

AAU

AMERICAN ANDRAGOGY
UNIVERSITY



ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

4ª EDICION

ROBERTO AGUIAR FALCONI

Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción

Universidad de Fuerzas Armadas ESPE
Quito Ecuador

Presentación

La primera edición del libro: "Análisis Matricial de Estructuras" fue publicado en 1982, tenía 12 capítulos y 274 páginas; la segunda se publicó en 1995, con 15 capítulos en 612 páginas; la tercera 17 capítulos y 550 páginas; ahora se presenta la cuarta edición con 18 capítulos en 676 páginas. Como se aprecia cada vez se ha incrementado el número de capítulos y el número de ejemplos resueltos.

En esta edición se presenta el sistema de computación **CEINCI-LAB** que lo he venido desarrollando desde el 2009, con una gran cantidad de campos de aplicación; en este libro únicamente se indican la librería de programas para resolver: armaduras en dos dimensiones, pórticos planos, mallas espaciales y para calcular la matriz de rigidez en coordenadas de piso, orientado al análisis sísmico de edificios.

Resolver estructuras con **CEINCI-LAB** es muy fácil y práctico ya que se puede calcular un edificio haciendo uso de los diferentes programas del sistema. Pero el objetivo principal de **CEINCI-LAB** es que el lector resuelva las estructuras paso a paso, de esta forma afianzará sus conocimientos.

En realidad el libro es de Análisis Estático de Estructuras en que se estudian los diferentes temas con bastante profundidad, de tal manera que puede servir como un libro de consulta para los estudiantes de pregrado y postgrado.

En esta edición se incrementó el Capítulo 18, para tratar Mallas Espaciales, de una manera similar a la realizada en Pórticos Planos; es decir trabajando con elementos totalmente flexibles, con elementos transversalmente rígidos o elementos torsionalmente rígidos, claro está que esto se estudió en el sistema 1. Posteriormente y orientado al uso del computador se determinó las matrices de rigidez en coordenadas locales y globales de un elemento de una malla y finalmente se resolvieron ejemplos en forma manual y con **CEINCI-LAB**.

Pero a más de ello se incorporó nuevos temas como el desarrollo de funciones de forma para un elemento lineal considerando tres nudos o la determinación de funciones de forma para un elemento lineal de un pórtico de sección variable, en el sistema 1, con tres grados de libertad. En términos generales se puede indicar que la cuarta edición del libro, cambia en un 60% con relación al contenido de la tercera edición.

Resolver ecuaciones lineales con **MATLAB** es muy elemental de tal manera que parecería no tener importancia estudiar la solución de ecuaciones simétricas bandedas o la técnica del skyline que son tratadas en este libro. Pero sí que tiene importancia ya que cuando se resuelven estructuras que tienen más de 1000 grados de libertad, simplemente no se puede resolver el sistema de ecuaciones en la forma elemental que presenta **MATLAB** peor aún pensar en sacar la inversa de una matriz para hallar la matriz de rigidez condensada. Para grandes sistemas de ecuaciones lineales tiene mucha importancia resolver ecuaciones en forma lineal, tratando de almacenar en lo posible la menor cantidad de ceros. Por este motivo estos temas se han desarrollado en el Capítulo 11 pero a más de ello se debe encontrar la matriz de rigidez de una estructura en forma vectorial para poder utilizar el algoritmo de solución del sistema de ecuaciones lineales.

Si bien la matriz de rigidez condensada se obtiene invirtiendo una matriz pero es mejor no hacerlo de esta manera por lo que se recomienda numerar primero las coordenadas en forma adecuada y después triangularizar la matriz de rigidez para hallar directamente la matriz condensada. Este tema se lo presenta en esta edición con programas incorporados a la librería de **CEINCI-LAB**.

Aproximadamente dos años me llevó escribir esta cuarta edición, basado en la experiencia que tengo como Profesor de Análisis Matricial de Estructuras, de la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE. Hay temas que son bastante complejos para los estudiantes, como el cálculo del vector de cargas generalizadas en pórticos planos mediante trabajos virtuales. Con esta experiencia se han desarrollado más problemas a sabiendas de que esto es necesario para hacer un buen curso de Dinámica de Estructuras y finalmente para el análisis sísmico de estructuras.

Terminé la escritura de la cuarta edición, siendo Rector el Gral. Roque Moreira y Vicerrector el Crnl. Francisco Armendáriz, dos distinguidos ex alumnos a quienes dejo constancia de mi agradecimiento por las facilidades que me dan en mi labor académica, investigativa y administrativa en mi querida ESPE.

Como en todos mis libros no puedo dejar de agradecer a mi querida esposa Alice Noury, a mis hijos: Roberto, Alice, María José, Nicolás, Gabriel, Felipe, a mi hija política Ilenia y a mi primer nieto Ian Aguiar, por la gran felicidad que me dan día a día y finalmente pero en primer lugar a Dios que sin su ayuda no puedo nada.

Roberto Aguiar Falconí
Director del Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción
Universidad de Fuerzas Armadas ESPE
Septiembre de 2014.

CAPITULO 1

COORDENADAS GENERALIZADAS Y GRADOS DE LIBERTAD

RESUMEN

Se presentan algunas definiciones, las más elementales, para estructuras que trabajan en el rango elástico, que es lo que abarca este libro. El objetivo principal es que el lector, que ya ha tomado por lo menos un curso básico de estructuras, se familiarice con la nomenclatura que se va a seguir.

Se definen: los grados de libertad de una estructura desde el punto de vista estático y dinámico. Posteriormente se empieza a trabajar con elementos: totalmente flexibles, axialmente rígidos, transversalmente rígidos y totalmente rígidos; se dibujan deformadas generales y elementales.

1.1 DEFINICIONES ESTRUCTURALES

1.1.1 Vínculos

Se define por vínculo a toda condición geométrica que limita o restringe la movilidad de un cuerpo; es el Proyectista Estructural de acuerdo al sistema constructivo que va a utilizar el que define el tipo de vínculo. De acuerdo a su ubicación en la estructura, los vínculos pueden ser externos e internos. Son externos aquellos que vinculan el cuerpo con la tierra, e internos aquellos que vinculan a los cuerpos entre sí.

De acuerdo al tipo de limitación a la movilidad del cuerpo a que están unidos, los vínculos pueden ser de primera clase (rodillo o articulación móvil), de segunda clase (articulación fija y empotramiento móvil), o de tercera clase (empotramiento fijo).

El rodillo o articulación móvil permite la rotación del cuerpo al que está unido y el desplazamiento de ese mismo punto, en la dirección del movimiento del rodillo, la representación de este tipo de vínculo, es la indicada a la izquierda de la figura 1.1. En este tipo de vínculo existe una reacción vertical.

La articulación fija, llamada simplemente articulación, posibilita únicamente la rotación del cuerpo al que se halla unido, alrededor del punto de unión. La representación gráfica de este tipo de vínculo es la que se muestra a la derecha de la figura 1.1. El momento en la articulación es cero y solo existen dos reacciones en sentido horizontal y vertical.

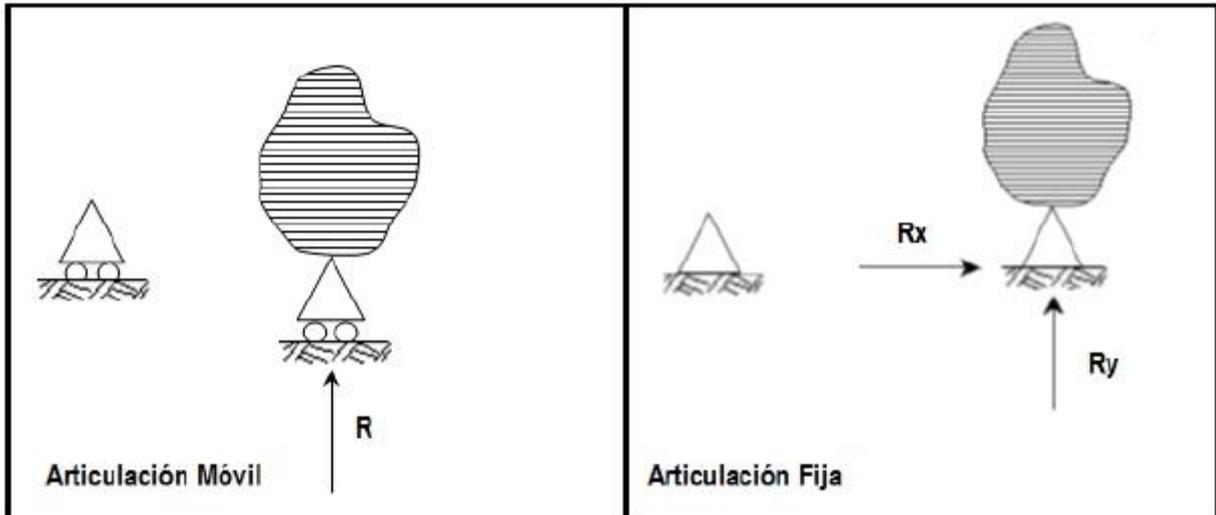


Figura 1.1 Articulación Móvil y Fija

En la figura 1.2, se presenta un tramo del Puente Llacolén, ubicado en Concepción, Chile. Se aprecia a la izquierda una junta de construcción; la viga que aparece puede modelarse con una articulación móvil al lado izquierdo y con una articulación fija al lado derecho, debido a que el tablero del puente es continuo en ese tramo.



Figura 1.2 Tramo del Puente Llacolén, ubicado en Concepción, Chile.

Las vigas en sentido longitudinal se apoyan simplemente sobre una capa de neopreno y estos a su vez sobre los cabezales de las Pilas. El rodillo de la izquierda indica que se va a desplazar lateralmente la viga. Por lo tanto deberá tener un buen espacio para moverse en un sismo sin que salga de su apoyo y se caiga. La foto de la figura 1.2 fue tomada dos meses después del Mega Sismo de Chile de 2010 y causó en unos tramos más adelante la caída del tablero. Aguiar (2010).

El empotramiento móvil permite solamente el deslizamiento lineal de su punto de unión con el cuerpo en la dirección de su movimiento. La representación de este tipo de vínculo es la que se presenta en la figura 1.3

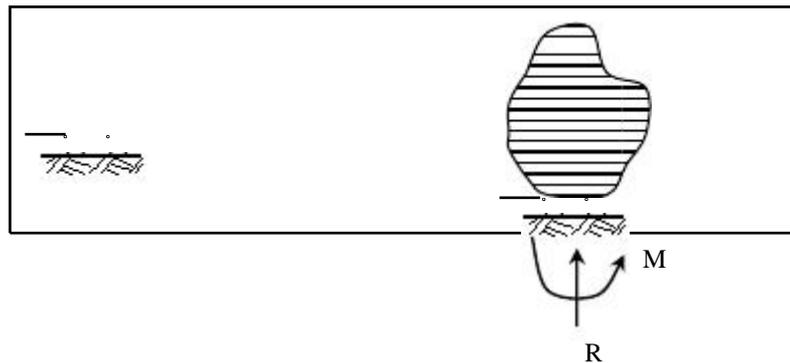


Figura 1.3 Empotramiento móvil.

El empotramiento fijo o simplemente empotramiento, no permite ningún tipo de desplazamiento ni rotación. La representación de este tipo de vínculo, que es lo más común en las estructuras planas, se representa en la figura 1.4.

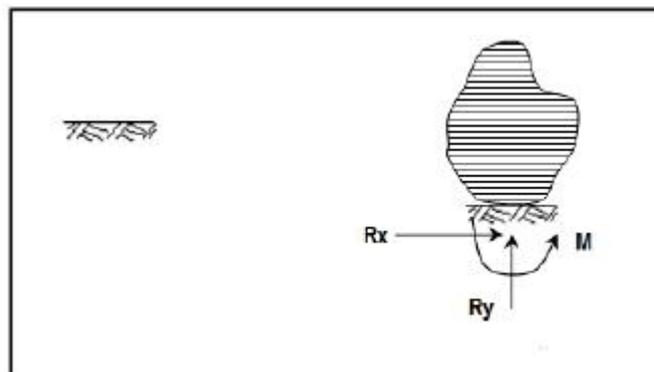


Figura 1.4 Empotramiento fijo.

A los vínculos interiores se denominan articulaciones y se los representa con un círculo de la siguiente manera.

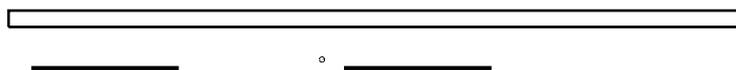


Figura 1.5 Articulación interior.

El momento es nulo en la articulación, la barra a la izquierda de la articulación tendrá un giro el mismo que es diferente de la barra que se encuentra a la derecha de la articulación. Este tipo de vínculo se lo utiliza en el análisis sísmico de estructuras para representar las rótulas plásticas que no es más que un modelo matemático que indica que una sección ya no puede resistir más momento y empieza a rotar, empieza a disipar energía.

1.1.2 Elementos

En Estructuras se estudia solamente elementos lineales, aquí se recordará que son elementos o miembros lineales y posteriormente se hablará de otros elementos que dependerán para determinado análisis estructural.

Un elemento lineal es generado por un área plana, cuyo centro de gravedad describe una curva, en general alabeada, llamada directriz o eje, manteniendo su plano perpendicular a la curva. El área móvil puede cambiar de magnitud y forma, siempre que ello se realice de modo continuo.

Las dimensiones del área transversal deben ser pequeñas en comparación con la longitud de la directriz. En general, los elementos se representan por su eje o directriz. En la figura 1.6 se presentan varios de los mencionados elementos, así en la parte superior se tiene un elemento lineal de sección constante y variable; en la parte inferior un elemento curvo de sección constante y variable.

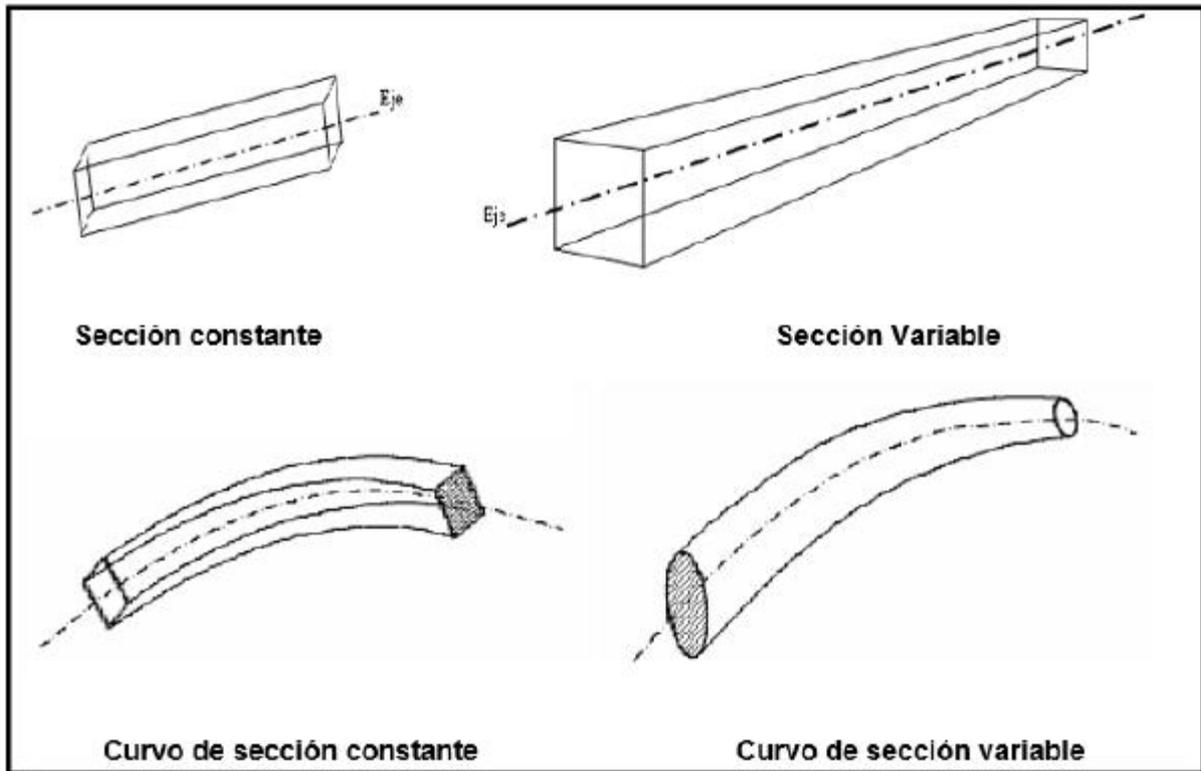


Figura 1.6 Diferentes tipos de elementos

1.1.3 Juntas o Nudos

Se denominan juntas o nudos a los puntos de concurso de varios elementos. Es decir al medio de conexión de dos o más elementos. Normalmente se representa un nudo con un punto el mismo que corresponde a la intersección de los elementos que concurren a él.

En este libro se dibujará una pequeña longitud de los elementos que llegan al nudo como lo muestra la estructura de la figura izquierda de 1.7, en que se ha negreado un poco más la parte de la viga y columna que llegan al nudo; la representación más común de un nudo es un punto como se observa a la derecha de la figura 1.7

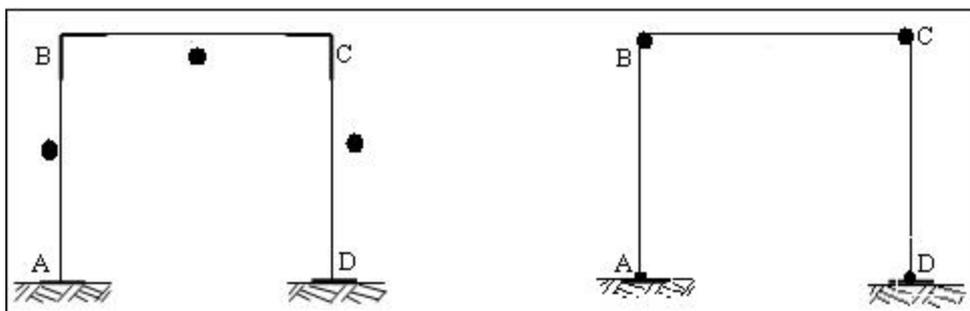


Figura 1.7 Representación de los nudos de un pórtico plano.

La estructura de la figura 1.7 tiene 4 nudos y tres elementos lineales (que se han representado con un punto a la izquierda de la figura 1.7).

Es importante notar, que si bien a un nudo se representa como un punto, en la realidad esto no es así, ya que es un elemento físico que tiene dimensiones como lo señala la figura 1.8, que se desplaza y gira. Por lo tanto habrá que tener presente este hecho para el diseño en hormigón. Los últimos códigos del A.C.I. 318, cada vez dan mayor importancia al diseño del nudo, es más en estructuras aporticadas construidas en zonas sísmicas se diseña de tal forma que el nudo sea fuerte y la viga débil.

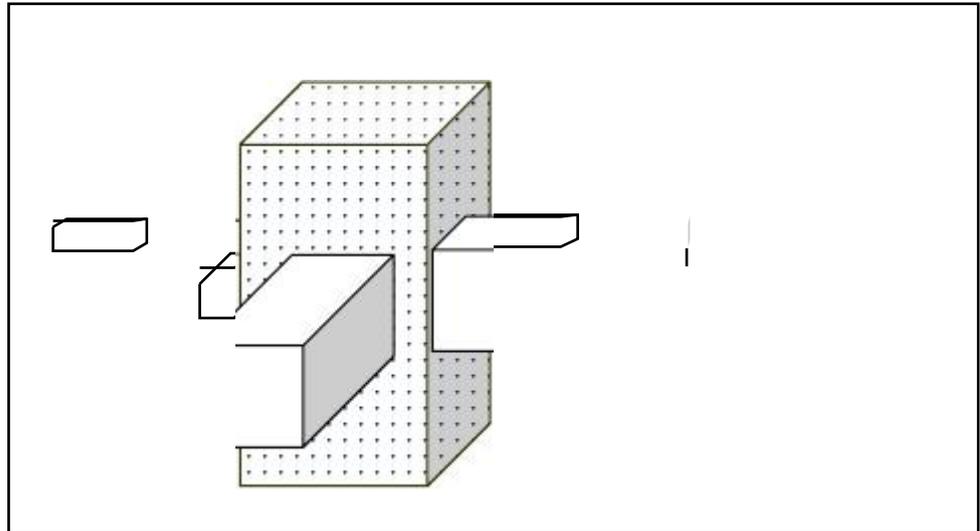


Figura 1.8 Nudo típico

Una de las fallas más frecuentes durante los sismos es la falla de nudo, especialmente los exteriores por falta de anclaje del hierro longitudinal. También han fallado debido a que han tenido una baja capacidad al cortante horizontal. Todo esto se indica con el objeto de que deben ser diseñados.

Retomando el tema se puede manifestar que hasta ahora se ha considerado únicamente elementos rectos pero podemos tener otra clase de elementos; todo dependerá de cómo se ha definido los nudos.

En consecuencia el número de elementos de una estructura es un número arbitrario, dependiente de la elección considerada.

Por lo tanto, un elemento puede tener más de dos nudos. La ventaja de elegir estos elementos de geometría diferente a la que estamos acostumbrados se tiene cuando se estudia el tema de las subestructuras. En la figura 1.9, se muestran varios elementos especiales; la estructura de la izquierda y derecha tienen 2 elementos y 3 juntas; la estructura que está en el centro de la figura 1.9 también tiene 3 elementos especiales.

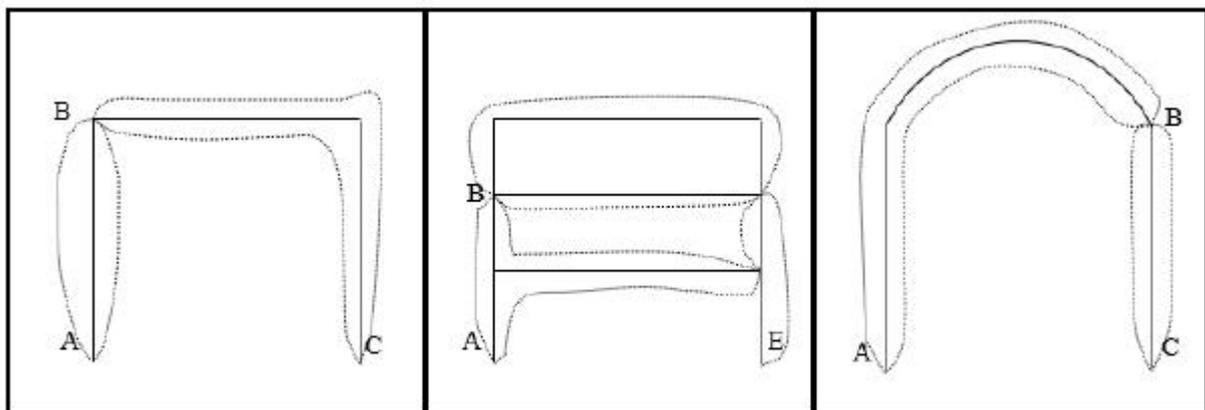


Figura 1.9 Elementos especiales de una estructura.

Cuando se realiza el análisis sísmico espacial, en coordenadas de piso; se considera que los pórticos planos son un elemento. Ahí se tiene una aplicación de los elementos especiales.

1.1.4 Estructura

Una estructura es una cadena elástica estable, compuesta por un número finito de elementos unidos entre sí mediante un número finito de juntas, uno de cuyos números es arbitrario.

Nótese que se han utilizado en la definición las palabras: “**cadena**” por la unión que tienen los diferentes elementos; “**elástica**” porque se consideran pequeñas deformaciones del orden de infinitésimos y “**estable**” en tal virtud no tiene sentido hablar de estructuras inestables. Es fundamental destacar que al decir “elástica” el comportamiento es de tipo lineal, todo el texto está marcado en este análisis.

1.2 DEFINICIONES DE MECÁNICA

1.2.1 Coordenadas generalizadas

Para determinar la configuración de un sistema se emplean coordenadas, las cuales pueden ser dependientes o independientes. Cuando las coordenadas son independientes, reciben el nombre de coordenadas generalizadas.

Por ejemplo, si el sistema masa-resorte mostrado a la izquierda de la figura 1.10, a partir de la Posición de Equilibrio Estático (P.E.E) se le suministra un desplazamiento δ_0 , como se indica en la figura central (condición inicial) y se permite que el sistema oscile, figura derecha de 1.10, se observa que para definir la posición de la masa, en cualquier instante, de tiempo, se requiere una coordenada vertical $Y(t)$; la cual se mide a partir de la P.E.E. En la Posición de Equilibrio Estático la sumatoria de fuerzas en sentido vertical es igual a cero en cambio en la posición genérica del movimiento indicada a la derecha la sumatoria de fuerzas es igual a masa por la aceleración.

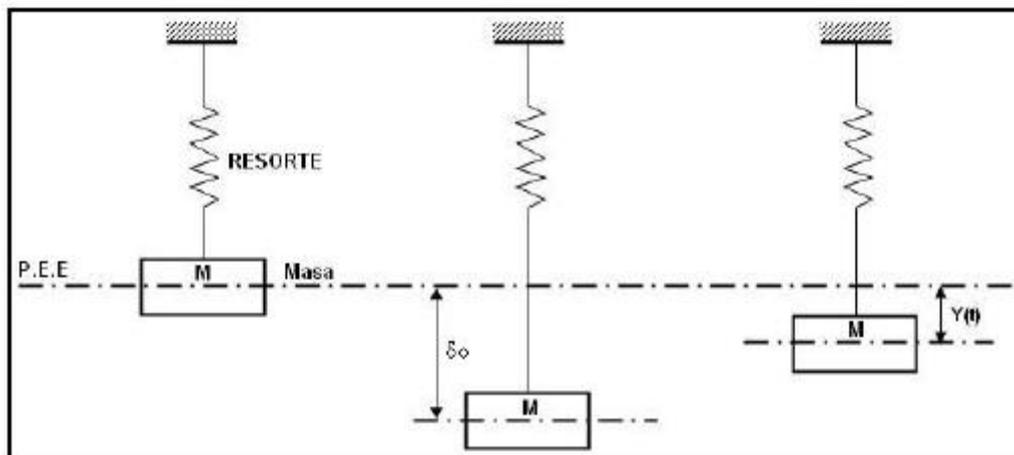


Figura 1.10 Sistema de un grado de libertad.

Lo importante es destacar que en dinámica (respuesta en el tiempo) el sistema de la figura 1.10 tiene un grado de libertad.

Por otra parte, el sistema masa-resorte-polea de la figura 1.11 tiene una sola coordenada generalizada, puesto que tanto $X(t)$ como $\theta(t)$ son dependientes, pueden usarse cualquiera de ellas para determinar la posición relativa de la masa, pero no las dos. En los ejemplos que se están indicando la variable t corresponde al tiempo. Por lo tanto, se está definiendo la posición de la masa en un tiempo genérico t del movimiento.

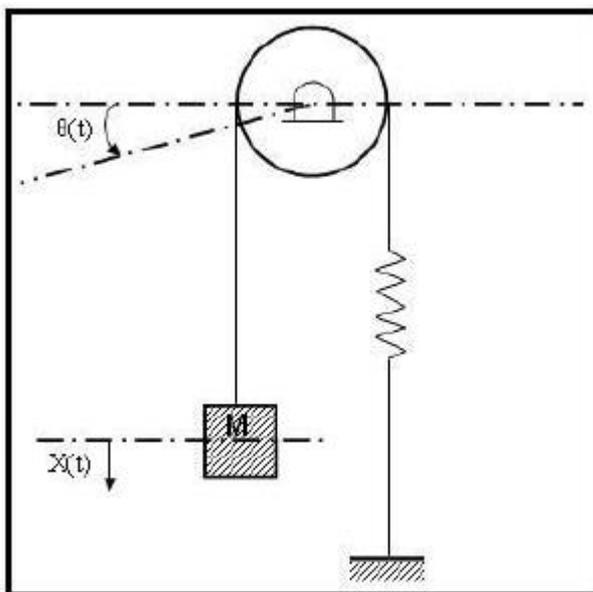


Figura 1.11 Sistema masa-resorte-polea

En la figura 1.12 se presenta un péndulo doble de longitudes L_1 y L_2 y masas M_1 y M_2 . En este caso para definir la configuración del sistema se requieren dos coordenadas que pueden ser: los ángulos de rotación, denominados $\theta_1(t), \theta_2(t)$, o los desplazamientos horizontales $x_1(t), x_2(t)$ ya sean estos absolutos (figura central) o relativos como (figura derecha).

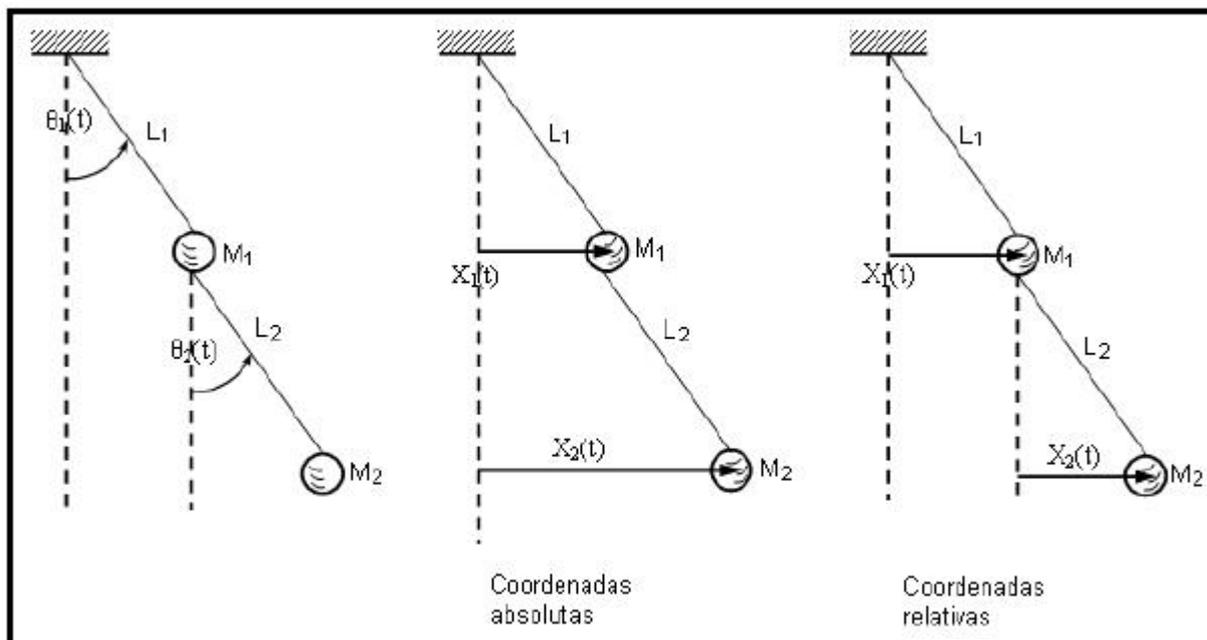


Figura 1.12 Sistema de dos grados de libertad. Coordenadas absolutas y relativas.

No se puede seleccionar las coordenadas presentadas a la derecha de la figura 1.13 puesto que las dos son dependientes ya que $X_1(t) = L_1 * \theta_1(t)$, y no se tiene una coordenada para definir la posición de la masa M_2 . Se puede trabajar con los sistema de coordenadas indicadas a la derecha de la figura 1.13. Lo importante es notar que el sistema tiene solo dos grados de libertad, ni más ni menos; además las coordenadas que se seleccionen deben ser independientes y que no existe un solo sistema de coordenadas.

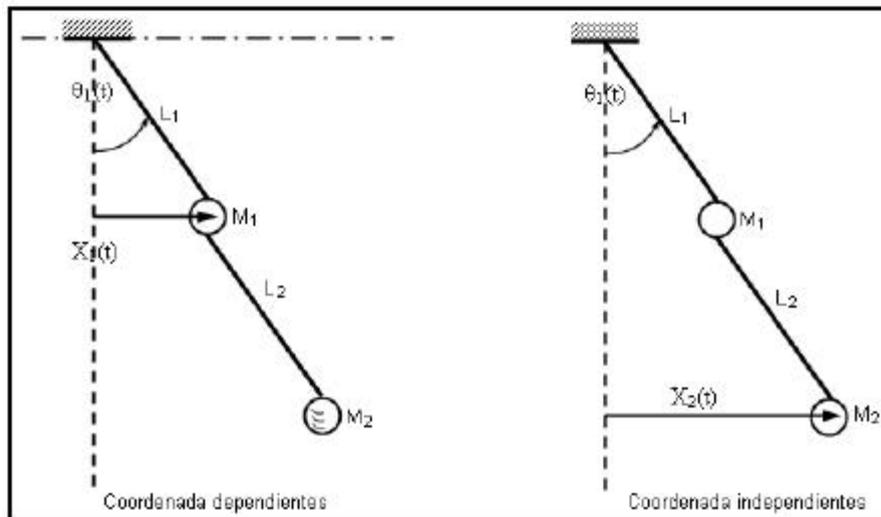


Figura 1.13 Coordenadas dependientes e independientes.

1.2.2 Números de grados de libertad

Se denomina número de grados de libertad al *número de coordenadas generalizadas que hay que emplear para definir la configuración del sistema...* En este libro se entiende como sistema a una estructura.

Cuando el número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas generalizadas se dice que este sistema es HOLONOMO.

1.2.3 Sistemas deformables

En los sistemas analizados anteriormente se ha considerado que la masa es puntual, que la polea es rígida, las cuerdas inextensibles y el resorte indeformable. Hipótesis que se acostumbra realizar para simplificar la solución de los problemas.

Ahora, se va a considerar un sistema continuo deformable. La figura 1.14 presenta una viga en voladizo cuya masa se encuentra uniformemente distribuida; en ella observamos que para cada punto P, dentro del intervalo $0 \leq X \leq L$ es necesario definir tres parámetros que son: u que es la componente de desplazamiento horizontal del punto P; v que es la componente de desplazamiento vertical del punto P y θ que es la rotación del punto P.

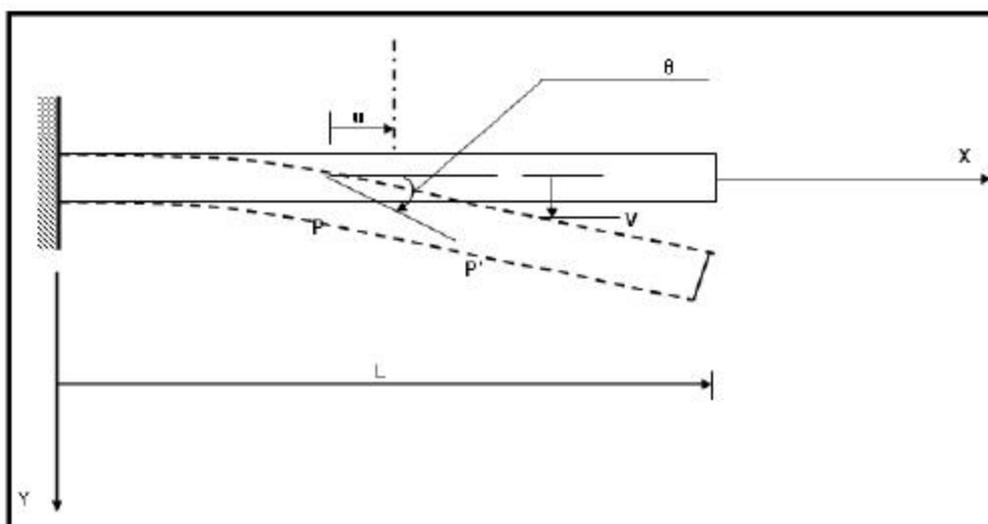


Figura 1.14 Sistema continuo con infinito número de grados de libertad.

Los valores de u , v , θ irán cambiando punto a punto a lo largo de toda la longitud de la viga, es decir que al considerar únicamente la directriz o eje de la viga, para cada punto P se tiene: dos desplazamientos y una rotación para determinar la configuración del sistema deformado. Por lo tanto de acuerdo a la definición del número de grados de libertad, podemos indicar que este sistema posee infinito número de grados de libertad, ya que se tiene infinito número de puntos en la viga.

Los únicos que tienen un número finito de grados de libertad son los compuestos por partículas rígidas. Los sistemas deformables o sistemas continuos poseen infinito número de grados de libertad y para resolverlos se tiene que plantear la ecuación diferencial que gobierna el problema y resolver ésta ecuación en todo el dominio.

Un edificio puede modelarse como un sistema continuo como el presentado en la figura 1.14, claro está en forma aproximada, cuando se quiere encontrar su probable comportamiento sísmico en forma rápida.

1.3 GRADOS DE LIBERTAD EN UNA ESTRUCTURA

1.3.1 Clases de estructuras

Con fines didácticos se clasifican a las estructuras en este libro en: pórticos planos, armaduras planas, estructuras espaciales, armaduras espaciales y parrillas o mallas espaciales. Se puede extender la clasificación considerando por ejemplo vigas de cimentación u otro tipo de estructuras. Lo importante es indicar que éste libro está dedicado al estudio de Pórticos Planos y Armaduras Planas pero los conceptos que se van a dar son generales y se aplican a cualquier tipo de estructura. Por ejemplo la forma como se realiza el ensamblaje directo para encontrar la matriz de rigidez en Pórticos Planos es la misma que para Estructuras Espaciales. Claro está que para cada caso se deben definir la respectiva matriz de rigidez del elemento y los correspondientes grados de libertad.

1.3.2 Pórticos planos con elementos flexibles

Se inicia el estudio calculando el número de grados de libertad de un pórtico plano compuesto por elementos lineales que son totalmente flexibles, que no tienen restricción para deformarse a los cuales se les ha identificado con las letras A_o , I_o . La primera letra hace relación al área de la sección transversal y la segunda al momento de inercia.

La configuración del sistema vendrá dada por la posición de los nudos. Por consiguiente, la definición del número de grados de libertad no es la general enunciada en mecánica, sino una particular limitada a describir la posición de las juntas. **En consecuencia, el número de grados de libertad, en estática, es el mínimo número de coordenadas que es preciso determinar para definir la posición de las juntas o nudos.**

Para obtener el número de grados de libertad de una estructura se debe dibujar una deformada lo más general posible. Por ejemplo, para el pórtico plano de la figura 1.15, primero se identifica la posición inicial de los nudos con letras. Ahora por efecto de **cualquier sistema de cargas** presentará una deformada como la que se indica a la derecha de la figura 1.15, en la cual a la posición final del nudo se los ha identificado con la misma letra pero con un índice. Nótese en esta deformada que el ángulo del nudo B se mantiene de la misma dimensión, es decir la rotación q_3 en el nudo B de la columna AB es igual a la rotación q_3 de la viga BC; lo propio sucede en el nudo C. Se considera que la junta o nudo se desplaza y gira en el plano, con respecto a un eje perpendicular al plano.

En resumen para definir la posición de las juntas A, B, C y D del pórtico plano de la figura 1.15 se requieren seis coordenadas generalizadas que están indicadas, a la derecha de la figura 1.15 las mismas que han sido identificadas con la letra q . El significado de cada variable se indica a continuación.

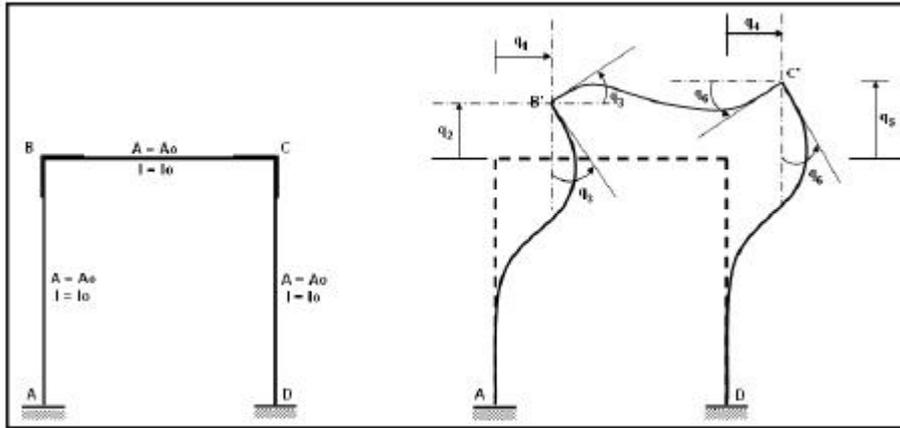


Figura 1.15 Pórtico plano con elementos totalmente flexibles y deformada general.

- q₁ Componente de desplazamiento horizontal de la junta B.
- q₂ Componente de desplazamiento vertical de la junta B.
- q₃ Rotación de la junta B.
- q₄ Componente de desplazamiento horizontal de la junta C.
- q₅ Componente de desplazamiento vertical de la junta C.
- q₆ Rotación de la junta C.

Por lo tanto la descripción estructural está limitada en el presente capítulo, a definir la posición de los nudos.

Para calcular el número de grados de libertad de un pórtico plano **cuyos elementos son totalmente flexibles**, se puede utilizar la siguiente fórmula.

$$NGL = 3 (NDJ) - (NDJ)_E * V \tag{1.1}$$

Donde *NGL* es el número de grados de libertad de la estructura, *NDJ* es el número de juntas totales, $(NDJ)_E$ es el número de juntas externas, *V* es igual a 1 si el vínculo es un rodillo, *V* es igual a 2 si es una articulación y *V* es igual a 3 si se trata de un empotramiento. Para el pórtico plano de la figura 1.15, se tiene:

$$NGL = 3 (4) - (2) 3 = 12 - 6 = 6$$

La deformada general sirve únicamente para identificar los grados de libertad de una estructura, se puede dibujar con cualquier signo. Una vez que ya se conocen los grados de libertad se determina el sistema \bar{q} , con la convención de signos que se emplea. Para el pórtico plano de la figura 1.15, este sistema es el presentado en la figura 1.16.

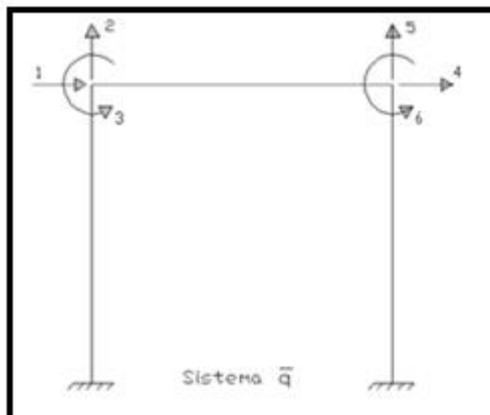


Figura 1.16 Sistema de coordenadas \bar{q}

Nótese que el desplazamiento horizontal es positivo si se desplaza hacia la derecha; el vertical positivo si se desplaza hacia arriba y la rotación o giro es positiva si rota en sentido horario.

1.3.3 Deformadas Elementales

Son aquellos gráficos en los cuales una de las coordenadas vale la unidad y las restantes son cero. Tanto en estática como en dinámica es necesario construir deformadas elementales por ello en el presente capítulo se empieza a construir estas deformadas y se continuará a lo largo de la mayor parte del libro.

- **EJEMPLO 1**

Presentar las tres primeras deformadas elementales del pórtico plano, cuyos elementos son totalmente flexibles, que se ha presentado en la figura 1.15. Trabajar con el sistema q de la figura 1.16.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.17 se presentan las tres primeras deformadas elementales del pórtico plano cuyos elementos son totalmente flexibles. Nótese que en cada uno de ellos solo una de las coordenadas se ha deformado la unidad.

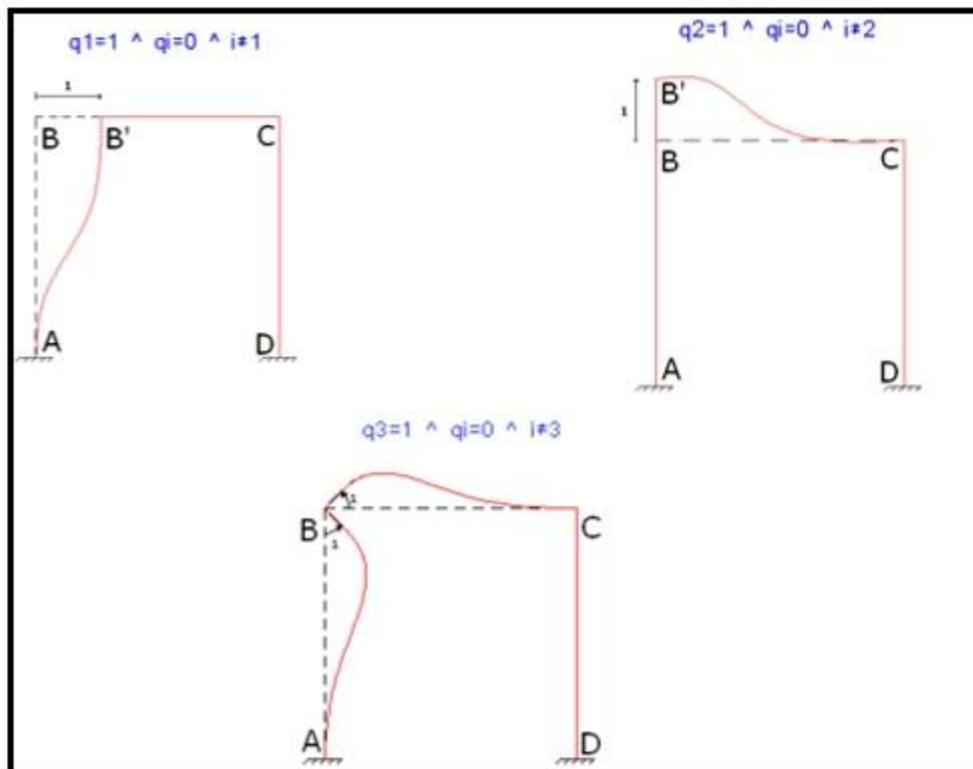


Figura 1.17 Tres primeras deformadas elementales de un pórtico con elementos totalmente flexibles.

En la deformada elemental q_3 se aprecia que la columna en el nudo B rota la unidad y que la viga en ese mismo nudo también rota la unidad. Esto se conoce con el nombre de Principio de Williot y así es como se calculan las estructuras con nudo rígido pero para que esto se dé, se debe diseñar y construir el nudo eficiente. Si no se construye bien un nudo no se va a cumplir Williot y la estructura va a tener menor rigidez que la calculada por que no se tiene nudo rígido.

1.3.4 Pórtico plano con elementos axialmente rígidos

Se define como un miembro axialmente rígido o longitudinalmente rígido a aquel que no cambia de longitud luego de que se ha aplicado un sistema de cargas. Se representa a los miembros axialmente rígidos de la siguiente manera: $A = \infty$.

Como ejemplo, se analiza el pórtico de la figura 1.18, cuyas columnas son totalmente flexibles y cuya viga es axialmente rígida. Por efecto de un sistema cualquiera de cargas, este pórtico se va a deformar como se indica, a la derecha de la figura 1.18.

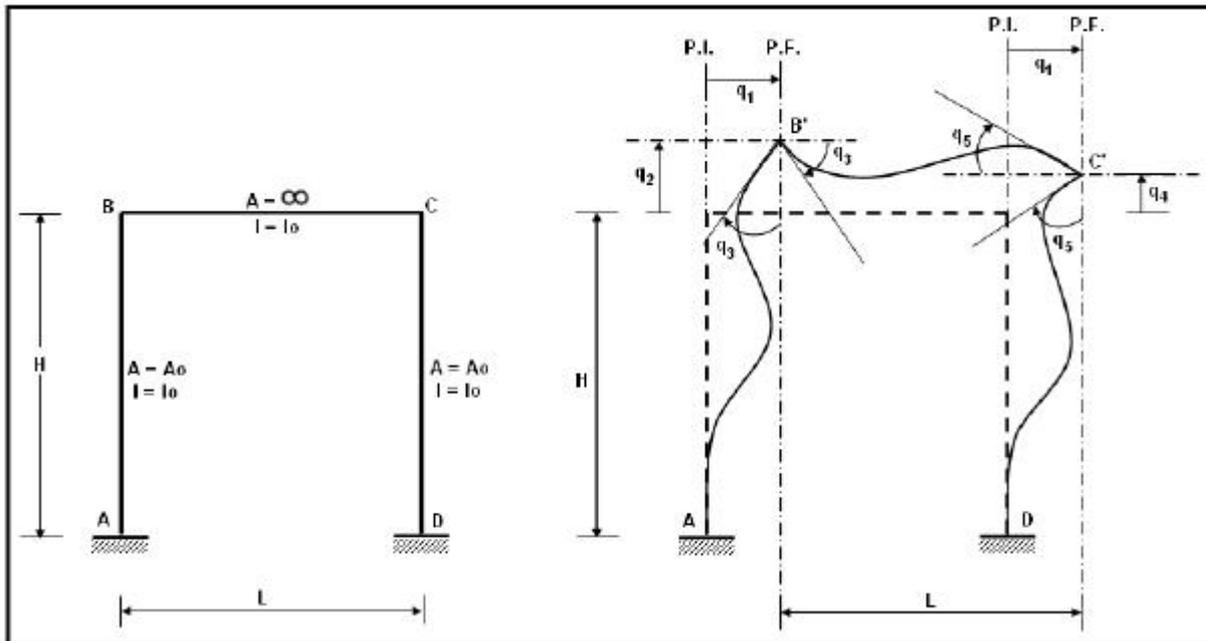


Figura 1.18 Pórtico plano con una viga axialmente rígida y deformada general.

Nótese que si el nudo B se desplaza horizontalmente q_1 , el nudo C también tiene que desplazarse horizontalmente q_1 , puesto que la viga BC no va a cambiar su longitud por ser axialmente rígida. En consecuencia el pórtico de la figura 1.18, tiene 5 grados de libertad.

• EJEMPLO 2

Dibujar las tres primeras deformadas elementales del pórtico de un vano y un piso presentado en la figura 1.18, cuyas coordenadas generalizadas son las indicadas en la figura 1.19.

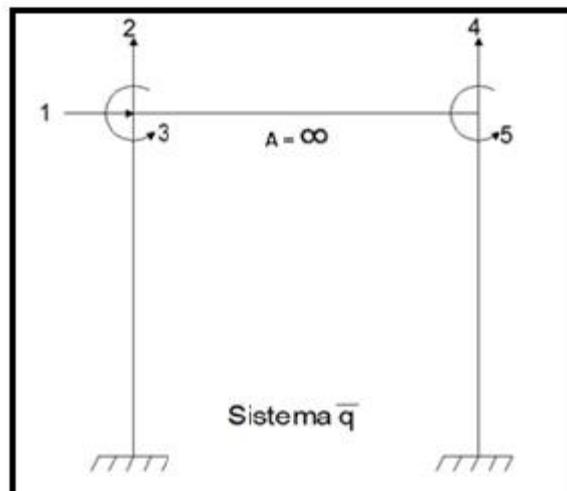


Figura 1.19 Sistema de coordenadas generalizadas.

• SOLUCIÓN

En la figura 1.20 se presentan las tres primeras deformadas elementales, la primera de ellas es diferente, con relación al Ejemplo 1. Nótese que para dibujar la primera deformada elemental,

primero se han trazado perpendiculares al eje del elemento axialmente rígido, las mismas que se han identificado por P.I. (Posición Inicial), posteriormente cuando se da el desplazamiento horizontal unitario el nudo B pasa a la posición B' ; esta posición determina una nueva perpendicular P.F. (Posición Final). La posición final del nudo C se encontrará a lo largo de la recta P.F., para que la viga mantenga su longitud y para cumplir con las otras condiciones de que el desplazamiento vertical y giro en C sean nulos, el nudo C para a C' , como se indica en la parte superior izquierda de la figura 1.20.

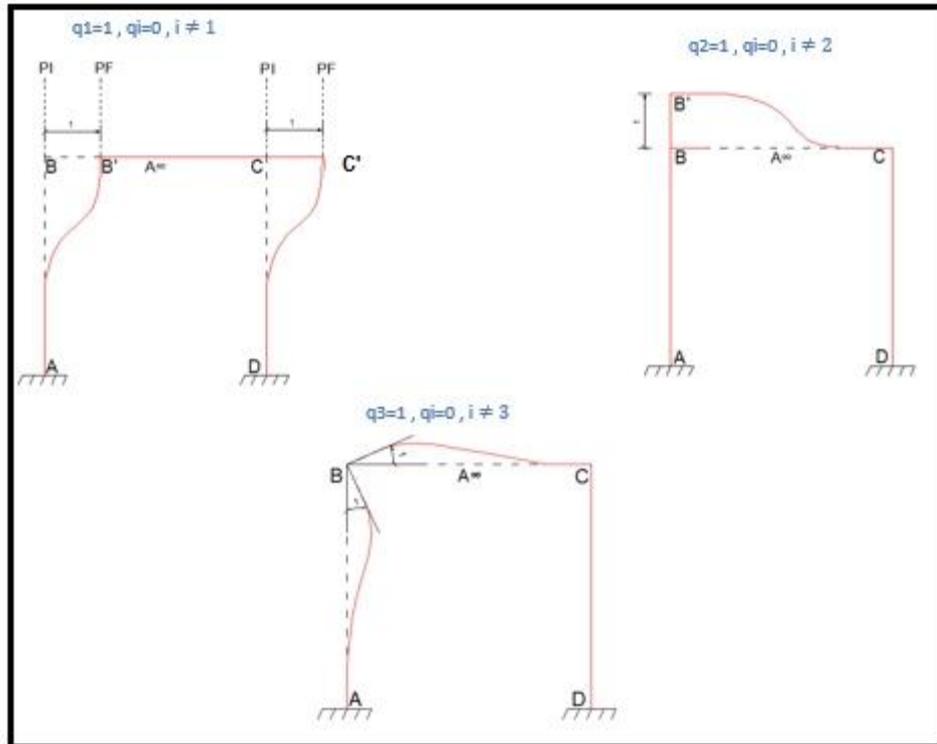


Figura 1.20 Tres primeras deformadas elementales de estructura con viga axialmente rígida.

En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3 (NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A \quad (1.2)$$

Siendo A el número de elementos que son axialmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.18, al aplicar la ecuación 2 se tiene:

$$NGL = 3 (4) - 2 (3) - 1 (1) = 12 - 6 - 1 = 5$$

$$NGL = 5$$

La ecuación (1.2), al igual que todas las ecuaciones que se indican en este capítulo para definir los grados de libertad de marcos planos compuesta por elementos axial o transversalmente rígidos son referenciales. Lo mejor es dibujar una deformada general y en ella observar los grados de libertad teniendo presente lo enunciado anteriormente. Para ilustrar lo expuesto, fijamos la atención en la estructura de la figura 1.21, al aplicar la ecuación (1.2) se tiene que el marco plano tiene un grado de libertad y esto es falso ya que el sistema tiene dos grados de libertad como se observa a la derecha de la figura 1.21.

De tal manera que las ecuaciones deben considerarse como referenciales. Para encontrar los grados de libertad se debe dibujar una deformada general y se recomienda que se lo haga con una regla, para no equivocarse.

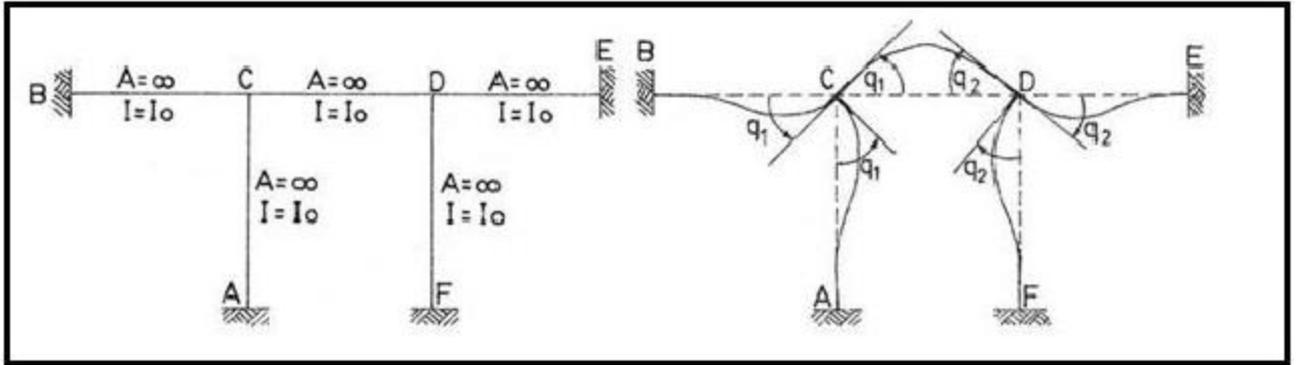


Figura 1.21 Estructura en la que no se cumple la ecuación para hallar los grados de libertad.

1.3.5 Pórtico plano con elementos transversalmente rígidos

Se define como un elemento transversalmente rígido a aquel que no trabaja a flexión pero puede alargarse o acortarse, es decir que un elemento transversalmente rígido se deforma axialmente pero no transversalmente. Se representa a este tipo de elemento de la siguiente manera: $I = \infty$.

El pórtico de la figura 1.22, tiene las columnas totalmente flexibles pero la viga es transversalmente rígida y axialmente flexible. A la derecha de la figura 1.22 se presenta una deformada general de este pórtico.

Por ser transversalmente rígido el elemento BC, se tiene que la rotación q_3 en el nudo B es igual a la rotación en el nudo C. (Ángulos alternos internos) Nótese que no se ha colocado como coordenada generalizada el desplazamiento vertical del nudo C, debido a que este desplazamiento es dependiente de q_1, q_2, q_3 , y q_4 . Es decir no es una coordenada generalizada. Se puede demostrar que este desplazamiento vertical del nudo C es igual a:

$$q_2 + q_3(L + q_4 - q_1)$$

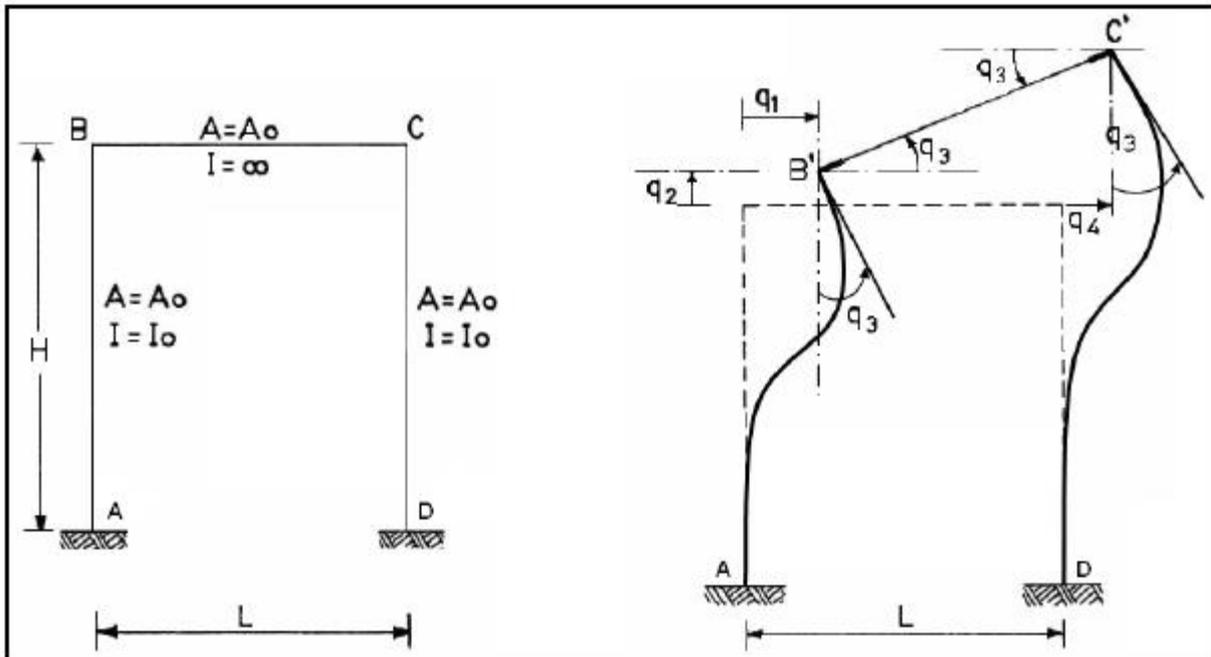


Figura 1.22 Pórtico plano con viga transversalmente rígida y deformada general.

Por lo tanto el pórtico de la figura 1.18.1, tiene 4 grados de libertad. En este caso, la ecuación que define el número de grados de libertad es:

$$NGL = 3 (NDJ) - (NDJ)_E * V - 2 * T \quad (1.3)$$

Donde T es el número de elementos que son transversalmente rígidos. Para el pórtico de la figura 1.22, al aplicar la ecuación (1.3) se tiene:

$$NGL = 3 (4) - 2 (3) - 2 (1) = 12 - 6 - 2 = 4$$

Para un pórtico plano con elementos axialmente rígidos y transversalmente rígidos, el número de grados de libertad, viene definido por la ecuación (1.4) la misma que se constituye en una fórmula general para marcos planos.

$$NGL = 3 (NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T \quad (1.4)$$

• EJEMPLO 3

El pórtico de un vano y un piso de la figura 1.22, cuya viga es transversalmente rígida, tiene el sistema de coordenadas generalizadas, indicado en la figura 1.23. Se pide dibujar las tres primeras deformadas elementales.

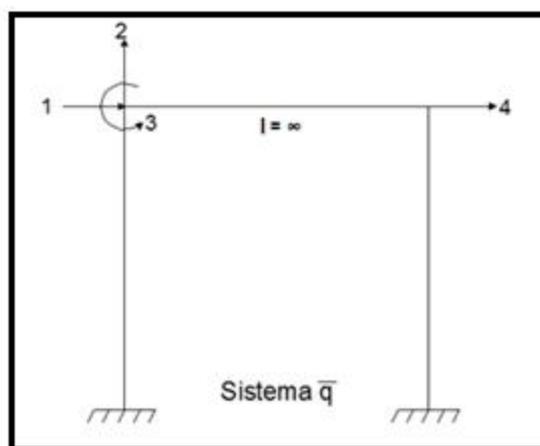


Figura 1.23 Coordenadas generalizadas de estructura de Ejemplo 3.

• SOLUCIÓN

En la figura 1.24 se presentan las tres primeras deformadas elementales, de la estructura cuyos grados de libertad son los indicados en la figura 1.23. Del análisis de estos diagramas se puede indicar lo siguiente:

- i) En el primer diagrama elemental la viga se acorta axialmente la unidad, esto es debido a que el elemento no es axialmente rígido. Puede deformarse axialmente.
- ii) En el segundo diagrama al subir verticalmente, el nudo B la unidad, también tiene que subir el nudo C, la unidad. De no hacerlo estaría girando el nudo B y la condición es que solo se desplace verticalmente y que no rote. El nudo C puede subir la unidad debido a que no existe ese grado de libertad.
- iii) Al rotar el nudo B la unidad; el nudo C también rota la unidad porque el elemento es transversalmente rígido y el nudo C se desplaza verticalmente una longitud igual a L. En elementos transversalmente rígidos se cumple que arco para radio igual al ángulo, al ser el ángulo unitario el desplazamiento vertical es igual a la luz.

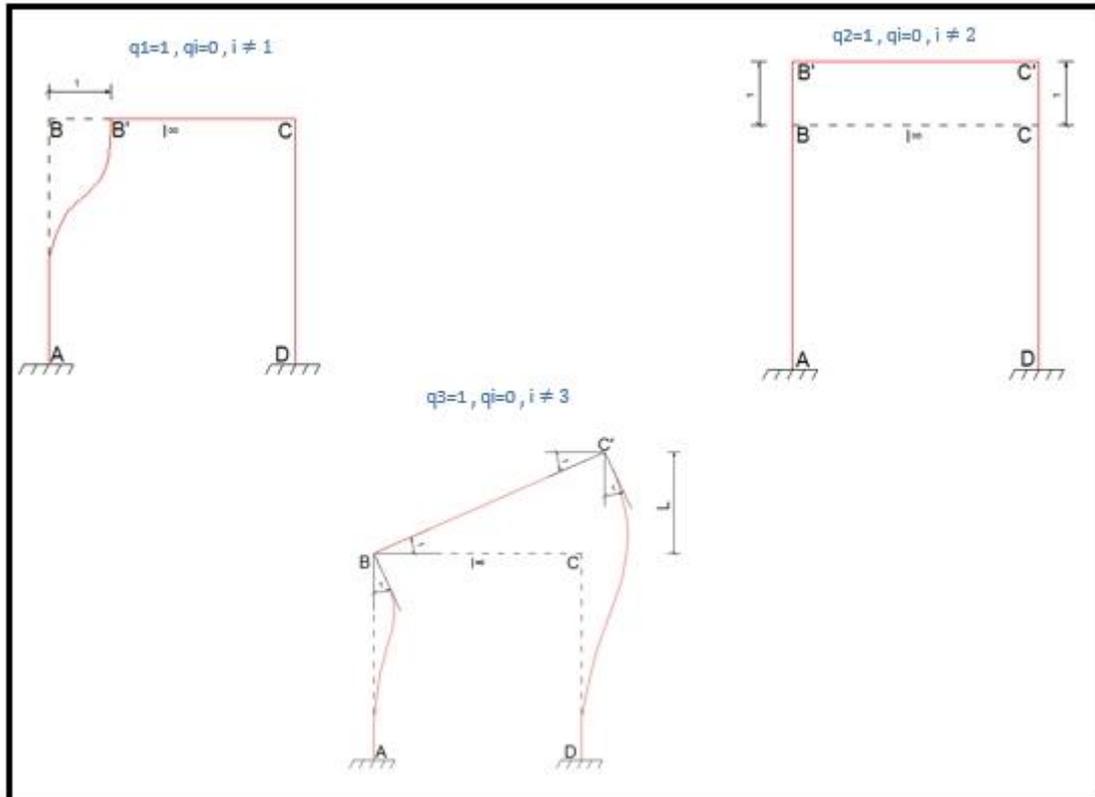


Figura 1.24 Diagramas elementales de estructura con viga transversalmente rígida.

1.3. 6 Pórtico plano con elementos totalmente rígidos

Se define como un elemento totalmente rígido a aquel que es longitudinal y transversalmente rígido. Es decir su representación es: $A = \infty$ e $I = \infty$. No trabaja axialmente ni a flexión por lo que se desplaza como cuerpo rígido.

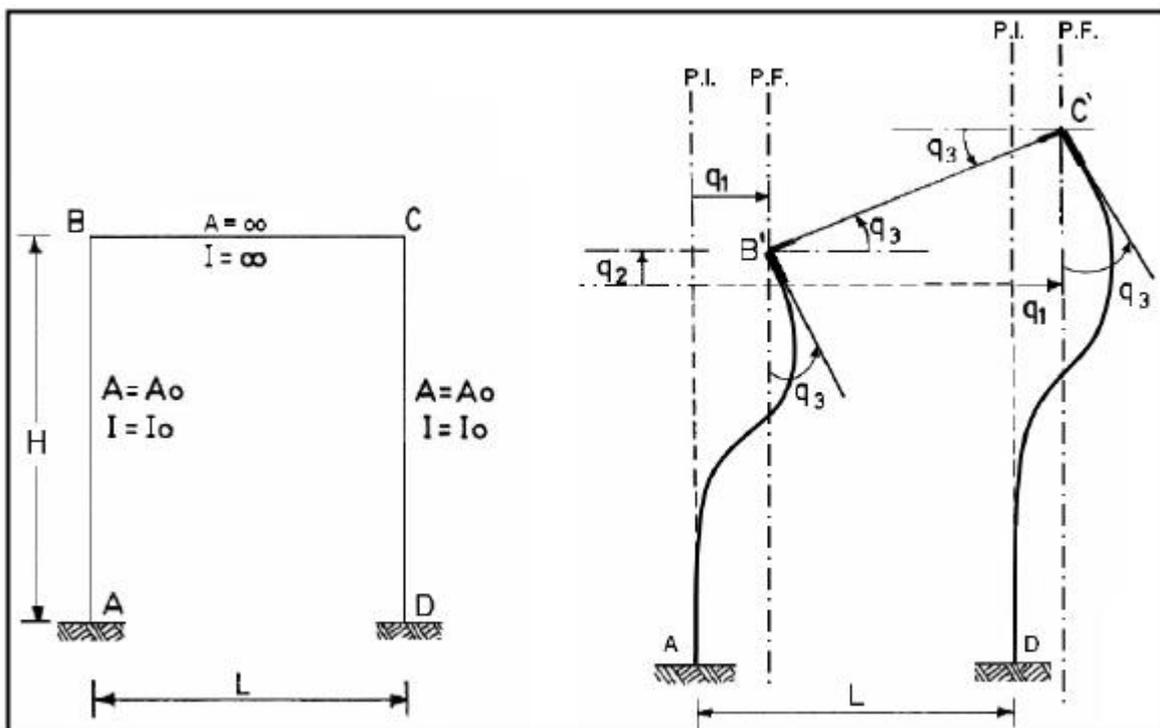


Figura 1.25 Pórtico con viga totalmente rígida y deformada general.

El pórtico presentado a la izquierda de la figura 1.25, tiene las columnas totalmente flexibles, pero su viga es completamente rígida. A la derecha de esta figura, se dibuja la deformada lo más general posible. El sistema tiene tres grados de libertad.

En el análisis sísmico de pórticos planos se considera que todas las vigas de un piso son axialmente rígidas de tal manera que todos los nudos, de piso, se desplazan horizontalmente la misma cantidad. También se considera que la losa de entrepiso es totalmente rígida, en el Análisis Sísmico en tres dimensiones.

Por otra parte; en el análisis de armaduras planas en cambio se considera que sus elementos son transversalmente rígidos.

Por todo lo expuesto es importante que el estudiante sepa trabajar con elementos $A = \infty$ y/o $I = \infty$.

1.4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

• EJEMPLO 4

En el sistema mostrado en la figura 1.26, se pide:

- Calcular el número de grados de libertad.
- Dibujar una deformada lo más general posible.

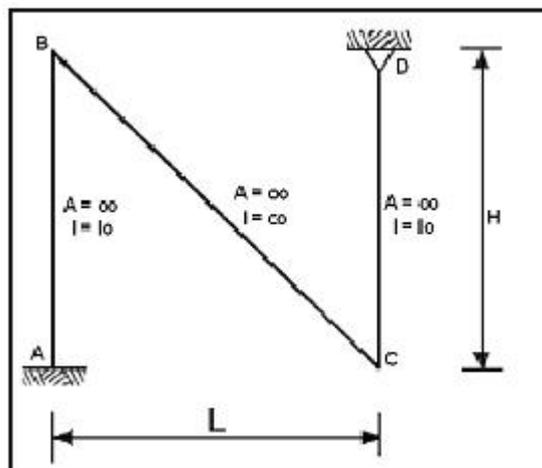


Figura 1.26 Estructura de análisis del Ejemplo 1

• SOLUCION

$$NGL = 3(NDJ) - (NDJ)_E * V - I * A - 2 * T$$

$$NGL = 3(4) - (1)3 - (1)2 - 1*3 - 2*1 = 2$$

Al utilizar la ecuación general se ha encontrado que la estructura tiene 2 grados de libertad; ya se tiene una idea antes de dibujar la deformada general que debe hacerse con mucho detenimiento, con regla. Primero se dibuja la estructura con líneas entrecortadas; se identifican los nudos; colocando las condiciones de los elementos que son $A = \infty$ e $I = \infty$.

Se traza perpendiculares a los elementos que son axialmente rígidos $A = \infty$ y se indica su posición inicial, en la parte izquierda de la figura 1.27. Por ser las columnas AB y CD axialmente rígidas, la posición final de sus juntas B y C estarán en cualquier punto de la recta $X-X_1$ y $X_2 -X_3$, respectivamente.

En la parte derecha de la figura 1.27 se indica una deformada lo más general posible de la estructura. Nótese que la junta B no gira ya que si rotara la posición final de C' no caería dentro de la recta Y₂'-Y₃' que es la posición final del miembro BC por ser axialmente rígido.

En consecuencia, los grados de libertad son la componente de desplazamiento horizontal del nudo B que se ha denominado q_1 y la rotación del nudo D que se ha llamado q_2 .

En la medida que se van resolviendo más ejercicios la explicación teórica va disminuyendo. Es importante que el estudiante aprenda a encontrar los grados de libertad ya que si se seleccionan mal las coordenadas todo lo que se haga a posterior estará mal realizado.

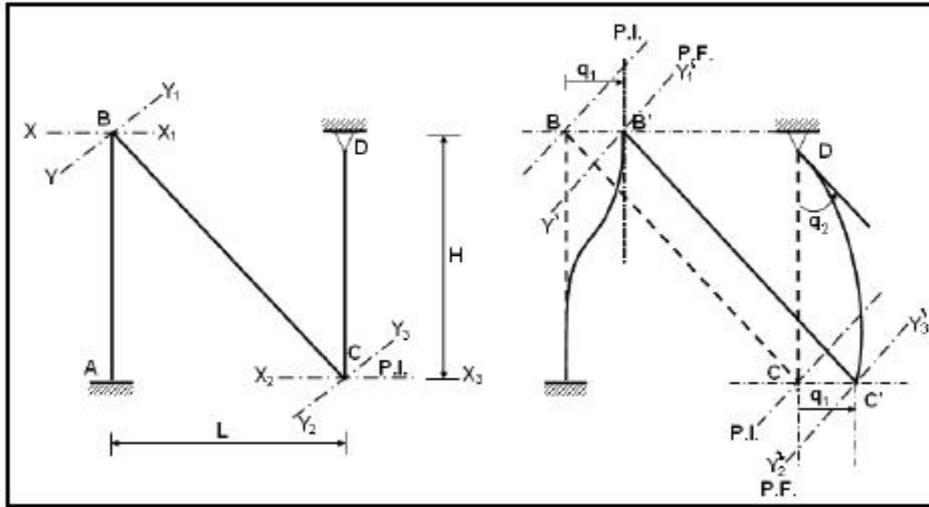


Figura 1.27 Condiciones de los elementos $A = \infty$. Deformada General.

• EJEMPLO 5

Para el sistema mostrado en la figura 1.28, en que las columnas son $A = \infty$ y la viga central totalmente rígida, se pide:

- a) Calcular el número de grados de libertad
- b) Dibujar una deformada lo más general posible.

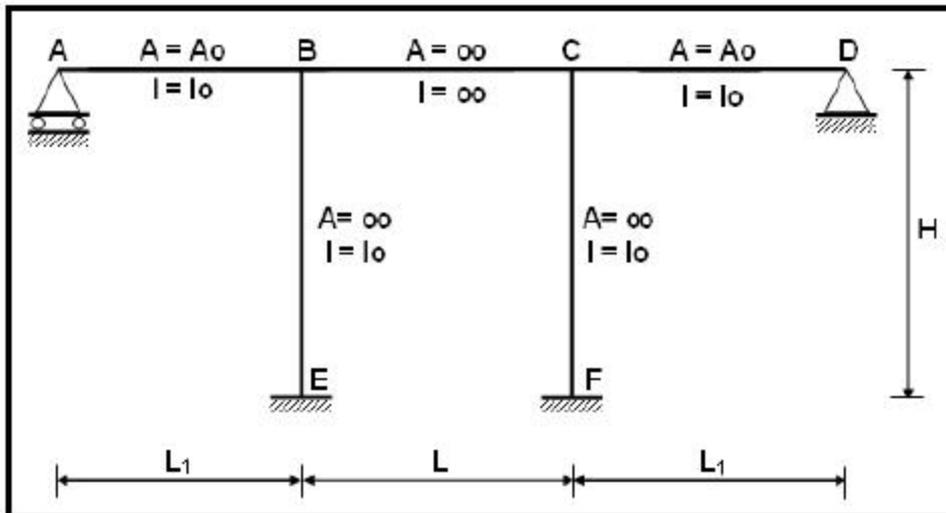


Figura 1.28 Estructura del Ejemplo 5.

• SOLUCION

$$NGL = 3(NDJ) - (NDJ)_E * V - 1 * A - 2 * T$$

$$NGL = 3(6) - 1(1) - 1(2) - 2(3) - 1(3) - 2(1) = 4$$

Por la condición de ser axialmente rígida las columnas y la viga BC, se tiene que la posición final de las juntas B y C son B' y C', como se indica en la figura 1.29. Se encuentran sobre la recta inicial de la viga, para que cumplan con la condición de $A = \infty$ los tres elementos.

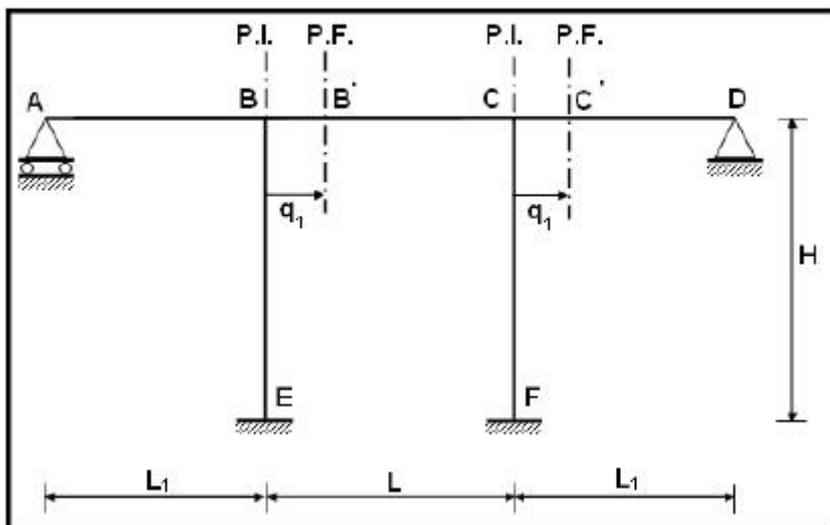


Figura 1.29 Posición final de las Juntas B y C.

En la figura 1.30 se representa una deformada lo más general posible de la estructura. Se pregunta al lector ¿Porque la junta B no tiene rotación?.

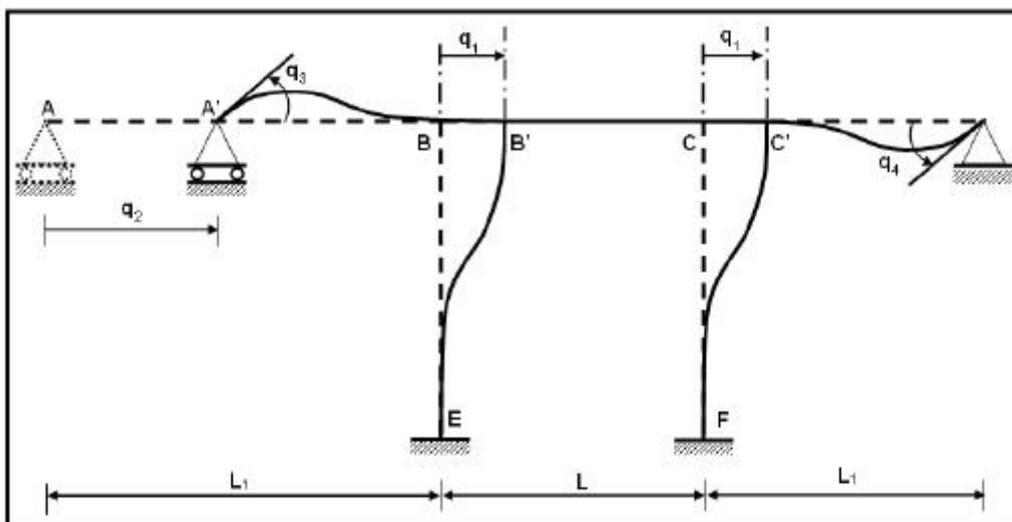


Figura 1.30 Deformada general del Pórtico de Ejemplo 5.

Si la junta B rota, la viga BC debe rotar por qué es $I = \infty$ y al hacerlo la columna CF va a cambiar de longitud, se alarga o se acorta y deja de cumplir la condición de $A = \infty$. Por lo tanto no hay rotación en dicha junta.

- **EJEMPLO 6**

En el pórtico plano de la figura 1.31, sus elementos son totalmente flexibles, se le pide: Dibujar una deformada lo más general posible, identificar los grados de libertad y presentar las tres primeras deformadas elementales.

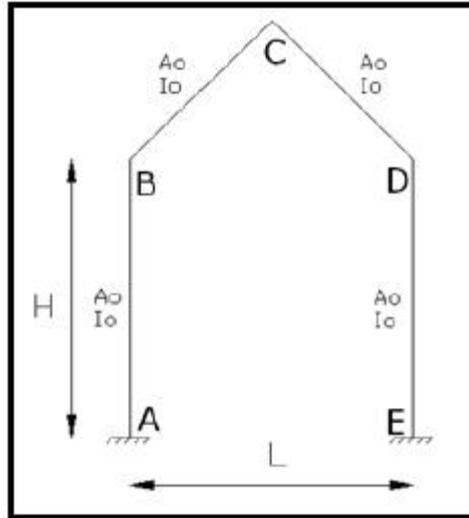


Figura 1.31 Pórtico plano de Ejemplo 6

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.32 se presenta la deformada general y el sistema de coordenadas generalizadas y en la figura 1.33 se indican las tres primeras deformadas elementales.

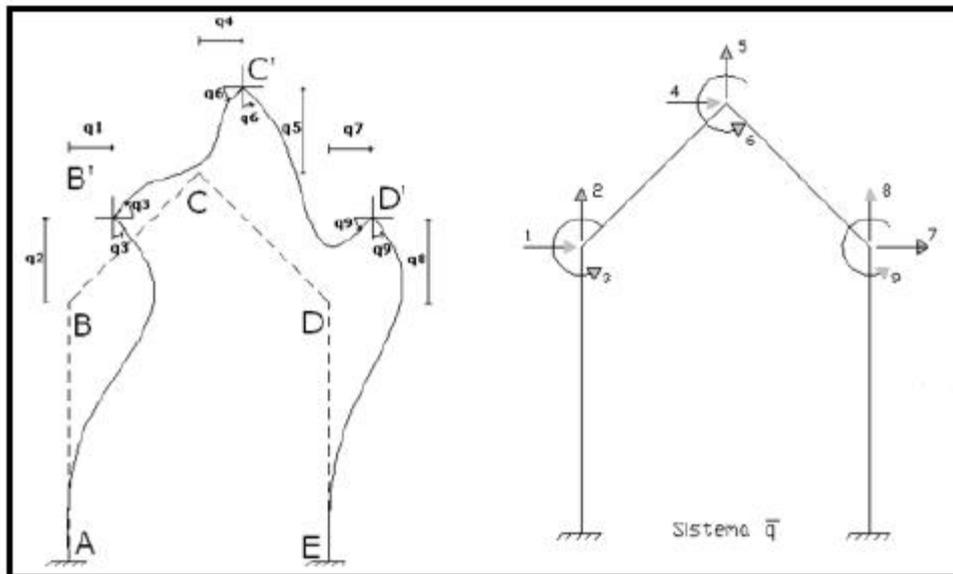


Figura 1.32 Deformada general y sistema de Coordenadas Generalizadas.

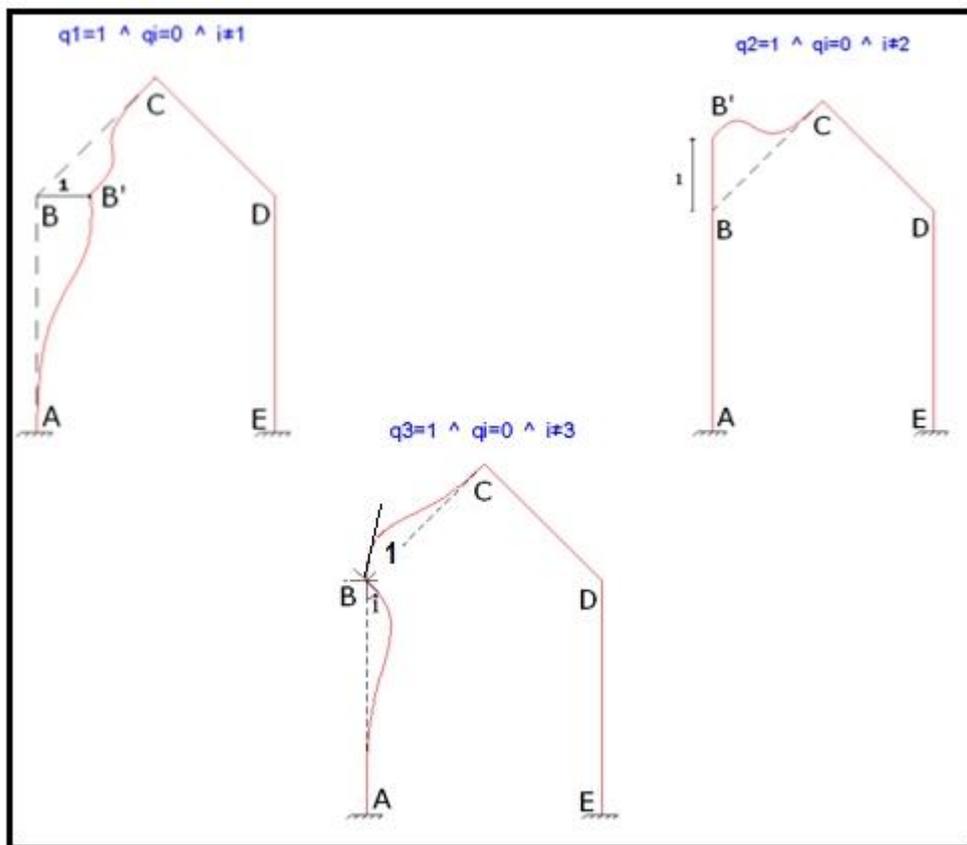


Figura 1.33 Deformadas elementales

• EJEMPLO 7

Los elementos del pórtico de 2 pisos, presentado en la figura 1.34, son todos totalmente flexibles. Se pide: Dibujar una deformada general; encontrar el sistema de coordenadas generalizadas y dibujar las tres primeras deformadas elementales.

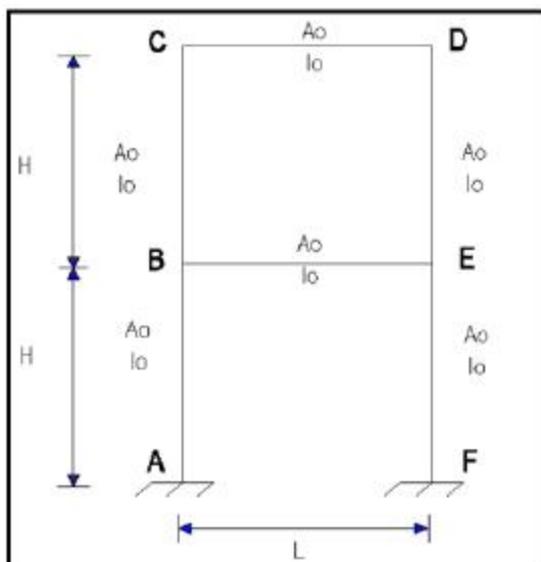


Figura 1.34 Pórtico con elementos totalmente flexibles.

• SOLUCIÓN

En las figuras 1.35 y 1.36 se presentan la solución del Ejemplo.

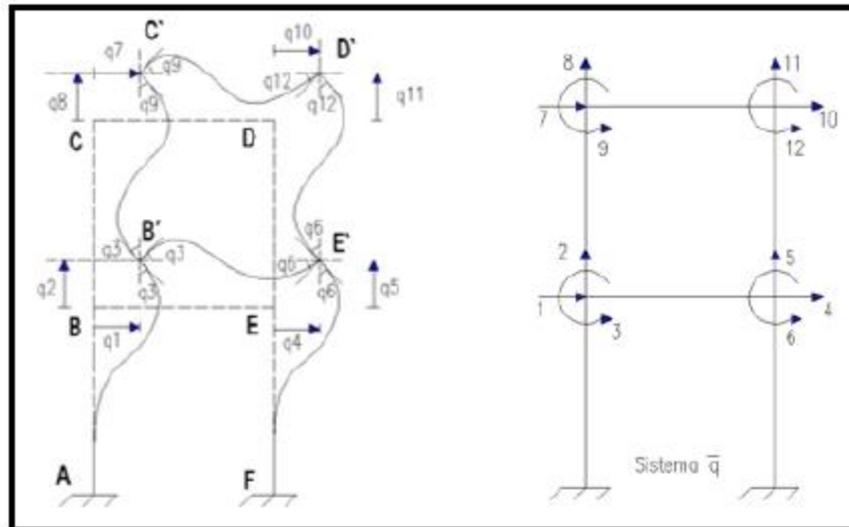


Figura 1.35 Deformada general y sistema de coordenadas generalizadas

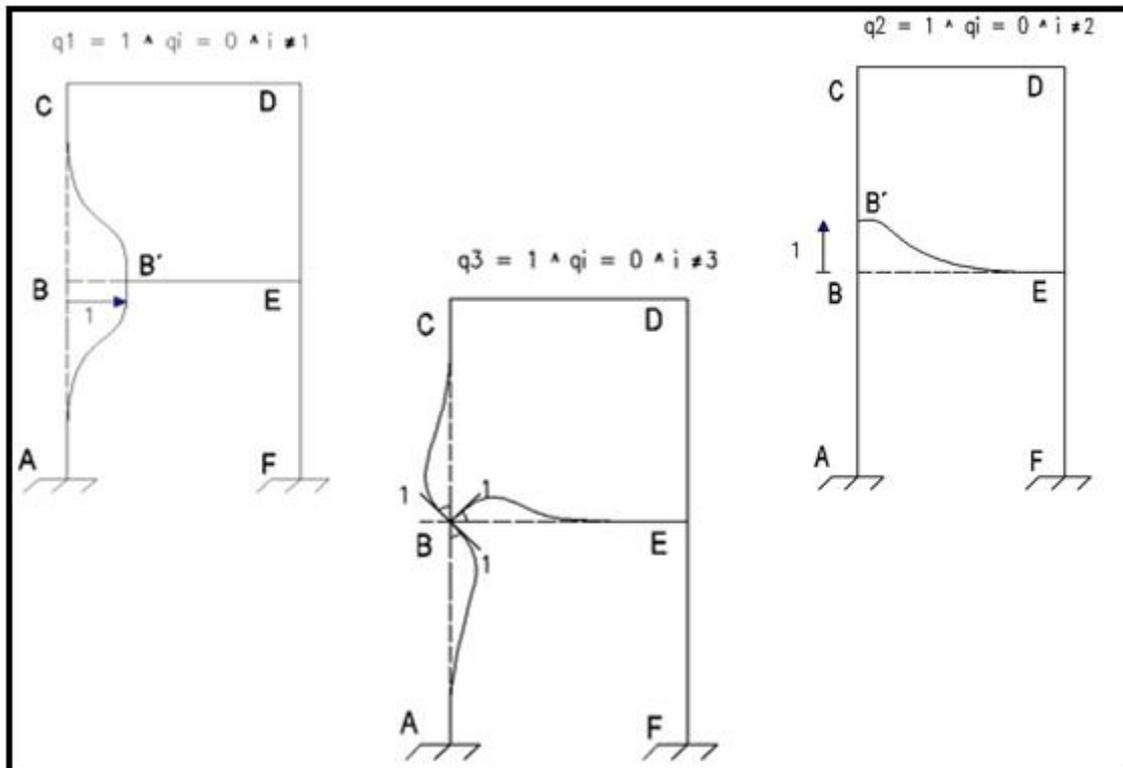


Figura 1.36 Deformadas elementales.

La geometría de la estructura del Ejemplo 7, se utiliza para resolver otros ejercicios, similares en el capítulo 2, pero las condiciones de los elementos son diferentes. En este Ejemplo se consideró que todos los elementos son totalmente flexibles.

- **EJEMPLO 8**

La estructura presentada en la figura 1.37 tiene una articulación interior, en el nudo C. Se pide indicar el sistema de coordenadas generalizadas, si todos sus elementos son totalmente flexibles.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.38 se indican los 7 grados de libertad que tiene el pórtico con articulación interior. Nótese que en el nudo C, se tienen dos rotaciones.

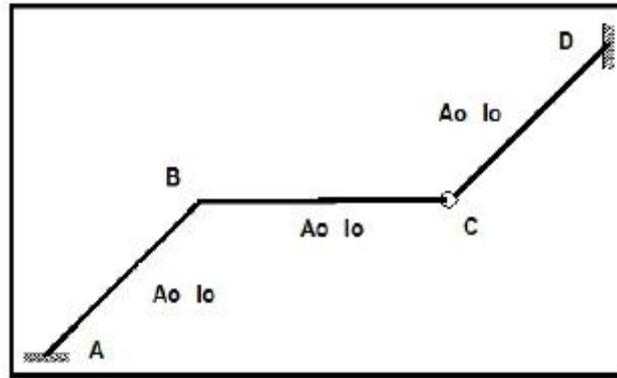


Figura 1.37 Estructura de Ejemplo 8.

El objetivo de este Ejemplo era que el estudiante vea que en la articulación interior se tienen dos rotaciones. Por lo tanto un cumple el Principio de Williot. En la figura 1.39 se presenta una deformada general.

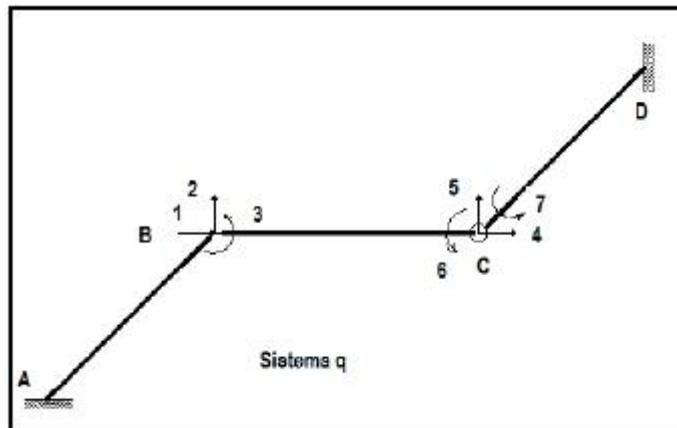


Figura 1.38 Sistema de coordenadas generalizadas de estructura de Ejemplo 8.

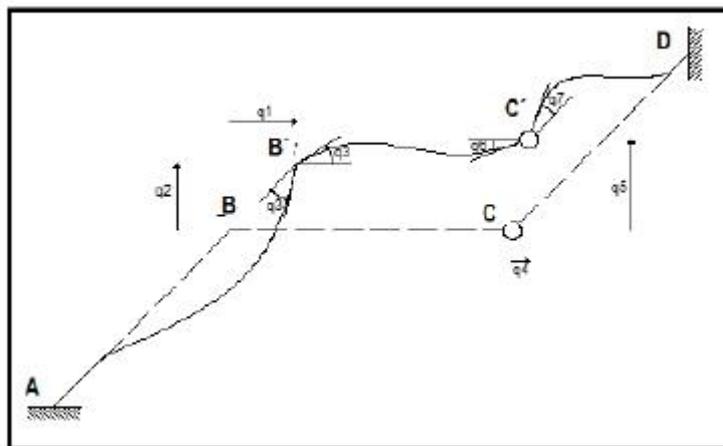


Figura 1.39 Deformada General del Ejemplo 8.

• EJEMPLO 9

La estructura de la figura 1.40 tiene una articulación móvil o rodillo. Se pide dibujar una deformada general.

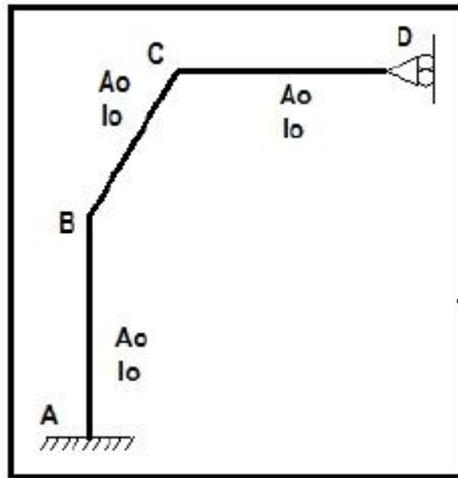


Figura 1.40 Estructura del Ejemplo 9.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.41 se presenta la deformada general de la estructura con elementos totalmente flexibles, con un rodillo móvil.

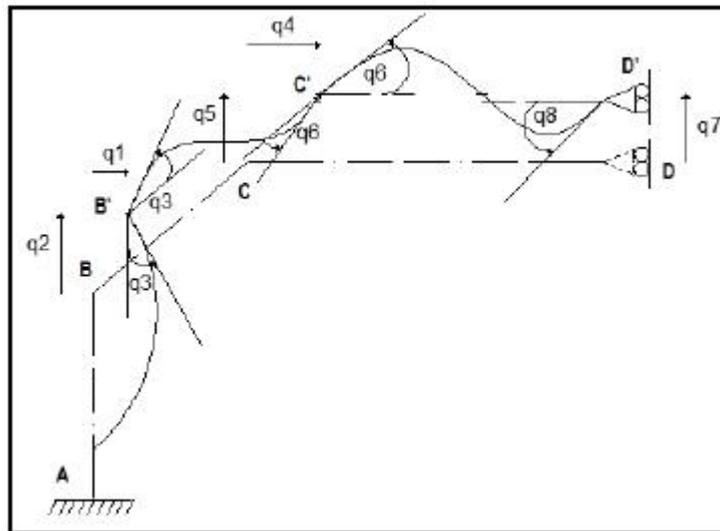


Figura 1.41 Deformada General del Ejemplo 9.

- **EJEMPLO 10**

La columna izquierda del pórtico de la figura 1.42 es transversalmente rígida y la viga es axialmente rígida. Se pide dibujar una deformada general e indicar el sistema de coordenadas generalizadas. Dibujar también las deformadas elementales.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 1.43 se tiene a la izquierda la deformada general y a la derecha el sistema de coordenadas generalizadas.

Por otra parte, en la figura 1.44 se ha dibujado las deformadas elementales.

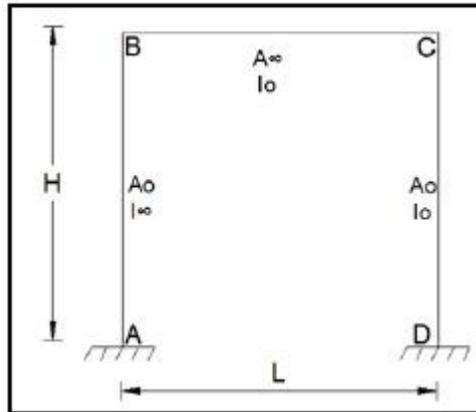


Figura 1.42 Pórtico de Ejemplo 10, con columna transversalmente rígida y viga axialmente rígida.

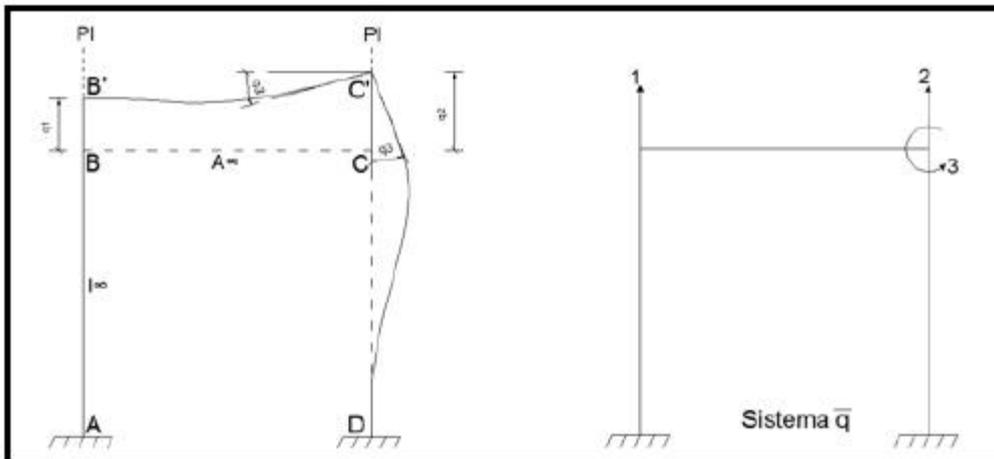


Figura 1.43 Deformada general y sistema de coordenadas generalizadas.

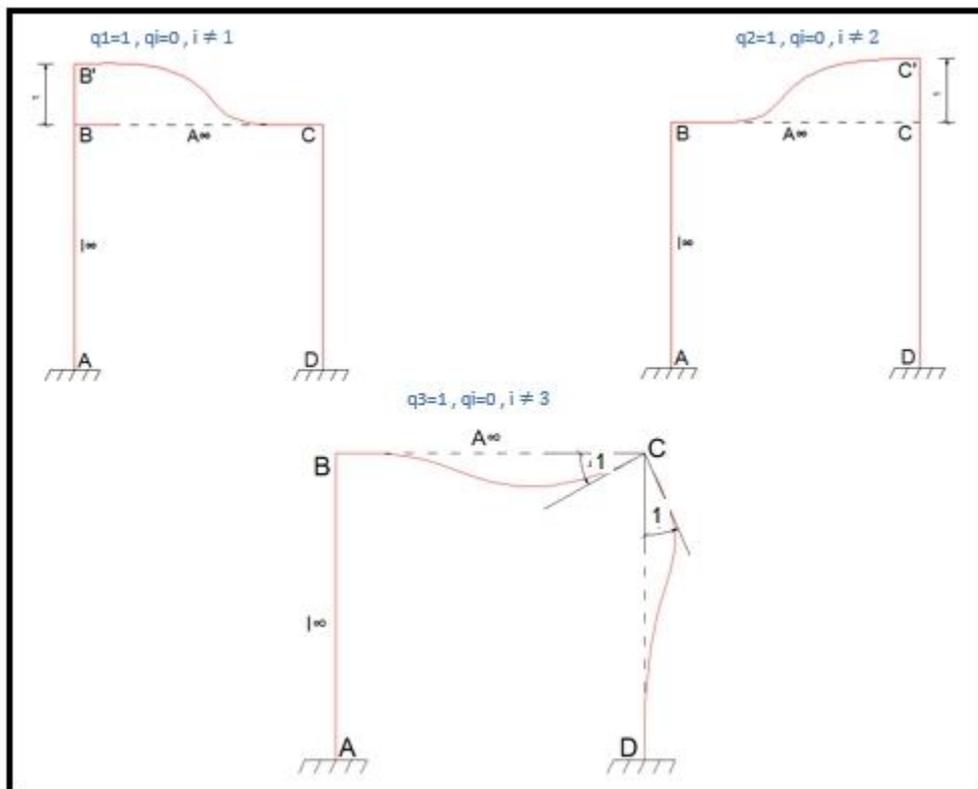


Figura 1.44 Deformadas elementales.

• EJEMPLO 11

La estructura indicada a la izquierda de la figura 1.45, es parecida a la del Ejemplo 4. El nudo D en este caso está empotrado y además solo el elemento inclinado es totalmente rígido. El sistema tiene los 3 grados de libertad indicados a la derecha de la figura 1.45. Se pide dibujar las deformadas elementales.

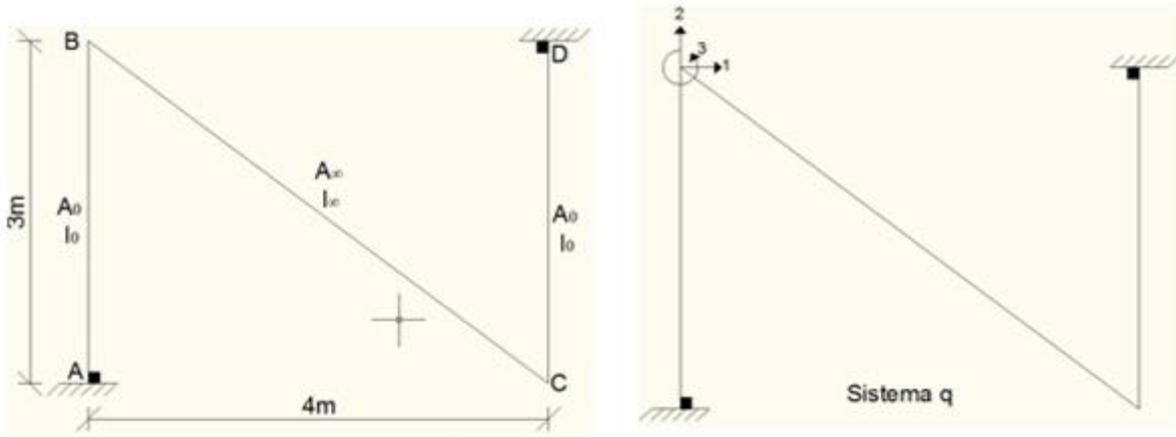


Figura 1.45 Estructura de Ejemplo 11 y grados de libertad

• SOLUCIÓN

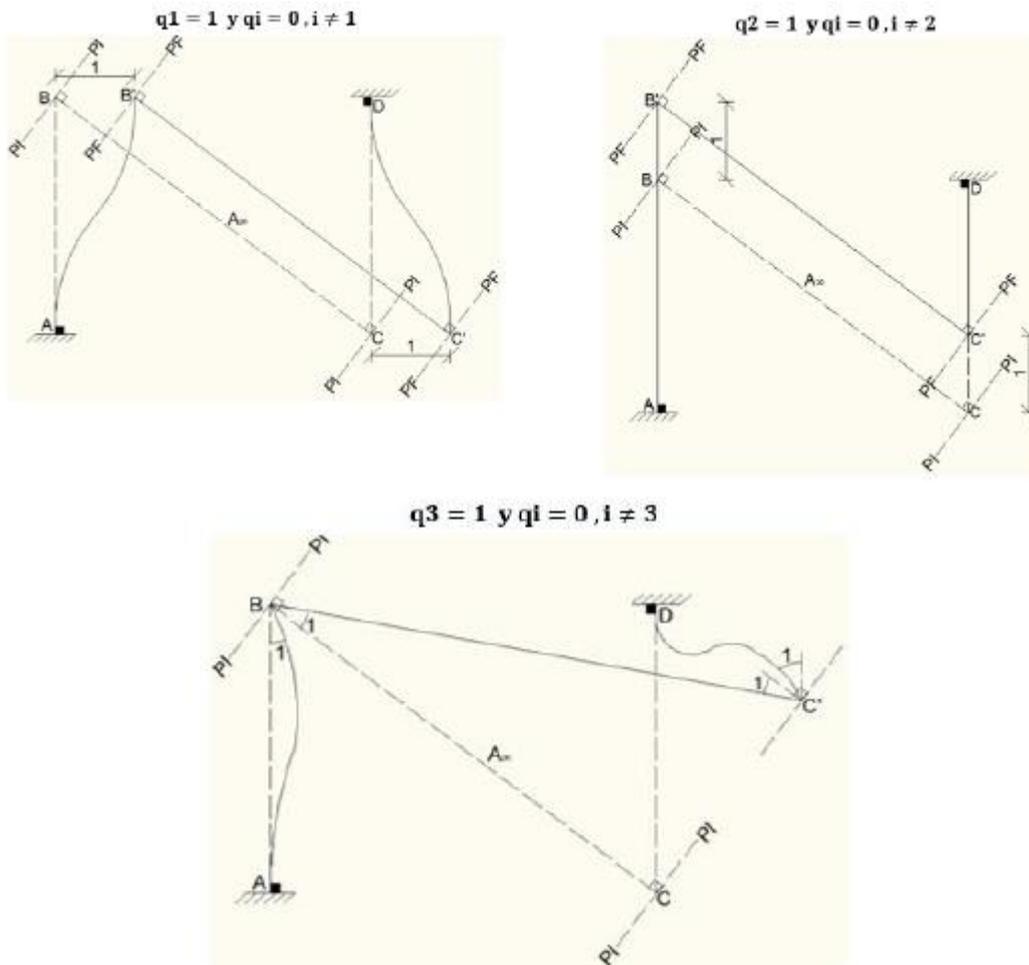
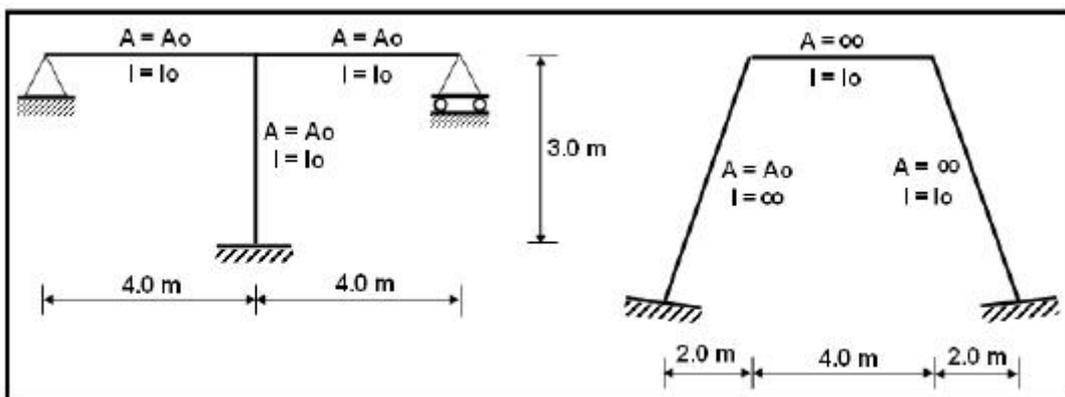


Figura 1.46 Deformadas elementales de Ejemplo 11.

1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

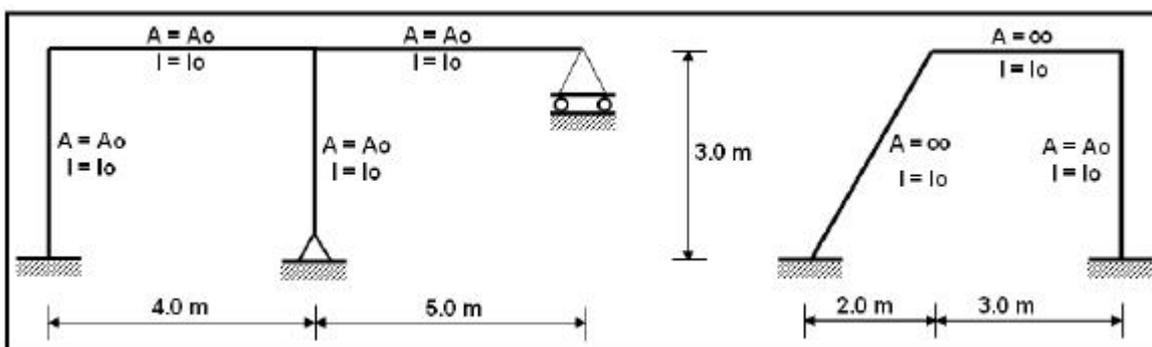
Para cada uno de los sistemas mostrados se pide:

- a) Calcular el número de grados de libertad.
- b) Dibujar una deformada lo más general posible.
- c) Dibujar las tres primeras deformadas elementales.



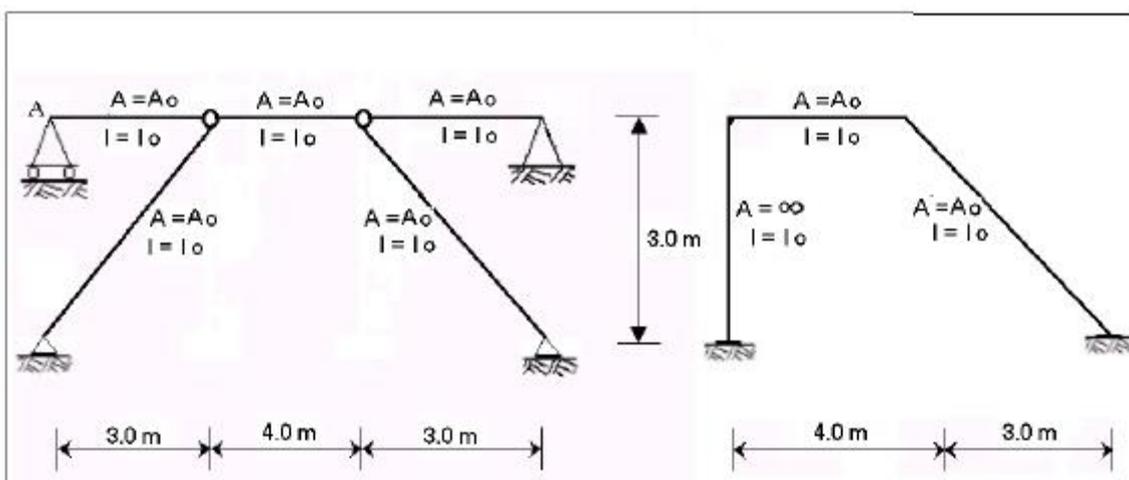
Ejercicio 1

Ejercicio 2



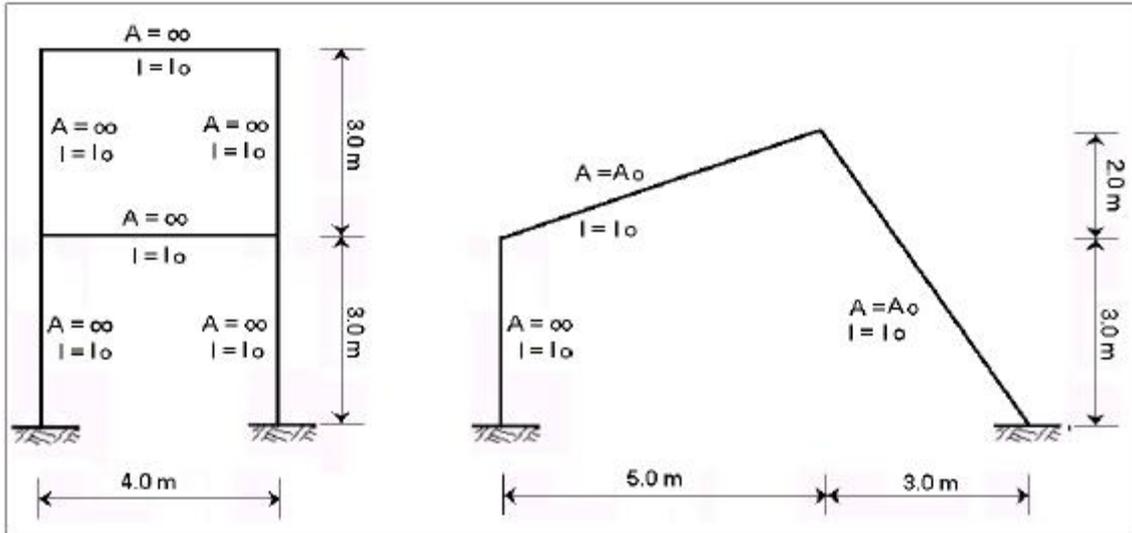
Ejercicio 3

Ejercicio 4



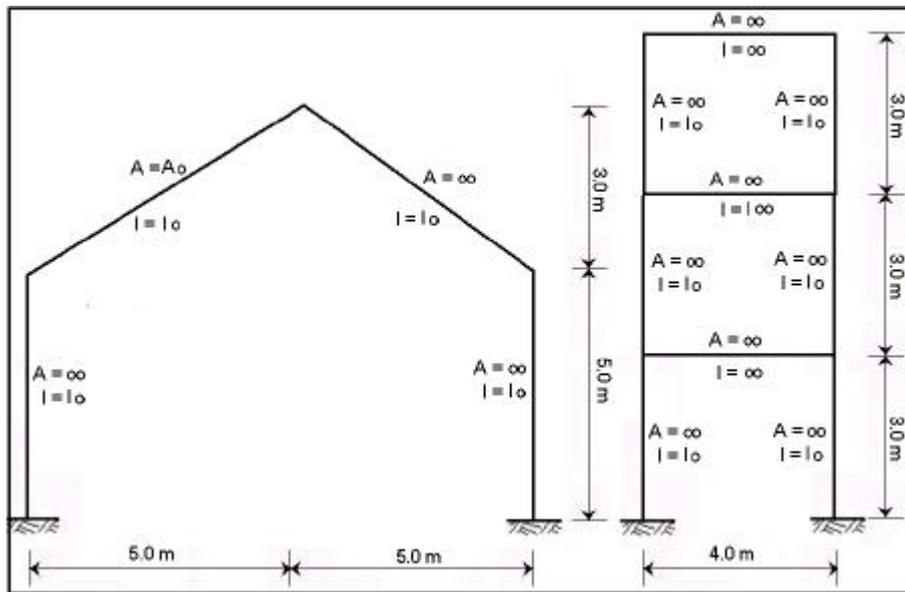
Ejercicio 5

Ejercicio 6



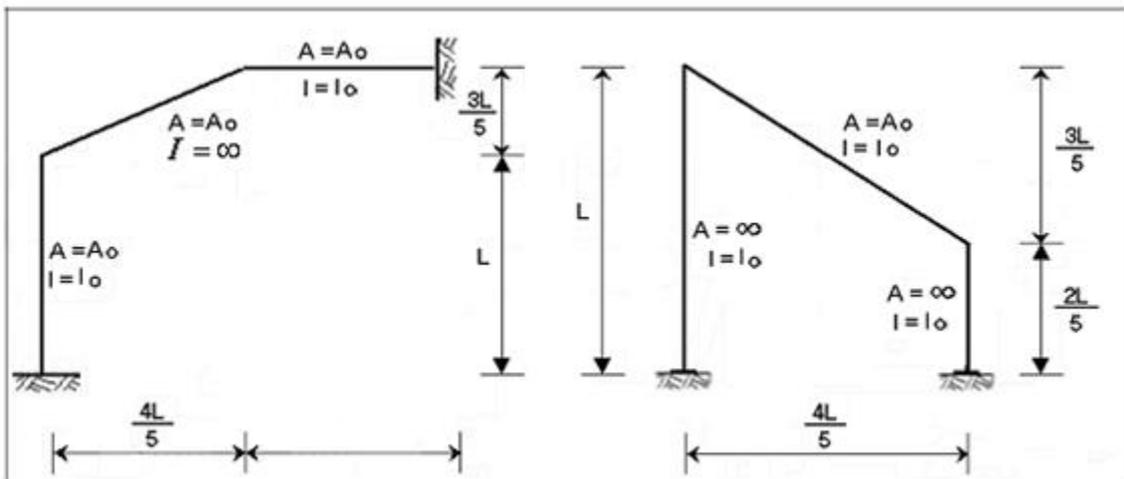
Ejercicio 7

Ejercicio 8



Ejercicio 9

Ejercicio 10



Ejercicio 11

Ejercicio 12

CAPITULO 2

SISTEMA DE CARGAS Y COORDENADAS GENERALIZADAS

RESUMEN

Se presentan los primeros vectores con que se trabajara en el Análisis Matricial de Estructuras; estos son el vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} y el vector de cargas generalizadas \mathbf{Q} , lo que interesa es que el lector se empiece a familiarizar con esta nomenclatura, en capítulos posteriores se indicara en detalle cómo se obtienen.

Por otra parte se introducen las definiciones de coordenadas de la estructura, coordenadas de elemento, coordenadas de nudo, coordenadas absolutas y coordenadas relativas.

Aspecto fundamental en el Análisis Matricial constituye la construcción de diagramas elementales por lo que se continúa realizando ejercicios de este tipo, ya que en base a estos diagramas también se obtienen los desplazamientos y giros en el Centro de Masa y posteriormente la matriz de Masas, que se estudia en análisis dinámico de estructuras.

2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

2.1.1 Vector de coordenadas generalizadas

Antes de empezar el estudio se destaca que a una matriz o un vector se les identifica con una letra negreada o con una letra con una raya encima. Cualquiera de las dos formas es válida en éste libro.

El pórtico plano, indicado a la izquierda de la figura 2.1; está compuesto por elementos totalmente flexibles en consecuencia tendrá cinco grados de libertad, siendo una de sus deformadas la indicada en la parte central de la figura 2.1. Estos desplazamientos q_i se los considera elementos de un vector columna \mathbf{q} compuesto por las n coordenadas generalizadas de toda la estructura. Para el pórtico de la figura 2.1, se tiene que $n = 5$. Por lo tanto:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

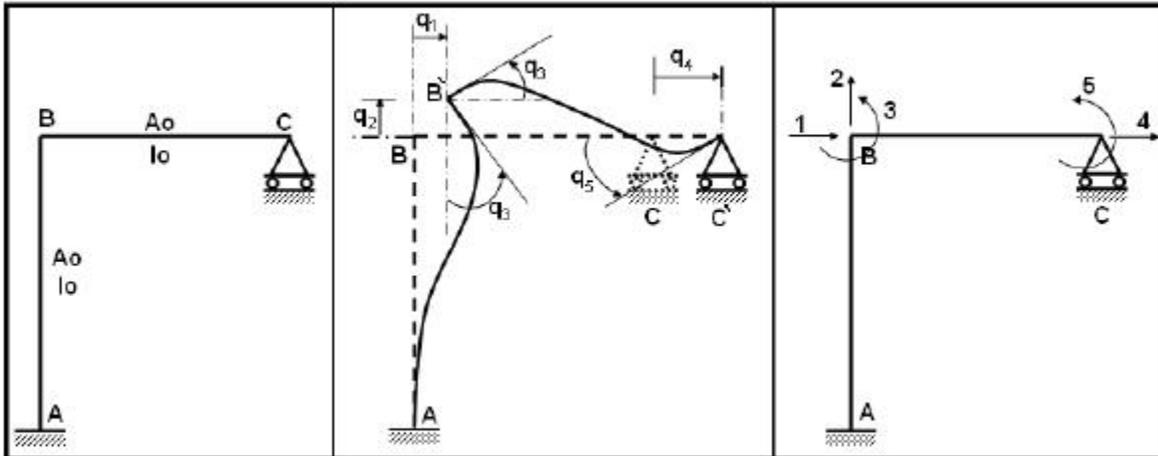


Figura 2.1 Estructura; Deformada General y Coordenadas Generalizadas

En general, para cualquier estructura la forma del vector \mathbf{q} es la indicada en la ecuación (2.2). Con la letra \mathbf{q} se identifica al vector de coordenadas generalizadas.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde n es el número de grados de libertad de la estructura. **Es importante notar que los desplazamientos q_i son infinitésimos, pero para visualizar los conceptos, siempre las coordenadas generales se dibujaran grandes.**

Para simplificar, en lugar de dibujar la deformada, basta colocar sobre las juntas las componentes de desplazamiento y rotación como se ilustra, a la derecha de la figura 2.1

Antes de 1980 en que el desarrollo informático no lo era como se tiene a inicios del siglo XXI, existían una serie de algoritmos para encontrar el vector \mathbf{q} , que ahora tienen poco sentido estudiarlos. Lo mejor es aprender el Método de los Desplazamientos orientado al uso del computador mediante Análisis Matricial de Estructuras.

2.1.2 Coordenadas generalizadas ortogonales

Para el pórtico plano de la figura 2.1. Se ha utilizado un sistema de coordenadas ortogonales para definir las componentes de desplazamiento de las juntas. Pero este sistema no es único ya que se puede utilizar otro sistema de coordenadas en el cual cada q_i esté asociado a una dirección determinada. Con relación al gráfico de la derecha de la figura 2.1, se puede indicar lo siguiente:

- q_1 Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección horizontal, siendo positivo si es hacia la derecha.

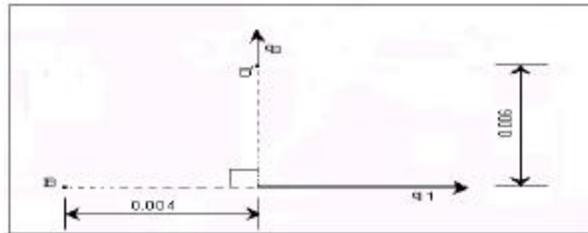
- q_2 Componente de desplazamiento del nudo B en la dirección vertical, siendo positivo si es hacia arriba.
- q_3 Rotación del nudo B, siendo positivo si es anti horario.

Algo similar se tiene para las coordenadas q_4 y q_5 pero referidas al nudo C. Lo importante es destacar que entre las direcciones de medición de q_1 y q_2 hay noventa grados por eso el nombre de ortogonales.

- **EJEMPLO 1**

Se supone que las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 de la junta B del pórtico 2.1, para un estado de cargas arbitrario, son: $q_1 = 0.004$ m y $q_2 = 0.006$ m. Encontrar gráficamente la posición de B'.

- **SOLUCIÓN**



Para la posición final del nudo B se dibuja primero la componente de desplazamiento q_1 ahí se coloca $q_1 = 0.004$, luego por ser coordenada ortogonal en la posición final anterior se coloca la orientación de la coordenada q_2 y en ella $q_2 = 0.006$ con lo que se obtiene B'.

2.1.3 Coordenadas generalizadas no ortogonales

Para definir la posición final de las juntas del pórtico de la figura 2.1 se puede utilizar las coordenadas indicadas en la figura 2.2

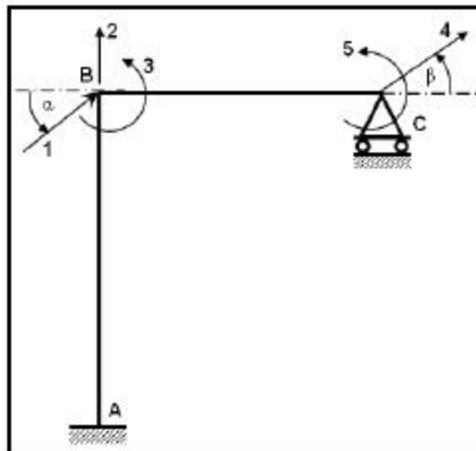


Figura 2.2 Coordenadas no ortogonales

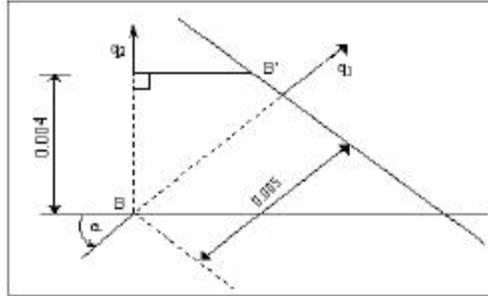
En este caso se han empleado coordenadas generalizadas que no son ortogonales. Aquí q_1 será la componente del nudo B que forma un ángulo α con la horizontal. Nótese que ahora el ángulo comprendido entre las direcciones de q_1 y q_2 no es noventa grados.

- **EJEMPLO 2**

Con los datos de carga del Ejemplo 1, pero al trabajar con el sistema de coordenadas de la figura 2.2.1, se supone que se obtuvo $q_1 = 0.005$ y $q_2 = 0.004$. ¿Encontrar el punto B'?

- **SOLUCIÓN**

Para obtener el punto B' se trazarán primero los sentidos de las direcciones q_1 y q_2 en ellas se colocan los datos del problema. Finalmente para encontrar la posición de B se trazan perpendiculares en la posición final de los desplazamientos colocados.



Nótese que al ser proyecciones, el desplazamiento de B, B' no se obtiene sumando vectorialmente. Este tipo de coordenadas no ortogonales, generalmente no se utilizan para la resolución de problemas estructurales debido a que es más complicado. Se lo presenta únicamente para entender mejor las estructuras.

- **EJEMPLO 3**

Encontrar los diagramas de deformación elemental q_1 y q_2 de la estructura de la figura 2.2, cuyos elementos son totalmente flexibles. Se trabaja con coordenadas no ortogonales

- **SOLUCION**

Primero se dibuja la estructura con líneas entrecortadas, se colocan las letras que definen a cada nudo, luego se coloca el sentido en el cual se mide la componente de desplazamiento q_1 .

Al hacer $q_1 = 1$ el nudo B inicialmente se traslada a B', pero esta no puede ser la posición final del nudo ya que existiría un desplazamiento vertical es decir $q_2 \neq 0$ y como se quiere que sea cero necesariamente la posición final del nudo B será B'', la misma que se obtiene trazando una perpendicular a la dirección de q_1 .

♣ $q_1 = 1$ y $q_2 = 0$ para $i \neq 1$

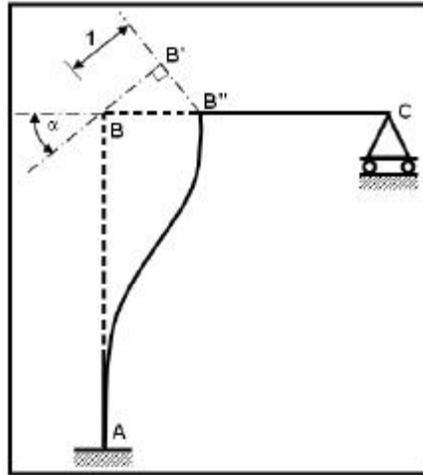
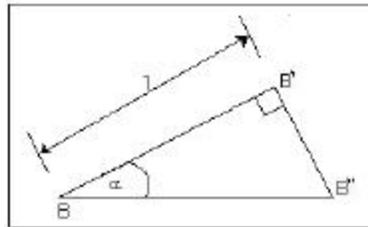


Figura 2.3 Deformada elemental q_1 para el sistema de coordenadas de la figura 2.2

Para conocer el desplaza horizontalmente BB'' se recurre a la trigonometría, para ello en el triángulo rectángulo $B B' B''$, se tiene:



$$B' B'' = 1 \cdot \text{tg } \alpha$$

$$BB'' = 1 \cdot \text{sec } \alpha$$

♣ $q_2 = 1$ y $q_i = 0$ para $i \neq 2$

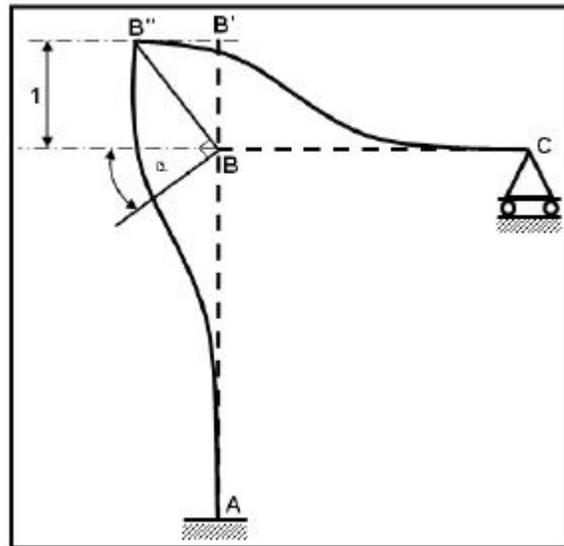
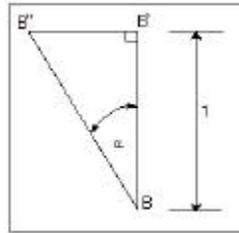


Figura 2.4 Deformada elemental q_2 para el sistema de coordenadas de la figura 2.2

En este caso, al hacer $q_2 = 1$, inicialmente el nudo B se traslada verticalmente a B', pero esa no es la posición final ya que en B' se tiene $q_1 \neq 0$. Por lo tanto, para obtener la posición final del nudo B a partir de B' se traza una perpendicular a B B', y por B se traza una perpendicular a la dirección de la coordenada q_1 . El punto de intersección determina la posición final del nudo B, que es B''.

Para encontrar cuanto se desplaza horizontalmente, en el triángulo rectángulo B B' B'' se tiene:



$$B' B'' = l \cdot \text{tg } \alpha$$

$$BB'' = l \cdot \text{sec } \alpha$$

Mediante un proceso similar obtendríamos los demás diagramas de desplazamientos elementales para el pórtico plano cuyas coordenadas se indican en la figura 2.2.

2.1.4 Coordenadas absolutas y relativas

En estructuras con aisladores sísmicos se puede trabajar con coordenadas absolutas o con coordenadas relativas; en el primer caso la matriz de rigidez no es diagonal pero la matriz de masas si lo es, en el segundo caso la matriz de rigidez si es diagonal y la matriz de masas no lo es. Aguiar (2008, 2012); Almazán (2001).

Generalizando se puede indicar que en una estructura se puede trabajar con coordenadas absolutas o con coordenadas relativas. A la izquierda de la figura 2.5, se presenta una estructura en la cual las vigas son totalmente rígidas y las columnas axialmente rígidas de tal manera que el sistema tiene dos grados de libertad. Estos dos grados de libertad son los desplazamientos laterales de piso, que se indican en la figura 2.5; al centro se tienen coordenadas absolutas y a la derecha coordenadas relativas.

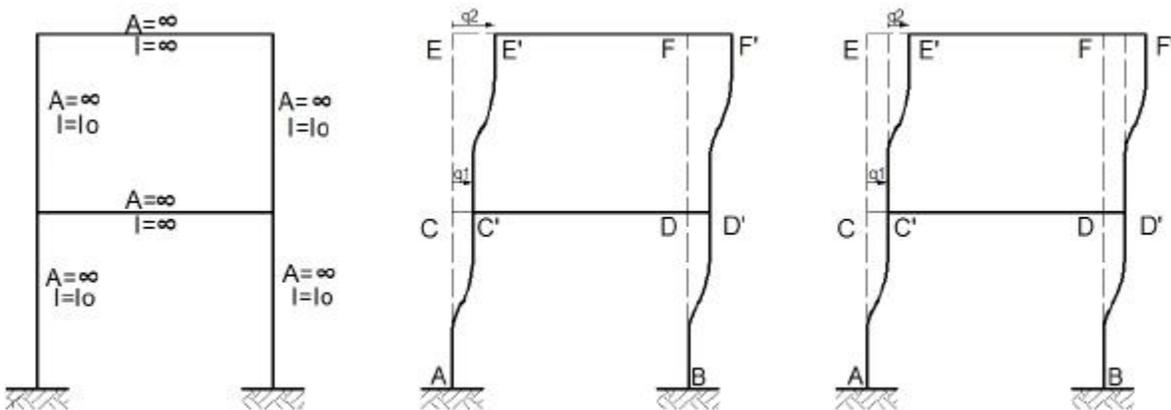


Figura 2.5 Coordenadas Absolutas y relativas.

En este libro se ha venido trabajando con coordenadas absolutas y se continuará haciéndolo pero las coordenadas relativas no, por lo que se explica que el desplazamiento horizontal q_1 se mide con respecto al suelo y el desplazamiento horizontal q_2 se mide con respecto al desplazamiento horizontal q_1 .

- **EJEMPLO 4**

Dibujar las deformadas elementales de la estructura de la figura 2.5 pero trabajando con las coordenadas relativas indicadas a la derecha de la mencionada figura.

- **SOLUCIÓN**

En la figura 2.6 se presenta a la izquierda la deformada elemental φ_1 . Nótese que el segundo piso también se desplaza la unidad para que la componente de desplazamiento relativo φ_2 sea cero; a la derecha de la figura 2.6, se presenta la deformada elemental φ_2 .

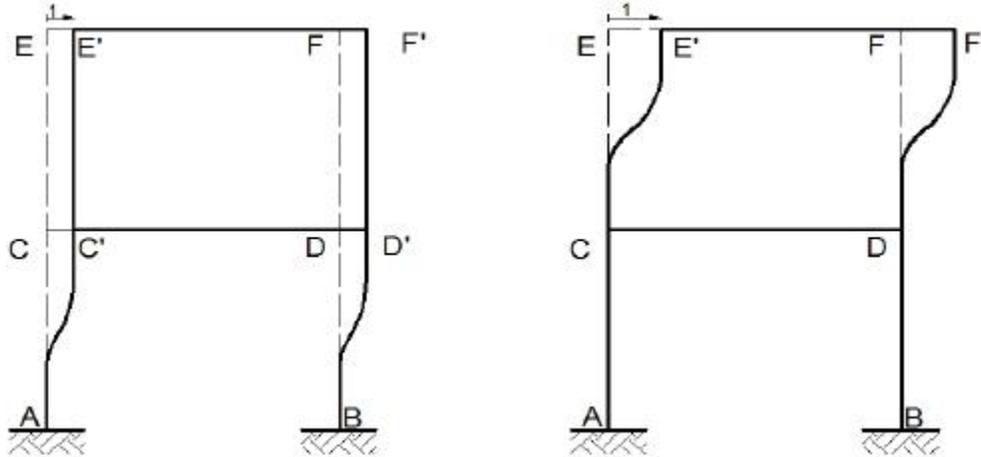


Figura 2.6 Deformadas elementales en coordenadas relativas

- **EJEMPLO 5**

Con relación a la estructura de la figura 2.7, en que las vigas son totalmente rígidas y dos de sus columnas son axialmente rígidas, se pide: i) dibujar una deformada general y seleccionar los grados de libertad; ii) dibujar las deformadas elementales.

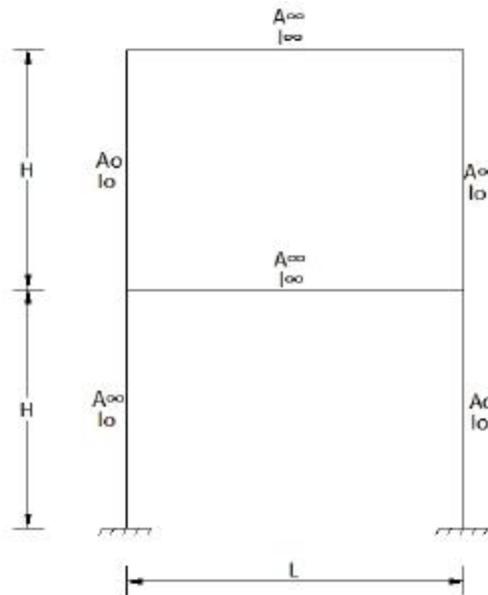


Figura 2.7 Estructura con vigas totalmente rígidas y con dos columnas axialmente rígidas.

♣ SOLUCIÓN

Se deja al lector la explicación de la deformada general y grados de libertad, que se presenta en la figura 2.8, al igual que las deformadas elementales.

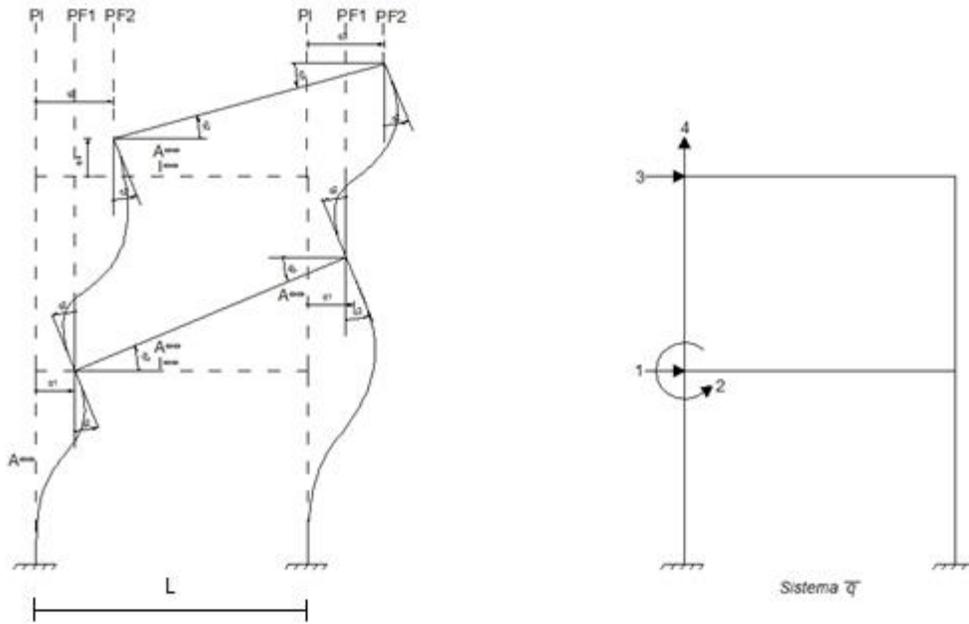


Figura 2.8 Deformada general y grados de libertad.

Si no se puede construir una deformada elemental, significa que las coordenadas generalizadas no son las adecuadas.

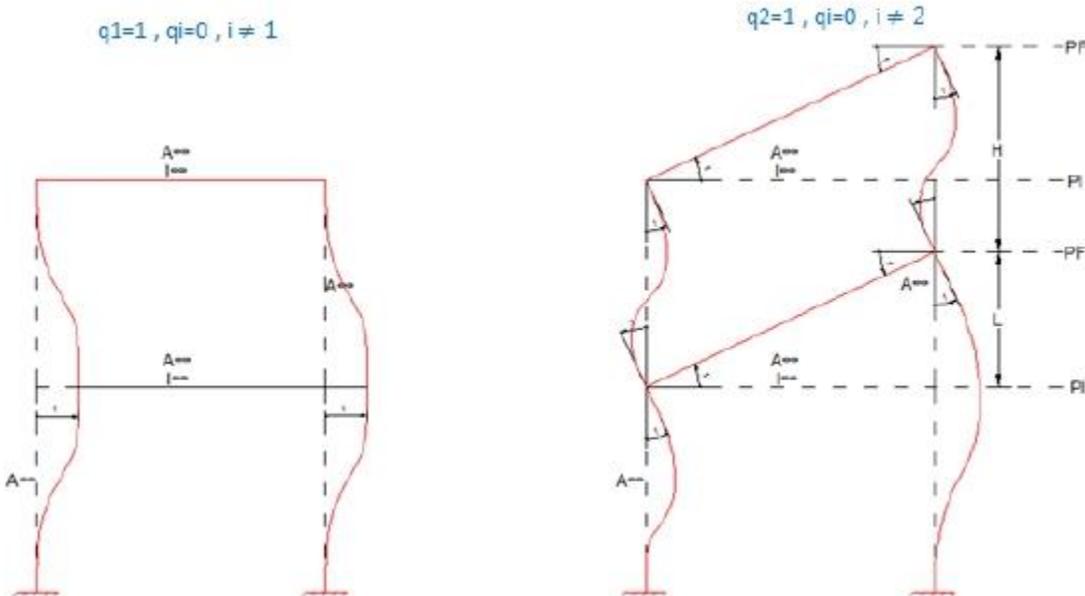


Figura 2.9 Deformadas elementales q_1 y q_2

A la izquierda de la figura 2.9, se presenta la deformada elemental q_1 , que es muy sencilla. A la derecha se tiene la deformada elemental q_2 , en la que se tiene rotación del primer piso, pero como la columna superior derecha es axialmente rígida está se desplaza y para que q_3 y q_4 sean

cero, existe giro en la viga superior y esto es factible debido a que no existe coordenada en el segundo piso. Nótese que la viga inferior se desplaza verticalmente una distancia l , esto es debido a que la viga es transversalmente rígida.

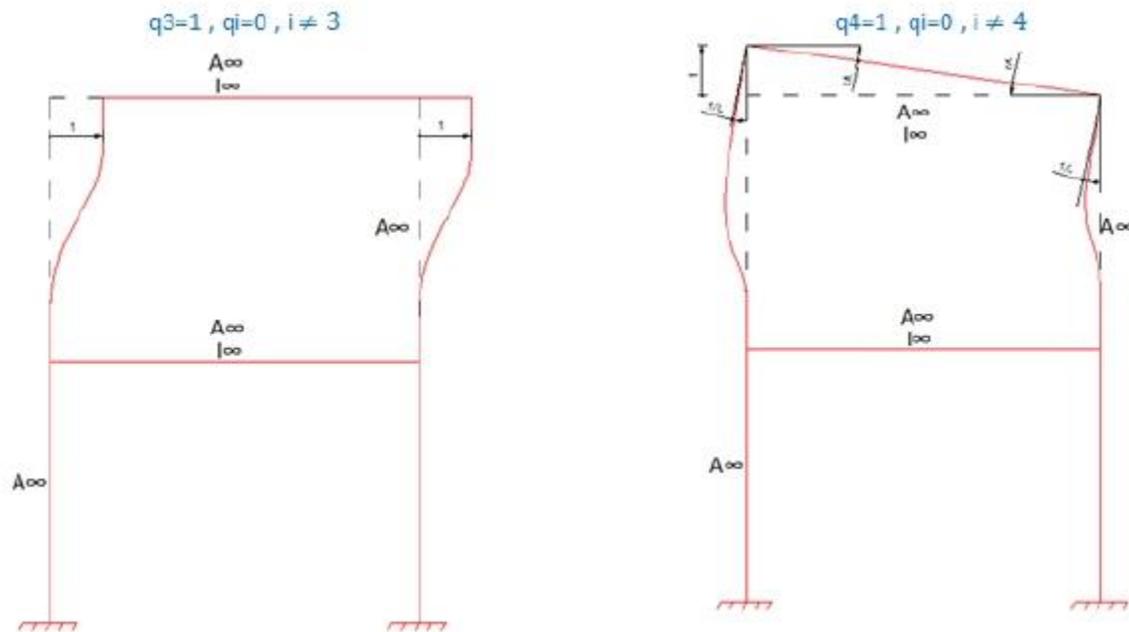


Figura 2.10 Deformada elemental q_3 y q_4 .

En la figura 2.10, a la izquierda se presenta la deformada elemental q_3 , que no amerita explicación y a la derecha la deformada elemental q_4 , en la que se observa que la viga rota para cumplir con la condición de que las otras coordenadas sean nulas; nuevamente esta rotación es posible debido a que el giro en el segundo piso no se ha considerado como coordenada generalizada.

2.2 CARGAS GENERALIZADAS DE UNA ESTRUCTURA

2.2.1 Hipótesis considerada

Para empezar el estudio, **se considera que las cargas actúan únicamente sobre las juntas y en la dirección que se han definido las coordenadas generalizadas.**

Se entiende por cargas a las fuerzas o momentos externos que actúan sobre la estructura y se les conoce también con el nombre de acción o fuerza generalizada. **El sentido positivo de las cargas será el que coincida con los sentidos definidos de las coordenadas generalizadas.**

En el pórtico, indicado a la izquierda de la figura 2.11 se puede trabajar con el sistema de coordenadas generalizadas presentadas en la parte central, que son coordenadas ortogonales o las coordenadas de la derecha, que no son ortogonales. A las cargas generalizadas se las denomina con la letra Q , y para los sistemas de coordenadas de la figura 2.11, pueden actuar en la forma indicada en la figura 2.12, a la izquierda cuando se trabaja con coordenadas ortogonales y a la derecha cuando no son ortogonales.

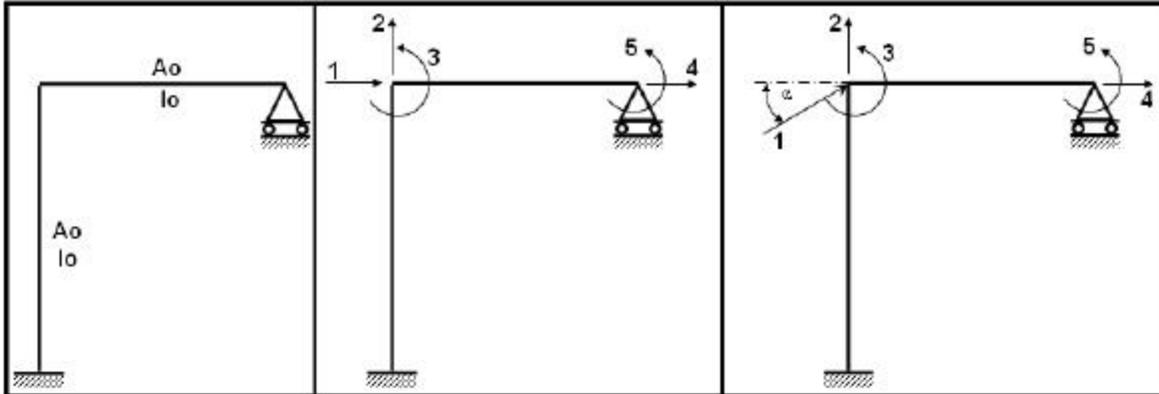


Figura 2.11 Estructura con dos sistemas de coordenadas: ortogonales y no ortogonales.

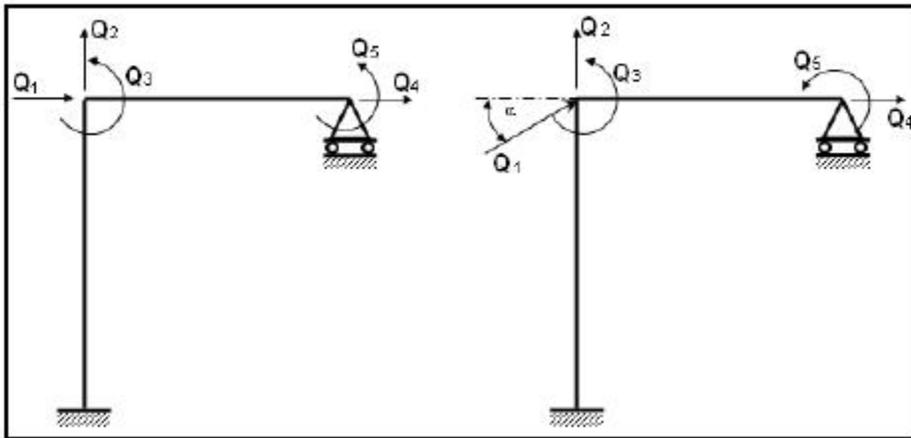


Figura 2.12 Cargas que pueden actuar en los dos sistemas de coordenadas: ortogonales y no ortogonales

De igual manera a las cargas generalizadas se les agrupará en un vector \mathbf{Q} ; para este ejemplo sería:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Y la forma general es:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donde n es el número de grados de libertad de la estructura. Al vector \mathbf{Q} se denomina vector de cargas generalizadas.

Teóricamente por la hipótesis considerada se podría resolver únicamente estructuras que tengan cargas o momentos concentrados en las juntas, y en la dirección del sistema de coordenadas generalizadas.

Si las acciones se encuentran en los elementos, para resolver el problema se tiene que utilizar el siguiente artificio: se tomará como nudo el sitio en el cual actúa la carga o momento concentrado. Por ejemplo, para el pórtico con el sistema de cargas presentado en la figura 2.13, en lugar de considerar que tiene tres nudos y dos miembros, se puede trabajar con cinco nudos: A, B, C, D y E y 4 elementos, porque en el nudo B y D actúan la carga P y el momento M , respectivamente.

Lógicamente el problema se complica si se tiene algunas cargas concentradas o momentos concentrados actuando en los elementos por la hipótesis considerada, ya que este artificio conduce a que se tenga que trabajar con demasiadas coordenadas generalizadas. En consecuencia este artificio no es el más adecuado.

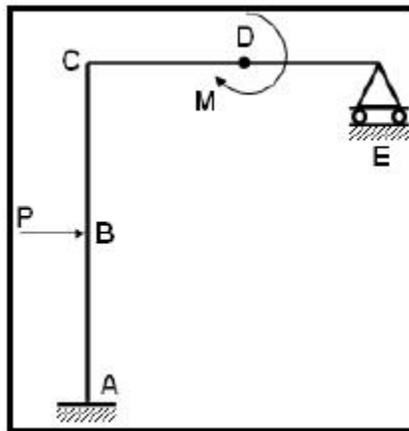


Figura 2.13 Estructura con carga lateral y momento concentrado.

Por último, bajo la hipótesis de que las cargas actúan, solamente sobre las juntas y en la dirección que se ha definido las coordenadas generalizadas **no se puede resolver, por ahora**, problemas relacionados con incrementos de temperatura, asentamientos de apoyos ni otras sollicitaciones que sean diferentes a cargas o momentos concentrados actuando sobre los elementos.

2.2.2 Sistema $\mathbf{Q-q}$

Debido a que tanto \mathbf{Q} como \mathbf{q} se miden en el mismo sistema de coordenadas se puede dibujar simbólicamente cargas generalizadas y coordenadas generalizadas en un solo sistema al que se denomina "sistema $\mathbf{Q-q}$ " o simplemente $\mathbf{Q-q}$. Para el sistema de coordenadas de los pórticos de las figuras 2.11 y 2.12 se tiene que los sistemas $\mathbf{Q-q}$ respectivos son los indicados en la figura 2.14.

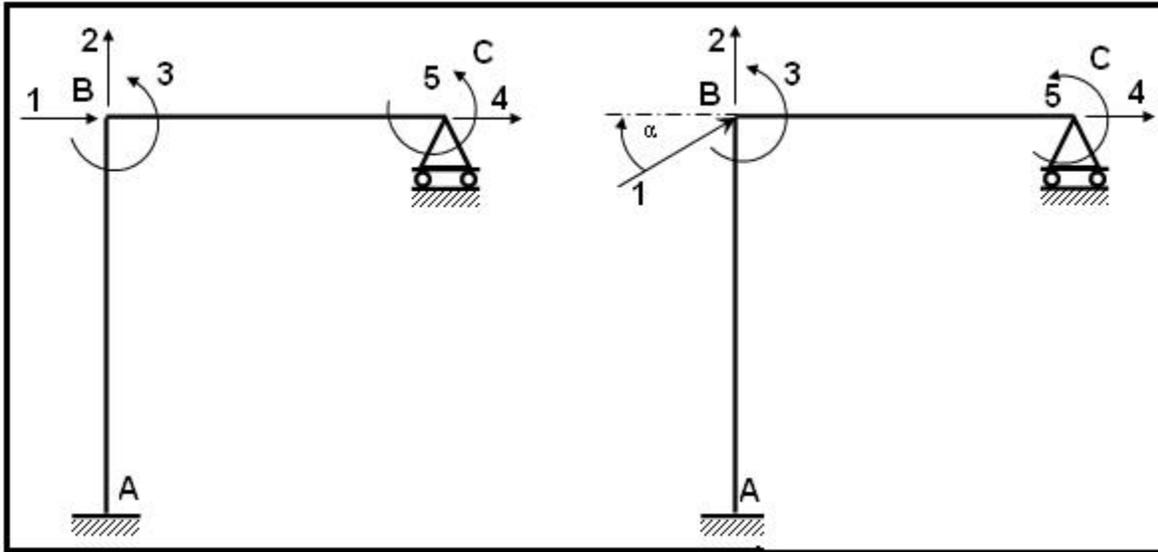


Figura 2.14 Sistema $Q - q$ en coordenadas ortogonales y no ortogonales.

En los capítulos posteriores se trabajará generalmente con sistemas de coordenadas ortogonales y la convención de signos, adoptada es la siguiente:

La fuerza es positiva si va de izquierda a derecha (\rightarrow) o de abajo hacia arriba (\uparrow), y el momento es positivo si es anti horario (\curvearrowright).

Finalmente, es necesario hacer hincapié que entre carga y desplazamiento existe una importante diferencia: la carga sobre un nudo es la suma vectorial de las cargas actuantes sobre ella, pero no sucede lo propio con los desplazamientos q como se vio en el numeral 2.1.3.

2.2.3 Solución general del problema

Para ilustrar el procedimiento de cálculo de estructuras en las cuales actúan: cargas distribuidas sobre los elementos, incrementos de temperatura, asentamientos de los apoyos, etc. Se fijará la atención en el pórtico plano de la figura 2.15, sobre el mismo gravitan las cargas indicadas a la derecha, en este gráfico Δt corresponde a un incremento de temperatura sobre los elementos y Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 , son asentamientos de los apoyos A y C. En la parte central se presenta el modelo del pórtico y a la derecha de la figura 2.15 se indican los grados de libertad considerados.

Al no tener cargas en los nudos y en la dirección del sistema q , para encontrar el vector de cargas generalizadas Q se recurre al artificio denominado: Problema Primario y Problema Complementario, que se presenta a continuación.

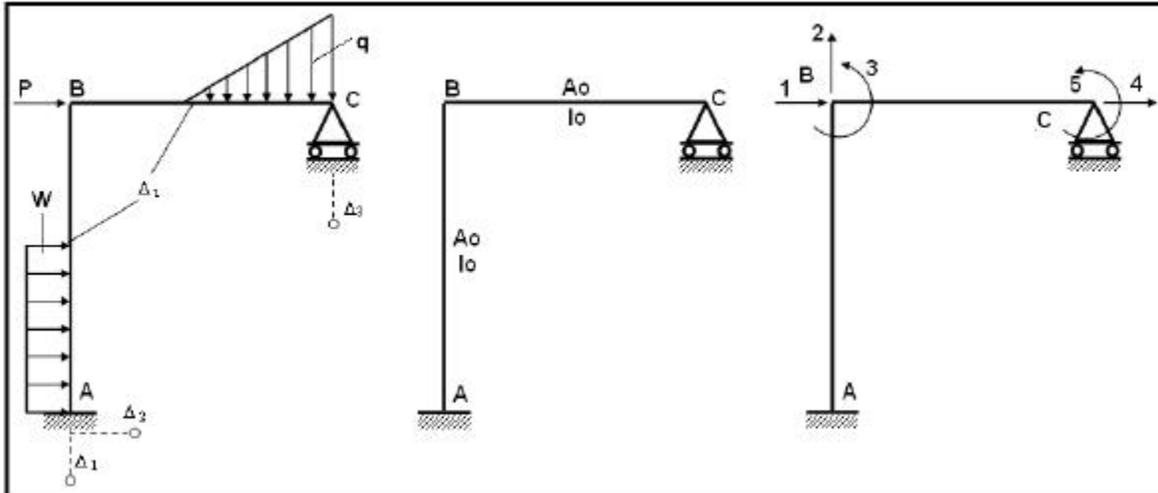


Figura 2.15 Estructura con diferentes condiciones de carga y sistema $Q - q$

2.2.4 Problema primario

Es aquel en el que actúan todas las cargas, asentamientos de apoyo, incrementos de temperatura, etc., todo lo que produce deformaciones. Pero el vector de coordenadas generalizadas q es nulo. Para que esto suceda es necesario colocar vínculos externos que estén de acuerdo con el sistema $Q - q$ de tal forma que los nudos no se desplacen ni giren.

Para el nudo B, por ejemplo, en la figura 2.16, se ha colocado un vínculo (Γ) el cual impide el desplazamiento horizontal (q_1), desplazamiento vertical (q_2) y la rotación (q_3) del nudo B. Lo propio se ha realizado con el nudo C.

Estos vínculos adicionales originan reacciones que son de sentido contrario a los desplazamientos y rotaciones, a los cuales se les ha definido con la letra R_i y se denominan **cargas de fijación o cargas primarias**. En consecuencia, las cargas de fijación R_i son las cargas que hay que aplicar para que los nudos de la estructura queden fijas y cumplan con la definición del problema primario.

Por lo tanto, en el problema primario los elementos están empotrado-empotrado. Y sobre cada uno de ellos actúan las sollicitaciones respectivas.

El Problema Primario tiene dos etapas, a saber: i) equilibrio de elementos; ii) equilibrio de juntas. Al término de estas dos etapas se determinan las cargas de fijación R_i , con el verdadero signo, por esto no importa que se coloquen inicialmente con sentido contrario al sistema $Q - q$.

2.2.5 El problema complementario

En este capítulo no interesa todavía que el lector sepa resolver el problema primario, esto se verá con detenimiento en el Capítulo IV, lo que importa es que comprenda como se resuelve una estructura. Conozca el por qué se tiene elementos empotrados en la solución, esto se debe a la condición de que $q = 0$.

En la estructura original, se aplican únicamente las fuerzas de fijación R_i que actuaron en el problema primario, pero aquí actúan con sentido contrario, es decir se tiene ya la hipótesis considerada, de tener cargas y momentos concentrados en las juntas o nudos.

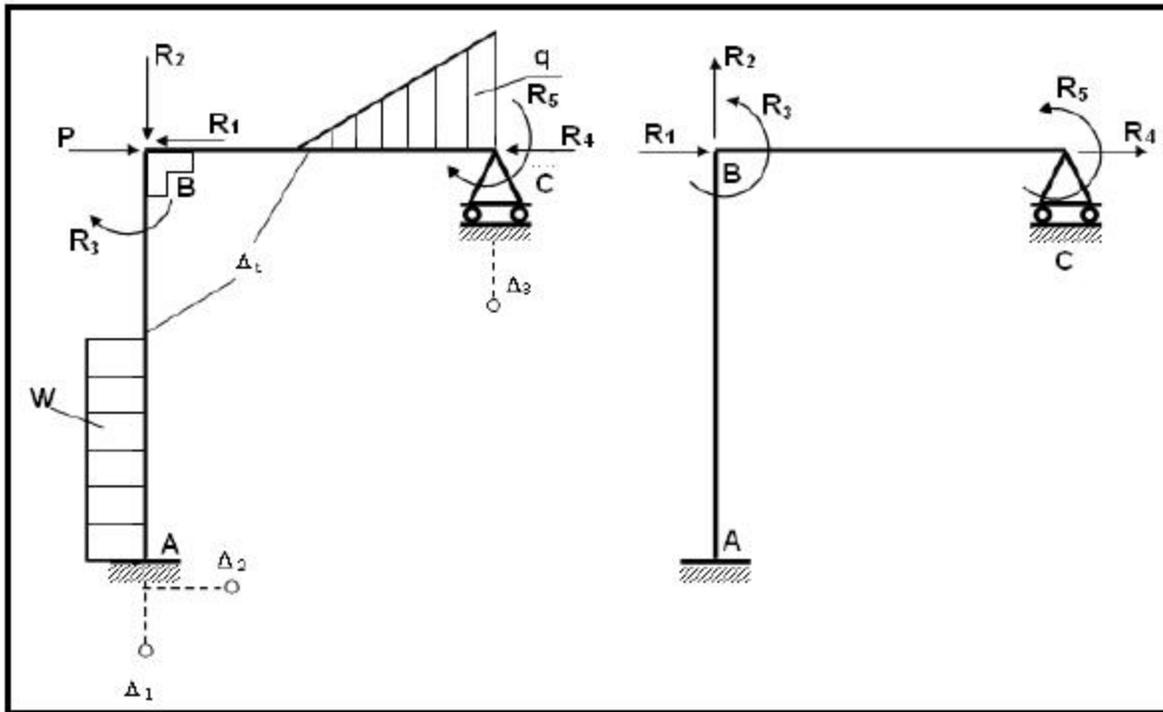


Figura 2.16 Cargas de fijación y Problema complementario.

Con relación al pórtico plano de la figura 2.15, cuyos elementos son totalmente flexibles, no tienen la misma sección transversal, es únicamente por notación que todos tienen la misma letra. Con respecto a ésta estructura, a la derecha de la figura 2.16 se presenta el Problema Complementario. Nótese que ahora las acciones R_i generan los corrimientos o giros q_i que realmente tiene la estructura y que en el problema primario se anuló.

Al observar las figuras que están a la derecha de 2.15 y 2.16 se encuentra que: Q_1 es la fuerza horizontal que actúa en la junta B, que en este caso vale R_1 ; Q_2 es la fuerza vertical que actúa en la junta B, que vale R_2 , etc. En resumen se tiene:

$$Q_1 = R_1 \quad Q_2 = R_2 \quad Q_3 = R_3 \quad Q_4 = R_4 \quad Q_5 = R_5$$

Luego el vector de cargas generalizadas Q para la estructura analizada, es:

$$Q = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, este vector de cargas Q es el que genera el vector de coordenadas generalizadas q y estos a su vez las fuerzas y momentos internos en cada uno de los miembros de la estructura.

Este es el problema general de cálculo en el cual se centra la teoría de “Análisis Matricial de Estructuras”. Prácticamente se puede decir que con matrices se resuelve el problema complementario ya que el problema primario se resuelve por estática como se verá en el siguiente ejemplo y en el capítulo 4.

La solución total de una estructura es la suma del problema primario más el problema complementario. Por ejemplo, el momento en el nudo inicial del elemento BC es igual al momento de empotramiento perfecto del problema primario más el momento que reporte la solución del problema complementario. Para este mismo nudo B, las ordenadas de la elástica son nulas en la junta B, por la definición del problema primario $q = 0$ existiendo únicamente desplazamientos y giro del problema complementario.

Para un punto intermedio de la barra BC los corrimientos y giros de un punto cualquiera, será igual a lo que reporte el problema primario más lo que reporte el problema complementario.

Se hace hincapié en anotar que la solución total del problema es la superposición del problema primario y complementario.

- **EJEMPLO 6**

Encontrar la ecuación de la elástica $v(x)$ para la viga de sección constante de la figura 2.17, si se desprecia la deformación por corte.

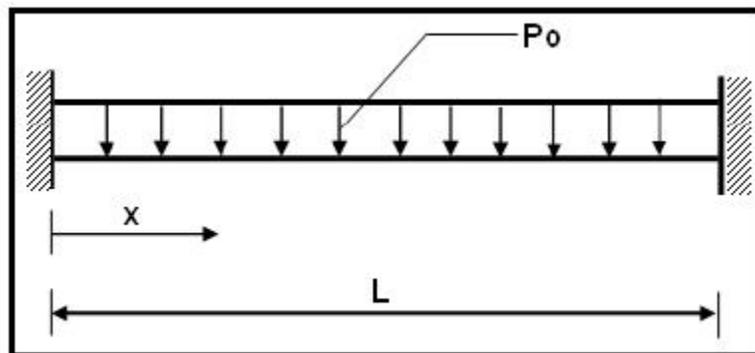


Figura 2.17 Viga de sección constante con carga uniforme P_0

- **SOLUCIÓN**

La ecuación diferencial que gobierna el problema en estudio, es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}$$

La solución de la ecuación diferencial de cuarto orden, es:

$$v(x) = A X^3 + B X^2 + C X + D + \frac{P_o}{24EI} X^4$$

Las constantes de integración: A, B, C y D se obtienen de las siguientes condiciones de borde:

- | | |
|---------------|-------------|
| 1. En $X = 0$ | $v(x) = 0$ |
| 2. En $X = 0$ | $v'(x) = 0$ |
| 3. En $X = L$ | $v(x) = 0$ |
| 4. En $X = L$ | $v'(x) = 0$ |

Donde $v'(x)$ corresponde al giro $\theta(x)$. La solución del sistema de ecuaciones que se obtienen al reemplazar las condiciones de borde, reporta:

$$A = -\frac{P_o L}{12EI} \quad B = \frac{P_o L^2}{24EI} \quad C = 0 \quad D = 0$$

Luego, la ecuación de elástica $v(x)$ es:

$$v(x) = -\frac{P_o L}{12EI} X^3 + \frac{P_o L^2}{24EI} X^2 + \frac{P_o}{24EI} X^4$$

$$v(x) = \frac{P_o}{24EI} (X^4 + X^2 L^2 - 2X^3 L)$$

$$\theta(x) = \frac{P_o}{24EI} (4X^3 + 2XL^2 - 6X^2 L)$$

Es importante destacar que la ecuación diferencial, fue obtenida con la siguiente convención de signos:

- i. Desplazamiento vertical positivo, si es hacia abajo.
- ii. Rotación positiva, si es horaria.

Convención contraria a la que se considera en este texto, por lo que se debe cambiar de signo. Esto se ilustra en el siguiente capítulo cuando se encuentra el desplazamiento vertical en una viga que tiene carga en el elemento.

2.3 DESPLAZAMIENTO DE LOS ELEMENTOS

Para describir los desplazamientos y rotaciones de un elemento de un pórtico plano, se observa por ejemplo el marco de la figura 2.18, cuyos elementos se consideran totalmente flexibles, A_o, I_o . Se recuerda que la letra A hace relación al área de la sección transversal y la letra I a la inercia a flexión de la sección transversal.

La estructura tiene seis grados de libertad, tres en cada nudo, dos desplazamientos y un giro, los mismos que se indican a la derecha de la figura 2.18, en donde se presenta una deformada lo más general posible.

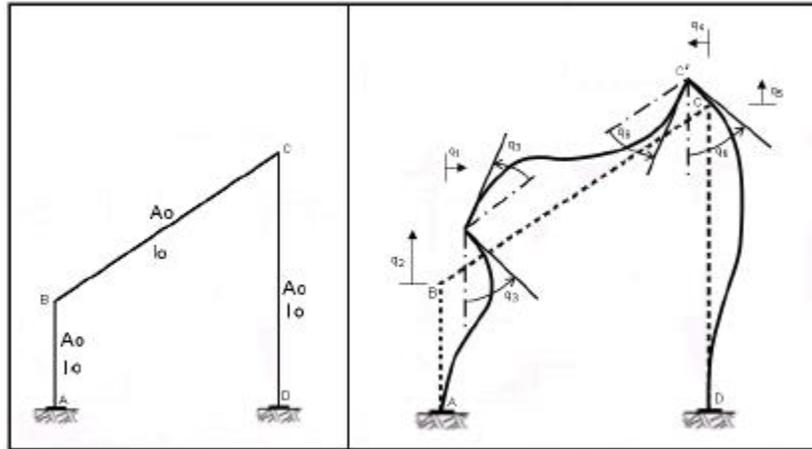


Figura 2.18 Deformada general y coordenadas de la estructura.

En la figura 2.19 se ha aislado el elemento BC, de la figura 2.18 y en ella se define un sistema de coordenadas X-Y. El eje X coincide con el eje del elemento y el eje Y es perpendicular a este. A la derecha de la figura 2.19 se presenta el elemento BC con su deformada, en esta figura se va a estudiar sus componentes de desplazamiento y rotación de los nudos. Se ha colocado con líneas entrecortadas para indicar que es su posición inicial, antes de deformarse y con línea continua la posición final de BC.

Al definir el origen de coordenadas X-Y se está definiendo cual es el nudo inicial y final del elemento. Se utilizará el subíndice 1 para definir las componentes de desplazamiento y giro del nudo inicial y el subíndice 2 para el nudo final.

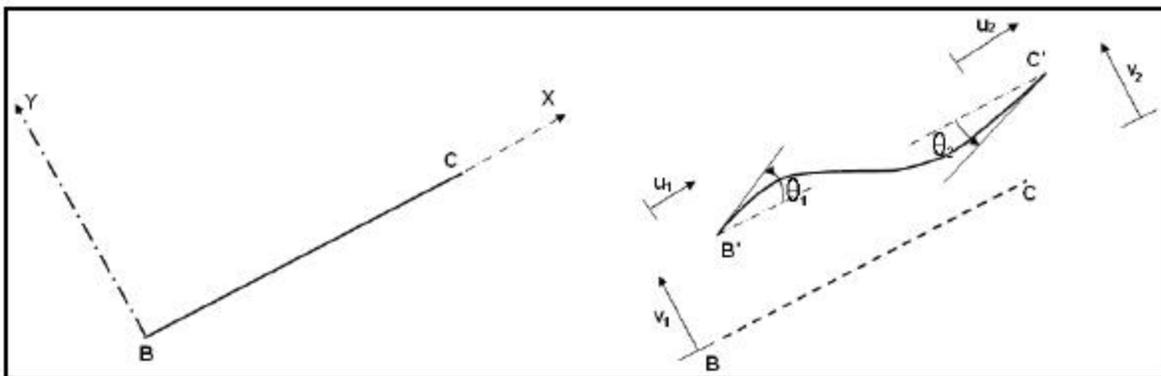


Figura 2.19 Coordenadas de un elemento.

En la figura 2.19 se indican los componentes de desplazamiento y giros del elemento BC. En este ejemplo, se tiene.

- u_1 Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal, del elemento BC del nudo inicial.
- v_1 Componente de desplazamiento en el sentido transversal, del elemento BC del nudo inicial.
- θ_1 Rotación del nudo inicial, B.
- u_2 Componente de desplazamiento en el sentido longitudinal del elemento BC del nudo final.

- v_2 Componente de desplazamiento en el sentido transversal del elemento BC del nudo final.
- Θ_2 Rotación del nudo final, C.

Nótese, que el sentido positivo de las componentes de desplazamiento, coinciden con la dirección positiva de los ejes de coordenadas. Si los ejes de referencia, hubiesen sido los indicados en la figura 2.20. Las componentes de desplazamiento, giro y su nomenclatura serían las presentadas a la derecha de la figura 2.20.

Por lo tanto, la elección del nudo inicial y nudo final de un elemento es arbitraria. En el futuro se usarán los ejes de coordenadas de la figura 2.19, para definir el nudo inicial y el nudo final, en un elemento inclinado. **Si el pórtico es ortogonal el nudo inicial se considera en el nudo inferior del elemento y en los elementos horizontales el nudo inicial se considerará a la izquierda del elemento.** Así se trabajará en este texto pero se destaca una vez más que esto es arbitrario.

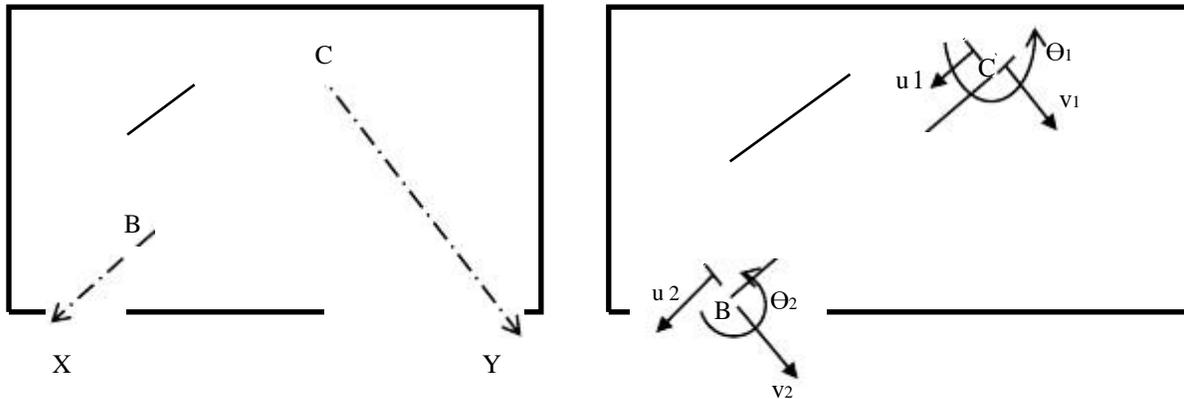


Figura 2.20 Otro sistema de coordenadas de un elemento

Finalmente, es necesario que se diferencie entre las coordenadas q y las coordenadas u_1 , v_1 , Θ_1 , u_2 , etc. Las primeras definen las componentes de desplazamiento de las juntas o nudos de la estructura. Generalmente las componentes de desplazamiento de los nudos son **horizontal** y **vertical**, en cambio que las segundas indican las componentes de desplazamiento de los nudos de cada elemento, estas componentes de desplazamiento son **longitudinal** y **transversal** al eje del elemento y se conoce con el nombre de "Coordenadas Locales". En cambio las coordenadas generalizadas q son "**Coordenadas Globales**" de la estructura.

Para cierto tipo de problemas, como por ejemplo calcular marcos planos con apoyos inclinados, es conveniente definir **coordenadas especiales de nudos** que sigan la dirección paralela al apoyo de esta forma se facilita el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura.

En la figura 2.21 se presenta un elemento de una estructura que tiene un apoyo inclinado; por el tipo de vínculo en el apoyo se tiene dos grados de libertad, un corrimiento en la dirección paralela al apoyo y una rotación. En este caso las coordenadas del nudo inicial se puede considerar las mostradas a la derecha de la figura 2.21.

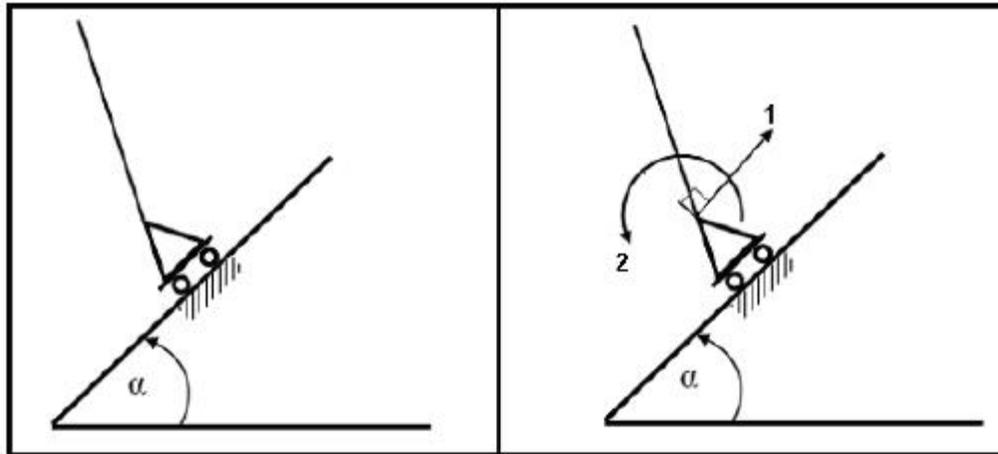


Figura 2.21 Coordenadas especiales de un nudo.

2.4 EJERCICIOS RESUELTOS

• EJEMPLO 7

El modelo de cálculo del pórtico de la figura 2.22, es muy utilizado en la Ingeniería Sísmica; las vigas son totalmente rígidas y las columnas axialmente rígidas. Este pórtico tiene 2 grados de libertad los mismos que se indican a la derecha de la figura 2.22. Se pide dibujar las deformadas elementales.

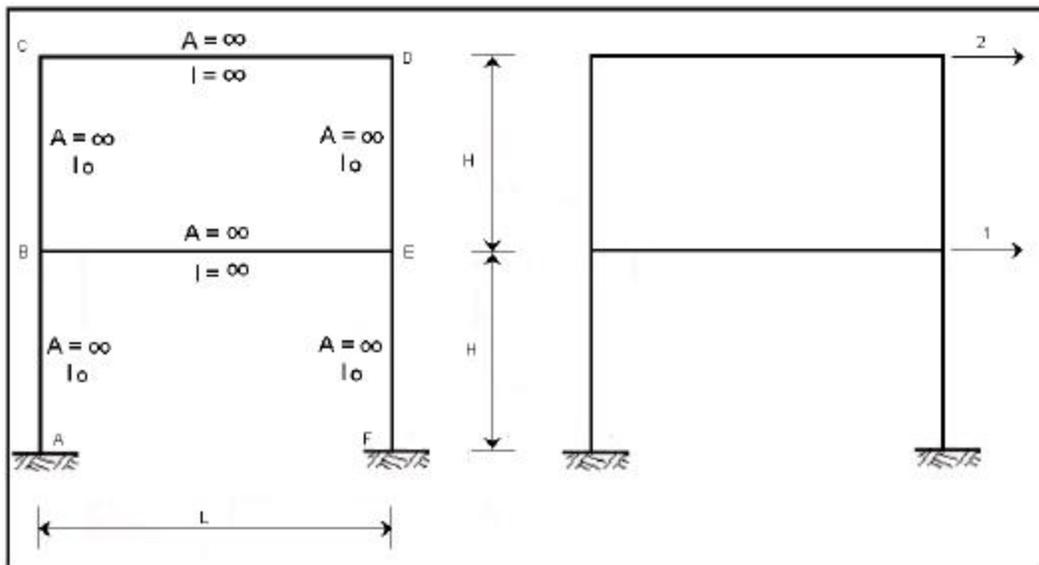


Figura 2.22 Estructura de Ejemplo 7 y Sistema de coordenadas $Q - q$

• SOLUCIÓN

Se deja al estudiante que explique el porqué de los diagramas presentados en las figuras siguientes.

♣ $q_1 = 1$ y $q_i = 0 \quad i \neq 1$

$q_2 = 1$ y $q_i = 0 \quad i \neq 2$

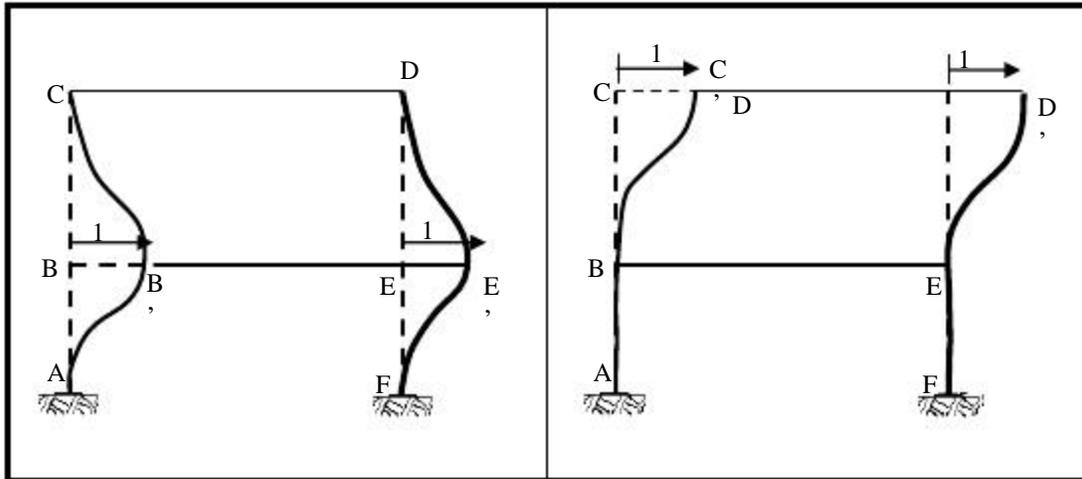


Figura 2.23 Deformadas elementales q_1 y q_2

• EJEMPLO 8

Para la estructura de la figura 2.24, seleccione un sistema de coordenadas $Q - q$ apropiado, dibuje las deformadas elementales y en cada una de ellas defina las coordenadas del miembro BC.

• SOLUCION

Sea α el ángulo que forma el eje del miembro BC con la horizontal, de la geometría de la estructura se desprende que: $\sin \alpha = 3/5$; $\cos \alpha = 4/5$. En la figura 2.9.2 se presentan los tres grados de libertad que tiene la estructura y las deformadas elementales son:

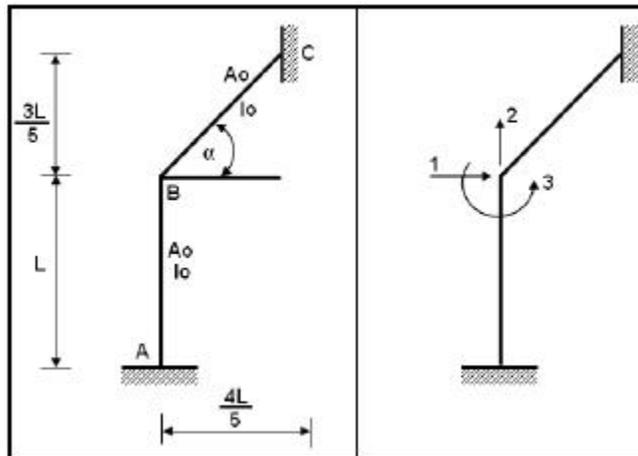


Figura 2.24 Pórtico plano de ejemplo 8. Sistema $Q - q$

♣ Deformada elemental q_1

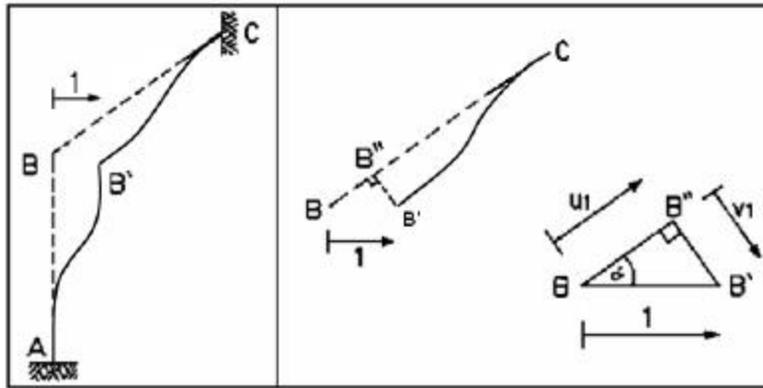


Figura 2.25 Deformada q_1 . Coordenadas del elemento BC.

De la figura derecha de 2.25, se tiene que:

$$u_1 = \cos \alpha = 4/5$$

$$v_1 = -\text{sen } \alpha = -3/5$$

$$\Theta_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$\Theta_2 = 0$$

♣ Deformada elemental q_2

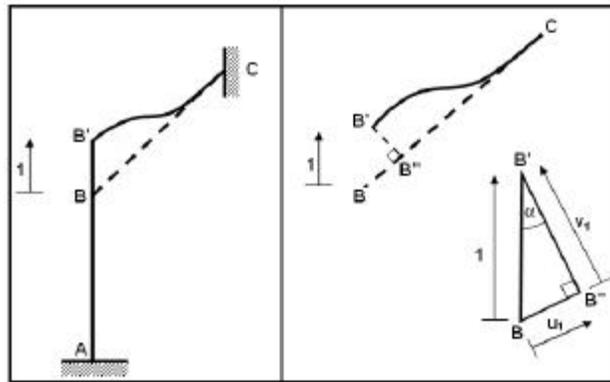


Figura 2.26 Deformada elemental q_2 Coordenadas del elemento BC

Tanto en la coordenada elemental q_1 como en esta deformada para definir las coordenadas del miembro BC se procede como sigue:

- i) Se determina B'' para esto el nudo B primero se deforma axialmente u_1 y luego transversalmente v_1 hasta llegar a B' .
- ii) Aparte se dibuja el triángulo rectángulo $BB'B''$ y en él se ubica el ángulo α .

Para la deformada elemental q_2 se tiene:

$$u_1 = \text{sen } \alpha = 3/5$$

$$v_1 = \cos \alpha = 4/5$$

$$\Theta_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$\Theta_2 = 0$$

♣ En la deformada elemental q_3 se tiene:

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$\Theta_1 = 1$$

$$u_2 = 0$$

$$v_2 = 0$$

$$\Theta_2 = 0$$

Se deja al lector dibujar la deformada elemental $\{3\}$

♣ EJEMPLO 9

En la siguiente armadura seleccione sistema Q-q apropiado, dibuje las deformadas elementales e indique las deformadas de cada elemento.

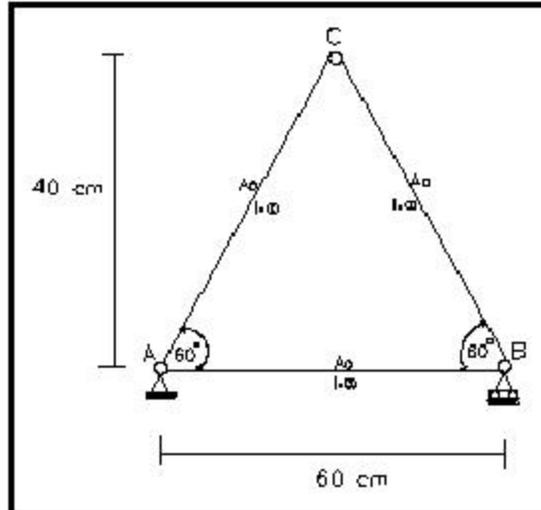


Figura 2.27 Armadura del ejemplo 9

♣ SOLUCIÓN

Se considera que los elementos de una armadura plana son transversalmente rígidos de tal manera que sus elementos trabajan a compresión o tracción. En una armadura plana se tienen dos grados de libertad por nudo, que son las componentes de desplazamiento horizontal y vertical; si existe rotación pero es coordenada dependiente. Los grados de libertad, de la armadura de la figura 2.27 se indican en la figura 2.28 y son un desplazamiento horizontal en el rodillo y dos grados de libertad en el nudo B.

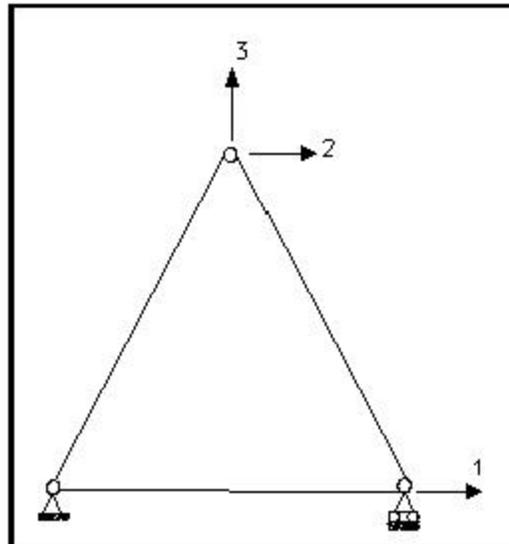


Figura 2.28 Sistema de Coordenadas Generalizadas Q-q

♣ $q_1 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 1$

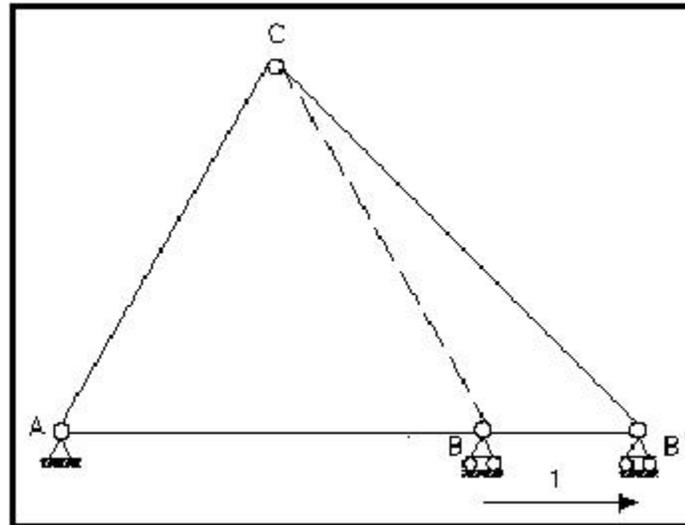


Figura 2.30 Deformada elemental q_1

ELEMENTO AB

$$u_1 = 0; v_1 = 0; u_2 = 1; v_2 = 0$$

ELEMENTO AC

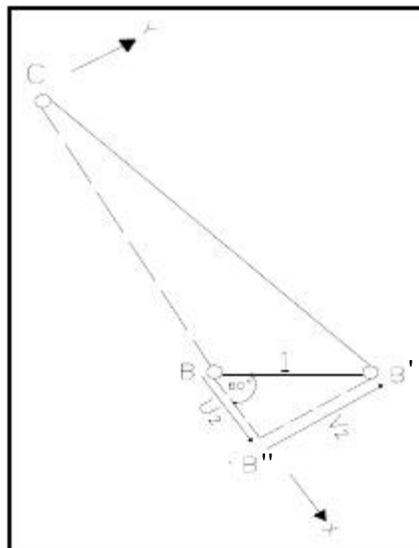
$$u_1 = 0; v_1 = 0; u_2 = 0; v_2 = 0$$

ELEMENTO BC

$$U_2 = \cos 60^\circ = 0,5$$

$$V_2 = \sin 60^\circ = 0,860$$

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0$$



♣ $q_2 = 1$ y $q_1 = 0$ $i \neq 2$

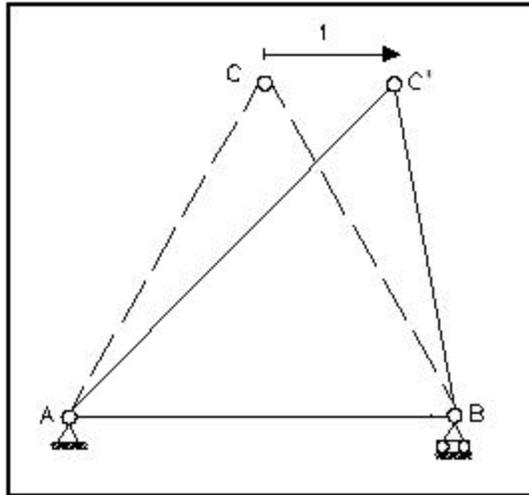
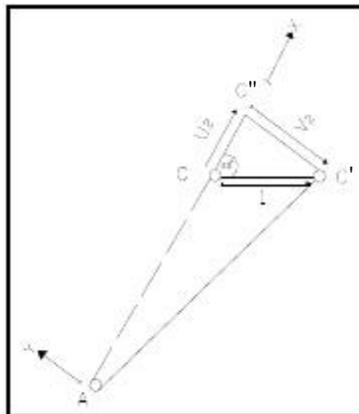


Figura 2.31 Deformada elemental l_2

ELEMENTO AC

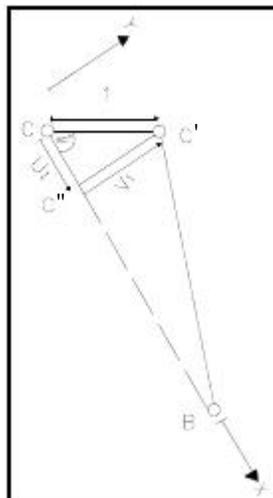


$$U_2 = \cos 60^\circ = 0,5$$

$$V_2 = -\text{sen } 60^\circ = -0,860$$

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0$$

ELEMENTO BC



$$U_1 = \cos 60^\circ = 0,5$$

$$V_1 = \text{sen } 60^\circ = 0,860$$

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 0$$

♣ $q_3 = 1$ y $q_i = 0$ $i \neq 3$

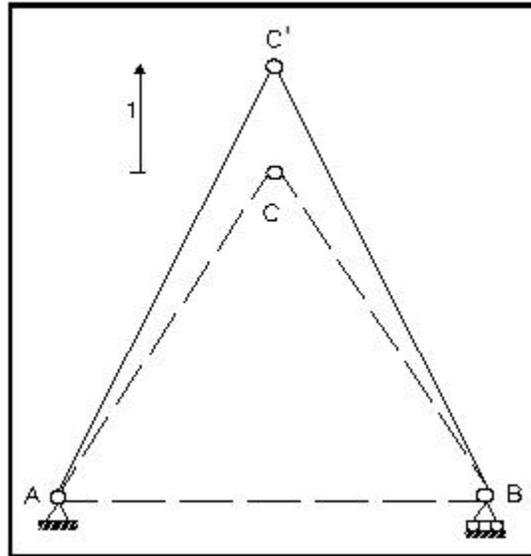
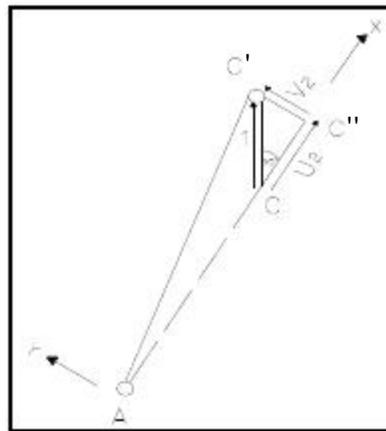


Figura 2.32 Deformada elemental $\{3\}$

ELEMENTO AC

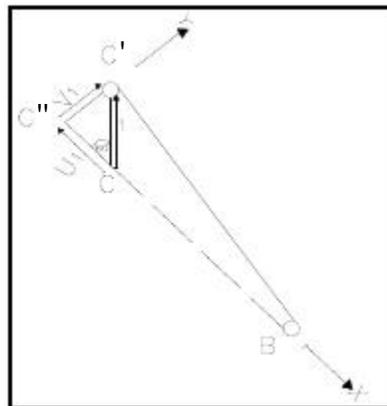


$$U_2 = \cos 60^\circ = 0,5$$

$$V_2 = \text{sen } 60^\circ = 0,860$$

$$U_1 = 0 \quad V_1 = 0$$

ELEMENTO BC



$$U_1 = -\cos 60^\circ = -0,5$$

$$V_1 = \text{sen } 60^\circ = 0,860$$

$$U_2 = 0 \quad V_2 = 0$$

En la figura 2.33 se presenta una articulación fija de una armadura. Este tipo de articulación es la que se ha trabajado en el ejemplo desarrollado. No se puede pensar que todas las estructuras de acero tienen este comportamiento de articulación fija, depende de la forma como se construye. Si es una conexión con capacidad de momento se modelará igual que un pórtico plano.



Figura 2.33 Articulación fija de una estructura de acero.

- **EJEMPLO 10**

En la siguiente estructura seleccione sistema Q-q y determine el Vector de Cargas generalizadas aplicando el Problema Primario y Complementario.

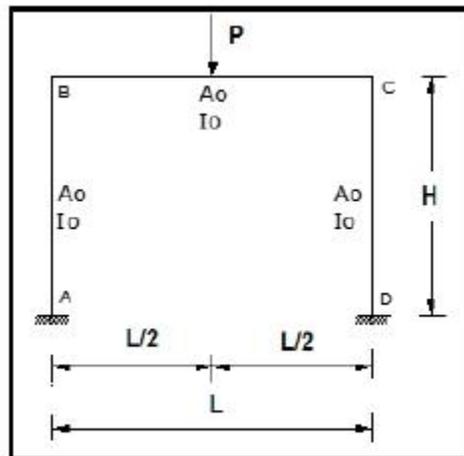


Figura 2.34 Estructura con carga en un elemento

- **SOLUCIÓN**

Se deja al lector la explicación de los pasos dados en la solución del Ejemplo.

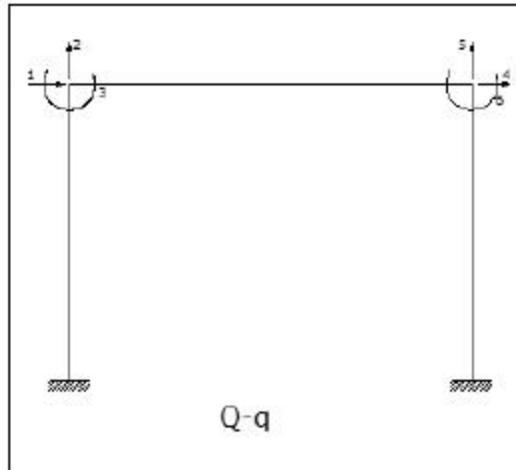


Figura 2.35 Grados de libertad

- Problema Primario

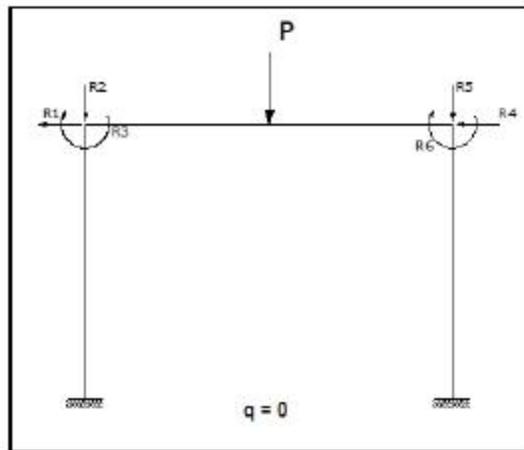


Figura 2.36 Problema Primario

Equilibrio de Elementos

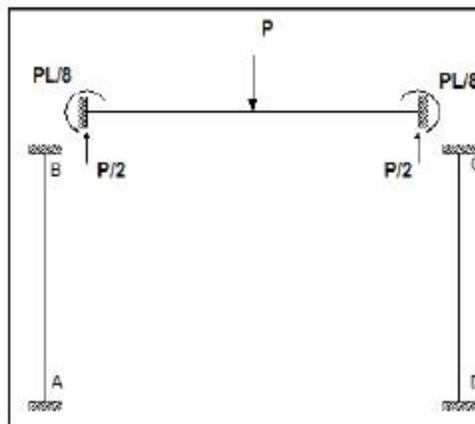


Figura 2.37 Equilibrio de elementos

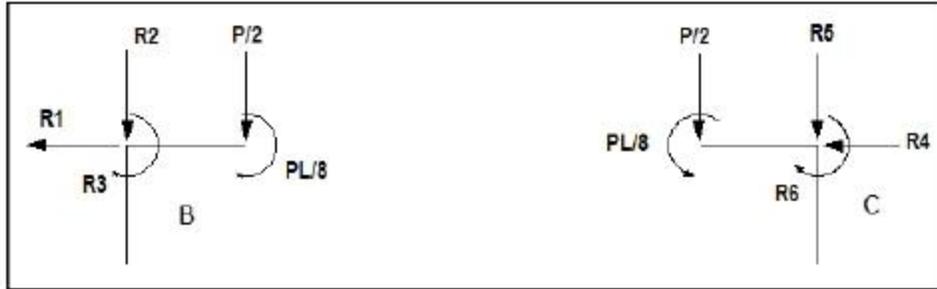


Figura 2.38 Equilibrio de Nudos

Equilibrio del Nudo B

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \rightarrow R_1 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow R_2 + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow R_2 = -P/2 \\ \sum M = 0 & \rightarrow R_3 + \frac{PL}{8} = 0 \rightarrow R_3 = -PL/8 \end{aligned}$$

Equilibrio del Nudo C

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \rightarrow R_4 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow R_5 + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow R_5 = -P/2 \\ \sum M = 0 & \rightarrow R_6 - \frac{PL}{8} = 0 \rightarrow R_6 = PL/8 \end{aligned}$$

- **Problema Complementario**

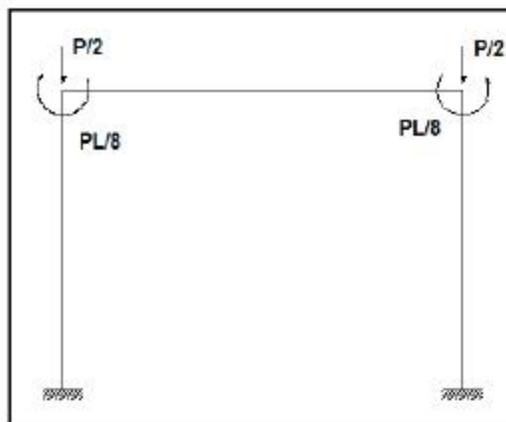
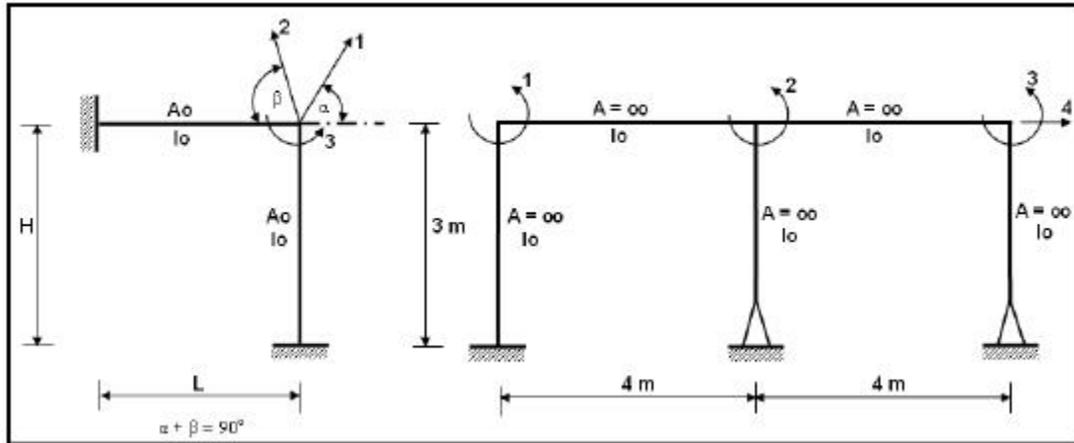


Figura 2.39 Problema Complementario

$$q' = \left[0 \quad -\frac{P}{2} \quad -\frac{PL}{8} \quad 0 \quad -\frac{P}{2} \quad \frac{PL}{8} \right]$$

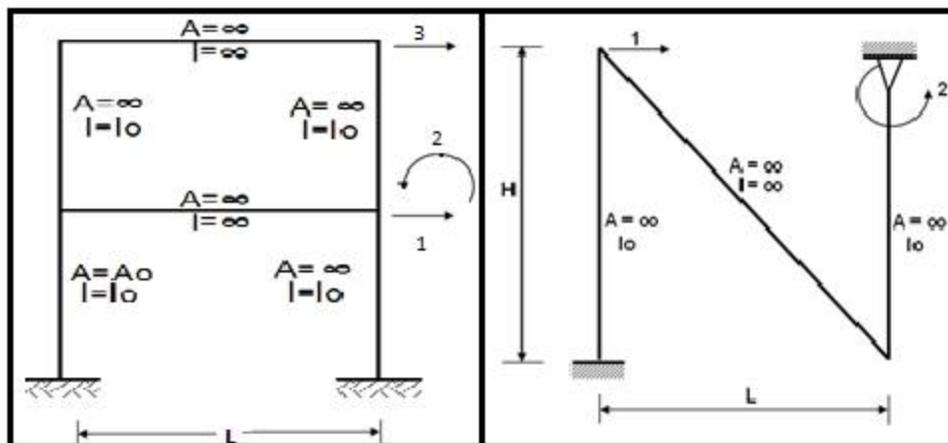
2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

En las siguientes estructuras se ha seleccionado un sistema $Q-q$ para cada ejercicio. Se pide dibujar todos los diagramas de desplazamientos elementales.



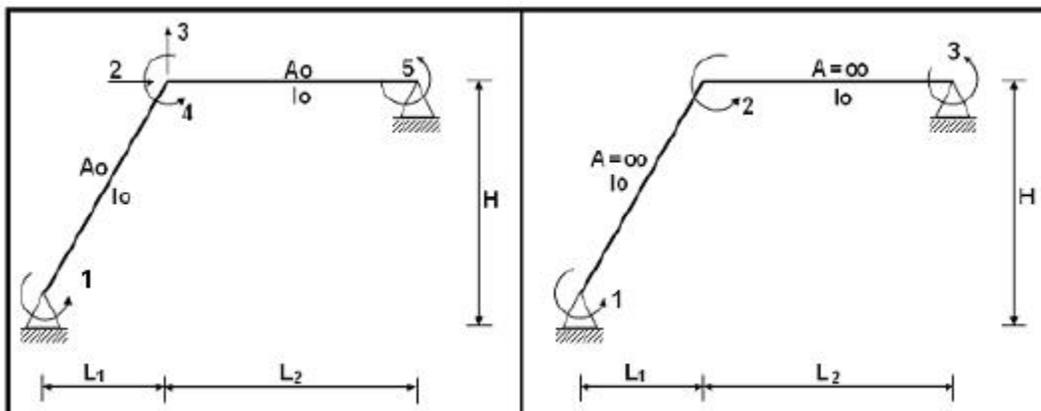
Ejercicio 1

Ejercicio 2



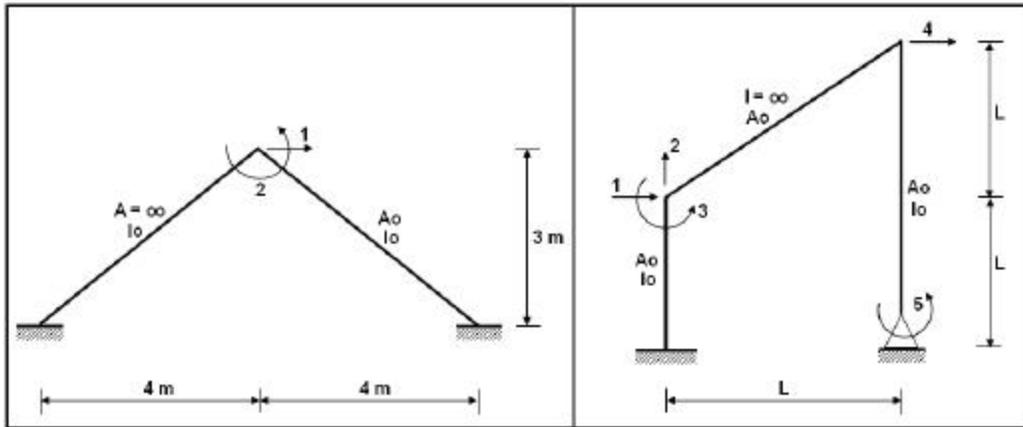
Ejercicio 3

Ejercicio 4



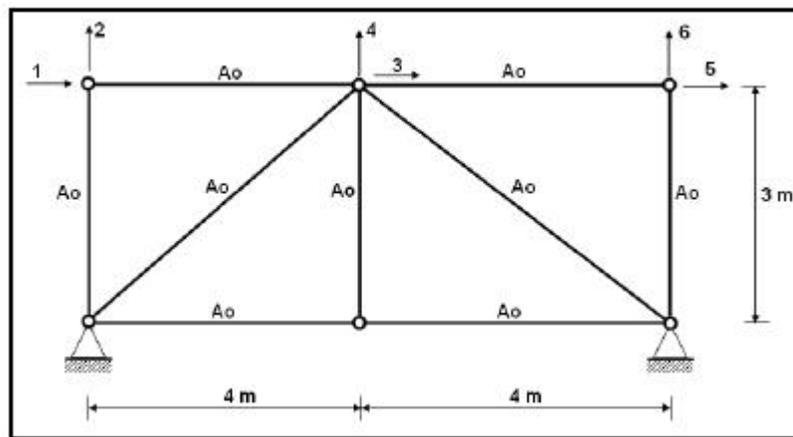
Ejercicio 5

Ejercicio 6



Ejercicio 7

Ejercicio 8



Ejercicio 9

CAPITULO 3

FUNCIONES DE FORMA O DE INTERPOLACIÓN

RESUMEN

Las funciones de forma tienen una aplicación muy amplia en el análisis estático y dinámico de estructuras razón por la cual en este capítulo se le da la importancia respectiva y se presentan algunas aplicaciones de las mismas. Se inicia el estudio deduciendo las funciones de forma desde el punto de vista estructural y luego con el objeto de que el lector vea que son funciones de interpolación se calculan las mismas considerando que pasan por dos puntos en los que se conoce el desplazamiento y giro, que corresponde a la forma tradicional de cálculo pero también se añaden funciones de forma para flexión de una viga considerando un punto intermedio, con lo que se encuentran funciones de forma más exactas.

Las aplicaciones que se dan están orientadas al cálculo de ordenadas de la elástica y obtención de momentos de empotramiento perfecto para cualquier tipo de carga, todo esto en miembros lineales de sección constante.

Se presenta además la manera como se obtiene los estados de carga **D** y **L** correspondientes a carga permanente y transitoria respectivamente, para el diseño sismo resistente de un edificio de hormigón armado y luego se obtiene las acciones de empotramiento perfecto con funciones de forma. Finalmente se indica una forma práctica para convertir una carga triangular o trapezoidal en uniforme.

3.1 ORDENADAS DE LA ELASTICA

Dado un pórtico plano cualquiera, como el mostrado, en la parte superior izquierda de la figura 3.1. En el elemento inclinado BC se tiene un punto interior P. Ahora al actuar cualquier tipo de cargas este se deforma como se observa en la parte superior derecha de 3.1; el punto P pasa a P'. Se desea encontrar las ordenadas de la elástica $u(x)$, $v(x)$ y $\theta(x)$ para el punto P. Siendo:

- $u(x)$ Componente de desplazamiento axial del punto P.
- $v(x)$ Componente de desplazamiento transversal del punto P.
- $\theta(x)$ Rotación del punto P.

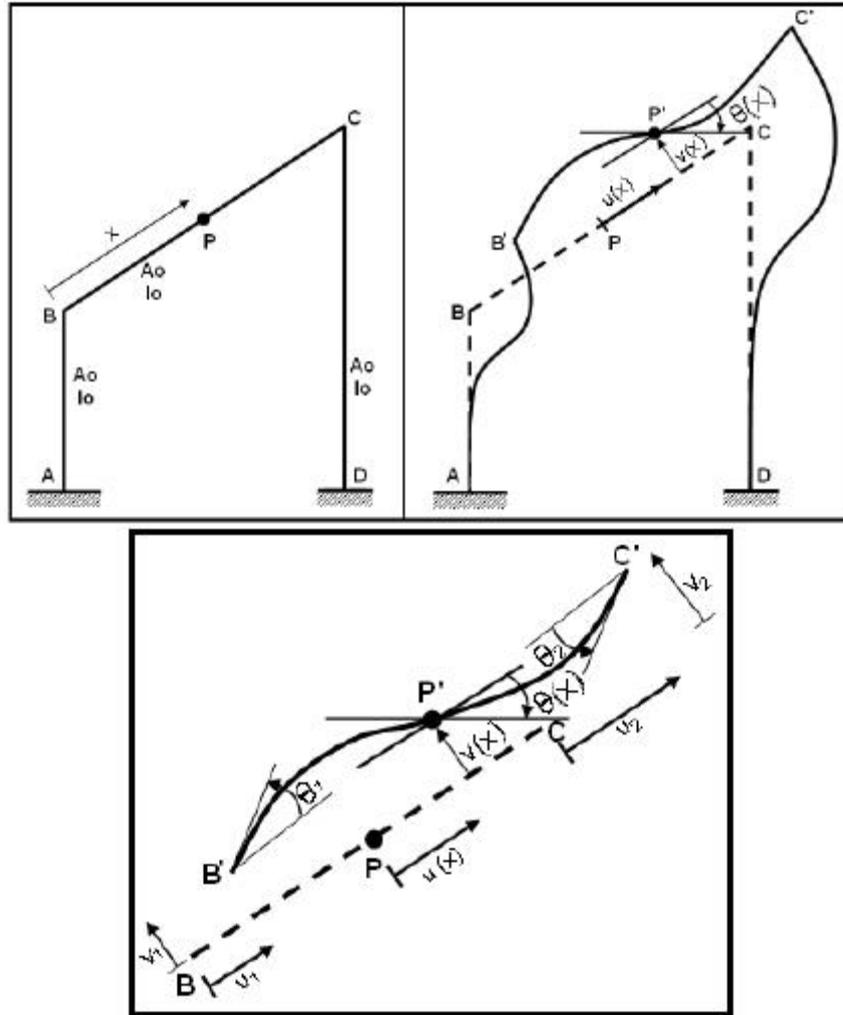


Figura 3.1 Ordenadas de la Elástica y coordenadas de un elemento

Para comprender el cálculo de las ordenadas de la elástica se aísla al elemento BC y se dibujan las coordenadas del elemento, en la parte inferior de la figura 3.1. Se destaca que para el marco teórico se pudo considerar un punto de cualquiera de las columnas, antes y después de deformarse y encontrar las ordenadas de la elástica pero la explicación es general en la viga inclinada.

Para encontrar las ordenadas de la elástica **se verá la contribución de cada una de las coordenadas del elemento y luego se aplicará el principio de superposición lineal.**

3.2 PRIMERA FORMA DE CÁLCULO: RESISTENCIA DE MATERIALES

En este apartado la obtención de las ordenadas de la elástica se realiza aplicando Resistencia de Materiales, es decir desde el punto de vista estructural.

3.2.1 Efecto de u_1 en la ordenada de la elástica

En el elemento lineal, que se encuentra a la izquierda de la figura 3.2 se le aplica un desplazamiento axial en el nudo inicial como se observa en la parte central de 3.2. Se desea encontrar la ordenada de la elástica axial para encontrar el desplazamiento en un punto P, de la viga. Se destaca que **solo existe un desplazamiento axial del nudo inicial u_1 y las demás coordenadas locales son nulas.**

Por facilidad a este elemento se lo considera horizontal, pero su aplicación es general. Para que el miembro de la figura 3.2 experimente un desplazamiento u_1 es necesario aplicar una fuerza axial N , la misma que se observa en la parte derecha de la figura 3.2.

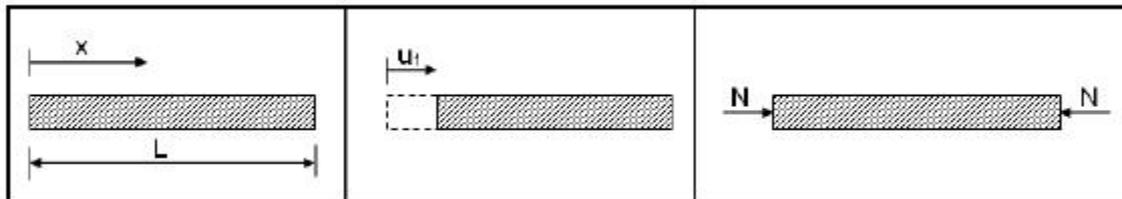


Figura 3.2 Viga con desplazamiento axial u_1 debido a una fuerza axial N .

De la resistencia de materiales se conoce:

$$u_1 = \int_0^L \frac{N dx}{A(x) E} \tag{3.1}$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal, para el caso de sección variable es función de X , E es el módulo de elasticidad del material y N es la fuerza axial, la misma que es constante, razón por la cual sale de la integral. Luego:

$$u_1 = N \int_0^L \frac{dx}{A(x) E}$$

En consecuencia la fuerza axial que produce un corrimiento axial de magnitud u_1 es:

$$N = \frac{u_1}{\int_0^L \frac{dx}{A(x) E}}$$

Ahora interesa calcular el desplazamiento longitudinal que experimenta un punto cualquiera P del elemento que se encuentra a una distancia X del nudo inicial, cuando existe la carga axial N , si el nudo final permanece fijo. En la figura 3.3 se ilustra el problema en la parte superior de dicha figura se indica la posición inicial del punto P , que se encuentra a una distancia X y en la inferior se aprecia que el punto paso a P' , se deformó axialmente $u(x)$. No existe deformación transversal por que el problema es de tipo axial.

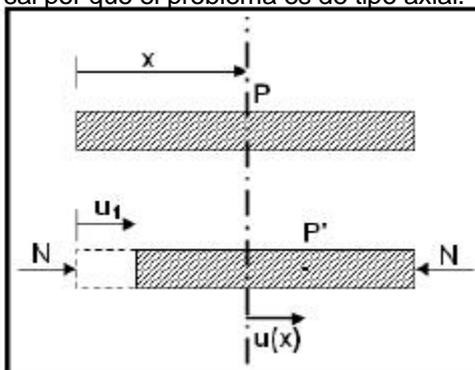


Figura 3.3 Descripción del problema que conduce al cálculo de $\phi_1(x)$

La deformación $u(x)$ será igual a la deformación del nudo inicial u_1 menos la deformación producida por la fuerza axial N en el intervalo de longitud X .

$$u(x) = u_1 - \int_0^x \frac{N dx}{A(x) E}$$

Por ser N constante se tiene:

$$u(x) = u_1 - N \int_0^x \frac{dx}{A(x) E}$$

Al reemplazar la ecuación de la carga axial, en la última ecuación y al factorar u_1 , se tiene:

$$u(x) = u_1 \left[1 - \frac{\int_0^x \frac{dx}{A(x) E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x) E}} \right] \quad (3.2)$$

A la expresión encerrada entre paréntesis se le conoce con el nombre de **función de forma o función de interpolación** $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{\int_0^x \frac{dx}{A(x) E}}{\int_0^L \frac{dx}{A(x) E}} \quad (3.3)$$

Luego:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x)$$

Como se observa $\phi_1(x)$, al igual que las demás funciones de forma que se van a calcular, depende de las propiedades geométricas del elemento.

Para elementos de sección constante se tiene que: $EA(x) = EA$, al reemplazar este valor y resolver la integral definida en la ecuación (3.3), se encuentra:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} \quad (3.4)$$

3.2.2 Efecto de v_1 en la ordenada de la elástica

Es complicado, por las integrales que resultan, encontrar las ordenadas de la elástica en un elemento de sección variable cuando solo existe v_1 , desplazamiento transversal al eje del elemento en el nudo inicial, razón por la cual se presenta el cálculo para un elemento de sección constante. En la figura 3.4, se presenta un elemento en el cual al nudo inicial se da un desplazamiento vertical v_1 ; un punto P que se halla a una distancia X, pasa a P'. El desplazamiento vertical en este punto es $v(x)$. Se destaca que $u(x) = 0$. Interesa calcular $v(x)$ para cuando solo existe v_1 y los demás desplazamientos y giros de los extremos son cero.

Antes de resolver el problema, en la viga de sección constante, se debe indicar que si se tiene una viga de sección variable, se procede en forma similar pero la solución de la ecuación diferencial, que se verá más adelante se realiza con Métodos Numéricos.

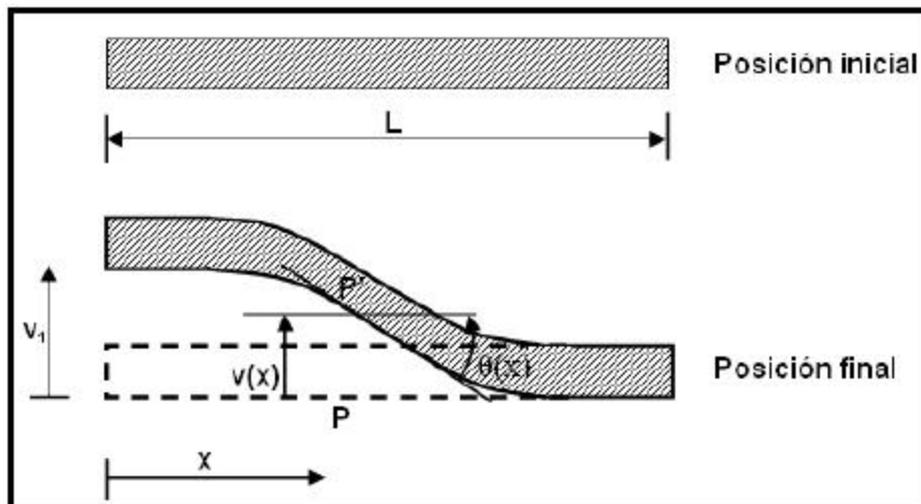


Figura 3.4 Solo existe deformación transversal en el nudo inicial y las demás son nulas.

Se va a resolver, un problema de flexión, sin carga en el tramo, $P_0 = 0$. Únicamente se tiene condiciones de borde.

La ecuación diferencial que gobierna la flexión, en un elemento de sección constante, en el que se desprecia el efecto del corte, es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}$$

Las variables, no definidas todavía, son P_0 que es la carga transversal que actúa en el elemento, I es el momento de inercia a flexión del elemento y v es la ordenada transversal de la elástica. Al ser $P_0 = 0$, la ecuación diferencial se transforma, en:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (3.5)$$

Las condiciones de contorno, del problema, son:

- | | | |
|-----|------------|--------------|
| 1.- | En $X = 0$ | $v(x) = v_1$ |
| 2.- | En $X = 0$ | $v'(x) = 0$ |
| 3.- | En $X = L$ | $v(x) = 0$ |
| 4.- | En $X = L$ | $v'(x) = 0$ |

Las integrales de la ecuación (3.5), al ser la inercia constante, son:

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = A$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = AX + B$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{AX^2}{2} + BX + C \quad (3.6)$$

$$EI v(x) = \frac{AX^3}{6} + \frac{BX^2}{2} + CX + D \quad (3.7)$$

Donde A, B, C y D son constantes de integración las mismas que se obtienen al aplicar las condiciones de borde, en las ecuaciones (3.6) y (3.7)

Al reemplazar las dos primeras condiciones de borde, en las ecuaciones (3.6) y (3.7), se encuentran los valores de las constantes de integración D y C. Estas son:

$$D = EI v_1$$

$$C = 0$$

Ahora al reemplazar las otras dos condiciones en (3.6) y (3.7), se halla:

$$0 = -\frac{A L^3}{6} + \frac{B L^2}{2} + C L + D$$

$$0 = -\frac{A L^2}{2} + B L + C$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta luego de reemplazar C y D.

$$A = \frac{12EI}{L^3} v_1 \qquad B = -\frac{6EI}{L^2} v_1$$

Al reemplazar A, B, C y D en la expresión (3.6) se tiene:

$$EI v(x) = \frac{12EI}{L^3} v_1 \left(\frac{x^6}{6} \right) - \frac{6EI}{L^2} v_1 \left(\frac{x^2}{2} \right) + EI v_1$$

De donde, luego de simplificar EI, se halla

$$v(x) = v_1 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) \qquad (3.8)$$

Se denomina función de forma $\phi_2(x)$ a la expresión encerrada en el paréntesis.

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \qquad (3.9)$$

Luego:

$$v(x) = v_1 \phi_2(x)$$

El giro $\theta(x)$ se encuentra derivando la ecuación (3.8) con respecto a X. Por otra parte nótese que $u(x) = 0$ en este problema.

3.2.3 Efecto de θ_1 en la ordenada de la elástica

Con las mismas consideraciones indicadas en el numeral anterior, se tiene que en el elemento existe únicamente θ_1 , las demás coordenadas son nulas. En la figura 3.5 se describe el problema, en la parte superior se indica la posición inicial y en la inferior el problema de flexión a resolver.

No se ha colocado el punto P que pasa a P' pero es obvio que solo existe $v(x)$ y que $u(x) = 0$.

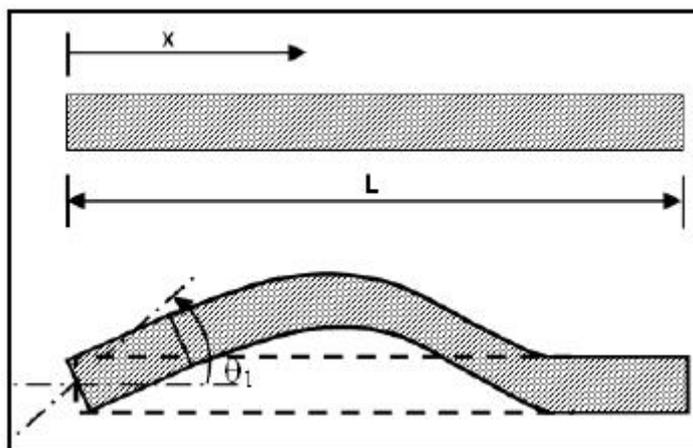


Figura 3.5 Solo existe Θ_1 , las demás componentes de desplazamiento son nulas.

El problema es similar al cálculo de $\phi_2(x)$. Únicamente cambian las condiciones de borde, en este caso son:

1. En $X = 0$ $v(x) = 0$
2. En $X = 0$ $v'(x) = \theta_1$
3. En $X = L$ $v(x) = 0$
4. En $X = L$ $v'(x) = 0$

Reemplazando las condiciones de borde en las ecuaciones que definen $v(x), \theta(x)$ se encuentra el sistema de ecuaciones lineales que conduce al cálculo de las constantes de integración. La solución de este sistema reporta:

$$A = \frac{6EI}{L^2} \theta_1 \qquad B = -\frac{4EI}{L} \theta_1 \qquad C = EI\theta_1 \qquad D = 0$$

Finalmente al sustituir los valores de A, B, C y D en $v(x)$, se encuentra luego de alguna simplificación:

$$v(x) = \theta_1 \left(\frac{X^3}{L^2} - 2 \frac{X^2}{L} + X \right) = \theta_1 \phi_3(x) \tag{3.11}$$

Por tanto:

$$\phi_3(x) = \frac{X^3}{L^2} - 2 \frac{X^2}{L} + X = X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 \tag{3.12}$$

Si en el elemento existe v_1 y θ_1 ; la ordenada de la elástica $v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x)$. Esto ya nos da una idea de la forma de obtener la ordenada de la elástica $v(x)$ cuando existan todos los desplazamientos y giros en los extremos del elemento. Para el efecto axial se tiene algo similar.

El cálculo de $\phi_4(x)$ es similar al cálculo de $\phi_1(x)$. De igual manera la obtención de $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ es parecido a la forma como se halló $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$.

3.2.5 Resumen de funciones de forma para sección constante

En base a los cálculos realizados, por inducción, se puede observar que las ecuaciones que definen las ordenadas de la elástica, cuando no existe carga en los elementos, son:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x) \quad (3.13)$$

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x) \quad (3.14)$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v'(x) \quad (3.15)$$

Donde $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_4(x)$, $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ son las funciones de forma o de interpolación asociadas a: u_1 , v_1 , θ_1 , u_2 , v_2 , y θ_2 . Las funciones de forma para un elemento de sección constante, son:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{X}{L} \\ \phi_2(x) &= 1 - 3 \cdot \frac{X^2}{L^2} + 2 \cdot \frac{X^3}{L^3} \\ \phi_3(x) &= X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 \\ \phi_4(x) &= \frac{X}{L} \\ \phi_5(x) &= \frac{X^2}{L} \left(3 - 2 \cdot \frac{X}{L} \right) \\ \phi_6(x) &= - \frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right) \end{aligned}$$

Relaciones fundamentales:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) + \phi_4(x) &= 1 \\ \phi_2(x) + \phi_5(x) &= 1 \\ \phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x) &= X \end{aligned}$$

Se destaca que las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15) son debidas a corrimientos y rotación de los nudos extremos de un elemento; en consecuencia, constituye la solución del problema complementario. **Por lo tanto, en las ecuaciones indicadas se debe añadir el problema primario para obtener la solución total**, como se indicó en el capítulo anterior.

3.3 SEGUNDA FORMA DE CÁLCULO: INTERPOLACIÓN

En Métodos Numéricos se denomina Interpolación a la forma de obtener una ecuación que pasa por un número de puntos o condiciones. Por ejemplo si se tienen dos puntos se obtiene un interpolador lineal, que es la ecuación de una recta y es así como se va a obtener $\phi_1(x)$, $\phi_4(x)$.

En el problema de flexión se tienen 4 condiciones de borde, en consecuencia a partir de un polinomio cúbico se obtendrán las restantes funciones de forma: $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$, $\phi_6(x)$

3.3.1 Problema axial: Cálculo de $\phi_1(x)$

En este apartado se obtiene $\phi_1(x)$, para ello se recuerda que solo existe un desplazamiento axial en el nudo inicial u_1 y todo lo demás es cero. Entonces para encontrar $u(x)$ se debe encontrar una ecuación que pasa por dos puntos dados, con las condiciones de contorno presentadas en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Condiciones de borde

Punto	X	$u(x)$
1	0	u_1
2	L	0

La pendiente m de la recta, es:

$$m = \frac{0 - u_1}{L - 0} = -\frac{u_1}{L}$$

Luego de la ecuación de la recta, que pasa por un punto dado y se conoce su pendiente es:

$$u(x) - u_1 = -\frac{u_1}{L}(X - 0)$$

$$u(x) = u_1 - \frac{u_1}{L}X$$

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{X}{L} \right) = u_1 \phi_1(x)$$

Se deja al lector que obtenga $\phi_4(x)$ en forma similar.

3.3.2 Problema de flexión: Forma clásica

Ahora se desea encontrar la ordenada de la elástica $v(x)$ para las condiciones de borde indicadas en la tabla 3.2. Se denomina forma clásica cuando para el problema de flexión se tienen las cuatro condiciones indicadas en la Tabla 3.2 y que se indican en la figura 3.6

Tabla 3.2 Condiciones de borde para encontrar funciones de forma de flexión

Punto i	0	1
X_i	0	L
$v(x)$	v_1	v_2
$\theta(x)$	θ_1	θ_2

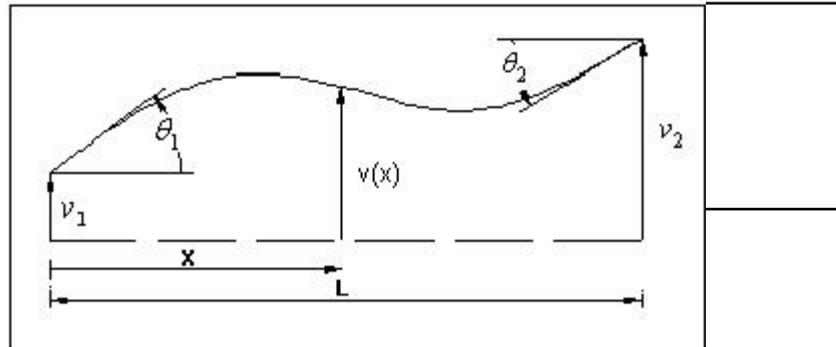


Figura 3.6 Condiciones de borde del problema de flexión en forma clásica.

Al tener cuatro condiciones se debe trabajar con un polinomio cúbico y más que eso cuando se obtuvo las funciones de forma desde el punto de vista estructural, se encontró que la solución de la ecuación diferencial, para un elemento de sección constante es de tercer orden. Se indica a continuación este polinomio pero las constantes de integración son ahora las siguientes:

$$v(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D \quad (3.16)$$

$$\theta(x) = 3 A x^2 + 2 B x + C \quad (3.17)$$

Al aplicar las condiciones de contorno para el punto inicial, $X=0$, se obtienen las constantes de integración D y C .

$$D = v_1$$

$$C = \theta_1$$

Al reemplazar las condiciones de borde del punto final, $X=L$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$A l^3 + B l^2 = v_2 - v_1 - \theta_1 l$$

$$3 A l^2 + 2 B l = \theta_2 - \theta_1$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales reporta.

$$A = -\frac{2}{l^3} (v_2 - v_1 - \theta_1 l) + \frac{1}{l^2} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = -\frac{1}{l(\theta_2 - \theta_1) + \frac{3}{l^2} (v_2 - v_1 - \theta_1 l)}$$

Al reemplazar el valor de las constantes que definen el polinomio cúbico, en (3.16) se encuentra, luego de agrupar términos.

$$v(x) = \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) v_1 + \left(\frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \right) v_2 + X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 \theta_1 - \frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right) \theta_2$$

De donde:

$$\phi_2(x) = 1 - 3 \frac{X^2}{L^2} + 2 \frac{X^3}{L^3}$$

$$\phi_3(x) = X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L} \left(3 - 2 \frac{X}{L} \right)$$

$$\phi_6(x) = - \frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right)$$

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)$$

Las funciones de forma presentadas corresponden a la forma clásica de cálculo en que las mismas se obtienen a partir de un polinomio cúbico, que pasa por dos puntos y se tiene cuatro condiciones de borde.

3.3.3 Matriz de rigidez en coordenadas locales

A partir de las funciones de forma se puede obtener la matriz de rigidez de un elemento, en coordenadas locales; se destaca que existen otras formas de hacerlo; pero lo importante es que el lector vea una posible aplicación de las funciones de forma.

De la Resistencia de Materiales se conoce que el Momento, M se obtiene a partir de la segunda derivada de la elástica y que el Corte, V derivando tres veces $v(x)$, con las siguientes ecuaciones.

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.18)$$

$$V = EI \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (3.19)$$

Las ecuaciones anotadas fueron deducidas con la condición de que el momento es positivo si produce tracción en la fibra inferior, es decir que el momento en el nudo inicial es horario y en el nudo final anti horario; el cortante es positivo si en el nudo inicial es hacia arriba y en el nudo final hacia abajo.

Por otra parte, la convención de signos que se utiliza en este libro es la siguiente: el momento es positivo si es anti horario y el cortante es positivo si es hacia arriba. Por lo tanto cuando se evalúe el momento con la ecuación (3.18), en el nudo inicial se debe cambiar de signo para el nudo final no; en cambio para el corte (3.19) es al revés, en el nudo inicial es positivo y en el final es negativo.

Al derivar la ecuación que define la ordenada de la elástica $v(x)$ dos y tres veces se obtiene:

$$M = EI \left[v_1 \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12X}{L^3} \right) + \theta_1 \left(-\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2} \right) + v_2 \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12X}{L^3} \right) + \theta_2 \left(-\frac{2}{L} + \frac{6X}{L^2} \right) \right]$$

$$V = EI \left(\frac{12}{L^3} v_1 + \frac{6}{L^2} \theta_1 - \frac{12}{L^3} v_2 + \frac{6}{L^2} \theta_2 \right)$$

Sea M, M' , el momento en el nudo inicial y final respectivamente y V, V' , el corte en el nudo inicial y final. Al encontrar estos momentos y cortantes con las ecuaciones obtenidas y al escribir en forma matricial se tiene.

$$\begin{bmatrix} V \\ M \\ V' \\ M' \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta \\ v' \\ \theta' \end{bmatrix}$$

De donde, la matriz de rigidez de un elemento de sección constante K , es:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La matriz de rigidez obtenida es para la flexión, es muy fácil incorporar el efecto axial y obtener la matriz de rigidez en coordenadas globales para un elemento de sección constante. Esto se ve con más detalle en capítulos posteriores, donde se incorpora el efecto de corte a la ecuación (3.20).

El objetivo de este apartado era mostrar que a partir de las funciones de forma se halla la matriz de rigidez de un elemento.

3.4 TERCERA FORMA DE CÁLCULO

Otra forma de encontrar las funciones de forma es considerando el comportamiento de un elemento totalmente rígido, como el presentado en la figura 3.7. La deformada ante cualquier tipo de carga será como de cuerpo rígido y es la indicada a la izquierda de la figura 3.7. Las ordenadas de la elástica para este elemento se observan a la derecha de 3.7.

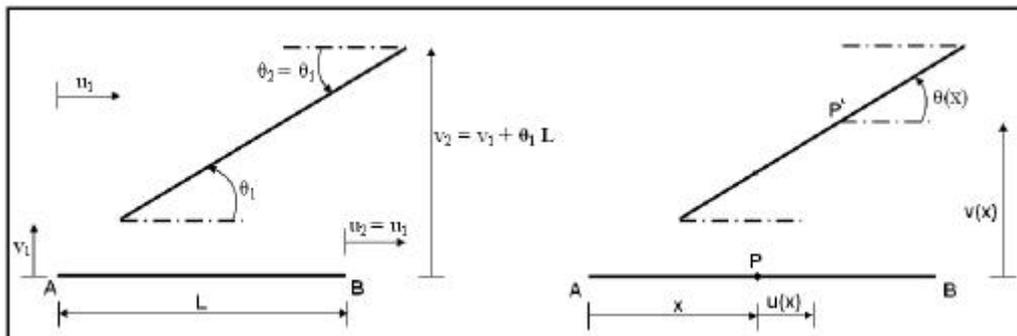


Figura 3.7 Deformada de un elemento totalmente rígido y ordenadas de la elástica

Por ser axialmente rígido, se tiene que:

$$u(x) = u_1$$

De la figura derecha de 3.7, se encuentra por geometría, lo siguiente:

$$v(x) = v_1 + \theta_1 X$$

$$\theta(x) = \theta_1$$

En base a las ecuaciones, se calcularán las funciones de forma $\phi_4(x)$, $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ en el presente apartado.

3.4.1 Cálculo de $\phi_4(x)$

Al reemplazar la ecuación de la elástica $u(x)$ en la primera ecuación, se obtiene:

$$u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x) = u_1$$

Pero por ser el miembro, axialmente rígido $u_2 = u_1$. Luego, la ecuación, queda:

$$u_1 \phi_1(x) + u_1 \phi_4(x) = u_1$$

De donde:

$$\phi_1(x) + \phi_4(x) = 1 \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) es fundamental y se aplica para elementos de sección constante o variable. Para un elemento de sección constante, se tiene:

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{x}{L}$$

$$\phi_4(x) = \frac{x}{L}$$

3.4.2 Cálculo de $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$

De igual manera, si se reemplaza la ecuación $v(x)$ en la segunda de las ecuaciones, se halla:

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x) = v_1 + \theta_1(x)$$

Pero por ser miembro transversalmente rígido, se tiene:

$$v_2(x) = v_1 + \theta_1 L$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Al reemplazar se encuentra:

$$v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_1 \phi_5(x) + \theta_1 L \phi_5(x) + \theta_1 \phi_6(x) = v_1 + \theta_1 X$$

$$v_1 [\phi_2(x) + \phi_5(x)] + \theta_1 [\phi_3(x) + L \phi_5(x) + \phi_6(x)] = v_1 + \theta_1 X$$

Para que esta expresión se cumpla, deberá cumplirse que:

$$\phi_2(x) + \phi_5(x) = 1$$

$$\phi_3(x) + L \phi_5(x) + \phi_6(x) = X \quad (3.22)$$

Relaciones que permitirán calcular fácilmente $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$ a partir de $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$. Para un elemento lineal de sección constante se tiene:

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}\right) = \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} = \frac{x^2}{L} \left(3 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\phi_5(x) = \frac{X^2}{L} \left(3 - \frac{2X}{L} \right)$$

Usando, la relación $\phi_3(x) + L\phi_5(x) + \phi_6(x) = X$, y por un procedimiento análogo se tiene:

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right)$$

3.4.3 Resumen de las ordenadas de la elástica

- **Elemento totalmente flexible**

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x) \\ v(x) &= v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x) \\ \theta(x) &= \frac{dv(x)}{dx} = v'(x) \end{aligned}$$

- **Elemento axialmente rígido**

Si un elemento es axialmente rígido $A = \infty$, significa que, $u_1 = u_2$, en consecuencia no existe $\phi_1(x)$ y $\phi_4(x)$, quedando de la siguiente manera las expresiones de la elástica:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1 = u_2 \\ v(x) &= v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x) \\ \theta(x) &= \frac{dv(x)}{dx} = v'(x) \end{aligned} \tag{3.23}$$

- **Elemento transversalmente rígidos**

El elemento no trabaja a flexión, $I = \infty$, solo se deforma axialmente. Por consiguiente, las expresiones de la elástica son:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x) \\ v(x) &= v_1 + \theta_1 X \\ \theta(x) &= \theta_1 = \theta_2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por lo tanto, cuando el miembro es transversalmente rígido, no es necesario calcular $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$.

3.5 INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS

En este apartado se van a obtener las funciones de forma y la matriz de rigidez para un elemento lineal, en forma similar, por no decir igual, a la presentada en los apartados 3.3.2 y 3.3.3. Pero en una forma similar a la que se hace con los elementos finitos. Se destaca que un elemento lineal es un elemento finito de dos nudos; para el caso de flexión se consideran 2 grados de libertad en cada nudo.

3.5.1 Funciones de forma en un elemento finito lineal de dos nudos

Otra manera de interpolar, para el caso de flexión en que se desprecia el efecto de corte, consiste en imponerse un determinado polinomio, cuyas constantes se calculan en base a las condiciones de borde. Para imponerse el polinomio es necesario tener en cuenta que la deformación transversal de un elemento viene definida por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = y \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$

Donde ε es la deformación transversal, y es la ordenada vertical que define un punto de la viga, medida a partir del eje. En el apartado 3.3.2, se indicó que la ordenada de la elástica $v(x)$ tiene que ser de la siguiente forma.

$$v(x) = A + B X + C X^2 + D X^3 \quad (3.25)$$

Al derivar (3.25) se encuentra el giro:

$$\theta(x) = B + 2C X + 3D X^2 \quad (3.26)$$

Las condiciones de contorno que sirven para el cálculo de las constantes A, B, C Y D son:

- | | |
|---------------|------------------------|
| 1. En $X = 0$ | $v(x) = v_1$ |
| 2. En $X = 0$ | $\theta(x) = \theta_1$ |
| 3. En $X = L$ | $v(x) = v_2$ |
| 4. En $X = L$ | $\theta(x) = \theta_2$ |

Al reemplazar las cuatro condiciones, en las ecuaciones (3.25) y (3.26), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Algunos libros de elementos finitos, al sistema de ecuaciones lo escriben en forma compacta de la siguiente manera:

$$U^n = C \beta$$

Donde U^n es el vector que contiene el término independiente del sistema, C es la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales y β es el vector de incógnitas.

$$\beta = C^{-1} U^n$$

La inversa de la matriz C es:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\beta = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ -\frac{3}{L^2}v_1 - \frac{2}{L}\theta_1 + \frac{3}{L^2}v_2 - \frac{1}{L}\theta_2 \\ \frac{2}{L^3}v_1 + \frac{1}{L^2}\theta_1 - \frac{2}{L^3}v_2 + \frac{1}{L^2}\theta_2 \end{bmatrix}$$

Al sustituir las constantes A, B, C Y D en la ecuación que define la ordenada de la elástica vertical (3.25), se encuentra luego de factorar, lo siguiente:

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)$$

En forma matricial:

$$v(x) = \Phi U^n$$

Siendo:

$$\Phi = [\phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_5(x) \quad \phi_6(x)]$$

3.5.2 Cálculo de la matriz de rigidez de miembro

Al calcular la deformación ε , se tiene:

$$\varepsilon = y \frac{d^2 y}{dx^2} = y \frac{d^2}{dx^2} \Phi U^n = B U^n$$

Siendo:

$$B = \frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_5(x) & \phi_6(x) \end{bmatrix}$$

Las segundas derivadas de las funciones de forma indicadas, reportan:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{L} & \frac{12X}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6X}{L^2} & \frac{6}{L} - \frac{12X}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6X}{L^2} \end{bmatrix}$$

Para encontrar la matriz de rigidez de un elemento, para el caso de flexión, se tiene:

$$k = \iiint B E B^T dV \quad (3.27)$$

Donde dV es un diferencial de volumen. En el apartado 3.3.3 se obtuvo directamente la matriz de rigidez del elemento finito lineal de dos nudos. La forma más general en que se trabaja con los elementos finitos es la indicada en la ecuación (3.27) en la cual la matriz de rigidez se halla integrando; la integración se realiza empleando la cuadratura de Gauss.

3.5.3 Elemento finito lineal de 3 nudos

Se desea encontrar las funciones de forma y matriz de rigidez, de un elemento finito lineal considerando tres nudos, los dos extremos y uno en el centro. A las funciones de forma de este elemento se denomina funciones "refinadas". Se realiza todo esto para que el lector vea que es algo similar a lo realizado en el apartado 3.3.3, cuando se trabajó el elemento lineal con dos nudos, pero no se presentará aplicaciones en este libro con las funciones de forma refinadas es más se las identificará con otra letra. Evidentemente que es mejor trabajar un elemento finito de lineal con 3 nudos en relación a un elemento finito lineal de 2 nudos, especialmente cuando se tiene carga en el elemento.

En la figura 3.8 se presenta la nomenclatura considerada en los tres nudos y en la tabla 3.3, se indican las condiciones de "borde".

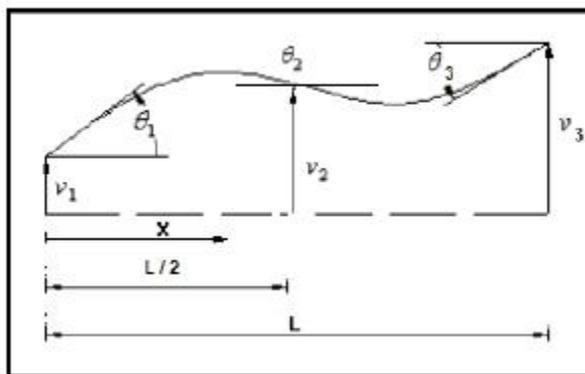


Figura 3.8 Elemento con tres puntos de interés

Tabla 3.3 Condiciones y nomenclatura para hallar funciones de forma refinadas

Punto i	0	1	2
X_i	0	$L/2$	L
$v(x)$	v_1	v_2	v_3
$\theta(x)$	θ_1	θ_2	θ_3

Al tener 6 puntos la ordenada de la elástica $v(x)$ será un polinomio de quinto grado, de la forma:

$$v(x) = A x^5 + B x^4 + C x^3 + D x^2 + E x + F$$

$$\theta(x) = 5 A x^4 + 4 B x^3 + 3 C x^2 + 2 D x + E$$

Al reemplazar las condiciones indicadas en la tabla 3.3, en las ecuaciones que definen el giro y el momento se obtiene, el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \binom{l^5}{2} & \binom{l^4}{2} & \binom{l^3}{2} & \binom{l^2}{2} \binom{l}{2} & 1 & 0 \\ \binom{l^4}{2} & \binom{l^3}{2} & \binom{l^2}{2} & \binom{l}{2} & 1 & 0 \\ 5 \binom{l^4}{2} & 4 \binom{l^3}{2} & 3 \binom{l^2}{2} & 2 \binom{l}{2} & 1 & 0 \\ l^5 & l^4 & l^3 & l^2 & l & 1 \\ [5l^4 & 4l^3 & 3l^2 & 2l & 1 & 0] \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ [F] \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ [\theta_3] \end{matrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta.

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ [F] \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{24v_1}{16v_2} & - & \frac{4\theta_1}{l} & - & \frac{4\theta_3}{16\theta_2} & - & \frac{4\theta_3}{l^4} \\ & 68v_1 & 52v_3 & 12\theta_1 & 40\theta_2 & 8\theta_3 \\ & \frac{66v_1}{32v_2} & 34v_3 & 13\theta_1 & 32\theta_2 & 5\theta_3 \\ & \frac{16v_2}{23v_3} & & & & \\ & 23v_1 & \frac{l}{\theta_1} & 6\theta_1 & 8\theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

Al reemplazar las constantes de integración en la ecuación que define la ordenada de la elastica y luego de agrupar términos se halla.

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2 + N_5(x) v_3 + N_6(x) \theta_3 \quad (3.28)$$

Donde $N(x)$ son las funciones de forma para el elemento lineal de 3 nudos

$$N_1(x) = 24 \left(\frac{x}{l}\right)^5 - 68 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 66 \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 23 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1$$

$$N_3(x) = 16 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 32 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 16 \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$N_5(x) = -24 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + 52 \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 34 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 7 \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$N_2(x) = -4x \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 12x \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 13x \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 6x \left(\frac{x}{l}\right) - x$$

$$N_4(x) = -16x \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 40x \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 32x \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 8x \left(\frac{x}{l}\right)$$

$$N_6(x) = -4x \left(\frac{x}{l}\right)^4 + 8x \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 5x \left(\frac{x}{l}\right)^2 + x \left(\frac{x}{l}\right)$$

Para encontrar la matriz de rigidez, se procede en forma similar a la descrita en el apartado 3.3.3 y se obtiene lo siguiente.

$$k = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} 5092 & 1138 & 512 & 384 & 1508 & 242 \\ 35 \cdot L^3 & 35 \cdot L^2 & 5 \cdot L^3 & 7 \cdot L^2 & 35 \cdot L^3 & 35 \cdot L^2 \\ 1138 & 332 & 128 & 64 & 242 & 38 \\ 35 \cdot L^2 & 35 \cdot L & 5 \cdot L^2 & 7 \cdot L & 35 \cdot L^2 & 35 \cdot L \\ 512 & 128 & 1024 & 0 & 512 & 128 \\ 5 \cdot L^3 & 5 \cdot L^2 & 5 \cdot L^3 & & 5 \cdot L^3 & 5 \cdot L^2 \\ 384 & 64 & 0 & 256 & 384 & 64 \\ 7 \cdot L^2 & 7 \cdot L & & 7 \cdot L & 7 \cdot L^2 & 7 \cdot L \\ 1508 & 242 & 512 & 384 & 5092 & 1138 \\ 35 \cdot L^3 & 35 \cdot L^2 & 5 \cdot L^3 & 7 \cdot L^2 & 35 \cdot L^3 & 35 \cdot L^2 \\ 242 & 38 & 128 & 64 & 1138 & 332 \\ 35 \cdot L^2 & 35 \cdot L & 5 \cdot L^2 & 7 \cdot L & 35 \cdot L^2 & 35 \cdot L \end{pmatrix}$$

3.6 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

3.6.1 Cálculo de momentos de Empotramiento

Del estudio anterior se deduce que: $\phi_1(x)$, es la elástica longitudinal, cuando existe un desplazamiento unitario en el nudo inicial, $u_1 = 1$ y los demás desplazamientos nulos. $\phi_2(x)$ es la elástica transversal cuando existe $v_2 = 1$ y los demás desplazamientos y rotaciones nulas, etc.

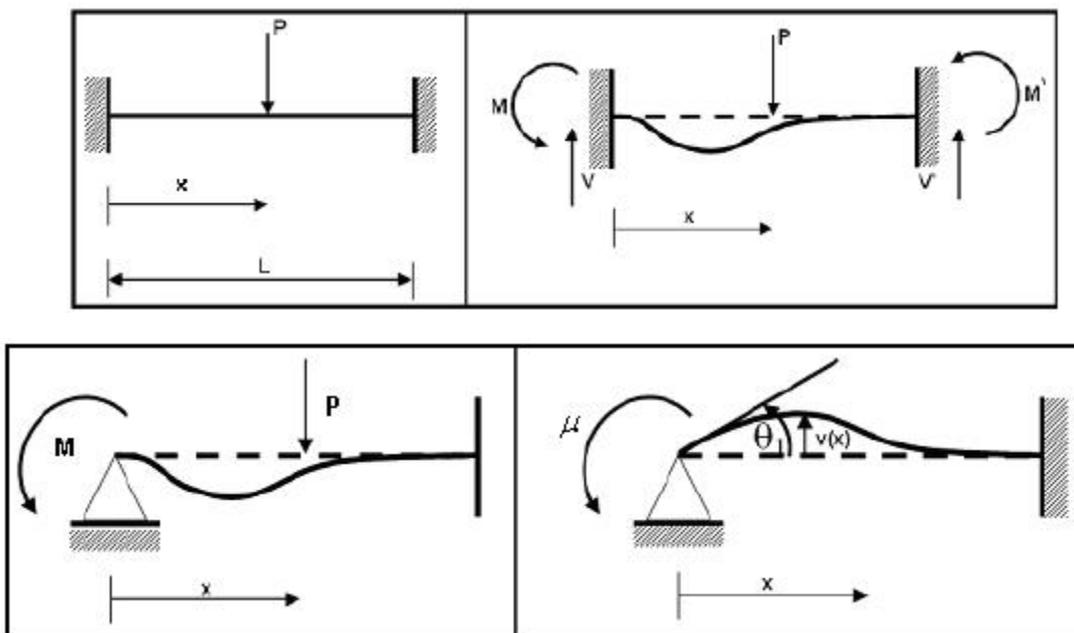


Figura 3.9 Cálculo del Momento de empotramiento perfecto en nudo inicial

En la parte superior izquierda, de la figura 3.9 se presenta una viga empotrada-empotrada que también se conoce con el nombre de biempotrada, con una carga vertical P, actuando a una distancia X del nudo inicial; a la derecha se observa la elástica de deformación vertical y las acciones de empotramiento perfecto, que garantizan el equilibrio del elemento.

Ahora si se elimina el empotramiento pero se coloca su momento M , se tendrá lo ilustrado en la parte inferior izquierda de la figura 3.9, nótese que el giro es nulo tanto en el nudo inicial como final a esto se denominará sistema I.

Por otra parte, al aplicar un momento cualquiera μ de tal forma que produzca un ángulo θ_1 en el nudo inicial y los demás corrimientos de nudo cero, como se indica en la parte inferior derecha de la figura 3.9, se tiene el sistema II.

El trabajo virtual del sistema I en el sistema II que se llamará TV_{I-II} es:

$$TV_{I-II} = M \theta_1 - P v(x)$$

De otro lado el trabajo virtual del sistema II en I, TV_{II-I} vale:

$$TV_{II-I} = \mu \theta = 0$$

Como $TV_{I-II} = TV_{II-I}$ se tiene que:

$$M\theta_1 - P v(x) = 0$$

De donde:

$$M = \frac{P v(x)}{\theta_1}$$

Al existir únicamente el giro θ_1 en el gráfico del sistema II, el valor de $v(x) = \theta_1 \phi_3(x)$. Al reemplazar este valor se encuentra.

$$M = P \phi_3(x) \quad (3.29)$$

Por un procedimiento similar se obtiene:

$$M' = P \phi_6(x) \quad (3.30)$$

3.6.2 Cálculo de cortantes de empotramiento

En el sistema de cargas, indicado en la parte superior de la figura 3.9, se procede al cálculo del cortante en el nudo inicial para esto se elimina el empotramiento perfecto y se coloca un empotramiento móvil como lo ilustra la figura 3.10 pero actúa el cortante V . Este será el nuevo sistema I, nótese que el nudo inicial no se desplaza verticalmente; para que se mueva verticalmente se aplica una fuerza F de tal forma que produzca un corrimiento v_1 y todos los demás corrimientos de nudo nulos, teniéndose de esta manera el sistema II.

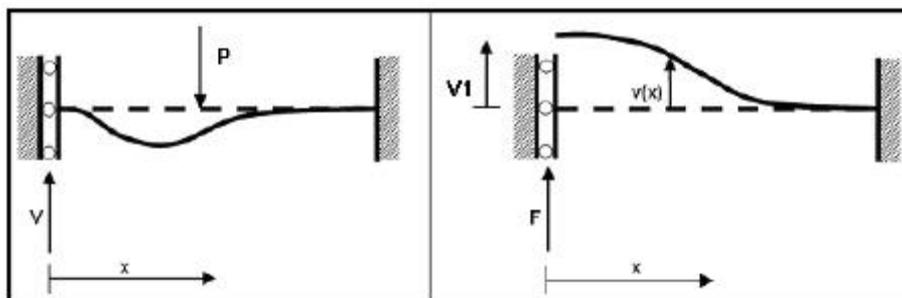


Figura 3.10 Sistemas I y II para el cálculo del cortante de empotramiento en el nudo inicial

Al aplicar trabajos virtuales y proceder de forma similar al numeral anterior se tiene:

$$\begin{aligned} TV_{I-II} &= V v_1 - P v(x) \\ TV_{II-I} &= F 0 = 0 \end{aligned} \Rightarrow V v_1(x) - P v(x) = 0 \Rightarrow V = \frac{P v(x)}{v_1}$$

$v(x) = v_1 \phi_2(x)$ Luego:

Pero

Al trabajar con V se obtiene: $V = P \phi_2(x)$ (3.31)

$$V' = P \phi_5(x) \tag{3.32}$$

3.6.3 Cálculo de la fuerza axial de empotramiento

En este caso la carga P actúa axial al eje del elemento y se encuentra a una distancia X . Se deja al lector la explicación de la forma como se obtiene la fuerza axial de empotramiento N en el nudo inicial y N' en el nudo final, en forma resumida se tiene:

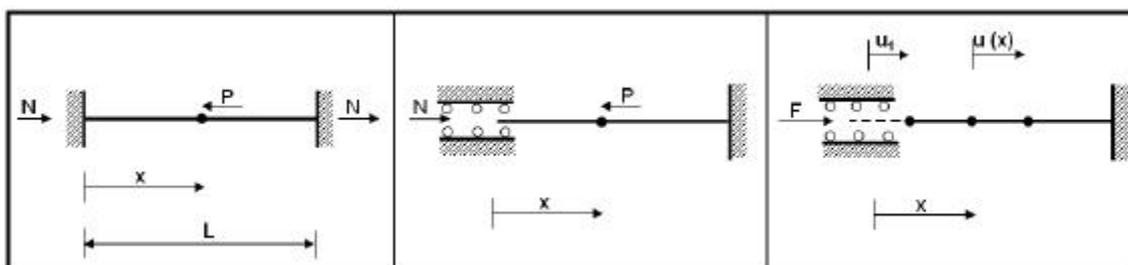


Figura 3.11 Fuerza axial en un elemento y sistemas I y II para el cálculo de la fuerza axial.

$$\begin{aligned} TV_{I-II} &= N u_1 - P u(x) \\ TV_{II-I} &= F 0 = 0 \end{aligned} \Rightarrow N u_1 - P u(x) = 0 \Rightarrow N = \frac{P u(x)}{u_1}$$

Pero $u(x) = u_1(x) \phi_1(x)$.

Luego:

$$N = P \phi_1(x) \tag{3.33}$$

De una manera similar se demuestra que:

$$N' = P \phi_4(x) \tag{3.34}$$

Es decir, que una interpretación estática de las funciones de formas es la siguiente:

- $\phi_1(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial N .
- $\phi_2(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte V .
- $\phi_3(x)$ es la línea de influencia del momento M .
- $\phi_4(x)$ es la línea de influencia de la fuerza axial N' .

- $\phi_5(x)$ es la línea de influencia de la fuerza de corte V .
- $\phi_6(x)$ es la línea de influencia del momento M .

Antes de proceder a realizar ejemplos, sobre el cálculo de momentos y fuerzas de empotramiento perfecto, es necesario tener presente:

- La abscisa X se mide a lo largo del eje del elemento, no en la proyección horizontal como puede pensarse en elementos inclinados.
- En las ecuaciones (3.29) a (3.32), la carga P actúa perpendicular al eje del miembro, **no es vertical en un elemento inclinado sino perpendicular al eje del elemento**.
- En las ecuaciones (3.33) y (3.34), la carga P es axial al eje del miembro, **no es horizontal en un elemento inclinado, sino que se mide en la dirección axial**.

3.6.4 Forma directa de encontrar las acciones de empotramiento perfecto

Otra forma de demostrar las ecuaciones (3.29) a (3.34) es la siguiente. Para el caso de flexión se tiene que el trabajo de la fuerza vertical P , en la deformada $v(x)$ es:

$$TV = P v(x) = P [v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)]$$

Por otro lado al liberar los nudos se tienen fuerzas discretas V, M, V', M' , para el caso de flexión, cuyo trabajo virtual vale:

$$TV = V v_1 + M \theta_1 + V' v_2 + M' \theta_2$$

Pero estos dos trabajos virtuales deben ser iguales, luego:

$$P[v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)] = V v_1 + M \theta_1 + V' v_2 + M' \theta_2 \quad (3.35)$$

Para calcular el cortante V solo existe v_1 y los demás nulos $\theta_1 = 0$; $v_2 = 0$; $\theta_2 = 0$. Al reemplazar esto en la ecuación (3.35) se obtiene:

$$P \phi_2(x) = V$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (3.35) se demuestra el cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para flexión; se deja al lector la generalización para el caso de las fuerzas axiales.

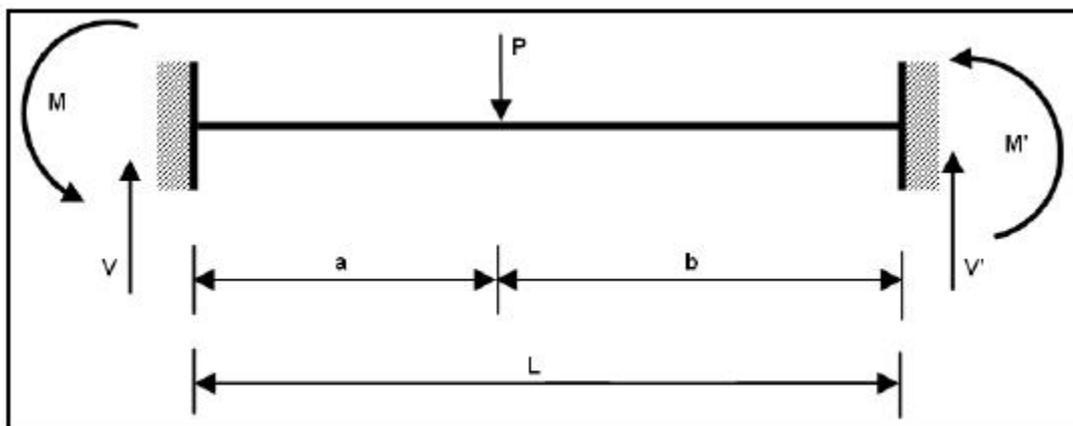


Figura 3.12 Viga con carga puntual

• EJEMPLO 1

Para el elemento lineal de sección constante, de la figura 3.12, determinar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto, si la carga $P = 10 T; a = 2 m; L = 6 m$.

• SOLUCION

Para calcular las fuerzas y momentos de empotramiento primero se evalúan las funciones de forma en los puntos de aplicación de las cargas.

Para el ejemplo se tiene, para $X = a$:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - \frac{a}{L} = \frac{b}{L} \\ \phi_2(x) &= 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} \\ \phi_3(x) &= \frac{a}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right)^2 = \frac{ab^2}{L^2} \\ \phi_4(x) &= \frac{a^2}{L} \left(1 - \frac{2a}{L} \right) = -\frac{a^2}{L} \\ \phi_5(x) &= \frac{a^2}{L} \left(\frac{a}{L} \right) = \frac{a^3}{L^2} \\ \phi_6(x) &= -\frac{a^2}{L} \left(\frac{a}{L} \right) = -\frac{a^3}{L^2} \end{aligned}$$

Solamente, para ilustrar la forma de cálculo se obtuvieron las seis funciones de forma, $\phi_1(x)$ y $\phi_4(x)$ no se requiere ya que la carga es perpendicular al elemento y no existe fuerza axial en consecuencia las fuerzas axiales de empotramiento perfecto son nulas.

$$V = P \begin{pmatrix} \frac{3a}{2} + \frac{2a}{3} \\ (3a - b) \end{pmatrix} \frac{L}{3}$$

Se deja como ejercicio a que el estudiante demuestre que:

$$\frac{Pb^2}{L^3}$$

Para lo cual debe tener en cuenta que $a + b = L$

$$M = P \phi_3(x) = \frac{Pa^2b^2}{L^2}$$

$$V' = P \cdot \phi_5(x) = \frac{Pa^3}{L^2} \left(\frac{2a}{L} \right) = \frac{2Pa^4}{L^3}$$

$$M' = P \phi_6(x) = -\frac{Pa^3}{L^2}$$

Al reemplazar los datos del problema: $P = 10 T; a = 2 m; L = 6 m$. Se obtiene.

$$V = -\frac{P b^2}{L^3} (3a + b) = -\frac{10 * 4^2}{6^3} (3 * 2 + 4) = 7.4074 \text{ T.}$$

$$M = -\frac{P a b^2}{L^2} = -\frac{10 * 2 * 4^2}{6^2} = 8.8889 \text{ Tm.}$$

$$V' = -\frac{P a^2}{L^3} (a + 3b) = -\frac{10 * 2^2}{6^3} (2 + 3 * 4) = 2.5926 \text{ T.}$$

$$M' = -\frac{P a^2 b}{L^2} = -\frac{10 * 2^2 * 4}{6^2} = -4.4444 \text{ Tm.}$$

En la figura 3.13 se presentan los resultados obtenidos.

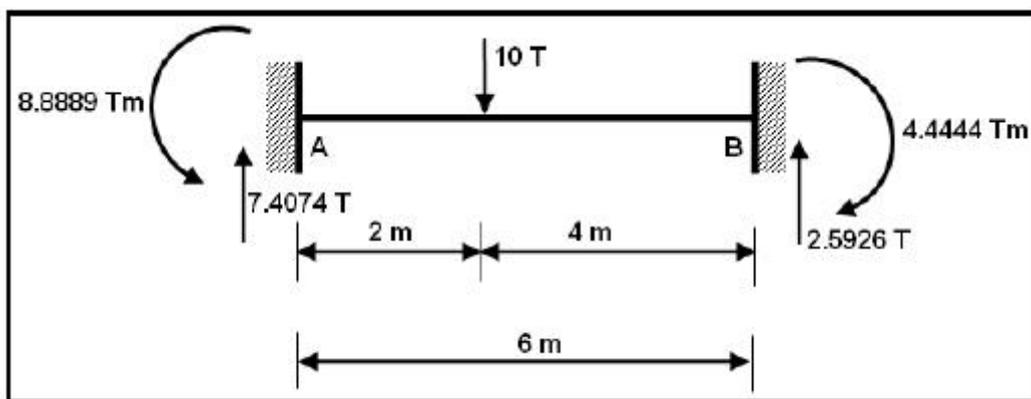


Figura 3.13 Resultados del Ejemplo 1.

Para comprobar que el ejercicio está bien realizado, se debe verificar que exista equilibrio en el elemento.

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_Y = 0 & \Rightarrow 7.4074 + 2.5926 - 10 = 0 \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow 2.5926 * 6 + 8.8889 - 4.4444 - 10 * 2 = 0 \end{aligned}$$

• EJEMPLO 2

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante que se indica en la figura 3.14

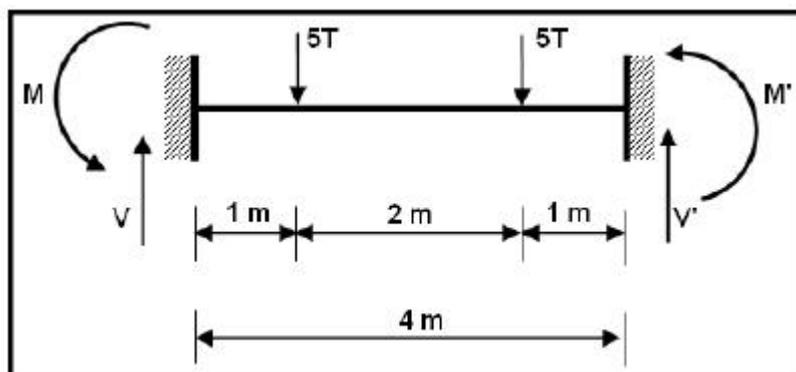
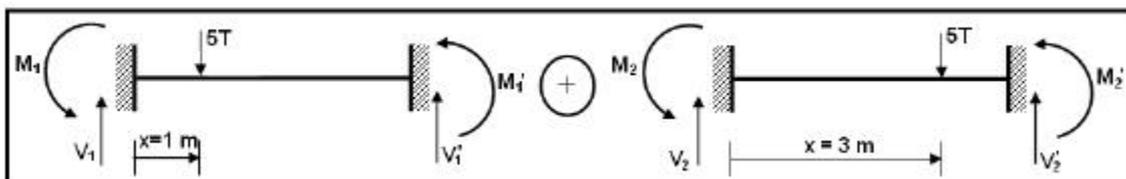


Figura 3.14 Datos del Ejemplo 2

- **SOLUCION**

Se aplica el principio de superposición lineal en la solución del ejemplo 2. En consecuencia la solución total será igual a la solución de cuando se aplica la carga de 5 T. de la izquierda más la solución de cuando se aplica la otra carga de 5 T. de la derecha, como se indica a continuación.



- Para $X = 1 m$.

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = 0.84375 &\Rightarrow V_1 = 5 * 0.84375 = 4.21875 T. \\ \phi_3(x) = 0.56250 &\Rightarrow M_1 = 5 * 0.56250 = 2.8125 Tm. \\ \phi_5(x) = 0.15625 &\Rightarrow V_1' = 5 * 0.15625 = 0.78125 T. \\ \phi_6(x) = -0.18750 &\Rightarrow M_1' = 5 * (-0.1875) = -0.9375 Tm. \end{aligned}$$

- Para $X = 3 m$.

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = 0.15625 &\Rightarrow V_2 = 5 * 0.15625 = 0.78125 T. \\ \phi_3(x) = 0.18750 &\Rightarrow M_2 = 5 * 0.1875 = 0.93750 Tm. \\ \phi_5(x) = 0.84375 &\Rightarrow V_2' = 5 * 0.84375 = 4.21875 T. \\ \phi_6(x) = -0.56250 &\Rightarrow M_2' = 5 * (-0.5625) = -2.8125 Tm. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = 5.00 T. & V' &= V_1' + V_2' = 5.00 T. \\ M &= M_1 + M_2 = 3.75 Tm. & M' &= M_1' + M_2' = -3.75 Tm. \end{aligned}$$

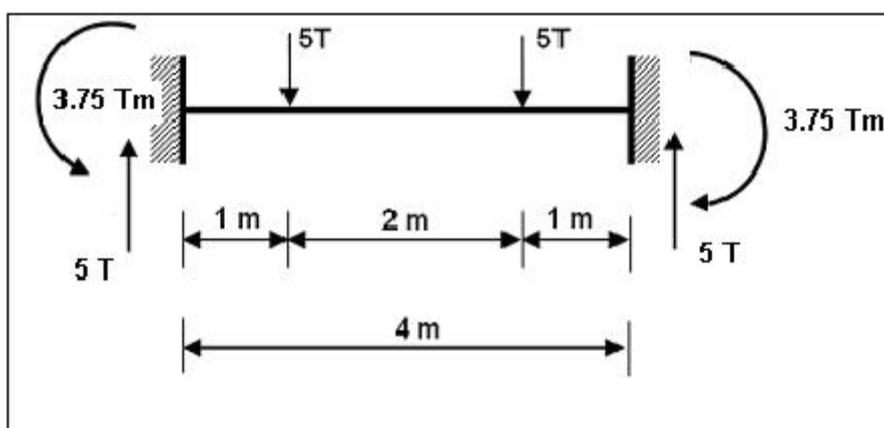


Figura 3.15 Solución del Ejemplo 2

- EJEMPLO 3

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para la viga de sección constante de la figura 3.16 si sobre ella actúa una carga uniforme distribuida de magnitud P_0 .

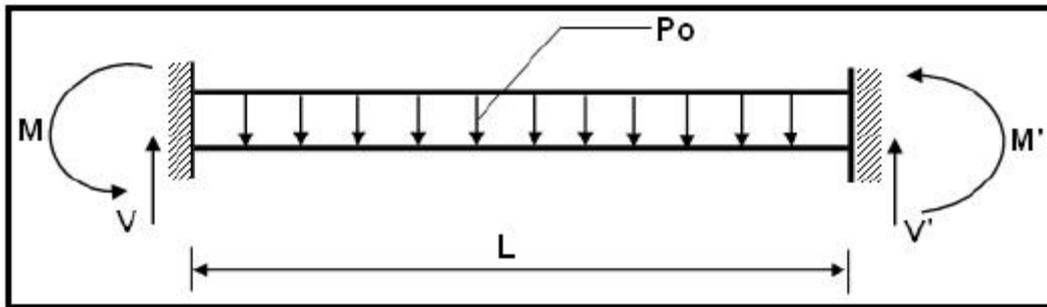


Figura 3.16 Viga con carga uniforme distribuida

- SOLUCION

En el Ejemplo 2 cuando se tienen dos cargas puntuales al aplicar el principio de la superposición lineal los momentos y fuerzas de empotramiento son iguales a la contribución de cada una de las cargas. Este mismo principio se aplica el presente ejemplo teniendo en cuenta que la sumatoria no es nada más que la integral. Entonces para carga uniforme distribuida se tiene:

$$V = \int_0^L P_0 \phi^2(x) dx$$

$$M = \int_0^L P_0 \phi^3(x) dx$$

$$V' = \int_0^L P_0 \phi^5(x) dx$$

$$M' = \int_0^L P_0 \phi^6(x) dx$$

Los límites de las integrales corresponden a donde actúan la carga para el presente caso de "0" a "L". Para el corte V , y momento M

$$V = \int_0^L P_0 \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \right) dx = P_0 \left(X - \frac{X^3}{L^2} + \frac{2X^4}{4L^3} \right) \Big|_0^L \Rightarrow V = \frac{P_0 L}{2}$$

$$M = \int_0^L P_0 \left[X \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 \right] dx = \int_0^L P_0 \left[X \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2} \right) \right] dx = \int_0^L P_0 \left(X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \right) dx$$

$$M = P_0 \left(\frac{1}{2} X^2 - \frac{2}{3L} X^3 + \frac{1}{4L^2} X^4 \right) \Big|_0^L = P_0 L \left(\frac{L^2}{2} - \frac{2L^2}{3} + \frac{L^2}{4} \right) = P_0 L \left(\frac{6-8+3}{12} \right) \Rightarrow M = \frac{P_0 L^2}{12}$$

Al efectuar las integrales indicadas para V y M se obtienen:

$$V' = \frac{P_o L}{2} \quad M' = -\frac{P_o L^2}{12}$$

El signo menos del momento M' significa que el sentido es horario.

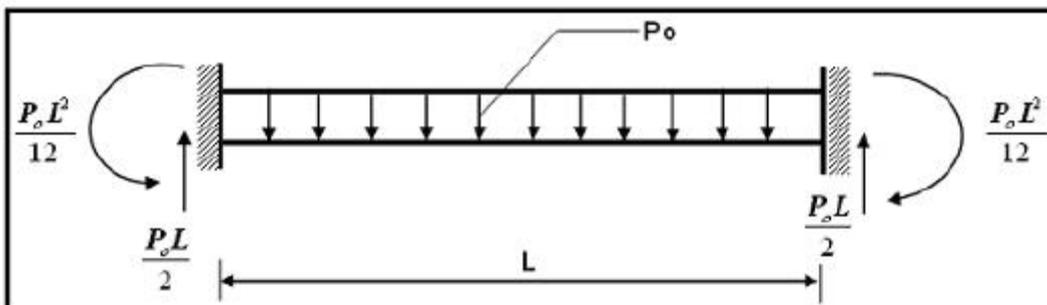


Figura 3.17 Acciones de empotramiento para carga uniforme.

• EJEMPLO 4

Encontrar las fuerzas y momentos de empotramiento, para el elemento de sección constante de la figura 3.18 si actúa un momento concentrado de magnitud M en el centro de la luz.

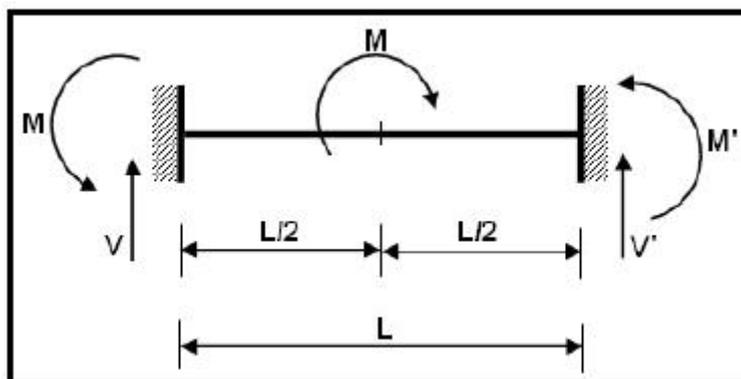


Figura 3.18 Estado de carga del ejemplo 4.

• SOLUCION

Al tener un momento, se tienen que derivar las funciones de forma previamente:

$$\begin{aligned} \phi_2'(x) &= -\frac{6X}{L^2} + \frac{6X^2}{L^3} \\ \phi_3(x) &= \left(1 - \frac{X}{L}\right) \begin{pmatrix} L - 3X \\ L \end{pmatrix} \\ \phi_5(x) &= \frac{6X}{L} - \frac{6X^2}{L^3} \\ \phi_6'(x) &= \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X}{L} \end{aligned}$$

Luego se debe evaluar $\phi_2'(x)$, $\phi_3'(x)$; etc., en el punto de aplicación del momento, el resultado que se obtiene para $X = L/2$

$$\begin{aligned}\phi_2'(x = L/2) &= -\frac{3}{2L} & \phi_3'(x = L/2) &= -\frac{1}{4} \\ \phi_5'(x = L/2) &= \frac{3}{2L} & \phi_6'(x = L/2) &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$V = M \phi_2'(x) = -\frac{3M}{2L}$$

$$M = M \phi_3'(x) = -\frac{M}{4}$$

$$V' = M \phi_5'(x) = \frac{3M}{2L}$$

$$M' = M \phi_6'(x) = -\frac{M}{4}$$

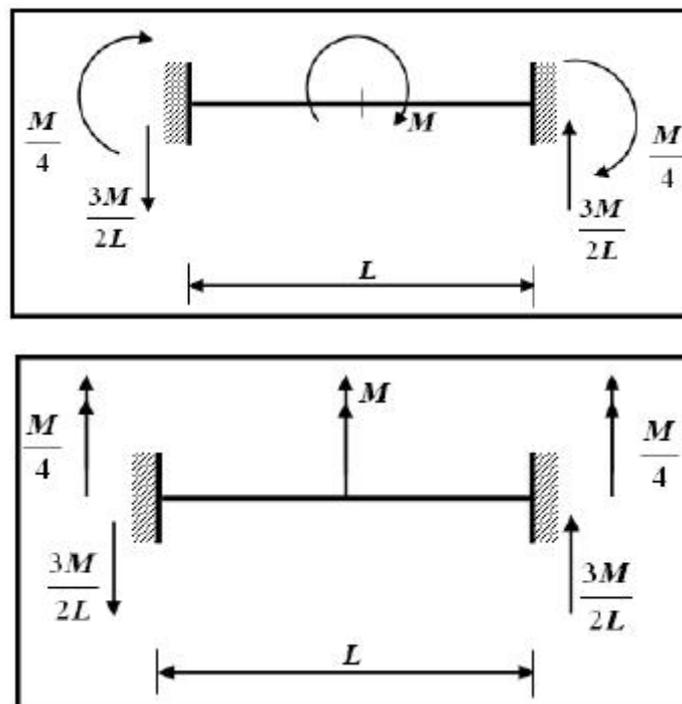


Figura 3.19 Resultados del Ejemplo 4

En la figura 3.19, se presenta dos maneras de escribir el problema realizado, la notación que se indica en la parte superior es la que se utiliza en este libro.

3.6.5 Cálculo de las deflexiones

Dentro del hormigón armado, uno de los problemas que todavía tiene que ser estudiado y analizado es el cálculo de las deflexiones diferidas. Este fenómeno producido por dos causas, conceptualmente distintas pero muy difíciles de separar con precisión en la práctica: la retracción y la fluencia del concreto, llamada también deformación lenta y escurrimiento plástico, depende de una gran cantidad de variables, entre ellas se han de enumerar las siguientes: la relación del agregado al cemento, la mineralogía del agregado y su tamaño, la

temperatura, velocidad del viento, humedad relativa del ambiente, el curado y la edad del concreto, el tamaño de la muestra y el nivel de esfuerzos.

Por todo esto es tan complejo el cálculo de deflexiones diferidas, pero no así el cálculo de las **deflexiones instantáneas las mismas que pueden calcularse por medio de las funciones de forma.**

Por lo tanto, la deformación total es igual a la deformación instantánea más la deformación diferida. En este capítulo se estudia el cálculo de la deformación instantánea exclusivamente.

En el capítulo anterior se indicó que la solución total de una estructura es igual al problema primario más el problema complementario. El problema primario se resuelve considerando al elemento biempotrado y se resolvió un ejemplo en el cual se determinó la ordenada de la elástica $v(x)$ de una viga empotrada-empotrada sometida a una carga uniforme distribuida. La solución se obtuvo a partir de la ecuación diferencial de flexión de cuarto orden la misma que es obtenida con la convención de signos de resistencia de materiales, en la que el desplazamiento vertical es positivo si va hacia abajo; en este libro la convención de signos es lo contrario por este motivo es que se cambia de signo, para tener desplazamiento positivo si va hacia arriba.

Para una viga de sección constante, en la que gravita una carga uniforme distribuida de magnitud p_0 , la ecuación con la que se obtiene el desplazamiento vertical, en un punto interior de la viga es:

$$v(x) = v_1\phi_2(x) + \theta_1\phi_3(x) + v_2\phi_5(x) + \theta_2\phi_6(x) - \frac{P_0}{24EI} (X^4 + X^2L^2 - 2X^3L) \quad (3.36)$$

• EJEMPLO 5

El pórtico plano de la figura 3.20 está conformado por columnas de 35 cm x 35 cm y vigas de 30 cm x 30 cm, (columna fuerte viga débil). Tiene un módulo de elasticidad igual a 1800000 T/m². Sobre éste pórtico gravita una carga uniforme distribuida de 2T/m. Se desea encontrar $v(x)$ en el punto medio, de la viga, del vano derecho

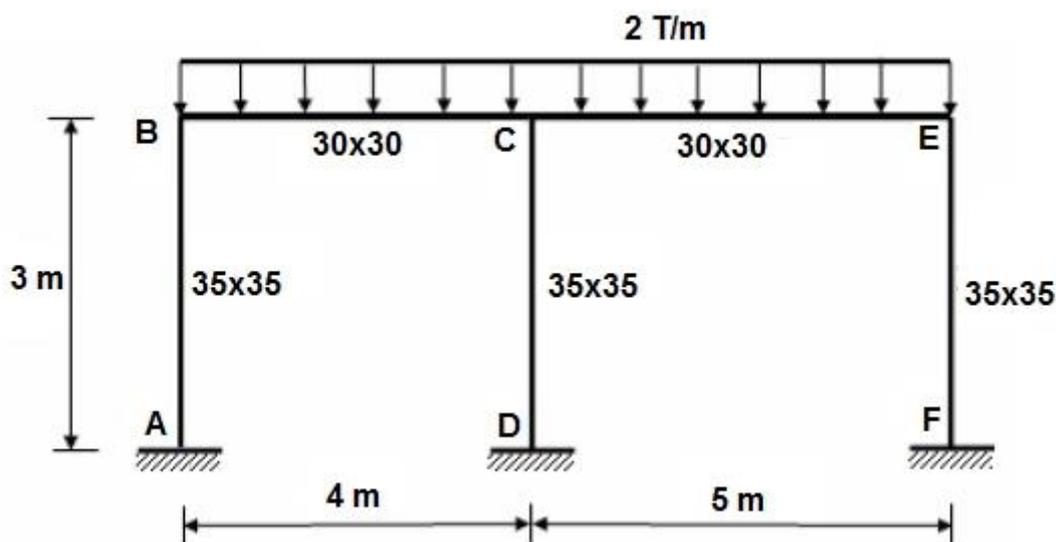


Figura 3.20 Estructura de Ejemplo 5.

▪ SOLUCIÓN

Se consideran que los elementos son totalmente flexibles, en consecuencia existen tres grados de libertad por nudo. Los grados de libertad con las cuales se resuelve la estructura se presenta en la figura 3.21.

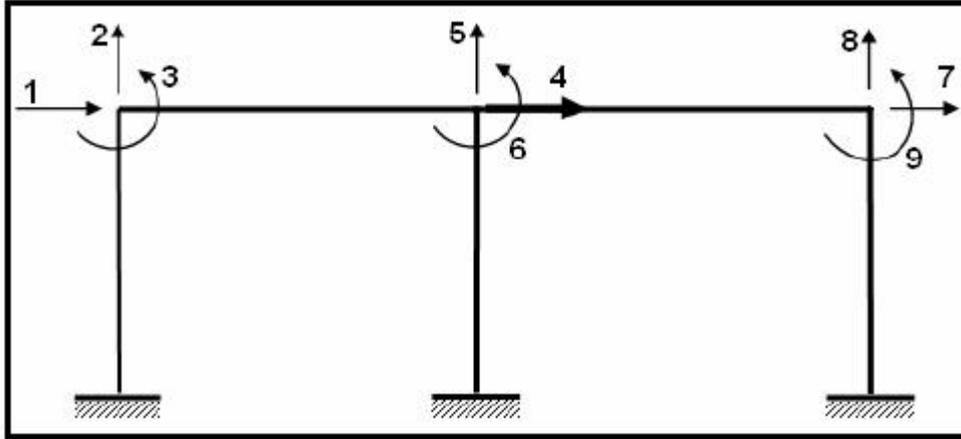


Figura 3.21 Sistema de coordenadas $Q - q$

El cálculo del vector de coordenadas generalizadas q , se verá en los capítulos posteriores de este libro. Por ahora, se presentan los resultados que se obtuvieron al utilizar un programa de computación.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} -0.000129 \\ -0.000049 \\ -0.000569 \\ -0.000153 \\ -0.000131 \\ -0.000301 \\ -0.000200 \\ -0.000065 \\ 0.001191 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos están en metros y los giros en radianes. Nótese que son muy bajos en consecuencia la estructura trabaja en el rango elástico, para las cargas del problema.

Para el cálculo de $v(x)$, es necesario encontrar las coordenadas locales del elemento CE, las mismas que se obtienen del vector \bar{q} .

$$\begin{aligned} v_1 &= q_5 = -0.000131 \text{ m.} \\ \theta_1 &= q_6 = -0.000301 \text{ rad.} \\ v_2 &= q_8 = -0.000065 \text{ m.} \\ \theta_2 &= q_9 = 0.001191 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Al evaluar las funciones de forma en $x = 2.5 \text{ m}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= 1 - \frac{3x^2}{2x^3} - \frac{3 * 2.5^2}{2 * 2.5^3} = 0.5 \\ \phi_5(x) &= 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{l} \left[1 - \frac{2.5}{5} \right] = 0.625 \text{ m.}$$

$$\phi_6(x) = - \frac{x^2}{l * 5} \left[1 - \frac{2.5}{5} \right] = -0.625 \text{ m}$$

Por otra parte el factor $Po/24EI$, y la solución particular, valen:

$$\frac{P_0}{24EI} = \frac{2}{24 * 1800000 \left(\frac{0.30 * 0.30^3}{12}\right)} = 6,858710 * 10^{-5} \frac{1}{m^3}$$

$$v_p = -\frac{P_0}{24EI} (X^4 + X^2L^2 - 2X^3L) = 0.00267919$$

$$v(x) = -0.5 * 0.000131 - 0.000301 * 0.625 - 0.000065 * 0.5 - 0.001191 * 0.625 - 0.002679$$

$$v(x) = -0.003709 \text{ m.}$$

Ésta es la deformación instantánea en el centro del segundo vano, el signo menos indica que en éste punto el eje de la viga se desplaza hacia abajo.

• EJEMPLO 6

Los elementos de la estructura presentada a la izquierda de la figura 3.22, son totalmente flexibles; a la derecha se indican los grados de libertad. Se pide encontrar la ordenada de la elástica $v(x)$ en el punto P, punto medio de la viga, en función de las coordenadas q

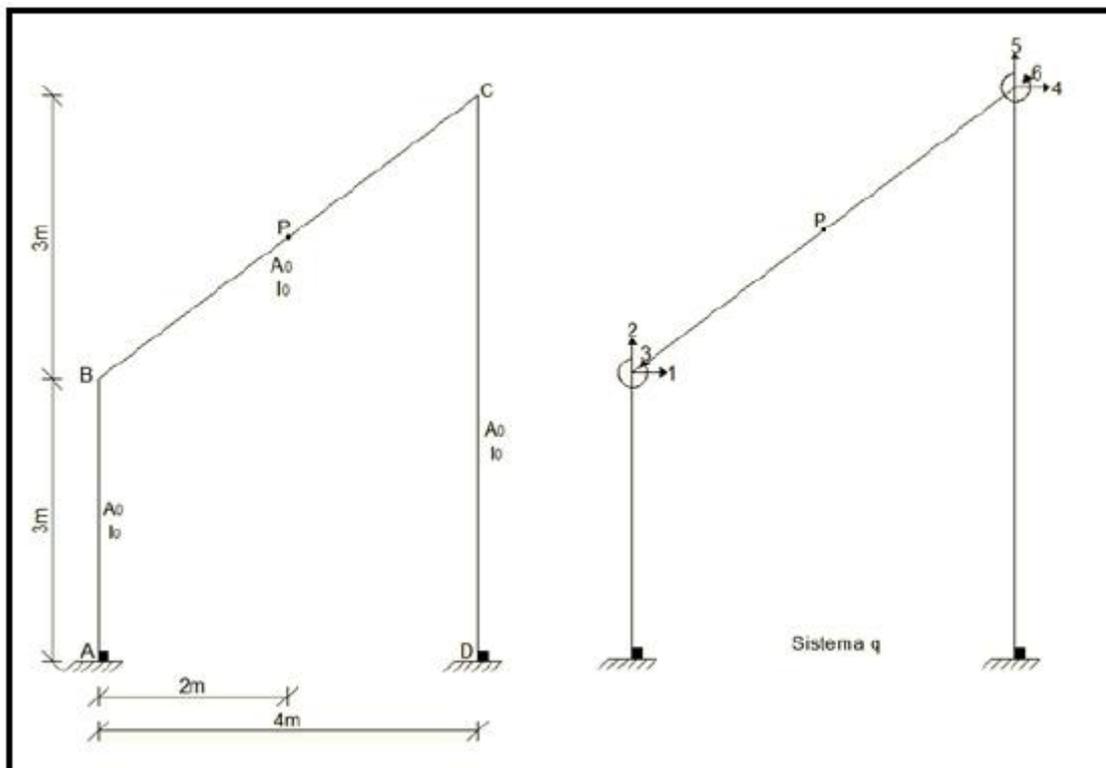
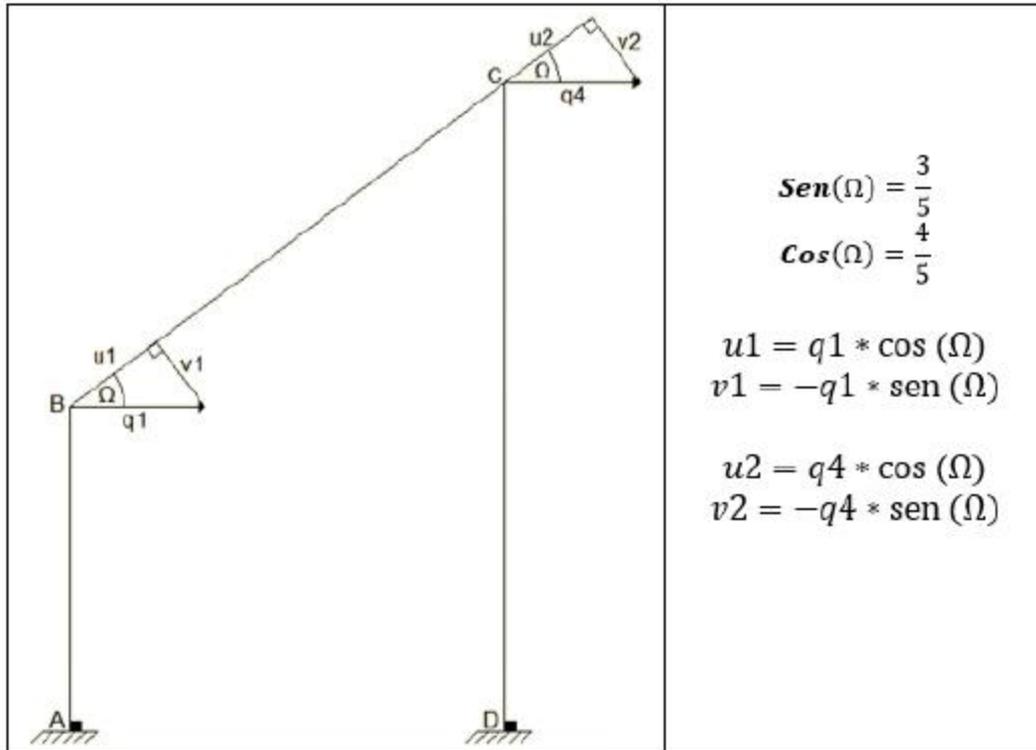
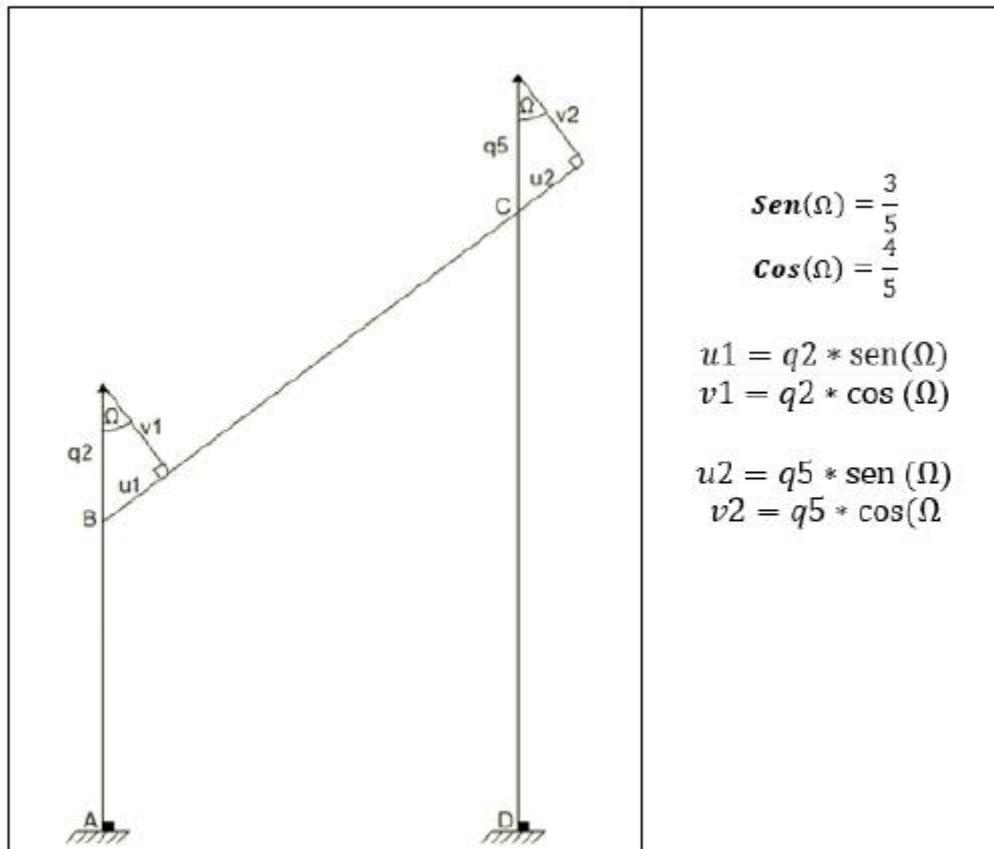


Figura 3.22 Estructura de Ejemplo 6.

▪ SOLUCIÓN

Para determinar las coordenadas del elemento: u_1, v_1, u_2, v_2 se debe descomponer las coordenadas q_1, q_2, q_4, q_5 en sus componentes axial y transversal; esto se presenta en la figura 3.23 para q_1, q_4 , y en la figura 3.24 para q_2, q_5 .

Figura 3.23 Descomposición de las coordenadas $\{1, 4\}$ Figura 3.24 Descomposición de las coordenadas $\{2, 5\}$

Al aplicar el principio de superposición, se halla las coordenadas del elemento.

$$\begin{aligned}u_1 &= q_1 * \cos(\Omega) + q_2 * \text{sen}(\Omega) \\v_1 &= -q_1 * \text{sen}(\Omega) + q_2 * \cos(\Omega) \\u_2 &= q_4 * \cos(\Omega) + q_5 * \text{sen}(\Omega) \\v_2 &= -q_4 * \text{sen}(\Omega) + q_5 * \cos(\Omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= q_1 * \frac{4}{5} + q_2 * \frac{3}{5} \\v_1 &= -q_1 * \frac{3}{5} + q_2 * \frac{4}{5} \\u_2 &= q_4 * \frac{4}{5} + q_5 * \frac{3}{5} \\v_2 &= -q_4 * \frac{3}{5} + q_5 * \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Ahora al evaluar las funciones de forma en $x = 2.5$, se encuentra.

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} = 0.5 \\ \phi_2(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} = 0.5 \\ \phi_3(x) &= x(1 - \frac{x}{L})^2 = 0.625 \\ \phi_4(x) &= \frac{x}{L} = 0.5 \\ \phi_5(x) &= \frac{x^2}{L^2} (3 - 2 \frac{x}{L}) = 0.5 \\ \phi_6(x) &= -\frac{x^2}{L^2} (1 - \frac{x}{L}) = -0.625\end{aligned}$$

Luego las ordenadas de la elástica, son:

$$\begin{aligned}u(x) &= u_1 * \phi_1(x) + u_2 * \phi_4(x) \\v(x) &= v_1 * \phi_2(x) + \theta_1 * \phi_3(x) + v_2 * \phi_5(x) + \theta_2 * \phi_6(x) \\u(x) &= (q_1 * \frac{4}{5} + q_2 * \frac{3}{5}) * 0.5 + (q_4 * \frac{4}{5} + q_5 * \frac{3}{5}) * 0.5 \\v(x) &= (-q_1 * \frac{3}{5} + q_2 * \frac{4}{5}) * 0.5 + q_3 * 0.625 + (-q_4 * \frac{3}{5} + q_5 * \frac{4}{5}) * 0.5 - q_6 * 0.625\end{aligned}$$

3.7 APLICACIÓN A LA INGENIERÍA SISMORRESISTENTE

Para el diseño de vigas, columnas y cimentación de un edificio, se considera que la carga que gravita sobre la losa se reparte a los pórticos a 45°, como lo ilustra la figura 3.25.

Prácticamente existen dos tipos de cargas que actúan sobre las vigas de un pórtico plano. Estas son:

- i. Carga triangular para la luz corta, y
- ii. Carga trapezoidal para la luz larga.

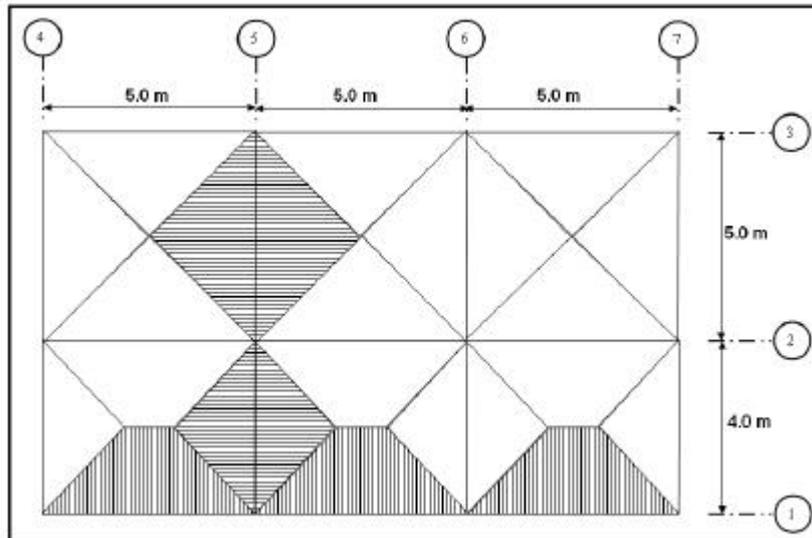


Figura 3.25 Vista en planta de un edificio que tiene 7 pórticos ortogonales

En este capítulo, se estudiará únicamente el cálculo de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto para estos dos tipos de carga.

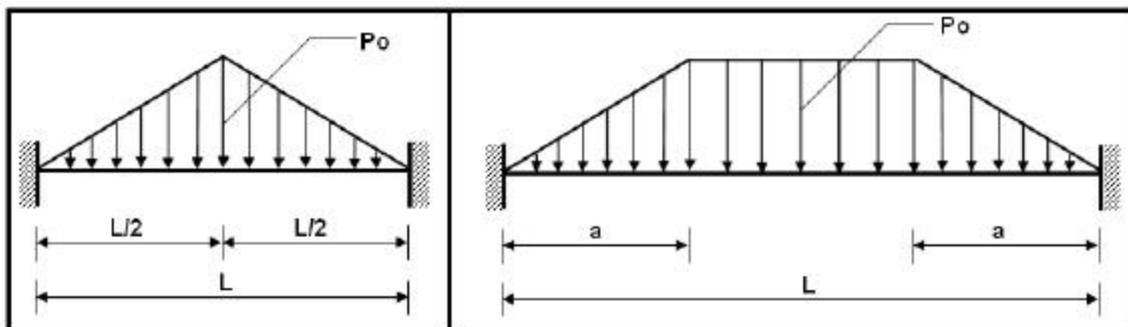


Figura 3.26 Carga Triangular y Trapezoidal

• EJEMPLO 7

Calcular el cortante y el momento de empotramiento, en el nudo inicial, de la viga, indicada a la izquierda de la figura 3.26, que tiene una cara triangular.

• SOLUCIÓN

Cálculo del cortante V :

$$V = \int P(y) \phi_2(x) dx$$

$P(y)$ es la ecuación de variación de la carga que en este caso es lineal. Luego hay que encontrar la ecuación de dos rectas de la forma:

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

Teniendo presente que la variable Y corresponde a la variación de carga P(y) y que existen dos pendientes m.

- Para $0 < x < L/2$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - 0} \Rightarrow m_1 = \frac{2P_0}{L} \Rightarrow P(y) = \frac{2P_0 X}{L}$$

- Para $L/2 \leq x < L$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{P_0 - 0}{\frac{L}{2} - L} \Rightarrow m_2 = \frac{2P_0}{L}$$

$$P(Y) - 0 = -\frac{2P_0}{L}(X - L) \Rightarrow P(Y) = 2P_0 - \frac{2P_0}{L} X$$

Por lo tanto, el cortante V en el nudo inicial se evalúa como sigue:

$$V = \int_0^{L/2} \frac{2P_0 x}{L} \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X}{L} \right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2P_0 x}{L} \left(1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X}{L} \right) dx$$

$$V = \int_0^{L/2} \frac{2P_0 x}{L} dx - \int_0^{L/2} \frac{6P_0 x^3}{L^2} dx + \int_0^{L/2} \frac{4P_0 x^2}{L} dx + \int_{L/2}^L \frac{2P_0 x}{L} dx - \int_{L/2}^L \frac{6P_0 x^3}{L^2} dx + \int_{L/2}^L \frac{4P_0 x^2}{L} dx - \int_{L/2}^L \frac{4P_0 x^2}{L} dx$$

$$\int_0^{L/2} \frac{2P_0 x}{L} dx = \frac{2P_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{L/2} = \frac{2P_0}{L} \cdot \frac{L^2}{8} = \frac{P_0 L}{4}$$

$$\int_0^{L/2} \frac{6P_0 x^3}{L^2} dx = \frac{6P_0}{L^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{L/2} = \frac{6P_0}{L^2} \cdot \frac{L^4}{64} = \frac{3P_0 L^2}{32}$$

$$\int_0^{L/2} \frac{4P_0 x^2}{L} dx = \frac{4P_0}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} = \frac{4P_0}{L} \cdot \frac{L^3}{24} = \frac{P_0 L^2}{6}$$

$$\int_{L/2}^L \frac{2P_0 x}{L} dx = \frac{2P_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{L/2}^L = \frac{2P_0}{L} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right) = \frac{2P_0}{L} \cdot \frac{3L^2}{8} = \frac{3P_0 L}{4}$$

$$\int_{L/2}^L \frac{6P_0 x^3}{L^2} dx = \frac{6P_0}{L^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{L/2}^L = \frac{6P_0}{L^2} \left(\frac{L^4}{4} - \frac{L^4}{64} \right) = \frac{6P_0}{L^2} \cdot \frac{15L^4}{64} = \frac{9P_0 L^2}{32}$$

$$\int_{L/2}^L \frac{4P_0 x^2}{L} dx = \frac{4P_0}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{L/2}^L = \frac{4P_0}{L} \left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{24} \right) = \frac{4P_0}{L} \cdot \frac{7L^3}{24} = \frac{7P_0 L^2}{6}$$

$$\int_{L/2}^L \frac{4P_0 x^2}{L} dx = \frac{4P_0}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{L/2}^L = \frac{4P_0}{L} \left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{24} \right) = \frac{4P_0}{L} \cdot \frac{7L^3}{24} = \frac{7P_0 L^2}{6}$$

$$V = \frac{P_0 L}{4} - \frac{3P_0 L^2}{32} + \frac{P_0 L^2}{6} + \frac{3P_0 L}{4} - \frac{9P_0 L^2}{32} + \frac{7P_0 L^2}{6} - \frac{7P_0 L^2}{6}$$

$$V = \frac{2P_0 X^2}{2L} - \frac{6P_0 X^4}{P_0 L^2} + \frac{4P_0 X^5}{2P_0 L} + 2P_0 X + \frac{4P_0 X^4}{4L^3} - \frac{6P_0 X^3}{P_0 L - P_0 L} - \frac{2P_0 X^2}{2L_0} + \frac{6P_0 X^4}{4L^3} - \frac{4P_0 X^5}{P_0 L^{5/2}}$$

Al reemplazar los límites de integración se tiene:

$$V = P_0 L \left(\frac{40 - 15 + 4 + 320 - 320 + 160 - 160 + 240 - 128 - 160 + 40 - 10 + 40 - 15 + 4}{40} \right)$$

$$V = \frac{PL}{4} - \frac{3}{32} \frac{PL^3}{40 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 4} + \frac{4PL^2}{32} + \frac{3PL}{40} - \frac{9PL^2}{32} + \frac{7PL^2}{6} - \frac{7PL^2}{6} = \frac{3PL}{32} - \frac{PL}{40}$$

$$V = \frac{40}{160} P_0 L = \frac{1}{4} P_0 L$$

Cálculo del Momento M

$$M = \int_0^L P(y)\phi_3(x) dx$$

$$M = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(2P_0 - \frac{2P_0 X}{L}\right) \left[X \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2\right] dx$$

$$M = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L} \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2P_0 X \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)^2 dx - \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2P_0 X^2}{L} \left(1 - \frac{2X}{L} + \frac{X^2}{L^2}\right)^2 dx$$

$$M = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^2}{L} dx - \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{4P_0 X^3}{L^2} dx + \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2P_0 X^4}{L^3} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L 2P_0 X dx - \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{4P_0 X^2}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2P_0 X^3}{L^2} dx -$$

$$- \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2P_0 X^2}{L} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{4P_0 X^3}{L^2} dx - \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2P_0 X^4}{L^3} dx$$

$$M = \left[\frac{2P_0 X^3}{3L} - \frac{4P_0 X^4}{4L^2} + \frac{2P_0 X^5}{5L^3} \right]_0^{\frac{L}{2}} + \left[\frac{2P_0 X^2}{2} - \frac{4P_0 X^3}{3L} + \frac{2P_0 X^4}{4L^2} - \frac{2P_0 X^3}{3L} + \frac{4P_0 X^4}{4L^2} - \frac{2P_0 X^5}{5L^3} \right]_{\frac{L}{2}}^L$$

Al sustituir los límites de integración se obtiene:

$$M = \left(\frac{2P_0 L^3}{3L} - \frac{P_0 L^4}{L^2} + \frac{2P_0 L^5}{5L^3} \right) - \left(\frac{2P_0 L^3}{3L} - \frac{4P_0 L^4}{4L^2} + \frac{2P_0 L^5}{5L^3} \right) + \left(\frac{2P_0 L^2}{2} - \frac{4P_0 L^3}{3L} + \frac{2P_0 L^4}{4L^2} - \frac{2P_0 L^3}{3L} + \frac{4P_0 L^4}{4L^2} - \frac{2P_0 L^5}{5L^3} \right) - \left(\frac{2P_0 L^2}{2} - \frac{4P_0 L^3}{3L} + \frac{2P_0 L^4}{4L^2} - \frac{2P_0 L^3}{3L} + \frac{4P_0 L^4}{4L^2} - \frac{2P_0 L^5}{5L^3} \right)$$

$$M = P_0 L^3 \left(\frac{200 - 150 + 30 + 2400 - 3200 + 1200 - 1600 + 2400 - 960 - 600 + 400 - 75 + 200 - 150 + 30}{2400} \right)$$

$$M = \frac{125}{2400} P_0 L^2 = \frac{5P_0 L^2}{96}$$

Por un procedimiento similar se obtendrá la fuerza y el momento de empotramiento para el nudo final, trabajando con $\phi_5(x)$ y $\phi_6(x)$, respectivamente. Los resultados a que se llega, son:

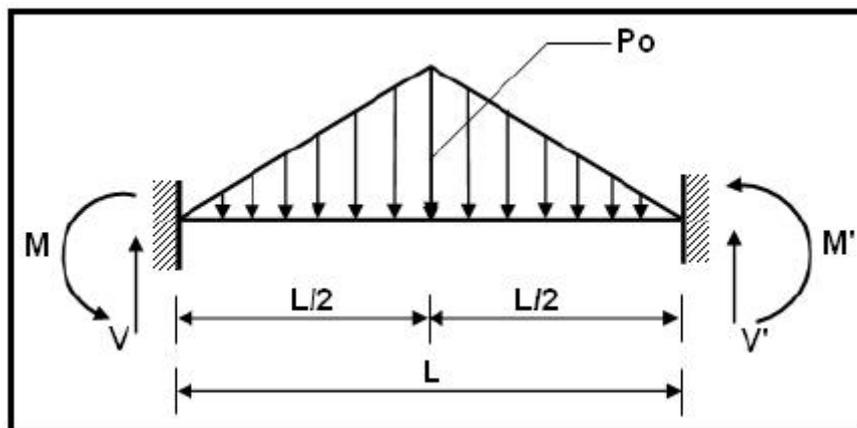


Figura 3.27 Acciones de empotramiento perfecto para una viga con carga triangular.

$$M = -\frac{5 P_o L^2}{96} = -M' \quad (3.37)$$

$$V = \frac{P_o L}{4} = V' \quad (3.38)$$

Para carga trapezoidal, se tiene:

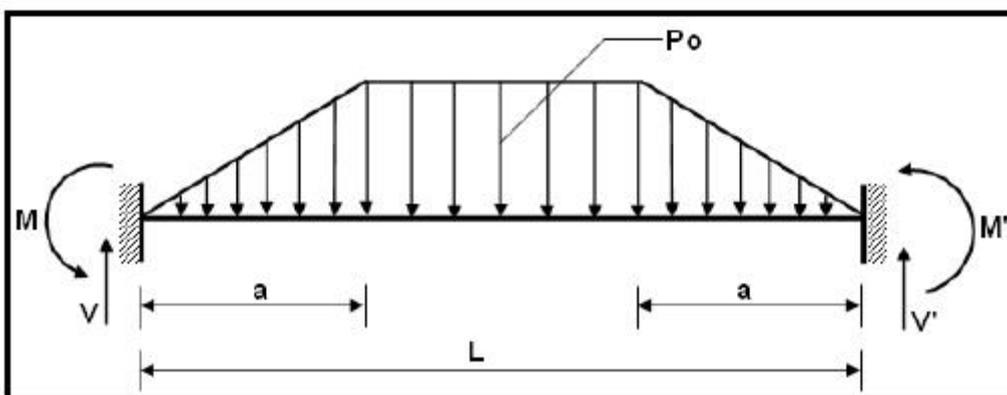


Figura 3.28 Acciones de empotramiento perfecto para una viga con carga trapezoidal.

$$M = -\frac{P_o L^2}{12} \left[1 - 2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 + \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right] = -M' \quad (3.39)$$

$$V = \frac{P_o L}{2} \left(1 - \frac{a}{L} \right) = V' \quad (3.40)$$

3.7.1 Carga rectangular equivalente

Con el gran desarrollo informático que se tiene, lo deseable es que se analicen los pórticos con cargas triangulares o trapezoidales, pero si no se dispone de un programa para este tipo de carga se puede transformar estas cargas a rectangulares equivalentes, como se muestra en la figura 3.29. Donde W es la carga por unidad de superficie (Ej. T/m²); p_0 es la carga equivalente por metro lineal.

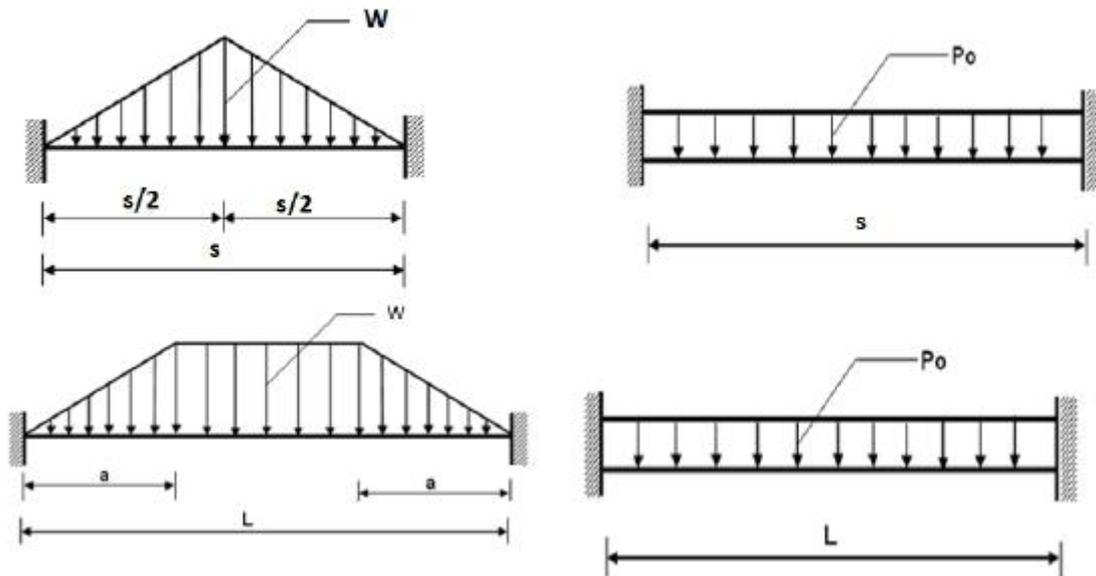


Figura 3.29 Carga rectangular equivalente para carga triangular y trapezoidal.

- **Carga Triangular**

$$p_0 = \frac{W s}{3} \quad (3.41)$$

- **Carga Trapezoidal**

$$p_0 = \frac{W s}{3} \left(\frac{3 - m^2}{2} \right) \quad (3.42)$$

$$m = \frac{s}{L}$$

Para un vano de una losa se tiene que: s es la menor dimensión y l es la mayor dimensión.

3.8 EJERCICIOS RESUELTOS

- **EJEMPLO 8**

Sobre el elemento lineal de sección constante de la figura 3.30, que tiene 5.0 m. de longitud actúa una carga concentrada P . Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto.

- **SOLUCIÓN**

i) Se evalúa las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ$$

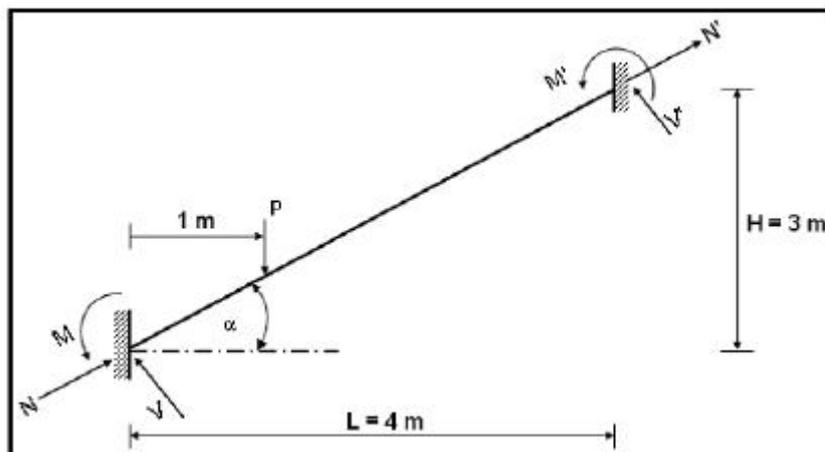


Figura 3.30 Carga Puntual en un elemento inclinado.

Se destaca que X se mide a lo largo del eje del miembro.

$$\cos \alpha \frac{1}{5} \Rightarrow X = 1.25$$

$$= \frac{X}{L}$$

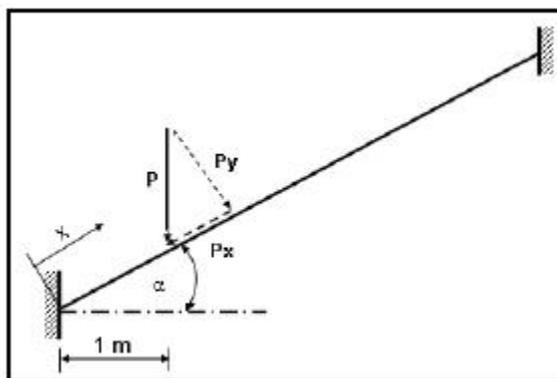


Figura 3.31 Descomposición de la carga puntual en transversal y axial.

- i) Se evalúa las funciones de forma en el punto de aplicación de la carga.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{1.25}{5.0} = 0.75$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3} = 1 - \frac{1.25^2}{5^2} + \frac{1.25^3}{5^3} = 0.844$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 1 - 0.844 = 0.156$$

$$\phi_3(x) = X \left(\frac{1-X}{L} \right)^2 = 1.25 \left(\frac{1-1.25}{5.00} \right)^2 = 0.703$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L} \left(\frac{1-X}{L} \right) = -1.25^2 \left(\frac{1-1.25}{5.00} \right) = -0.234$$

- ii) Se descompone la carga P, en una perpendicular al miembro P_y y en una longitudinal P_x , como muestra la figura 3.31.

$$P_y = P \cos\alpha = \frac{4}{5}P$$

$$P_x = P \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}P$$

iii) Las Fuerzas y momentos de empotramiento, son:

$$N = P_x \phi_1(x) = 0.75P \operatorname{sen}\alpha = 0.45P$$

$$V = P_y \phi_2(x) = 0.844P \operatorname{Cos}\alpha = 0.675P$$

$$M = P_y \phi_3(x) = 0.703P \operatorname{Cos}\alpha = 0.562P$$

$$N' = P_x \phi_4(x) = 0.25P \operatorname{sen}\alpha = 0.15P$$

$$V' = P_y \phi_5(x) = 0.156P \operatorname{Cos}\alpha = 0.125P$$

$$M' = P_y \phi_6(x) = -0.234P \operatorname{Cos}\alpha = -0.187P$$

• EJEMPLO 9

Para el pórtico plano de la figura 3.32, seleccionar un sistema de coordenadas $Q - q$ y hallar en función de las mismas, las componentes horizontal y vertical del desplazamiento y la rotación de la elástica, en la sección media del elemento AB.

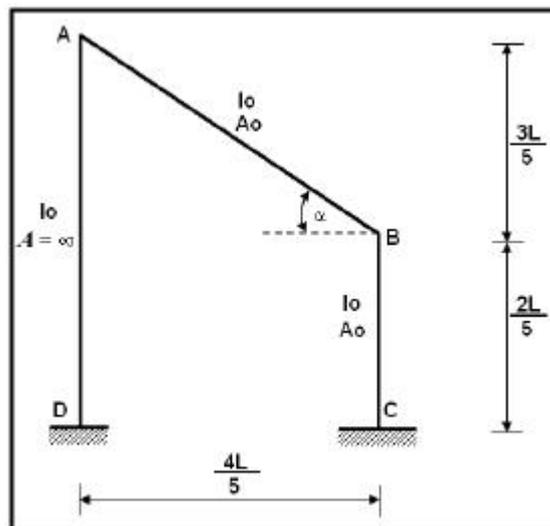


Figura 3.32 Geometría del Ejemplo 9.

• SOLUCIÓN

El sistema de coordenadas $Q - q$, para la estructura en estudio se presenta en la figura 3.33.

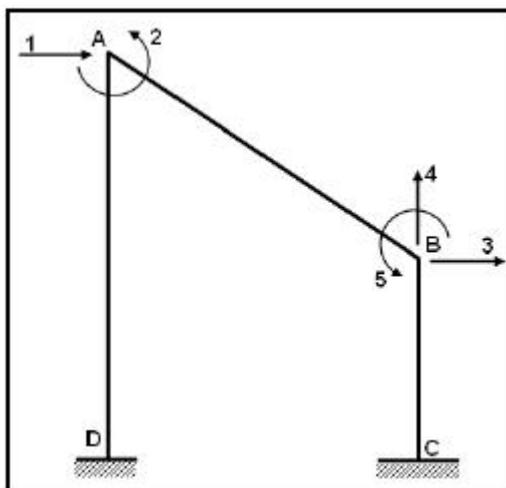


Figura 3.33 Sistema de coordenadas $Q - q$

Al no haber carga sobre el elemento AB, las ordenadas de la elástica son:

$$u(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_4(x)$$

$$v(x) = v_1 \phi_2(x) + \theta_1 \phi_3(x) + v_2 \phi_5(x) + \theta_2 \phi_6(x)$$

$$\theta(x) = v'(x)$$

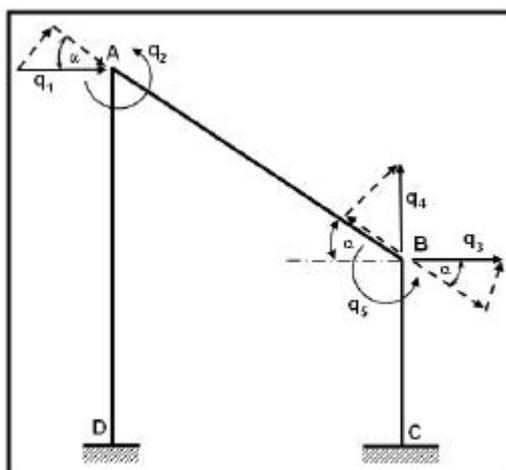


Figura 3.34 Descomposición de las coordenadas q_1 , q_3 y q_4 .

Ahora, hay que expresar u_1 , u_2 , v_1 , etc. En función de q_1 , q_2 , q_3 , etc. Para esto a las coordenadas q se descomponen en una perpendicular y una longitudinal al eje del elemento AB, como lo ilustra la figura 3.17.3.

Para el elemento AB se tiene:

$$u_1 = q_1 \cos \alpha$$

$$u_2 = q_3 \cos \alpha - q_4 \sin \alpha$$

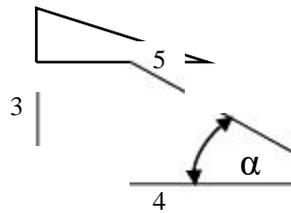
$$v_1 = q_1 \sin \alpha$$

$$v_2 = q_3 \sin \alpha + q_4 \cos \alpha$$

$$\Theta_1 = q_2$$

$$\Theta_2 = q_5$$

En la figura 3.32, se observa:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

Sustituyendo:

$$u_1 = \frac{4}{5} q_1$$

$$u_2 = \frac{4}{5} q_3 - \frac{3}{5} q_4$$

$$v_1 = \frac{3}{5} q_1$$

$$v_2 = \frac{3}{5} q_3 - \frac{4}{5} q_4$$

$$\Theta_1 = q_2$$

$$\Theta_2 = q_5$$

El siguiente paso es evaluar las funciones de forma, en el punto medio del elemento AB. Al analizar la figura 3.32 se ve que la longitud de este elemento es $L=5$ m., por lo que habrá que calcular en $X=L/2=2.5$ m.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{X}{L} = 1 - \frac{L}{2L} = 0.5$$

$$\phi_4(x) = 1 - \phi_1(x) = 0.5$$

$$\phi_2(x) = \frac{L^2 X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} = 1 - \frac{3L^2}{4L^2} + \frac{2L^3}{8L^3} = 0.5$$

$$\phi_5(x) = 1 - \phi_2(x) = 0.5$$

$$\phi_3(x) = \frac{X}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right)^2 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{L}{2L} \right)^2 = \frac{L}{8}$$

$$\phi_6(x) = -\frac{X^2}{L} \left(1 - \frac{X}{L} \right) = -\frac{L^2}{4L} \left(1 - \frac{L}{2L} \right) = -\frac{L}{8}$$

Al reemplazar las funciones de forma y las componentes de desplazamiento del elemento AB, en las expresiones de la elástica se halla:

$$u(x) = \frac{4}{5} q_1 \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5} q_3 - \frac{3}{5} q_4 \right) \frac{1}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{5} \left(2 q_1 + 2 q_3 - \frac{3}{2} q_4 \right)$$

$$v(x) = \frac{3}{5} q_1 \frac{1}{2} + q_2 \frac{L}{8} + \left(\frac{3}{5} q_3 + \frac{4}{5} q_4 \right) \frac{1}{2} - q_5 \frac{L}{8}$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} q_1 + \frac{L}{4} q_2 + \frac{3}{5} q_3 + \frac{4}{5} q_4 - \frac{L}{4} q_5 \right)$$

Para calcular $\theta(x)$ se debe escribir la forma general de $v(x)$ para posteriormente derivar.

$$\theta(x) = \frac{d}{dx} v(x)$$

$$\theta(x) = \frac{d}{dx} \left[v_1 \begin{pmatrix} 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \\ \theta_1 \begin{pmatrix} X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2} \\ \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} X^2 \\ \frac{X^3}{L} \end{pmatrix} \right]$$

$$\theta(x) = v_1 \begin{pmatrix} \frac{6X}{L} + \frac{6X^2}{L^3} \\ \theta_1 \begin{pmatrix} 1 - \frac{4X}{L} + \frac{3X^2}{L^2} \\ \frac{6X}{L} - \frac{6X^2}{L^3} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \frac{2X}{L} \\ \frac{3X^2}{L^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- Para $X = L/2$

$$\theta(x) = v_1 \begin{pmatrix} -\frac{6}{2L} + \frac{6}{4L} \\ \theta_1 \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{2} + \frac{3}{4} \\ \frac{6}{2L} - \frac{6}{4L} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L} v_1 - \frac{\theta_1}{4} + \frac{3}{2L} v_2 - \frac{\theta_1}{4}$$

De donde

$$\theta(x) = -\frac{3}{2L} \frac{3}{5} q_1 - \frac{1}{4} q_2 + \frac{3}{2L} \left(\frac{3}{5} q_3 + \frac{4}{5} q_4 \right) - \frac{1}{4} q_5$$

$$\theta(x) = -\frac{3}{10L} (3q_1 - 3q_3 - 4q_4) - \frac{1}{4} (q_2 + q_5)$$

EJEMPLO 10

Encontrar los momentos y fuerzas de empotramiento perfecto para un vano del pórtico 2 de la figura 3.35, si la carga permanente D es 0.8 T/m² y la carga transitoria L es 0.25 T/m².

Repartición de las cargas

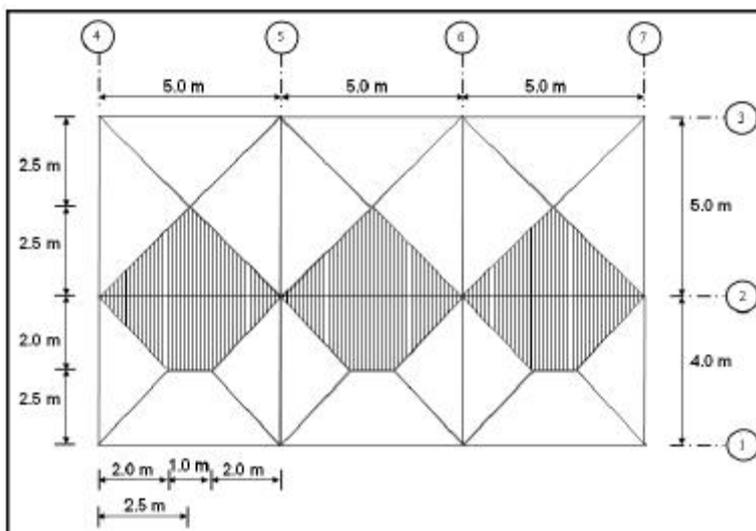


Figura 3.35 Mosaico de cargas en los pórticos.

SOLUCIÓN

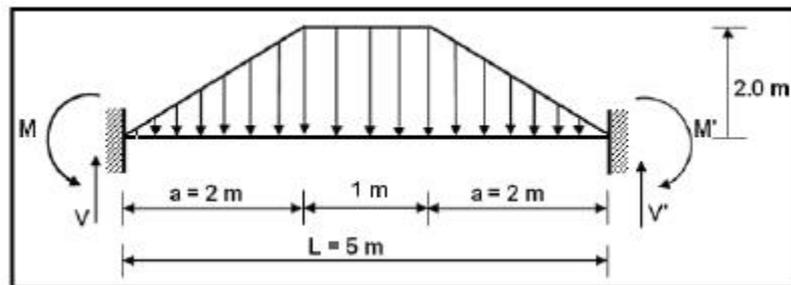
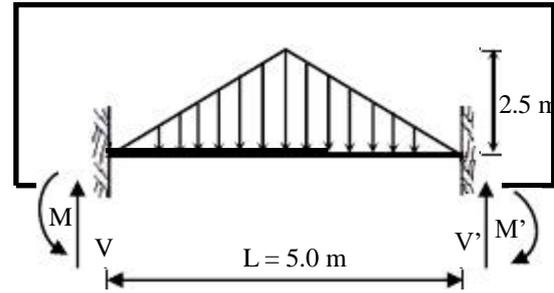
Sobre el pórtico 2 gravitan dos tipos de carga, una triangular y una trapezoidal.

$$\bullet \quad D=0.8 \text{ T/m}^2$$

$$P_o = 0.8 \cdot \frac{T}{m^2} * 2.5m = 2.0 \cdot \frac{T}{m}$$

$$V = V' = \frac{P_o L}{4} = \frac{2 * 5.0}{4} = 2.5T$$

$$M = M' = -\frac{5P_o L^2}{96} = \frac{5 * 2 * 25}{96} = 2.604 \cdot \frac{T}{m}$$

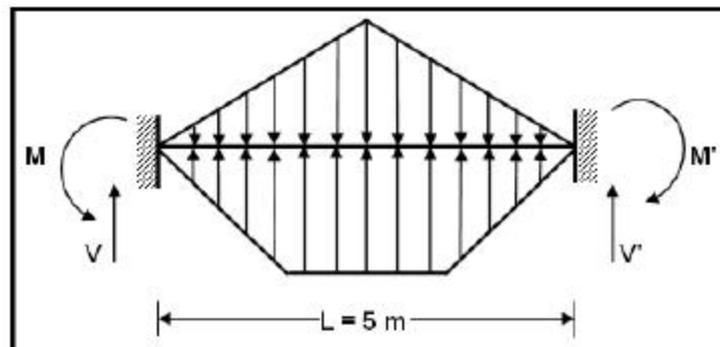


$$P_o = 0.8 \cdot \frac{T}{m^2} * 2.0m = 1.6 \cdot \frac{T}{m}$$

$$V = V' = \frac{P_o L}{2} \left(1 - \frac{a}{L}\right) = \frac{1.6 * 5.0}{2} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 2.4T$$

$$M = M' = -\frac{P_o L^2}{12} \left[1 - 2\left(\frac{a}{L}\right) + \left(\frac{a}{L}\right)^3\right] = -\frac{1.6 * 25}{12} \left[1 - 2\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right] = 2.48 \text{ T.m}$$

Superposición de efectos.



$$V = V' = 2.5 T + 2.4 T = 4.9 T$$

$$M = M' = 2.604 + 2.48 = 5.084 \text{ T.m}$$

- Pórtico 2 $L=0.25 \text{ T/ m}^2$

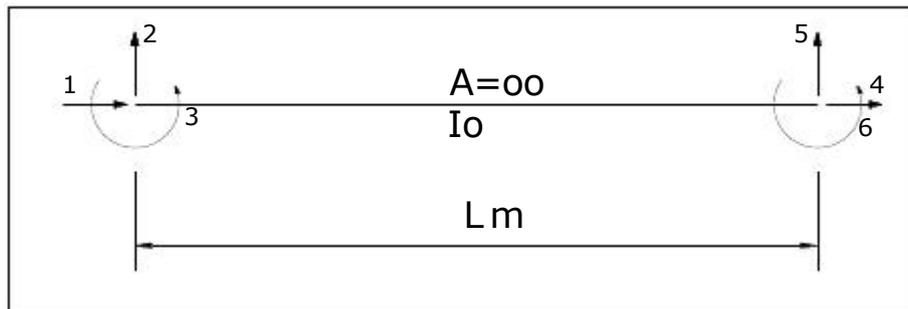
Para la segunda parte del problema se puede volver a repetir el cálculo pero con el objeto de ilustrar una nueva forma se realiza aplicando la definición de que en el rango elástico la teoría es lineal. En consecuencia con dos simples reglas de tres se obtiene la solución, una para calcular el cortante y otra para encontrar el momento.

Con 0.8 T/m^2 ----- 4.9 T
 0.5 T/m^2 ----- $V = ?$ $V' = V = 1.531 \text{ T}$

Con 0.8 T/m^2 ----- 5.084 T.m
 0.25 T/m^2 ----- $M = ?$ $M = M' = 1.589 \text{ T.m}$

EJEMPLO 11

Calcular los elementos de la segunda columna de la matriz de rigidez de una barra de sección constante de longitud L, para las coordenadas indicadas en la figura, empleando la formulación de elementos finitos.



$$k(i,j) = \int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j'(x) dx$$

- **Calculo de k(1,2)**

$$k(1,2) = \int_0^L EI \phi_1''(x) \phi_2'(x) dx$$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \Rightarrow \phi_1'(x) = -\frac{1}{L} \Rightarrow \phi_1''(x) = 0$$

$$k(1,2) = 0$$

- **Calculo de k(2,2)**

$$k(2,2) = \int_0^L EI \phi_2''(x) \phi_2'(x) dx$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{2L^3} \Rightarrow \phi_2'(x) = -\frac{6x}{L^3} \Rightarrow \phi_2''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$k(2,2) = \int_0^L EI \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left(-\frac{6x}{L^3} \right) dx$$

$$k(2,2) = E I_0 \int_0^L \left(\frac{36}{l^4} x - \frac{144}{l^5} x^2 - \frac{144}{l^6} x^3 \right) dx$$

$$k(2,2) = E I_0 \int_0^L \frac{36 dx}{l^4} - E I_0 \int_0^L \frac{144 x}{l^5} dx + E I_0 \int_0^L \frac{144 x^2}{l^6} dx$$

$$k(2,2) = E I_0 \left(\frac{36 x}{l^4} - \frac{144 x^2}{2 l^5} + \frac{144 x^3}{3 l^6} \right) \Big|_0^L$$

$$k(2,2) = E I_0 \left(\frac{36 L}{l^4} - \frac{72 L^2}{l^5} + \frac{48 L^3}{l^6} \right)$$

$$k(2,2) = E I_0 \left(\frac{36 L}{l^4} - \frac{72 L^2}{l^5} + \frac{48 L^3}{l^6} \right) = 12 \frac{E I_0 L^3}{l^3}$$

- **Calculo de k(3,2)**

$$k(3,2) = \int_0^L E I_0 \phi_3''(x) \phi_2''(x) dx$$

$$\phi_2''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$$

$$\phi_3 = x \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2$$

$$\phi_3' = 1 - \frac{4x}{l} \Rightarrow \phi_3'' = -\frac{4}{l}$$

$$k(3,2) = \int_0^L E I_0 \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) dx$$

$$k(3,2) = E I_0 \int_0^L \left(\frac{24}{l^3} - \frac{24x}{l^4} + \frac{72x^2}{l^5} - \frac{72x^3}{l^6} \right) dx$$

$$k(3,2) = E I_0 \left(\frac{24x}{l^3} - \frac{12x^2}{l^4} + \frac{24x^3}{l^5} - \frac{18x^4}{l^6} \right) \Big|_0^L$$

$$k(3,2) = E I_0 \left(\frac{24L}{l^3} - \frac{12L^2}{l^4} + \frac{24L^3}{l^5} - \frac{18L^4}{l^6} \right)$$

$$k(3,2) = \frac{6 E I_0 L^3}{l^3}$$

- **Calculo de k(4,2)**

$$k(4,2) = \int_0^L E I_0 \phi_4''(x) \phi_2''(x) dx$$

$$\phi_2''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$$

$$\phi_4 = \frac{x}{l}$$

$$\phi_4' = \frac{1}{l} \Rightarrow \phi_4'' = 0$$

$$k(4,2) = 0$$

- **Calculo de k(5,2)**

$$k(5,2) = \int_0^L E I_0 \phi_5''(x) \phi_2''(x) dx$$

$$\phi_2''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$$

$$\phi_5 = \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{4x}{l} \right)$$

$$\phi_5' = \frac{6x}{l^2} \Rightarrow \phi_5'' = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}$$

$$k(5,2) = \int_0^l E I_0 \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) dx$$

$$k(5,2) = E I_0 \int_0^l \left(\frac{36}{l^4} - \frac{144x}{l^5} + \frac{144x^2}{l^6} - \frac{36x}{l^4} \right) dx$$

$$k(5,2) = -E I_0 \int_0^l \frac{144x^2}{l^6} dx + E I_0 \int_0^l \frac{144x}{l^5} dx - E I_0 \int_0^l \frac{36}{l^4} dx$$

$$k(5,2) = -E I_0 \left[\frac{48x^3}{l^6} \right]_0^l + E I_0 \left[\frac{72x^2}{l^5} \right]_0^l - E I_0 \left[\frac{36x}{l^4} \right]_0^l$$

$$k(5,2) = E I_0 \left(-\frac{48}{l^3} + \frac{72}{l^3} - \frac{36}{l^3} \right)$$

$$K(5,2) = -\frac{12 E I_0}{l^3}$$

- **Calculo de k(6,2)**

$$K(6,2) = \int_0^l E I_0 \phi_6''(x) \phi_2''(x) dx$$

$$\phi_2''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}$$

$$\phi_6 = -\frac{x^2}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$\phi_6' = -\frac{3x}{l} + \frac{2x}{l} \Rightarrow \phi_6'' = -\frac{6x}{l^2} + \frac{2}{l}$$

$$k(6,2) = \int_0^l E I_0 \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{2}{l} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) dx$$

$$k(6,2) = E I_0 \int_0^l \left(\frac{36x}{l^4} - \frac{12x^2}{l^5} - \frac{12}{l^3} + \frac{24x}{l^4} \right) dx$$

$$k(6,2) = -E I_0 \int_0^l \frac{36x^2}{l^4} dx + E I_0 \int_0^l \frac{12x^3}{l^5} dx + E I_0 \int_0^l \frac{24x}{l^4} dx - E I_0 \int_0^l \frac{12}{l^3} dx$$

$$k(6,2) = -E I_0 \left[\frac{30x^3}{l^4} \right]_0^l + E I_0 \left[\frac{12x^4}{4l^5} \right]_0^l + E I_0 \left[\frac{12x^2}{l^4} \right]_0^l - E I_0 \left[\frac{12x}{l^3} \right]_0^l$$

$$k(6,2) = E I_0 \left(-\frac{30}{l^2} + \frac{12}{l^2} + \frac{24}{l^2} - \frac{12}{l^2} \right)$$

$$k(6,2) = \frac{6 E I_0}{l^3}$$

- **RESUMEN**

$$k(1,2) = 0$$

$$k(2,2) = \frac{12 E I_0}{l^3}$$

$$k(3,2) = \frac{6 E I_0}{l^2}$$

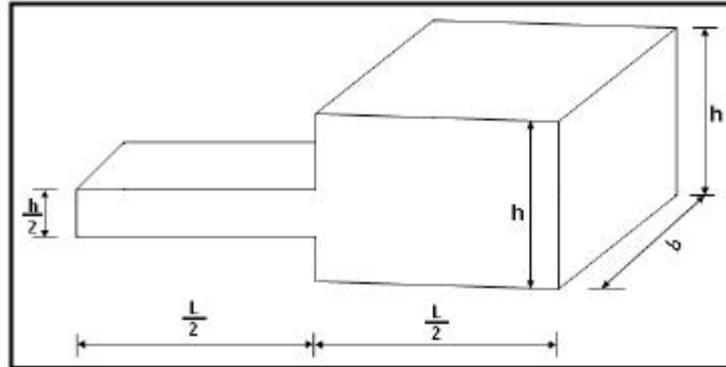
$$k(4,2) = 0$$

$$k(5,2) = -\frac{12 E I_0}{l^3}$$

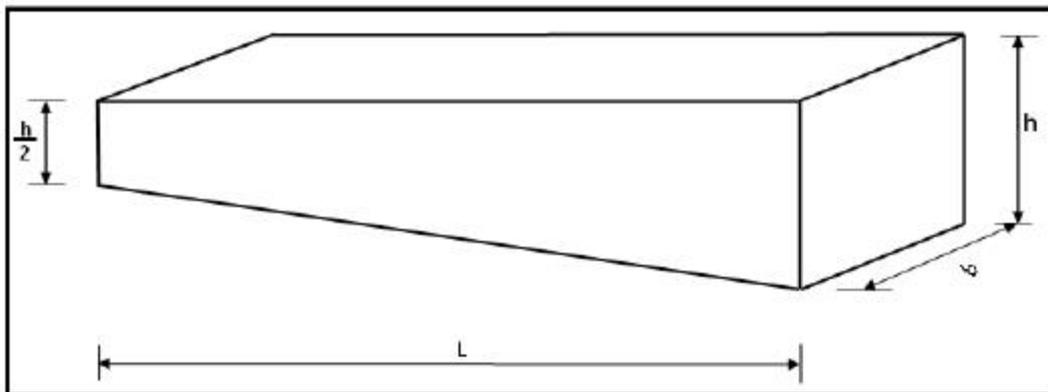
$$k(6,2) = \frac{6 E I_0}{l^3}$$

3.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

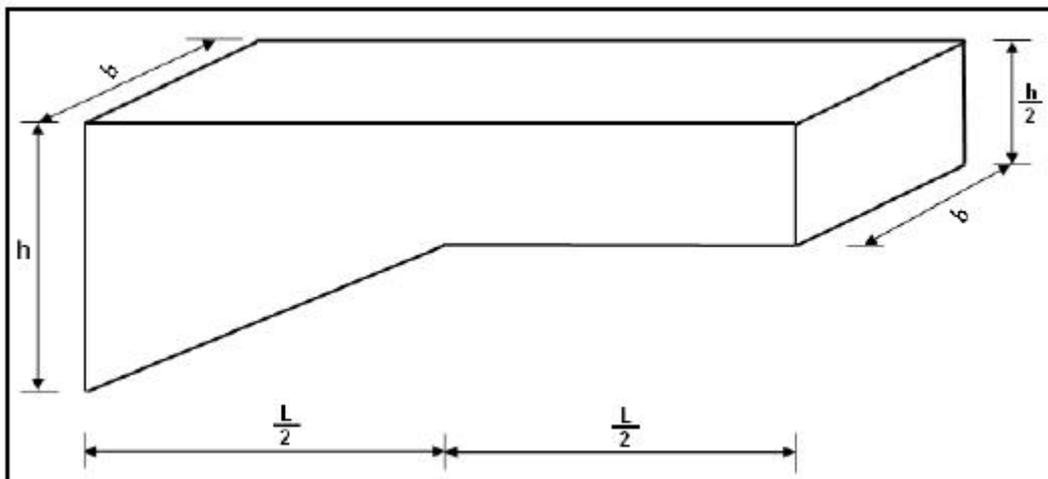
Encontrar las funciones de forma, para los siguientes elementos lineales de sección variable. Todos tienen un ancho b constante y altura variable.



Ejercicio 1

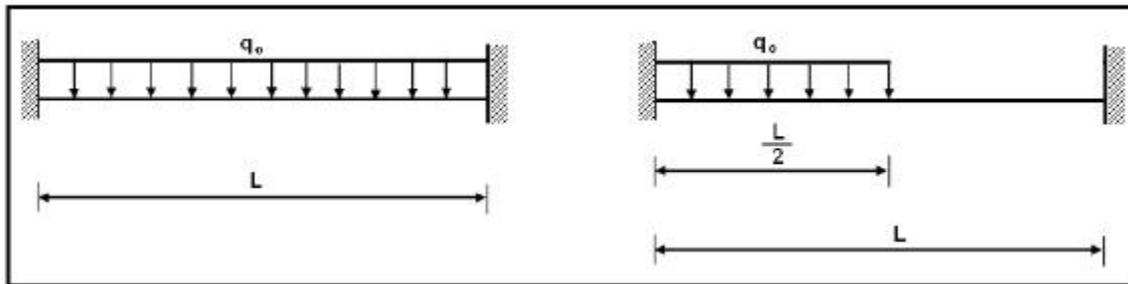


Ejercicio 2



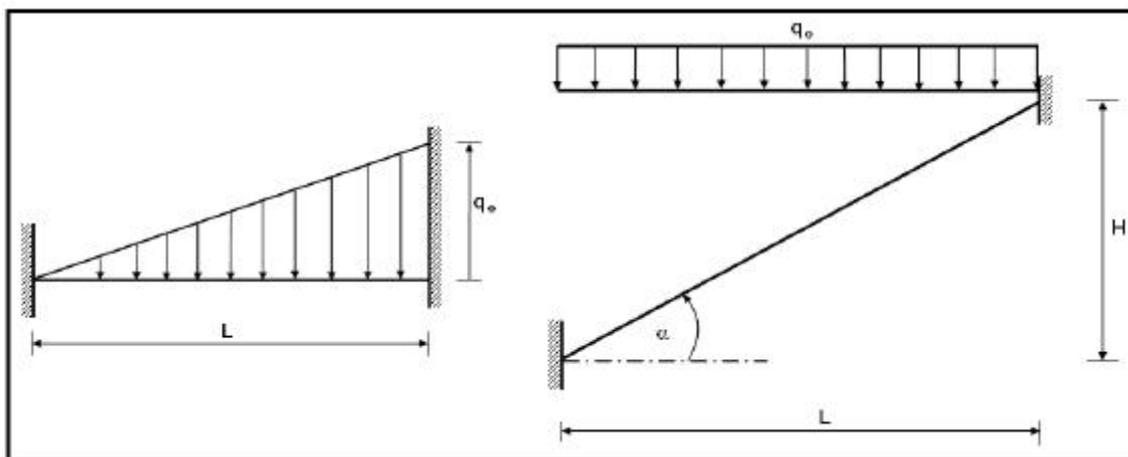
Ejercicio 3

Calcular las fuerzas y momentos de empotramiento de los siguientes elementos lineales por medio de las funciones de forma.



Ejercicio 4

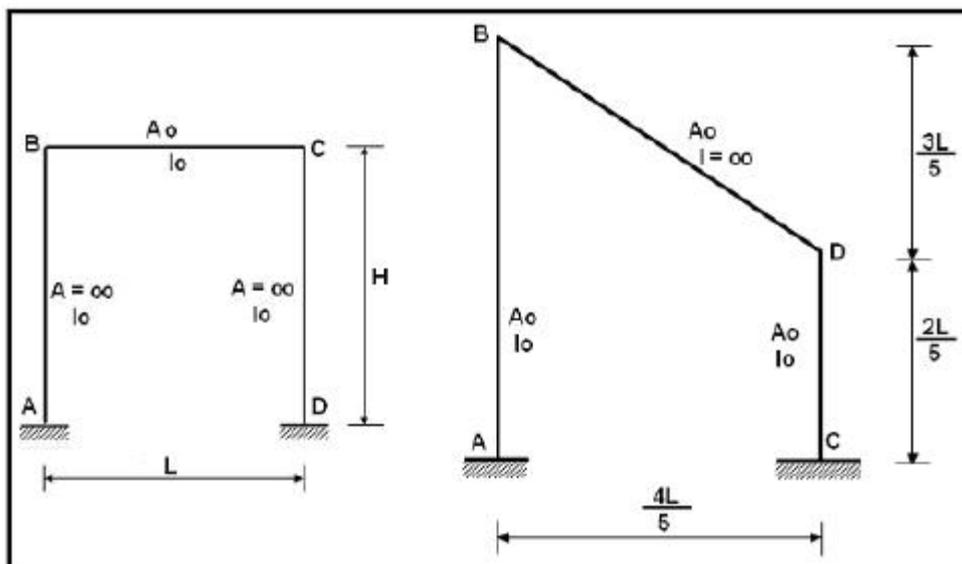
Ejercicio 5



Ejercicio 6

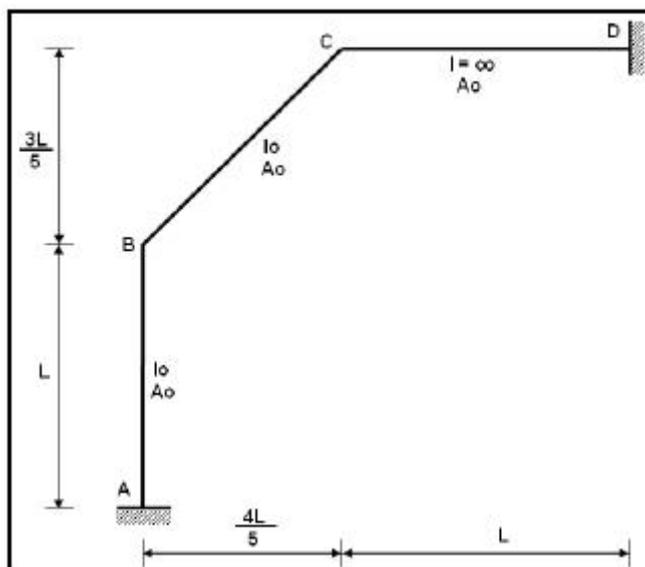
Ejercicio 7

Para los siguientes ejercicios, seleccione un sistema de coordenadas $Q-q$ y encuentre la expresión de las elásticas horizontal y vertical del elemento BC en términos de las coordenadas q_i y las funciones ϕ_1, ϕ_2, \dots , características del elemento.



Ejercicio 8

Ejercicio 9



Ejercicio 10

Ejercicio 11

Deducir las ecuaciones correspondientes al momento y cortantes en el nudo inicial de una viga de sección constante con carga trapezoidal.

CAPITULO 4

VECTOR DE CARGAS GENERALIZADAS Q

RESUMEN

Se presenta el cálculo del vector de cargas generalizadas Q en marcos y armaduras planas cuyos elementos pueden ser: totalmente flexibles A_0, I_0 ; axialmente rígidos $A = \infty, I_0$; y transversalmente rígidos $A_0, I = \infty$. El cálculo se lo realiza de dos formas:

- i) Mediante la aplicación del problema primario complementario que fue presentado en el capítulo 2, y
- ii) Mediante trabajos virtuales.

El algoritmo que se utiliza para programar el cálculo del vector de cargas generalizadas se lo indica en el capítulo 5 una vez que se haya estudiado la matriz de transformación de coordenadas T. Sin embargo es importante que en este capítulo se diferencie entre cargas en elemento y cargas en los nudos, y como las cargas de los elementos en los nudos actúan cambiadas de signo.

4. 1 PROBLEMA PRIMARIO Y COMPLEMENTARIO

4.1.1. Introducción

Como se indicó en el capítulo 2, la solución de estructuras en las cuales la carga no está únicamente concentrada en los nudos se realiza mediante el problema primario y complementario. Teniéndose que:

$$\text{SOLUCIÓN ESTRUCTURAL} = \text{SOLUCIÓN DEL PROBLEMA PRIMARIO} + \text{SOLUCIÓN DEL PROBLEMA COMPLEMENTARIO}$$

En efecto en el problema primario se considera que actúan:

- Cargas en los nudos,
- Cargas en los elementos,
- Cambios de temperaturas en los elementos,
- Asentamientos en los apoyos, y
- Acciones dinámicas.

En este capítulo solo se consideran los dos primeros tipos de carga.

4.1.2 Problema primario

Es aquel en el cual actúa todas las cargas con la condición de que el vector q sea nulo. Esto se consigue colocando vínculos adicionales en las direcciones de los desplazamientos definidos por las coordenadas generalizadas, como consecuencia de estos vínculos se van a generar cargas de fijación que se los designa con la letra R .

Por la condición de que el vector q es nulo, cada uno de los elementos de la estructura se encuentra empotrado-empotrado, independiente de la forma de los vínculos.

Por ejemplo, al considerar el pórtico plano, indicado en la parte superior izquierda de la figura 4.1, compuesto por elementos totalmente flexibles sobre la cual actúan las cargas indicadas. En la figura adyacente se indica el sistema de coordenadas generalizadas denominado sistema $Q - q$.

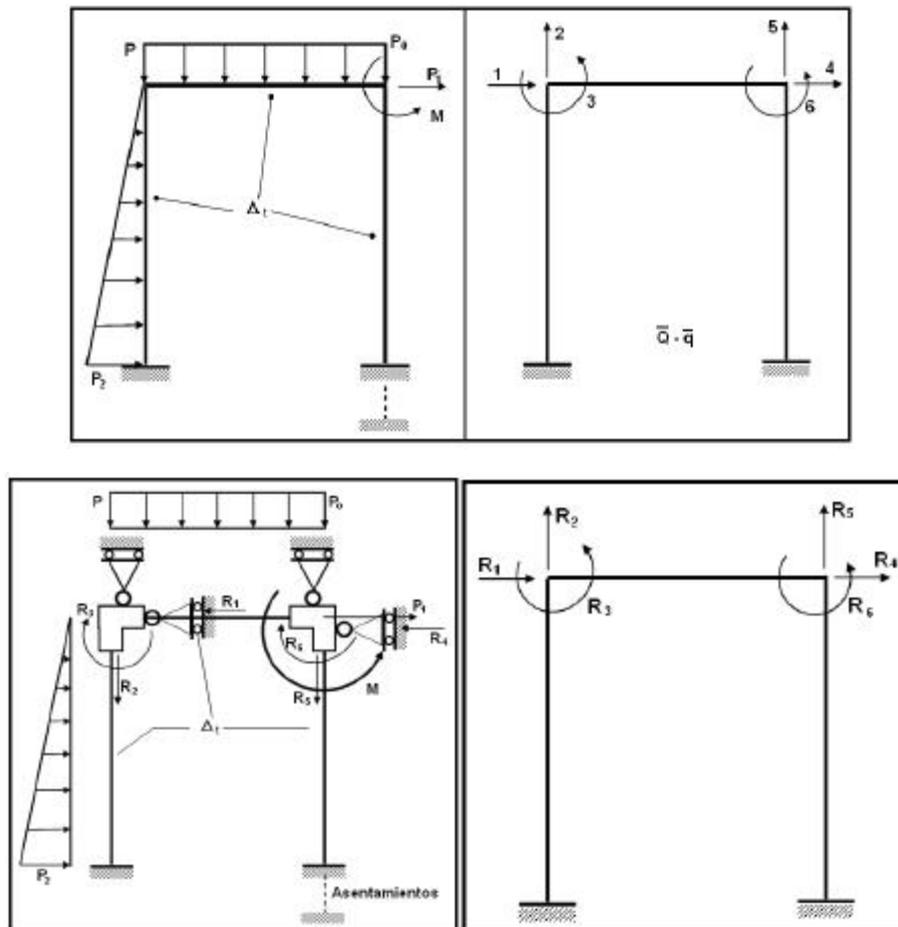


Figura 4.1 Grados de libertad, Problema Primario y Complementario.

El problema primario para la estructura analizada es el presentado en la parte inferior izquierda de la figura 4.1. Nótese que mediante la colocación de vínculos se han restringido los desplazamientos en la dirección del sistema de coordenadas $Q - q$, de tal manera que cada elemento se encuentra empotrado-empotrado. Es conveniente colocar las fuerzas de fijación con sentido contrario al sistema $Q - q$, luego cuando estas se calculen se obtendrá el verdadero signo.

El Problema Primario tiene dos partes, que son: Equilibrio de Elementos y Equilibrio de Nudos y finaliza con el cálculo de las fuerzas de fijación R .

4.1.3 Problema complementario

Ahora en la estructura solamente actúan las fuerzas de fijación R_i pero con sentido contrario al que tuvieron en el Problema Primario. Al actuar de esta manera se generan los desplazamientos y giros que tiene la estructura, los mismos que se consideran nulos en el Problema Primario.

Es el Problema Complementario lo que se resolverá en los capítulos posteriores ya que el Problema Primario se resuelve por estática. Para el ejemplo que se está analizando el Problema Complementario se presenta en la parte inferior derecha de la figura 4.1

Al observar las dos figuras de la derecha de 4.1, se determina el vector de cargas generalizadas que es el siguiente.

$$Q = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 1

Determinar el vector de cargas generalizadas Q , por medio del problema Primario y Complementario para el marco plano de la figura 4.2 cuyos elementos son totalmente flexibles.

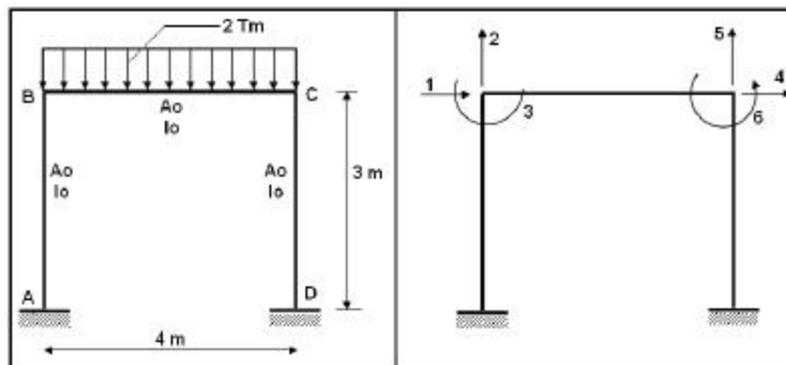


Figura 4.2 Pórtico con elementos totalmente flexibles y sistema $Q - q$

• SOLUCIÓN

A la derecha de la figura 4.2, se presenta el sistema de coordenadas generalizadas $Q - q$. En la presentación del problema primario por facilidad se suprime el dibujo de los vínculos con lo que se logra que los desplazamientos sean nulos, solo se colocan las fuerzas de fijación R_i en la figura de la izquierda de 4.3

Como se indicó, la solución del Problema Primario comprende dos puntos, a saber:

- i) Equilibrio de elementos, y
- ii) Equilibrio de nudos.

Para el equilibrio de los elementos, se deben calcular las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto utilizando las funciones de forma, estudiadas en el Capítulo 3. Para el ejemplo analizado estas se indican a la derecha de la figura 4.3

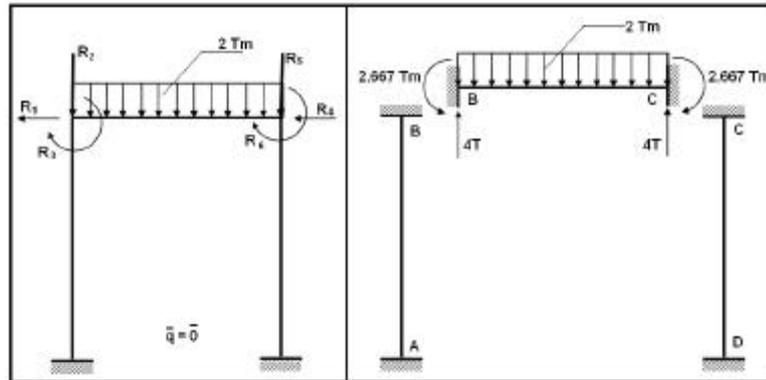


Figura 4.3 Problema Primario y Equilibrio de Elementos

Cada junta del marco plano debe estar en equilibrio. En consecuencia, debe cumplir que la suma de fuerzas en el sentido "X" e "Y" sea igual a cero y que la suma de momentos sea igual a cero.

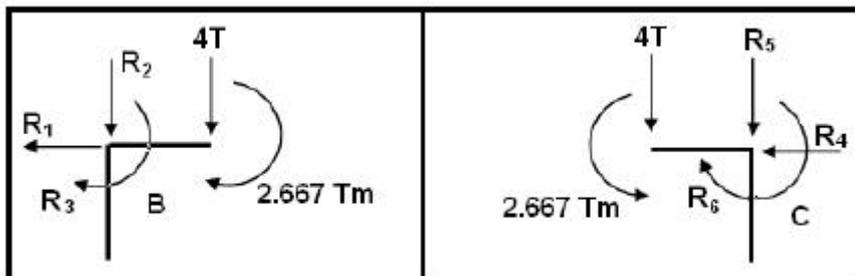


Figura 4.4 Equilibrio de las Juntas B y C.

En la figura 4.4 se presentan las fuerzas y momentos que actúan en las juntas B y C respectivamente. Nótese, por ejemplo, en la junta B que el cortante de empotramiento perfecto de $4T$ que en el elemento BC, de la figura derecha de 4.3, está hacia arriba, en la junta actúa hacia abajo como lo muestra la figura izquierda de 4.4. Esto se debe a que, en un caso son cargas en el elemento y en el otro en los nudos; lo propio sucede con los momentos de empotramiento perfecto. Por otra parte las cargas (fuerzas y momentos) de fijación R_i gravitan directamente en las juntas o nudos.

▪ **Equilibrio de la junta B**

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_1 = 0$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = -4$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R_3 + 2.667 = 0 \quad \rightarrow \quad R_3 = -2.667$$

▪ **Equilibrio de la junta C**

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_4 = 0$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_5 = -4$$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad R_6 - 2.667 = 0 \quad \rightarrow R_6 = 2.667$$

En el problema complementario solo se tienen las fuerzas de fijación actuando sobre las juntas.

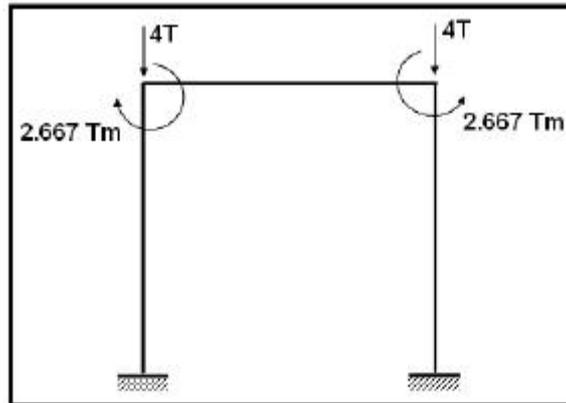


Figura 4.5 Problema Complementario

Al observar las figuras 4.2 y 4.5 se determinan los elementos del vector de cargas generalizadas, que resultan:

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = -4 T.$$

$$Q_3 = -2.667 Tm.$$

$$Q_4 = 0$$

$$Q_5 = -4 T.$$

$$Q_6 = 2.667 Tm.$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -4.000 \\ -2.667 \\ 0.0000 \\ -4.000 \\ 2.6670 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 2

Para la estructura de la figura 4.6 que está conformada por elementos totalmente flexibles, cuyas dimensiones son: $a = 5.5$ m. y $b = 3.0$ m. Se pide:

- Seleccionar un sistema de coordenadas $Q - q$ apropiado.
- Resolver el Problema Primario.
- Señalar cual es el Problema Complementario.
- Determinar el vector de cargas generalizadas Q

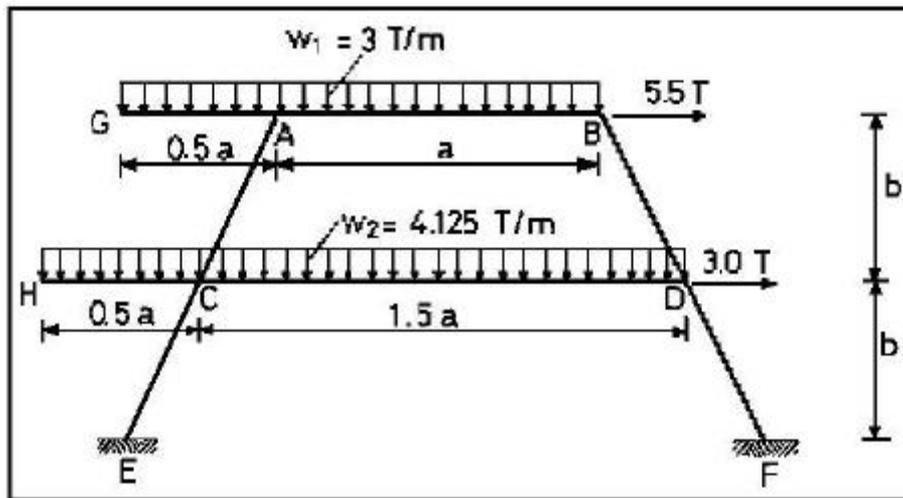


Figura 4.6 Estructura de ejemplo 6.

• SOLUCIÓN

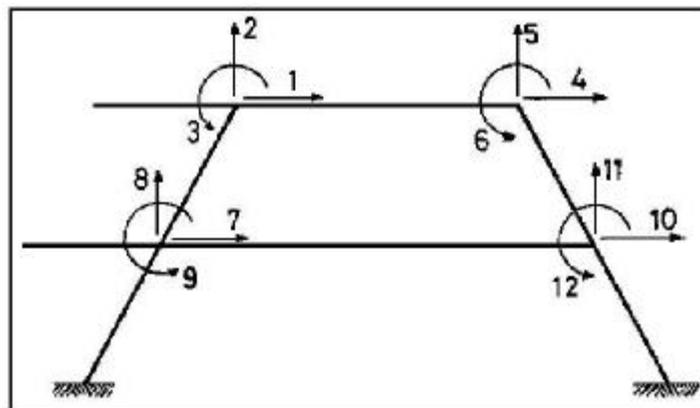


Figura 4.7 Sistema $Q - q$

b) Problema Primario

Se puede considerar a los volados como un elemento, en este caso se aumentaría el número de grados de libertad. La otra opción con la cual se trabaja el presente ejemplo es colocar cargas concentradas en los nudos provenientes de la acción de los voladizos ahí se disminuye el número de grados de libertad.

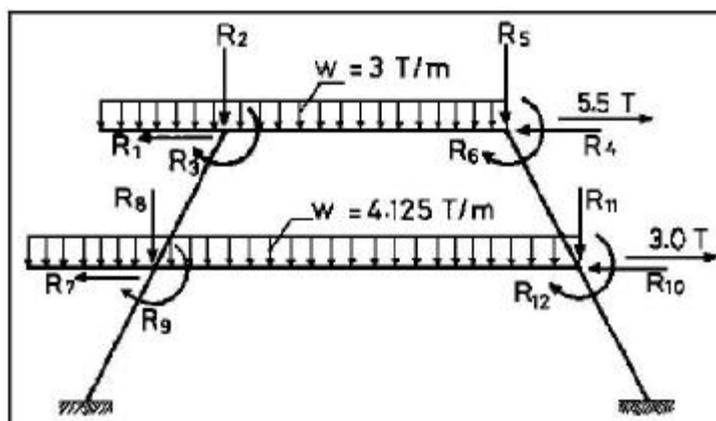


Figura 4.8 Problema Primario $q = 0$

• Equilibrio de elementos

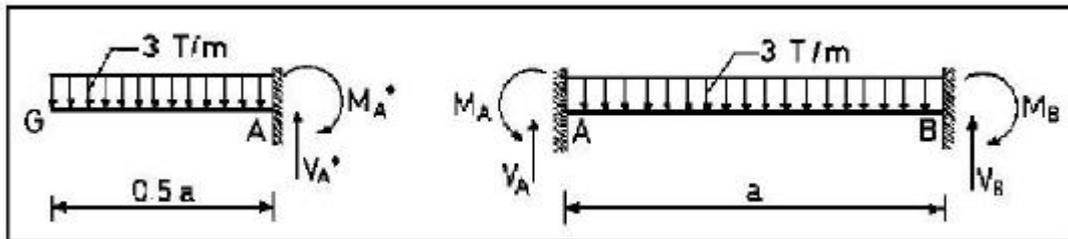


Figura 4.9 Voladizo y acciones de empotramiento en viga

$$M_A = 3 \frac{(5.5)^2}{2} = 11.344 \text{ Tm.}$$

$$V_A^* = 3 * 2.75 = 8.25 \text{ T.}$$

$$V_A = V_B = \frac{3 * 5.5}{2} = 8.25 \text{ T.}$$

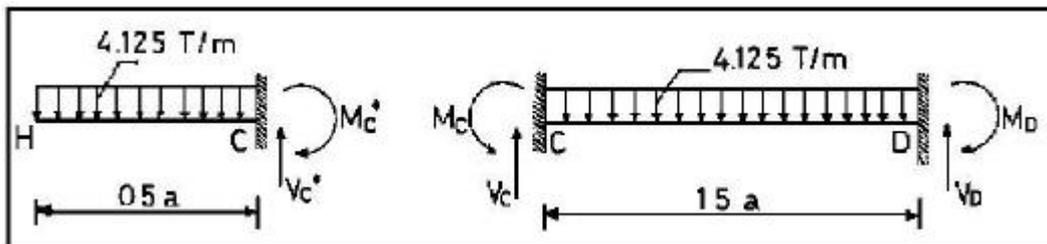


Figura 4.10 Voladizo y acciones de empotramiento en viga

$$M_C^* = 4.125 \frac{(2.75)^2}{2} = 15.598 \text{ Tm.}$$

$$V_C^* = 4.125 * 2.75 = 11.344 \text{ T.}$$

$$M_D = M_C = 4.125 \frac{(8.25)^2}{2} = 23.396 \text{ Tm.}$$

$$V_D = V_C = 4.125 * \frac{8.25}{2} = 17.016 \text{ T.}$$

• Equilibrio de Juntas

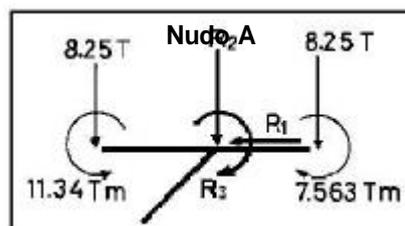


Figura 4.11 Equilibrio de Nudo A.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 8.25 + R_2 + 8.25 = 0 \Rightarrow R_2 = -16.50 \text{ T.}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow -11.344 + 7.563 + R_3 = 0 \Rightarrow R_3 = 3.781 \text{ Tm.}$$

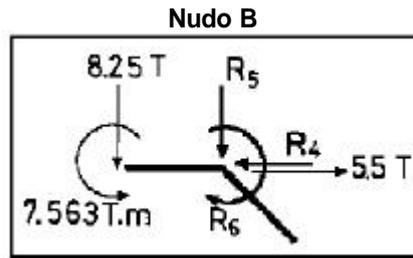


Figura 4.12 Equilibrio de Nudo B.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 5.5 - R_4 = 0 &\Rightarrow R_4 = 5.5 T. \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 8.25 + R_5 = 0 &\Rightarrow R_5 = -8.25 T. \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_6 - 7.563 = 0 &\Rightarrow R_6 = 7.563 Tm. \end{aligned}$$

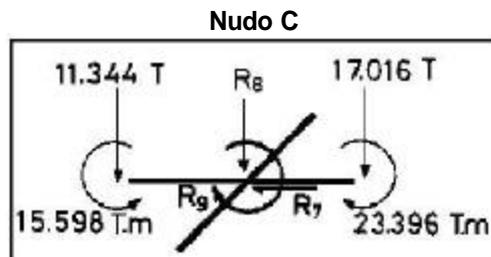


Figura 4.13 Equilibrio de Nudo C.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_7 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -11.34 - R_8 - 17.016 = 0 &\Rightarrow R_8 = -28.360 T. \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_9 + 23.396 - 15.598 = 0 &\Rightarrow R_9 = -7.798 Tm. \end{aligned}$$

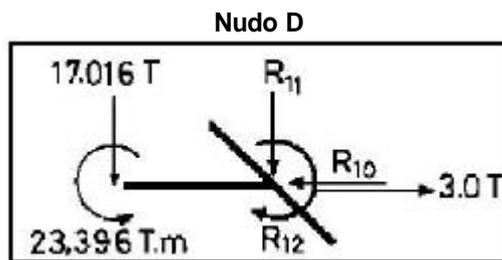


Figura 4.14 Equilibrio de Nudo D

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -R_{10} + 3.0 = 0 &\Rightarrow R_{10} = 3.0 T. \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow 17.016 + R_{11} = 0 &\Rightarrow R_{11} = -17.016 T. \\ \sum M = 0 &\Rightarrow 23.396 - R_{12} = 0 &\Rightarrow R_{12} = 23.396 Tm. \end{aligned}$$

c) Problema Complementario

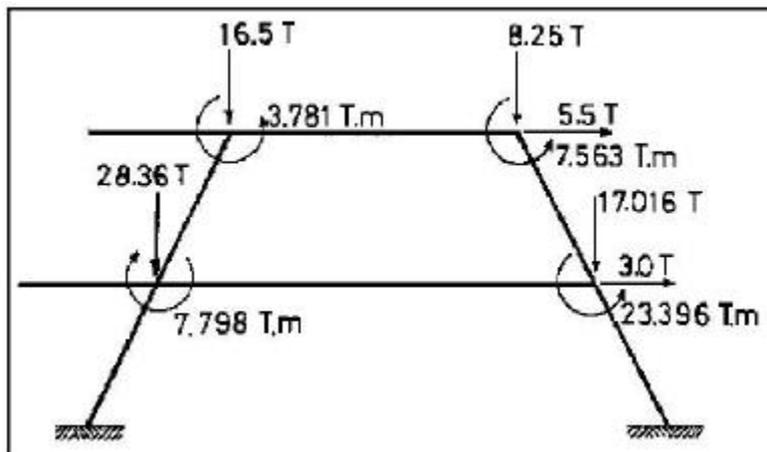


Figura 4.15 Cargas que actúan en Problema Complementario.

d) Vector de Cargas Generalizadas Q

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -16.500 \\ 3.781 \\ 5.500 \\ -8.250 \\ 7.563 \\ 0.000 \\ -28.360 \\ -7.798 \\ 3.000 \\ -17.016 \\ 23.396 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 3

Para la estructura de la figura 4.16, resolver el problema primario; indicar el problema complementario y obtener el vector de cargas generalizadas.

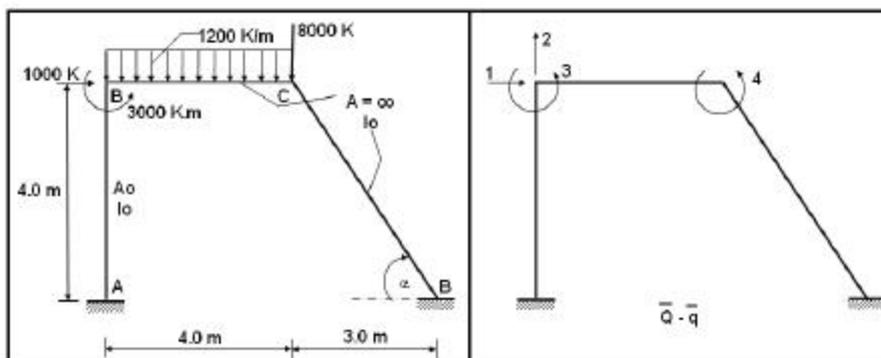


Figura 4.16 Estructura con elementos axialmente rígidos.

- **SOLUCIÓN**

Para el pórtico analizado, se tiene que el sistema de coordenadas generalizadas es el presentado a la derecha de la figura 4.16.

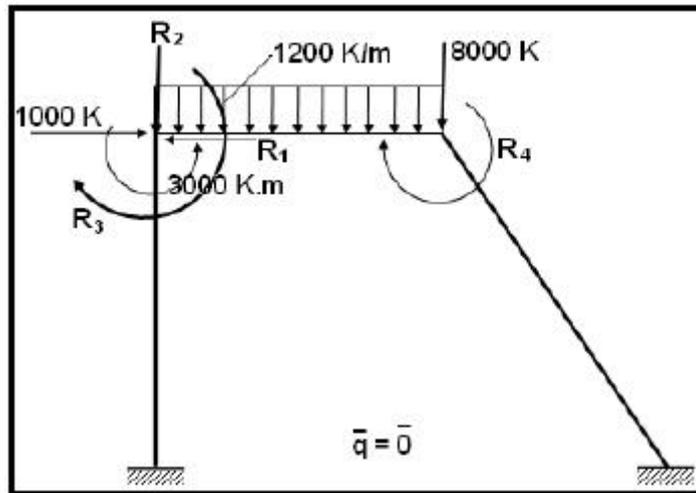


Figura 4.17 Problema Primario

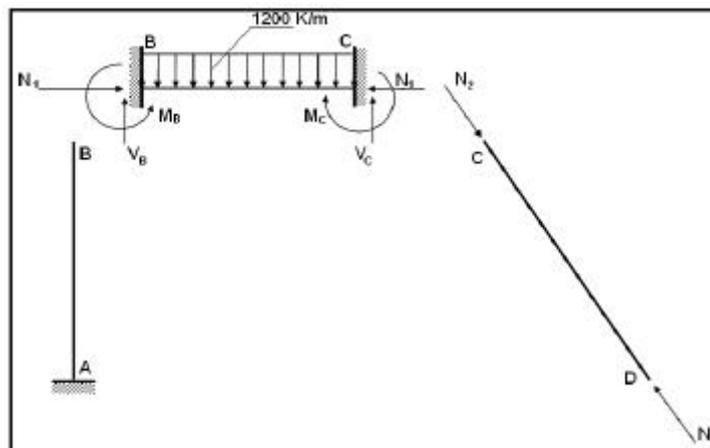


Figura 4.18 Equilibrio de elementos

$$V_B = V_C = \frac{1200 * 4}{2} = 2400 \text{ Kg}$$

$$M_B = M_C = \frac{1200 * 4^2}{12} = 1600 \text{ Kg.m}$$

Nótese que en los elementos BC y CD existen fuerzas axiales N_1 y N_2 que se deben calcular, esto es debido a que estos miembros son axialmente rígidos. Otra forma de ver esto sería que, debido al sistema de cargas que actúan en la estructura estos elementos se deberían deformar axialmente pero como no pueden hacerlo porque se consideran axialmente rígidos se originan estas fuerzas N_1 y N_2 .

Una vez que se ha terminado el equilibrio en cada uno de los elementos, se procede al equilibrio de los nudos. Las fuerzas que actúan en los elementos, en los nudos, lo hacen con sentido contrario. En cada nudo se debe cumplir que:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

y

$$\Sigma M = 0$$

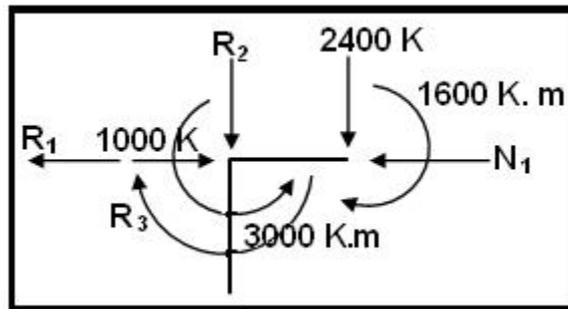


Figura 4.19 Equilibrio de Nudo B

$$\Sigma \vec{F}_x = 0$$

$$1000 - R_1 - N_1 = 0$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = 0$$

$$2400 + R_2 = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$R_3 + 1600 - 3000 = 0$$

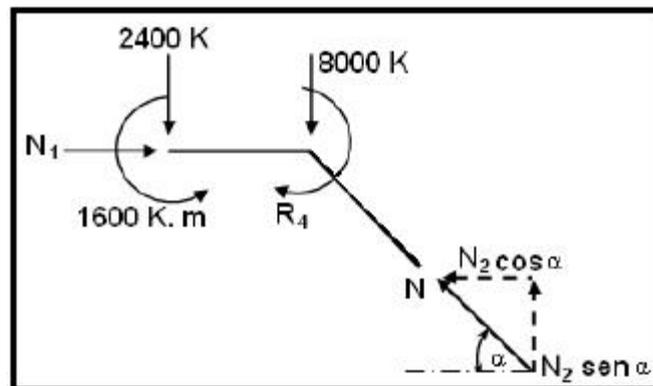


Figura 4.20 Equilibrio de Nudo C

$$\Sigma \vec{F}_x = 0$$

$$N_1 - N_2 \cos \alpha = 0$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = 0$$

$$-N_2 \operatorname{sen} \alpha + 2400 + 8000 = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

$$R_4 - 1600 = 0$$

Únicamente por didáctica, a los nudos se los ha dibujado más grandes. Al resolver el sistema de ecuaciones y considerando que: $\operatorname{sen} \alpha = 4/5$ y $\operatorname{cos} \alpha = 3/5$ se obtiene:

$$N_1 = 7800 \text{ Kg}$$

$$N_2 = 13000 \text{ Kg}$$

$$R_1 = -6800 \text{ Kg}$$

$$R_2 = -2400 \text{ Kg}$$

$$R_3 = 1400 \text{ Kg.m.}$$

$$R_4 = 1600 \text{ Kg.m.}$$

Ahora en el problema complementario actúan solamente las fuerzas de fijación R, con sentido contrario al del problema primario.

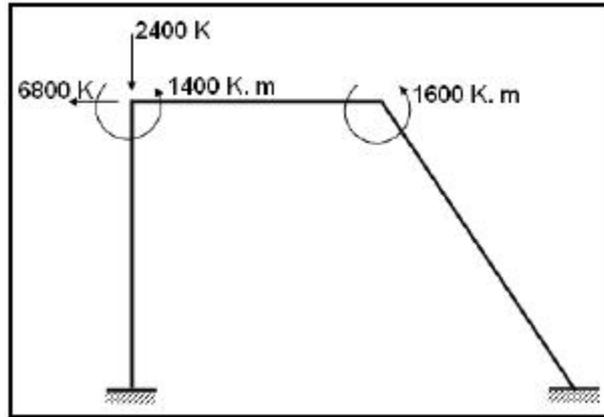


Figura 4.21 Problema complementario

El vector de cargas generalizadas Q se obtiene del problema complementario.

$$Q = \begin{Bmatrix} -6800 \\ -2400 \\ 1400 \\ 1600 \end{Bmatrix}$$

• EJEMPLO 4

Con el objeto de ilustrar el procedimiento de cálculo cuando se tienen elementos transversalmente rígidos se resuelve el ejercicio anterior cambiando la condición de $A = \infty$ por $I = \infty$, para el miembro BC. Por lo tanto se resolverá la estructura indicada en la figura 4.22.

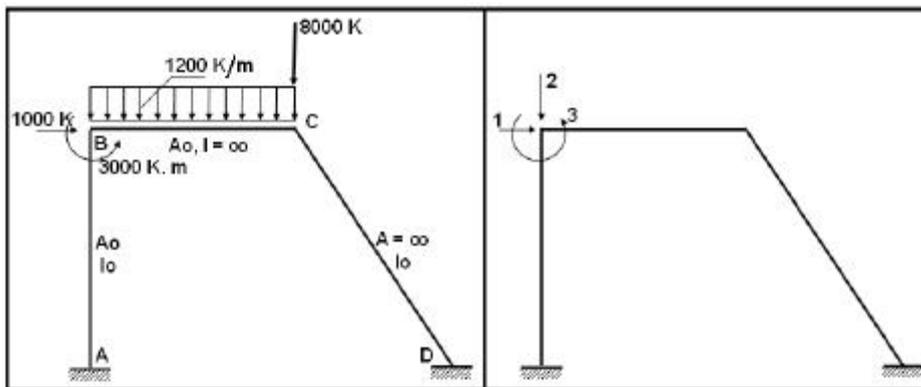


Figura 4.22 Estructura de ejemplo 4 y sistema $Q - q$

Al hacer equilibrio de elementos hay que tener presente que el miembro BC no trabaja a flexión, en consecuencia en sus extremos actuarán dos momentos μ y μ' que deben ser calculados. Esta es una forma de resolver el ejercicio, calculando los momentos finales que en este caso se han llamado μ y μ' . Otra forma de resolver es encontrar los momentos de empotramiento debido a la carga vertical

y a esos momentos añadir un momento por la condición de $I = \infty$. Se resolverá el ejercicio de las dos formas en los ejemplos 4 y 5.

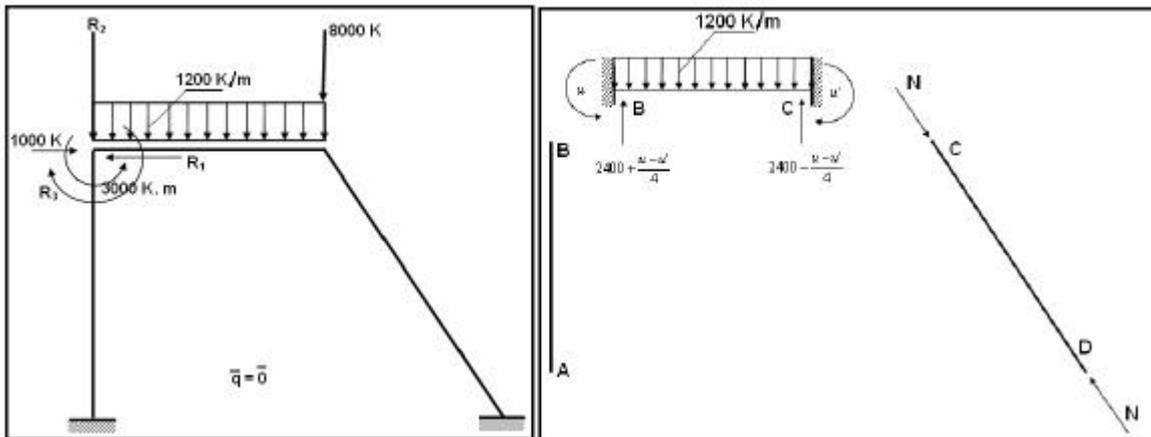
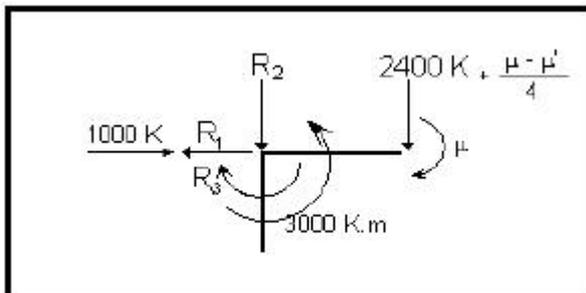


Figura 4.23 Problema Primario y equilibrio de elementos

El cortante en el miembro BC es igual al producido por la carga distribuida más en el que se produce por la acción de los momentos μ y μ' . El sentido positivo de estos momentos es arbitrario. En este caso se ha colocado μ horario y μ' anti horario. Se pudo haber colocado al revés pero lo importante es que los cortantes se encuentren en concordancia con los momentos para que exista equilibrio.

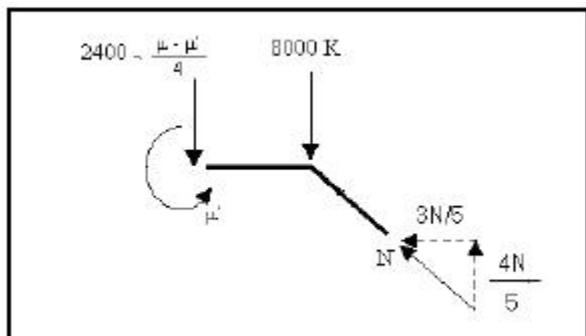
▪ Equilibrio de las juntas

Junta B



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow 1000 - R_1 = 0 \\ + \downarrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_2 + 2400 + \frac{\mu - \mu'}{4} = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow R_3 + \mu - 3000 = 0 \end{aligned}$$

Junta C



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= -\frac{3}{5}N = 0 \\ + \downarrow \sum F_y = 0 & \\ 2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} + 8000 - \frac{4}{5}N &= 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow \mu' = 0 \end{aligned}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se tiene:

$$N=0$$

$$u = 41600 \text{ Kg.m}$$

$$u' = 0$$

$$R_1 = 1000 \text{ Kg.}$$

$$R_2 = -12800 \text{ Kg}$$

$$R_3 = -38600 \text{ Kg.m.}$$

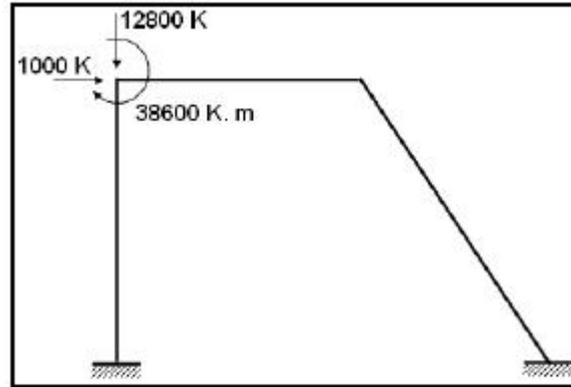


Figura 4.24 Problema complementario

El vector de cargas generalizadas se obtiene directamente del Problema Complementario.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 \\ -12800 \\ -38600 \end{bmatrix}$$

• EJEMPLO 5

Resolver de otra forma el ejemplo 4, considerando los momentos de empotramiento que produce la carga vertical, para el elemento transversalmente rígido.

• SOLUCIÓN

Al hacer el equilibrio de elementos, en la figura 4.23 no se colocó las acciones de empotramiento perfecto que produce la carga uniforme repartida, esto se lo va a realizar en este ejercicio y luego se añadirán los momentos μ y μ' que son necesarios que actúen en los extremos del elemento transversalmente rígido para que no trabaje a flexión.

En la parte superior de la figura 4.25 se presentan las cargas de empotramiento perfecto como que el elemento fuera totalmente flexible. En la parte central en cambio se tiene la viga con los momentos μ, μ' , que se han considerado con sentido anti horario, con sus respectivos cortantes para que exista equilibrio. Nótese que el cortante del nudo final es hacia abajo.

Finalmente, en la parte inferior de la figura 4.25 se aplica el principio de superposición, por este motivo es que se suman las cargas anteriores.

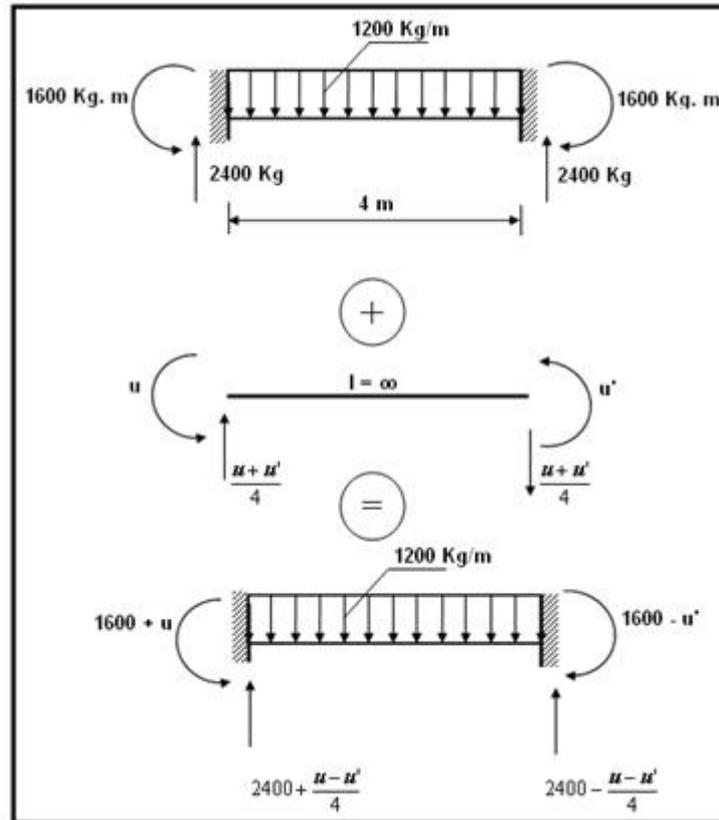
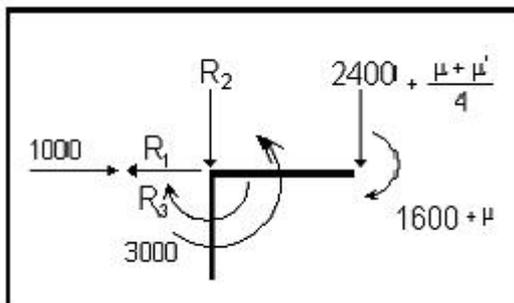


Figura 4.25 Equilibrio del elemento BC

▪ Nudo B

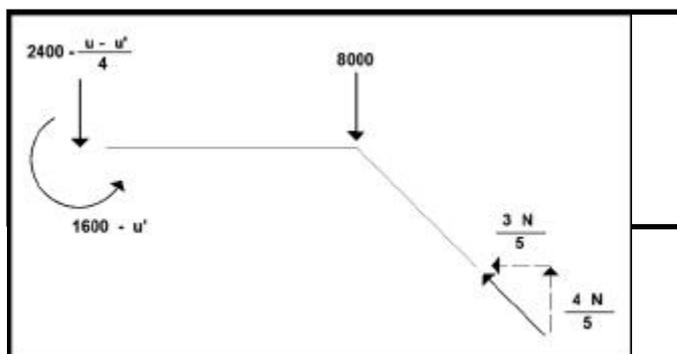


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = 1000$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_3 + \frac{\mu + \mu'}{4} + 2400 = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 1600 + \mu - 3000 + R_3 = 0$$

▪ Junta C



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0$$

$$8000 + 2400 - \frac{\mu - \mu'}{4} - \frac{4}{5}N = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow 1600 - \mu' = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones reporta:

$u = 40000 \text{ Kg.m}$

$u' = 1600 \text{ Kg m}$

$N=0$

$R_1 = 1000 \text{ Kg}$

$R_2 = -12800 \text{ Kg}$

$R_3 = -38600 \text{ Kg.m}$

Por lo tanto, se obtiene el mismo vector de cargas generalizadas, ya que los valores de las fuerzas R_i son los mismos del ejercicio anterior. Se deja al lector la justificación del porqué los momentos μ y μ' son diferentes, con relación a los del Ejemplo 4.

4.2 TRABAJOS VIRTUALES

Otra forma de obtener el vector de cargas generalizadas en una estructura es mediante la aplicación del principio de los Trabajos Virtuales.

Por ejemplo, si sobre la estructura con el sistema de cargas, mostrada a la derecha de la figura 4.26; siendo el sistema $Q - q$ el que se indica a continuación. Mediante la aplicación del problema primario y complementario, se puede tener solamente cargas concentradas Q en las juntas, como lo ilustra la figura central de 4.26.

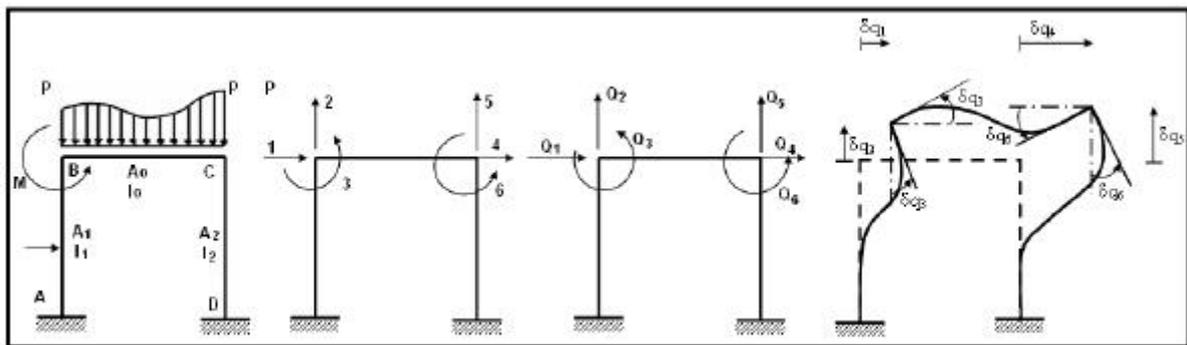


Figura 4.26 Estructura; Sistema $Q - q$; Cargas en los nudos y coordenadas virtuales.

El objetivo es calcular $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ por Trabajos Virtuales. Para esto en parte derecha de la figura 4.26, se han dibujado unos posibles desplazamientos y giros, que podría tener la estructura, desplazamientos virtuales. Por ser virtuales se les antepone la letra δ a la variable q .

El Trabajo Virtual (TV) del sistema de cargas concentradas en los nudos en los desplazamientos virtuales, vale:

$$TV = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + Q_4 \delta q_4 + Q_5 \delta q_5 + Q_6 \delta q_6 \tag{4.1}$$

Este trabajo virtual también es igual al producido por el sistema de cargas indicado a la izquierda de la figura 4.26 en los desplazamientos virtuales.

Entonces, para calcular Q_1 , se construirá la deformada elemental siguiente:

$$\delta q_1 = 1 \text{ y } \delta q_i = 0 \quad i \neq 1$$

Para esta deformada elemental la ecuación (4.1) queda:

$$TV = Q_1 * I$$

Pero este trabajo virtual es igual al que produce el sistema de cargas, presentado a la derecha de 4.26, en la deformada elemental indicada.