sección constante o variable, para los sistemas de coordenadas del elemento que se indican en las figuras respectivas. El cálculo se lo realiza empleando conceptos de estructuras, por medio de la matriz de transformación de coordenadas y con funciones de forma.

Por considerarlo de interés se dedican algunas páginas al estudio del efecto de corte en los términos de la matriz de rigidez de un elemento, para el efecto se deduce el coeficiente de forma  $\beta$  para una sección rectangular y se presentan ejemplos de aplicación en los que se observa cuando es importante considerar el efecto de corte y cuando no. De igual forma se resuelven ejercicios con elementos de sección variable.

### 7.1 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD DE UN ELEMENTO $f$

#### 7.1.1 Forma general

Se denomina  $F$  a la matriz de flexibilidad de una estructura y  $f$  a la matriz de flexibilidad de un elemento. La forma general de  $f$  para el elemento totalmente flexible indicado en la figura 7.1, es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ J_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

En el elemento de la figura 7.1 se consideran dos deformaciones a flexión, en el nudo inicial y final y una deformación axial en el nudo final.

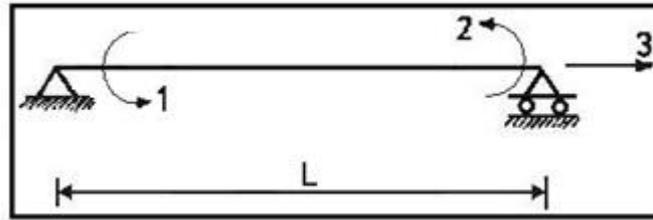


Figura 7.1 Sistema de coordenadas de un elemento.

Los elementos de la primera columna de  $f$  son las deformaciones que corresponden al estado de carga elemental  $P_1 = 1$  y demás nulas como se indica a la izquierda de la figura 7.2. Nótese que  $P_1 = 1$  significa aplicar un momento unitario en el nudo inicial, las deformaciones que se generan por este momento unitario son los elementos de la primera columna de la matriz de flexibilidad  $f$ .

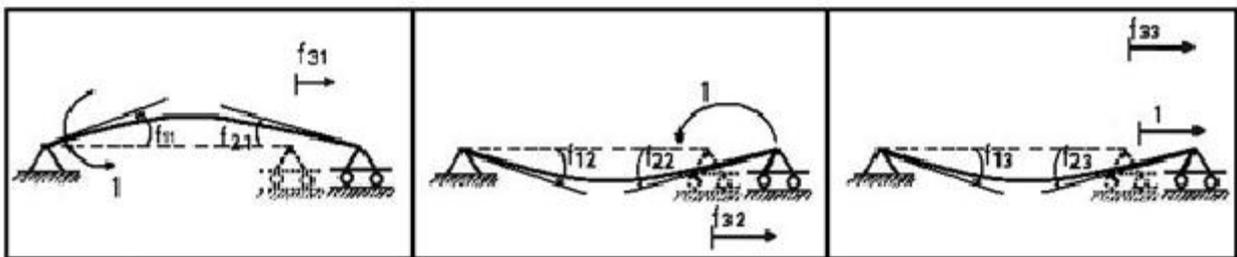


Figura 7.2 Cargas Elementales para determinar matriz de flexibilidad  $f$

En la parte central de la figura 7.2 se aplica un momento unitario, anti horario, en el nudo final y las deformaciones que se producen son los elementos de la segunda columna de  $f$ . Finalmente a la derecha de la figura 7.2 se aplica una fuerza axial unitaria en el nudo final y las deformaciones son los elementos de la tercera columna de  $f$ . Evidentemente que algunos de los elementos de  $f$  se los ha dibujado con el objeto de tener todos los elementos de la ecuación matricial (7.1) a sabiendas que algunos de ellos son cero.

Para encontrar las deformaciones es necesario encontrar los diagramas de momento, corte y carga axial, asociados a cada estado elemental de carga. En la figura 7.3.1 se repite las cargas elementales y se presentan las reacciones de apoyo. Para cuando actúa el momento unitario en el nudo inicial las reacciones verticales valen  $\frac{1}{L}$ . Lo propio sucede cuando se tiene el momento unitario en el nudo final (gráfica central) y para cuando solo existe la fuerza axial unitaria, la reacción horizontal en el nudo inicial vale la unidad (gráfica derecha). En las figuras 7.3.2 a 7.3.4 se presentan los respectivos diagramas de momento, corte y carga axial, con la convención de signos de resistencia de materiales.

❖ Estados de Carga

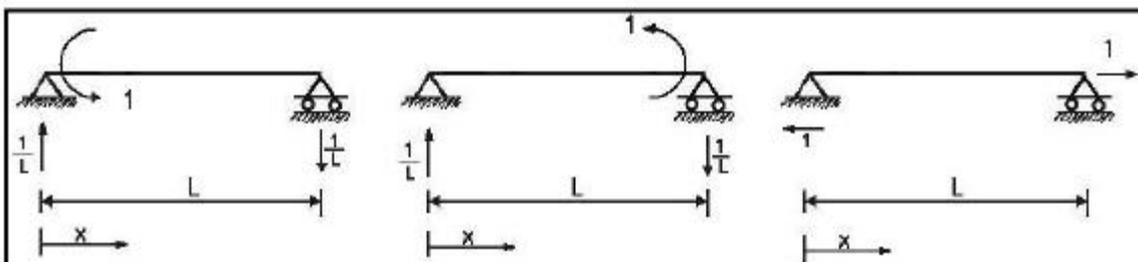


Figura 7.3.1 Cargas elementales aplicadas para obtener las diferentes columnas de  $f$ .

## ❖ Diagramas de Momento

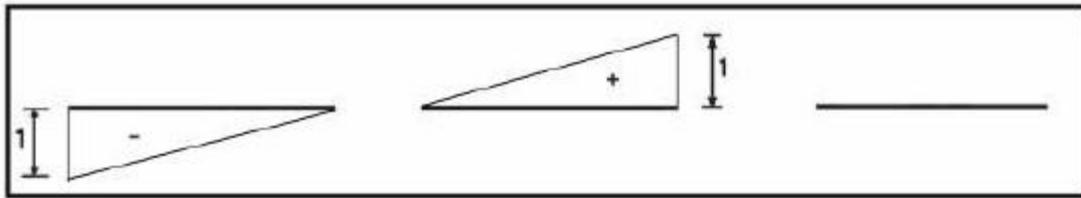


Figura 7.3.2 Diagramas de Momento correspondientes a las cargas elementales.

$$M_1 = -\left(\frac{L-X}{L}\right) \quad M_2 = \frac{X}{L} \quad M_3 = 0$$

## ❖ Diagramas de Corte

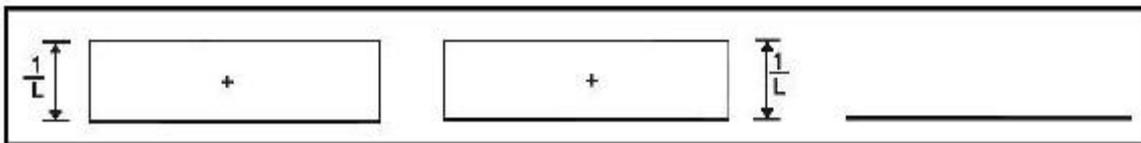


Figura 7.3.3 Diagramas de Corte correspondientes a las cargas elementales.

$$V_1 = \frac{1}{L} \quad V_2 = \frac{1}{L} \quad V_3 = 0$$

## ❖ Diagramas de Carga Axial

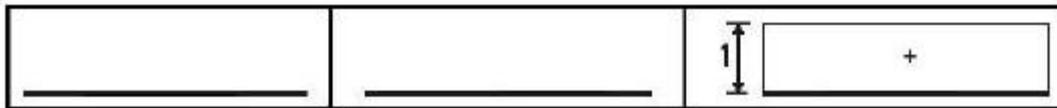


Figura 7.3.4 Diagramas de Carga Axial correspondientes a las cargas elementales.

$$N_1 = 0 \quad N_2 = 0 \quad N_3 = 1$$

Para el cálculo de las deformaciones  $f_{ij}$ , de la teoría de estructuras se tiene:

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{\beta V_i V_j}{GA(x)} dx + \int_0^L \frac{N_i N_j}{EA(x)} dx \quad (7.2)$$

Donde,  $M_i, M_j$  son los momentos a flexión;  $V_i, V_j$  son los cortantes;  $N_i, N_j$  son la carga axial;  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $G$  el módulo de corte estático;  $I(x)$  es el momento de Inercia de una sección constante o variable;  $A(x)$  es el área de una sección transversal y  $\beta$  es el coeficiente de forma. La ecuación (7.2) corresponde al caso de Teoría de Primer Orden, en que cada uno de los efectos están desacoplados, de tal manera que la deformación es igual a la deformación debida a flexión más la deformación debida a corte más la deformación debida a carga axial. Esta teoría es válida para elementos con longitudes pequeñas, alturas de columnas del orden de los 3 o 4 m. Si se tiene columnas de mayor longitud se debe trabajar con Teoría de Segundo Orden en que se considera acoplamiento entre las diferentes deformaciones.

Para el caso específico del elemento de la figura 7.1, se tiene:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI(x)} dx + \int_0^L \beta \frac{V_1^2}{GA(x)} dx \quad (7.3.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^L \frac{M_1 M_2}{EI(x)} dx + \int_0^L \beta \frac{V_1 V_2}{GA(x)} dx \quad (7.3.2)$$

$$f_{13} = f_{31} = 0 \quad (7.3.3)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{M_2^2}{EI(x)} dx + \int_0^L \beta \frac{V_2^2}{GA(x)} dx \quad (7.3.4)$$

$$f_{23} = f_{32} = 0 \quad (7.3.5)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{N_3^2}{EA(x)} dx \quad (7.3.6)$$

Por lo tanto, la forma de la matriz de flexibilidad  $f$  de un elemento de sección constante o variable es la siguiente:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Al reemplazar las ecuaciones de:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  y  $N_3$  en las integrales se obtienen los elementos de la matriz de flexibilidad  $f$ , que son:

$$f_{11} = \int_0^L \left( \frac{L-X}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left( \frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \quad (7.4.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = - \int_0^L \frac{X(L-X)}{L^2} \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left( \frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)} \quad (7.4.2)$$

$$f_{22} = \int_0^L \left( \frac{X}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^L \beta \left( \frac{1}{L} \right)^2 \frac{dx}{GA(x)}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{dx}{EA(x)} \quad (7.4.4)$$

Las ecuaciones (7.4.1) a (7.4.4) sirven para encontrar la matriz de flexibilidad de un elemento de sección variable. Pero no se recomienda resolver en forma analítica las integrales ya que se obtienen expresiones muy complejas, lo más fácil es resolver las integrales con métodos numéricos y utilizando la librería de programas de **MATLAB**.

### 7.1.2 Coeficiente de forma $\beta$

El coeficiente  $\beta$  es adimensional que caracteriza la distribución de las tensiones tangenciales en la sección transversal y depende de la forma de la misma.

- EJEMPLO 1

Determinar el valor de  $\beta$  para un elemento de sección rectangular constante, de dimensiones  $b \times h$ .

- SOLUCIÓN

En la figura 7.4 se indica la nomenclatura que se va a utilizar en la solución del ejemplo.

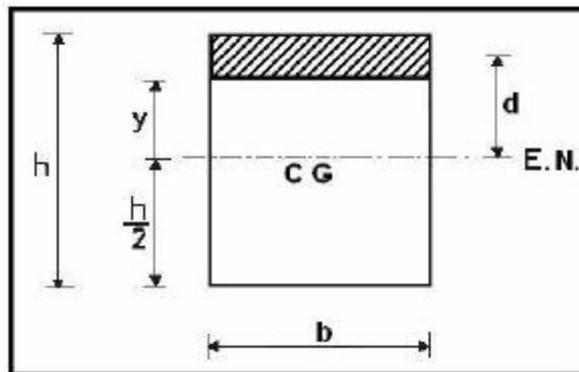


Figura 7.4 Sección transversal constante

En la figura 7.4 se tiene que C.G. es el centro de gravedad; E.N. es el eje neutro, la parte rayada es el área de tensiones tangenciales. Se conoce que:

$$\beta = \int \frac{A(x)}{b^2} S^2 dA \quad (7.5)$$

Donde  $S$  es el momento estático del área rayada respecto al eje neutro;  $dA$  es el diferencial de área. Las restantes variables han sido ya definidas. Al ser el elemento de sección constante, se tiene:

$$\beta = \frac{A}{I^2 b^2} \int S^2 dA \quad (7.6.1)$$

De la figura 7.4 se observa que:

$$S = b \left( \frac{h}{2} - Y \right) * \left[ Y + \left( \frac{h}{2} - Y \right) \frac{1}{2} \right]$$

Áreas                      \*                      Distancia

$$S = b \left( \frac{h}{2} - Y \right) \left( \frac{Y}{2} + \frac{h}{4} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - Y \right) \left( \frac{h}{2} + Y \right) + Y \left( \frac{h}{2} - Y \right)$$

$$S = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - Y^2 \right) \quad (7.6.2)$$

Por otro lado, se conoce que:

$$dA = b dY \quad (7.6.3)$$

$$A = b h \quad (7.6.4)$$

$$I = \frac{b h^3}{12} \quad (7.6.5)$$

Nótese que se ha obtenido la Inercia con respecto al centro de gravedad el mismo que es colineal con el eje neutro. Al reemplazar las ecuaciones (7.6.2) a (7.6.5) en (7.6.1) se obtiene:

$$\beta = \frac{b h}{\left(\frac{b h^3}{12}\right)^2} \int_{-h/2}^{h/2} b \left( \frac{h^2}{4} - Y^2 \right) dY$$

$$\beta = \frac{36}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - Y^2 \right) dY$$

Al integrar solo en la parte superior, se tiene:

$$\beta = \frac{72}{h} \int_0^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - Y^2 \right) dY = \frac{72}{h} \left( \frac{h^4}{4} - \frac{h^2 Y^2}{2} + Y^3 \right) \Big|_0^{h/2}$$

$$\beta = \frac{72}{h} \left( \frac{h^4}{16} - \frac{h^2 Y^3}{6} + \frac{Y^5}{5} \right) \Big|_0^{h/2} = \frac{72}{h} \left( \frac{h^5}{32} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{5} \right) = 72 \left( \frac{1}{32} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right) =$$

De donde:

$$\beta = \frac{6}{5} = 1.2$$

Se destaca que el factor de forma  $\beta = 1.2$  es exclusivamente para secciones rectangulares.

## • EJEMPLO 2

Elaborar un programa en **MATLAB** para determinar el término  $f_{11}$  para la viga de sección variable de la figura 7.5. Si  $b = 0.30 \text{ m}$ ;  $h = 0.60 \text{ m}$ ;  $L = 6.00 \text{ m}$ . El módulo de elasticidad del material  $E = 2400000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . El módulo de corte  $G = 0.4 * E$ .

## • SOLUCIÓN

El término  $f_{11}$  se puede escribir de la siguiente manera.

$$f_{11} = \frac{1}{E} \int_0^L (L-x)^2 \frac{dx}{I(x)} + \frac{\beta}{G L^2} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

$$A(x) = b * h(x)$$

$$I(x) = \frac{b * h^3(x)}{12}$$

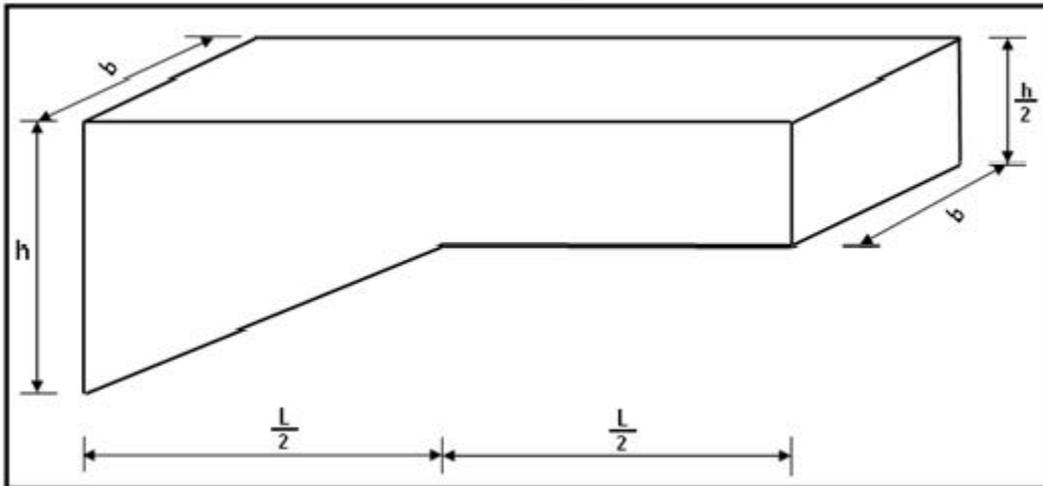


Figura 7.5 Viga de sección variable.

% Programa para calcular el termino f11 de la matriz de flexibilidad  
% para una viga de sección variable. Ejemplo 2

%

% Dr. Roberto Aguiar

% 28 de mayo de 2014

%

% Ej\_2

%

b=0.30;h1=0.60;h2=0.30;L1=3.0;L2=3.0;E=2400000;G=0.4\*E;L=L1+L2;

m=(h2-h1)/L1;dx=L1/1000;

for i=1:2000

    x(i)=(i-1)\*dx;

    if i <=1001

        h(i)=0.60+m\*x(i);

    else

        h(i)=h2;

    end

end

for i=1:2000

    A(i)=b\*h(i);iner(i)=b\*h(i)^3/12;

    fun1(i)=(L-x(i))^2/iner(i);fun2(i)=1/A(i);

end

f11=1/(L^2\*E)\*trapz(x,fun1)+1.2/(G\*L^2)\*trapz(x,fun2)

El término  $f_{11} = 0.00047718 \text{ rad.}$

### 7.1.3 Elementos de sección constante considerando el efecto de corte

En este caso tanto la inercia como el área de la sección transversal son constantes. Por consiguiente salen de las integrales definidas de (7.4.1) a (7.4.4).

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L (L-X) dX + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dX \quad (7.7.1)$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X(L-X) dX + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dX \quad (7.7.2)$$

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X^2 dX + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dX \quad (7.7.3)$$

$$f_{33} = \frac{1}{EA} \int_0^L dX \quad (7.7.4)$$

○ **Cálculo de  $f_{11}$**

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L (L^2 - 2LX + X^2) dX + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dX$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left( L^2 X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right) \Big|_0^L + \frac{\beta}{L^2 GA} X \Big|_0^L$$

$$f_{11} = \frac{1}{L^2 EI} \left( L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3} \right) + \frac{\beta}{L^2 GA} L = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{LGA}$$

$$f_{11} = \frac{L}{3EI} \left( 1 + \frac{3\beta EI}{LGA} \right)$$

Se denomina:

$$\phi = \frac{3\beta EI}{LGA} \quad (7.7.5)$$

Luego:

$$f_{11} = \frac{L}{3EI} (1 + \phi)$$

○ **Cálculo de  $f_{22}$**

$$f_{22} = \frac{1}{L^2 EI} \int_0^L X^2 dX + \frac{\beta}{L^2 GA} \int_0^L dX = \frac{1}{L^2 EI} \left( \frac{X^3}{3} \right) \Big|_0^L + \frac{\beta}{L^2 GA} X \Big|_0^L = \frac{L}{3EI} + \frac{\beta}{LGA} = \frac{L}{3EI} (1 + \phi)$$

Al proceder en forma similar se encuentran los demás elementos de la matriz de flexibilidad que resulta:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} (1 + \phi) & -\frac{L}{6EI} (1 - 2\phi) & 0 \\ -\frac{L}{6EI} (1 - 2\phi) & \frac{L}{3EI} (1 + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Donde  $\phi$  es un factor adimensional que mide el efecto de corte.

#### 7.1.4 Elementos de sección constante sin considerar el efecto de corte

El efecto de corte se evalúa a través del parámetro  $\phi$ . En caso de no considerarlo se debe reemplazar  $\phi = 0$  en la ecuación matricial (7.8), resultando:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Se debe notar que la matriz de flexibilidad calculada en éste apartado corresponde al sistema de coordenadas del elemento indicado en la figura 7.1.

#### 7.1.5 Elementos axialmente rígidos de sección constante

Como se estudió en el capítulo anterior, el sistema de coordenadas  $P - p$  de un elemento axialmente rígido es el presentado en la figura 7.6, se aprecia que no existe la deformación axial  $p_3$ .

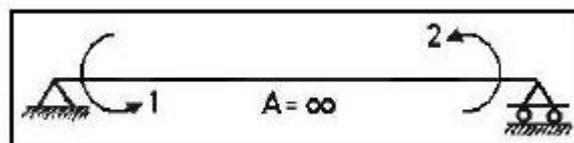


Figura 7.6 Sistema  $P - p$  para un elemento axialmente rígido.

La matriz de flexibilidad  $f$  para el sistema de coordenadas de la figura 7.6 y al no considerar el efecto de corte, es:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Nótese que se ha eliminado la tercera fila y columna de la ecuación (7.9) para llegar a la ecuación (7.10). Esta es la forma más común de la matriz de flexibilidad para elementos axialmente rígidos. Se puede también utilizar el sistema de coordenadas de la figura 7.1 pero en este caso la matriz de flexibilidad del elemento será:

$$f = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

La matriz definida en (7.11) es singular. En consecuencia no existe inversa. Por lo tanto la matriz de rigidez no existe cuando se trabaja con el sistema de coordenadas de la figura 7.1. Para evitar éste tipo de problemas mejor es considerar el sistema de la figura 7.6 y la matriz de flexibilidad es la indicada en la ecuación (7.10).

### 7.1.6 Elementos transversalmente rígidos

Por definición estos elementos solo pueden deformarse axialmente siendo el sistema de coordenadas el presentado en la figura 7.7. Por lo tanto la matriz de flexibilidad para un elemento que tiene inercia infinita es:

$$f = \begin{bmatrix} L \\ EA \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

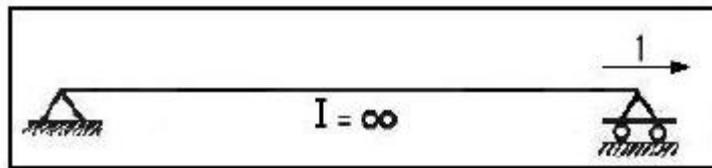


Figura 7.7 Sistema de coordenadas  $P - p$  para un elemento transversalmente rígido.

Al igual que en el apartado anterior, se puede considerar como sistema de coordenadas de un elemento el mostrado en la figura 7.1. En éste caso se tiene:

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Nuevamente no existe inversa de la matriz (7.13) en consecuencia para las coordenadas de la figura 7.1 si el elemento es transversalmente rígido no existe matriz de rigidez del elemento, si se trabaja con la matriz de flexibilidad definida en la ecuación (7.13).

### 7.1.7 Relación fuerza deformación

En éste capítulo a los elementos se los ha analizado como si fueran estructuras mediante la colocación de vínculos que eliminan los desplazamientos como cuerpo rígido se puede indicar que existe una relación entre las cargas  $P$  (mayúscula) y las deformaciones  $p$  (minúscula) al igual que en una estructura. Esta relación se obtiene a través de la matriz de flexibilidad de la siguiente manera:

$$p = f P \quad (7.14)$$